8.1 De Groot

(1) Suponha $X_1, \dots, X_n \sim Unif[0, \theta]$, θ desconhecido, Qual o tamanho de n para valer

$$P(|\max\{X_1, \dots, X_n\} - \theta| \le 0.1\theta) \ge 0.95, \quad \forall \theta$$

Temos que $M \le \theta$ logo $|M - \theta| \le \theta - M$

$X_n = \max(X_i)$
$X_n \in \left(\frac{n-1}{n}\theta, \theta\right)$?

$$\begin{aligned}
P(|M - \theta| \le 0.1\theta) &= P(\theta - M \le 0.1\theta) \\
&= P(0.9\theta \le M) \\
&= 1 - P(M \le 0.9\theta) \\
&= 1 - P(X_1 \le 0.9\theta, \dots, X_n \le 0.9\theta) \\
&= 1 - \prod P(X_i \le 0.9\theta) \\
&= 1 - P(X_1 \le 0.9\theta)^n \\
&= 1 - \left(\frac{0.9\theta - 0}{\theta - 0}\right)^n \\
&= 1 - 0.9\cancel{\theta}^n \ge 0.95
\end{aligned}$$

c.d.f é
$f(x|a,b) = \frac{x-a}{b-a}$

$$\begin{aligned}
1 - 0.9\cancel{\theta}^n \ge 0.95 &\iff 0.05 \ge 0.9\cancel{\theta}^n \\
&\iff \log(0.05) \ge n \log(0.9) \\
&\iff n \ge \frac{\log(0.05)}{\log(0.9)}
\end{aligned}$$

② Suponha que uma amostra aleatória normal com média θ desconhecida e variância 2. Qual o tamanho da amostra para que

$$E_\theta[(\overline{X}_n-\theta)^2] \leq 0.1, \ \forall\theta$$

Temos que, $X_1, \ldots, X_n \sim Normal(\theta, 2^2)$, temos que

$\overline{X}_n \sim Normal(\theta, 2^2/n)$, daí

$$\frac{4}{n} = Var(\overline{X}_n) = E[(\overline{X}_n - E[\overline{X}_n])^2] = E_\theta[(\overline{X}_n-\theta)^2]$$

Para que $4/n \leq 0.1 \Rightarrow n \geq 40$

③ Para o exercício anterior, ~~[illegible]~~ Qual o ~~[illegible]~~ tamanho de n para que

$$E_\theta[|\bar{X}_n - \theta|] \leq 0.1, \ \forall \theta$$

Seja $Y = \dfrac{\bar{X}_n - \theta}{\sqrt{4/n}} \sim N(0,1)$

$$E_\theta[|\bar{X}_n - \theta|] = \cancel{\tfrac{\sqrt{n}}{2}}\, E[|Y|] \cdot \frac{2}{\sqrt{n}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n}} \cancel{\frac{\sqrt{n}}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |Y| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-Y^2/2}\, dY$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n}} \cancel{\frac{\sqrt{n}}{2}} \int_{0}^{\infty} Y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-Y^2/2)\, dY$$

sendo $z = \dfrac{Y^2}{2}$

$dz = Y$

$$= \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} Y \exp(-Y^2/2)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{\infty} e^{-z}\, dz \right) \quad 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}} \right)^2 \leq (0.1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{8}{\pi n} \leq 0.01 \Rightarrow n \geq \frac{800}{\pi}$$

9) Seja $X_1, \dots, X_n \sim Exp(\theta)$. Encontre a c.d.f para a distribuição amostral do MLE de θ.

Temos que o $\hat{\theta}_{MLE} = 1/\bar{X}_n$, logo $\forall p > 0$

$$P(1/\bar{X}_n \leq p) = P(\bar{X}_n \geq 1/p) = P(S \geq n/p)$$

Onde $S = \sum X_i$, como S é a soma de n exponenciais, $S \sim Gama(n, \theta)$. Seja G cdf da Gamma. Portanto

$$P(S \geq n/t) = 1 - P(S \leq n/t) = 1 - G(n/t)$$