9.1 – De Groot

(3) Suponha que uma proporção p de itens defeituosos em uma grande amostra de itens desconhecidos, e que testamos a hipótese:

$$H_0: \; p = 0.2,$$
$$H_1: \; p \neq 0.2.$$

Suponha que uma amostra de 20 itens é observada da população. Seja Y o numero de itens defeituosos dessa amostra, e considere um ~~teste~~ procedimento de test S que a região crítica para $Y \geq 7$ ou $Y \leq 1$.

(a) Determine os valores da função poder $\pi(p|S)$ para $p = 0.01, \dots, 1$

Temos, $R = \{0, 1, 7, 8, \dots, 20\}$ ← região de rejeição

$S_1 = \{(X_1, \dots, X_{20}) : Y \in R\}$ ← Região crítica

E a função poder é,

$$\pi(p|S) = P(X \in S_1 | p) = P(Y \leq 1 \text{ ou } Y \geq 7 | p)$$
$$= P(Y \leq 1 | p) + P(Y \geq 7 | p)$$
$$= P(Y = 0 | p) + P(Y = 1 | p) + 1 - P(Y \leq 6 | p)$$

Daí, podemos seguir computacionalmente

(b) Determine o tamanho do teste

Queremos o tamanho do teste:

$$\alpha(S) = \sup_{p \in \Omega = \{0.2\}} \pi(p|S) = \pi(0.2|S) \approx 0.15$$

(8) Sendo $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} Normal(\mu, 1)$. Suponha que nos testamos a hipótese

$$H_0: \mu \le \mu_0,$$
$$H_1: \mu > \mu_0.$$

Considere que o teste H_0 é rejeitado se $Z > c$, onde Z é definido como $Z = n^{1/2}\,\overline{X_n - \mu_0}$

(a) Mostre que, $P(Z \geq c \mid \mu)$ é uma função incremento de μ.

Queremos provar que $P(Z \geq c \mid \mu)$ é crescente em μ. Sabemos que $\frac{\overline{X}_n - \mu}{1/n^{1/2}} \sim N(0,1)$. Portanto

$$n^{1/2}(\overline{X}_n - \mu_0) = n^{1/2}(\overline{X}_n - \mu) + n^{1/2}(\mu - \mu_0)$$

logo, $Z \sim N(n^{1/2}(\mu - \mu_0), 1)$, $Z^* = Z - n^{1/2}(\mu - \mu_0) \sim N(0,1)$

Portanto, $P(Z \geq c \mid \mu) = P(Z^* \geq c - n^{1/2}(\mu - \mu_0) \mid \mu)$

$$= 1 - \Phi(c - n^{1/2}(\mu - \mu_0)), \quad \Phi \text{ cdf de } N(0,1)$$
$$= \Phi(n^{1/2}(\mu - \mu_0) - c)$$

Tome $\mu_1 < \mu_2 \Rightarrow n^{1/2}(\mu_1 - \mu_0) - c < n^{1/2}(\mu_2 - \mu_0) - c$. A CDF é sempre crescente, pois a pdf é sempre positiva, logo $\Phi(n^{1/2}(\mu_1 - \mu_0) - c) < \Phi$

(b) Encontre c que ~~faça~~ faça o teste ter o tamanho α.

Queremos que $\alpha_0 = \sup_{\mu \le \mu_0} \pi(\mu \mid \delta) = \sup P(Z \geq c \mid \mu)$

$$Z \sim N(n^{1/2}(\mu - \mu_0), 1) \quad = P(Z \geq c \mid \mu_0)$$
$$= 1 - \Phi(c) = \Phi(-c) \Rightarrow c = -\Phi^{-1}(\alpha_0)$$
$$\Rightarrow \Phi(c) = 1 - \alpha_0 \Rightarrow c = \Phi^{-1}(1 - \alpha_0)$$

(15) Seja $X \sim Poisson(\theta)$. Suponha que nós temos hipótese de teste

$$H_0: \theta \leq 1.0,$$
$$H_1: \theta > 1.0$$

Seja δ_c um teste que rejeita H_0 se $X \geq c$. Encontre c que ~~faz~~ faça de δ_c é possível 0.1 ~~ou~~ sem maior que 0.1.

Queremos $\alpha(\delta_c) = \sup_{\theta \leq 1} \pi(\theta | \delta_c)$

$$= \sup_{\theta \leq 1} P(X \geq c | \theta)$$

$$= \sup_{\theta \leq 1} \sum \frac{\theta^i e^{-\theta}}{i!}$$

$$= \sum \frac{e^{-1}}{i!} \to \text{O ideal é}$$

testar para $c=2, c=3, c=4$. O teste pode ser feito python também. Veremos que $c=3$

(19) $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ e σ^2 desconhecidos

$H_0: \mu \geq \mu_0$,
$H_1: \mu < \mu_0$

no nível α_0. Faz sentido ~~ap~~ rejeitar H_0 se $\bar{X}_n$ é pequeno. ~~Construa um intervalo com um lado.~~ Construa um intervalo de confiança para μ com coeficiente $1-\alpha_0$ que ~~a~~ rejeitamos H_0 se μ_0 não está no intervalo. Tenha certeza que o teste rejeita H_0 se $\bar{X}_n$ é pequeno.

Seja S o procedimento de teste: rejeita H_0 se $\bar{X}_n \leq c$.
Queremos que $\alpha(S) \leq \alpha_0$, onde $\alpha(S)$ é o tamanho do teste

$$\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

$$\alpha(S) = \sup_{\mu \geq \mu_0} \pi(\mu|S) = \sup_{\mu \geq \mu_0} P(\bar{X}_n \leq c)$$

Vamos lembrar que $n^{1/2}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma' \sim t_{n-1}$, onde $\sigma' = \left[\frac{\sum(X_i - \bar{X}_n)^2}{n-1}\right]^{1/2}$ e t_{n-1} é t-student com $n-1$ graus de liberdade. Assim

$$\alpha(S) = \sup_{\mu \geq \mu_0} P(\bar{X}_n \leq c)$$

$$= \sup_{\mu \geq \mu_0} P\left(n^{1/2}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma' \leq n^{1/2}(c-\mu)/\sigma' \right)$$

$$= T_{n-1}\left(n^{1/2}(c-\mu_0)/\sigma'\right)$$

Portanto, $c \leq \frac{\sigma'}{n^{1/2}} T^{-1}_{n-1}(\alpha_0) + \mu_0 = \mu_0 - \frac{\sigma'}{n^{1/2}} T^{-1}_{n-1}(1-\alpha_0)$

Agora queremos maximizar $\pi(\mu|S)$ quando $\mu < \mu_0$, variando c. $\pi(\mu|S) = T_{n-1}(n^{1/2}(c-\mu)/\sigma')$ que cresce com c. Logo, ~~tas~~ tomamos c com seu máximo:

$$c = \mu_0 + \frac{\sigma'}{n^{1/2}} T^{-1}_{n-1}(\alpha_0),$$

Logo, se $\bar{X}_n \leq \mu_0 + \sigma' n^{-1/2} T^{-1}_{n-1}(\alpha_0) \Leftrightarrow \mu_0 \geq \bar{X}_n - \sigma' n^{-1/2} T^{-1}_{n-1}(\alpha_0)$
$\Leftrightarrow$ Rejeitamos H_0

Vamos construir o intervalo de confiança usando o teo. 9.1.3. $\cancel{H_{0,\mu_0}: \mu \geq \mu_0}$

$w(x) := \{\mu_0 : S_{\mu_0}$ não rejeita H_{0,μ_0} se $X = x$ é observado$\}$.

Então $P(\mu_0 \in w(x) \mid \mu = \mu_0) \geq 1 - \alpha_0$

Portanto $(-\infty, \overline{X}_n - \sigma' n^{-1/2} T_{n-1}^{-1*}(\alpha_0))$ determina o intervalo de confiança.

(21) (a) Seja $\alpha_0 < 0.5$. Prove que não existem conjuntos de dados possíveis de modo que rejeitemos ambas as hipóteses nulas simultâneas. Isto é, para cada $\bar{X}_n$ e σ' é possível rejeitar pelo menos uma das duas hipóteses nulas.

$X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$, (μ, σ^2) desconhecidos.

Queremos comparar $H_0: \mu \leq \mu_0$ versus $H_0: \mu \geq \mu_0$

Como já vimos,

Se $H_0: \mu \geq \mu_0$: Rejeitamos se $\bar{X}_n \leq \mu_0 + \sigma' n^{-1/2} T_{n-1}^{-1}(\alpha_0)$

Se $H_0: \mu \leq \mu_0$: Rejeitamos se $\bar{X}_n \geq \mu_0 + \sigma' n^{-1/2} T_{n-1}^{-1}(\alpha_0)$

Como $\alpha_0 < 0.5$, $T_{n-1}^{-1}(\alpha_0) < 0$. Logo

$$\mu_0 - \sigma' n^{-1/2} T_{n-1}^{-1}(\alpha_0) > \mu_0 > \mu_0 + \sigma' n^{-1/2} T_{n-1}^{-1}(\alpha_0)$$

~~Supondo~~ Suponha que rejeitamos ambas. Então

$$\bar{X}_n > \mu_0 > \bar{X}_n, \quad \text{absurdo.}$$

(b) Seja $\alpha_0 < 0.5$. Prove que existem conjuntos de dados que levariam a não rejeitar ambas as hipóteses nulas. Prove também que há conjuntos de dados que levariam à rejeição de cada uma das hipóteses nulas enquanto não rejeitariam a outra.

Do item a, $\mu_0 - \sigma' n^{-1/2} T_{n-1}^{-1}(\alpha_0) > \mu_0 + \sigma' n^{-1/2} T_{n}^{-1}(\alpha_0)$.

Tome $\bar{X}_n \in (\mu_0 + \sigma' n^{-1/2} T_{n-1}^{-1}(\alpha_0), \mu_0 - \sigma' n^{-1/2} T_{n-1}^{-1}(\alpha_0))$. Assim falhamos em rejeitar as hipóteses nulas, que garante a existência

Dessa forma, $\bar{X}_n$ está fora, rejeitando só uma hipótese.

(c) Seja $\alpha_0 > 0.5$. Prove que existem conjuntos de dados que levariam a rejeição de ambas as hipóteses.

Como é contrário a (a), basta tomar

$$\bar{X}_n \in (\mu_0 - \sigma' n^{-1/2} T_{n-1}^{-1}(\alpha_0), \mu_0 + \sigma' n^{-1/2} T_{n-1}^{-1}(\alpha_0))$$ e

rejeitamos a hipótese nula. Note que, esse intervalo é não vazio pois $T_{n-1}^{-1}(\alpha_0) > 0$ quando $\alpha_0 > 0.5$.