7.4 – De Groot

② Suponha que a proporção de ítens defeituosos é desconhecida θ e a distribuição prior de θ é $\sim$ Beta(5,10). Suponha que, 20 ítens foram selecionados e um é defeituoso. Se a função de perda quadrada é usada, qual é o estimador de Bayes?

$\theta \sim Beta(5,10)$
$X_1, \ldots, X_{20} \sim Bernoulli(\theta)$
$S = \sum X_i = 1$

Pelo teorema da posteriori de Beta

$$\theta | X_1, \ldots, X_n \sim Beta(5+1, 10+20-1)$$
$$= Beta(6,29)$$

(7.4.1)
Como $\theta|\underline{X} \sim Beta(6,29)$, $E(\theta|\underline{X}) = \frac{6}{(6+29)} = \frac{6}{35} = \delta^*(X)$

(4) ~~Suponha que uma amostra aleatória de~~
$X_1, \dots, X_n \sim$ Bernoulli(θ), θ desconhecido
$\theta \sim$ Beta (a,b), onde $\mu_0 = a/(a+b)$

Seja $S = \sum X_i$. Então $\theta | X_1, \dots, X_n \sim$ Beta $(a+S, B+n-S)$

$$E(\theta|\tilde{X}) = \frac{a+S}{a+B+n} = \frac{a}{a+B+n} + \frac{\bar{X}_n}{\left(\frac{a+B}{n}\right)+1}$$

Defina $\gamma_n = \dfrac{1}{\frac{a+B}{n}+1} \Rightarrow \dfrac{a}{a+B+n} = \mu_0 \cdot \dfrac{a+B}{a+B+n} = \mu_0(1+\gamma_n)$

$$1-\gamma_n = \frac{a+B}{n} \Big/ \left(\frac{a+B}{n}+1\right) = \frac{a+B}{a+B+n}$$

Logo, $E(\theta|\tilde{X}) = \gamma_n \bar{X}_n + \mu_0(1-\gamma_n)$ e $\lim_{n \to \infty} \gamma_n = \lim \dfrac{1}{\frac{(a+b)}{n}+1} = 1$

(7) $X_1, \dots, X_n \sim \text{Poisson}(\theta)$

$\theta \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$, $\mu_0 = \alpha/\beta$, $S = \sum X_i$

$\theta | \tilde{x} \sim \text{Gama}(\alpha + S, \beta + n)$

(11) Suponha que uma $X_1,\dots,X_n \sim Exp(\theta)$, θ desconhecido, a priori de θ é gama e o valor de θ é estimado por uma função de erro quadrado. Mostre que, o estimador de Bayes, para $n=1,2,\dots$, formam ~~uma~~ uma ~~estimado~~ sequência de estimadores de θ.

$X_1,\dots,X_n \sim Exp(\theta)$, $S=\sum X_i$

$\theta \sim Gama(\alpha,\beta)$

$\theta | X_1,\dots,X_n \sim Gama(\alpha+n, \beta+S)$

O estimador de Bayes é $E[\theta | X_1,\dots,X_n]$

$$= \frac{\alpha_0+n}{\beta_0+S} = \frac{(\alpha_0/n)+1}{(\beta_0/n)+\bar{X}} = S_n^*(X) \qquad 7.4.1$$

Note que, $\lim_{n\to\infty} S_n^*(\bar{X}) = \frac{1}{\bar{X}_n}$. Essa ~~con~~ convergência implica

$P(|S^*(x^*) - 1/\bar{X}_n \geq \varepsilon) \to 0$ $(\varepsilon > 0)$. Usando a mesma desigualdade do ex. 7 é consistente.

(14) Suponha $X_1, \dots, X_n \sim Exp(\theta)$, θ desconhecido $(\theta > 0)$. Seja ξ a priori de θ, e seja $\hat{\theta}$ a estimativa de Bayes de θ com respeito a priori onde usamos a função de perda quadrada. Seja $\psi = \theta^2$ ~~suponha~~ estime ψ em vez de θ em

$$L(\psi, a) = (\psi - a)^2$$

Seja $\hat{\psi}$ o estimador de Bayes de ψ. Explique porque $\hat{\psi} > \hat{\theta}^2$

Suponha que queremos estimar ψ respeito a $L(\psi, a) = (\psi - a)^2$

Se $\hat{\psi}$ é o estimador de Bayes, então $\hat{\psi} = E(\psi | X_1, \dots, X_n) = E(\theta^2 | X_1, \dots, X_n)$ sabemos também que $\hat{\theta} = E(\theta | X_1, \dots, X_n)$. Além disso:

$$Var(\theta | X_1, \dots, X_n) = E(\theta^2 | X_1, \dots, X_n) - (E(\theta | X_1, \dots, X_n))^2 \geq 0$$

o que não ocorre

$\Rightarrow E(\theta^2 | X_1, \dots, X_n) \geq (E(\theta | X_1, \dots, X_n))^2$ (Com igualdade só se $P(\theta = c | X_1, \dots, X_n) = 1$)

$\Rightarrow \hat{\psi} > \hat{\theta}^2$