7.2 - De Groot

(2) Sabemos que $\theta \in \{0.1, 0.2\}$ e a prior é

$$\xi(0.1) = 0.7 \quad e \quad \xi(0.2) = 0.3$$

Suponha que temos $X_1, \dots, X_8$ selecionados de um lote e 2 são defeituosos. Determine a posterior de θ.

Sabemos que $X_1, \dots, X_8 \overset{iid}{\sim} \text{Bernoulli}(\theta)$, seja $S = \sum X_i$, $f(x_1, \dots, x_8 | \theta) = \prod f(x_i | \theta) = \prod_i \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i} = \theta^S (1-\theta)^{8-S}$, como $S = 2$, Então temos 2 casos

$\cancel{\theta = 0.1}$:

$$\cancel{\xi(0.1 | x_1 \dots x_8) \propto \theta^2 (1-\theta)^6\, 0.7}$$

$$\cancel{g_n(x) = \int_\Omega}$$

$$g_n(x) = \int_\Omega f(x|\theta)\, \xi(\theta)\, d\theta = (0.1)^2 (0.9)^6 \cdot 0.7 + (0.2)^2 (0.8)^6 \cdot 0.3$$
$$= 6.86 \cdot 10^{-3}$$

- $\theta = 0.1$:

$$\xi(0.1 | x_1, \dots, x_8) = \frac{f(x_1, \dots, x_8 | \theta)\, \xi(\theta)}{g_n(x)}$$
$$= \frac{(0.1)^2 (0.9)^6\, 0.7}{6.68 \cdot 10^{-3}} \approx 0.542$$

- $\theta = 0.2$: (mesma conta)

③ Número de defeitos é uma Poisson(λ), onde ~~$\lambda \in \{1.0$~~
$\lambda \in \{1.0, 1.5\}$ e a priori é dada por

$$\xi(1.0) = 0.4 \quad e \quad \xi(1.5) = 0.6$$

Se uma amostra ~~total~~ aleatoria tem 3 defeitos ~~total~~ qual é a sua posteriori?

Temos que, $f(x|\lambda) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$

$$\cancel{\xi(x|\lambda)} = g(x) = \int_{\Omega} f(x|\lambda)\,\xi(\lambda)\,d\lambda = \frac{e^{-1}1^x}{x!}\cdot 0.4 + \frac{e^{-1.5}(1.5)^x}{x!}\cdot 0.6$$

Logo,

$$\cancel{\xi(\theta+}\,\xi(1.0|S=3) = \frac{\frac{e^{-1}1^3}{3!}\,0.4}{\frac{e^{-1}1^3}{3!}\cdot 0.4 + \frac{e^{-1.5}(1.5)^3}{3!}\,0.6} \approx 0.2457$$

Equivalente para $\lambda = 1.5$

(10) Suponha que uma observação simples $X \sim Unif[\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}]$ e $\theta \sim Unif[10, 20]$. Se a observação é $X = 12$ qual é a posterior de θ?

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta + \frac{1}{2} - (\theta - \frac{1}{2})} = \mathbb{1}(\theta - \tfrac{1}{2}, \theta + \tfrac{1}{2})$$

$$\xi(\theta) = 1/(20-10) = \tfrac{1}{10}\,\mathbb{1}(10, 20)$$

$$\xi(\theta | X = 12) \propto \mathbb{1}(\theta - \tfrac{1}{2}, \theta + \tfrac{1}{2}) \cdot \mathbb{1}[10, 20] \cdot \tfrac{1}{10}$$

$$\xi(\theta | X = 12) = \mathbb{1}[11.5, 12.5]$$