8.5 - De Groot

① $X_1, \dots, X_n \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$, com μ desconhecida. Seja Φ a c.d.f da $N(0,1)$ e Φ^{-1} sua inversa. Mostre que, o intervalo com confiança γ para μ dado $\overline{X}_n$, é dado por

$$\left(\overline{X}_n - \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\frac{\sigma}{n^{1/2}},\ \overline{X}_n + \Phi^{-1}\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)\frac{\sigma}{n^{1/2}}\right).$$

Este exercício está relacionado ao teorema 8.5.1. Seja

$$A = \overline{X}_n - \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\frac{\sigma}{n^{1/2}},$$

$$B = \overline{X}_n + \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\frac{\sigma}{n^{1/2}},$$

onde Φ é a ~~normal~~ c.d.f da normal padrão. Daí, queremos mostrar que, $P(A < \mu < B) \geq \gamma$

$$P(A \geq \mu) = P\left(X_n - \mu \geq \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\frac{\sigma}{n^{1/2}}\right)$$

$$= P\left(\frac{X_n - \mu}{\sigma/n^{1/2}} \geq \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\right)$$

$$= P\left(Z \geq \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{1+\gamma}{2}\right) = \frac{1-\gamma}{2},$$

dado que $\dfrac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/n^{1/2}} = Z \sim N(0,1)$

De forma análoga, $P(B > \mu) = \dfrac{1+\gamma}{2}$.

Daí, $P(A < \mu < B) = P(B > \mu) - P(A \geq \mu)$

$$= \frac{1+\gamma}{2} - \frac{1-\gamma}{2}$$

$$= \gamma$$

Isso prova que (A, B) é int. de confiança com coeficiente γ.

(14) Suponha $X_1, \dots, X_n \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$, com μ desconhecida. Qual deve ser o tamanho da amostra para que o intervalo de confiança para μ com confiança 0.95 e tamanho menor que 0.010?

Pelo exercício anterior, primeiro note que, ~~temos que ter~~

$$2\Phi^{-1}\left(\frac{1.95}{2}\right)\cdot\frac{\sigma}{n^{1/2}} < 0.010$$

Para isso, $\Phi^{-1}\left(\frac{1.95}{2}\right) < 0.005\, n^{1/2}$

$$\Rightarrow \left(200\,\Phi^{-1}(0{,}975)\right)^{2} < n$$

$$\approx n > 153658$$

⑤ $X_1, \dots, X_n \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$, com μ e σ desconhecidas. Descreva o método para encontrar um intervalo de confiança γ $(0<\gamma<1)$ para σ^2

Sabemos que, $\sum \left(\frac{X_i - \bar{X}_n}{\cancel{\sigma}}\right)^2 / \sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$. Seja G sua c.d.f.

Seja, $c_i = G^{-1}(\gamma_i)$, $i=1,2$ e $\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$. Assim temos:

$$P(c_1 < \textstyle\sum(X_i - \bar{X}_n)^2/\sigma^2 < c_2) = P(\textstyle\sum(X_i - \bar{X}_n)^2/\sigma^2 < c_2)$$
$$- P(\textstyle\sum(X_i - \bar{X}_n)^2/\sigma^2 \leq c_1)$$
$$= \gamma_2 - \gamma_1 = \gamma$$

Como,

$$P(c_1 < \textstyle\sum(X_i - \bar{X}_n)^2/\sigma^2 < c_2) = P(\sigma^2 c_1 < \textstyle\sum(X_i - \bar{X}_n)^2 < c_2 \sigma^2)$$

$$= P\left(\tfrac{1}{c_2} \textstyle\sum(X_i - \bar{X}_n)^2 < \sigma^2 < \tfrac{1}{c_1} \textstyle\sum(X_i - \bar{X}_n)^2\right)$$

Daí, sendo $A = \frac{1}{c_2} \sum(X_i - \bar{X}_n)^2$,

$$B = \frac{1}{c_1} \sum(X_i - \bar{X}_n)^2$$

Temos que, (A, B) é um intervalo com confiança γ para σ^2

$\gamma \cdot E[X_i] = 1/\frac{1}{\mu} = \mu$

⑥ $X_1, \ldots, X_n \sim \exp(\frac{1}{\mu})$, com μ desconhecido. Descreva ~~de~~ como construir um intervalo de confiança γ para μ.

Sabemos que $\sum X_i \sim \text{Gama}(n, 1/\mu)$.

Além disso $\frac{1}{\mu} \sum X_i \sim \text{Gamma}(n, 1)$

Seja G a cdf da Gamma e

Defina $c_i = G^{-1}(\gamma_i)$ ~~i=1,2~~, $\gamma_2 - \gamma_1 = \gamma$

Logo, $P(c_j \geq 1/\mu \sum X_i) = G(G^{-1}(\gamma_j)) = \gamma_j$

$P(c_1 < \frac{1}{\mu} \sum X_i < c_2) = \gamma_2 - \gamma_1 = \gamma$

Portanto $P(\mu c_1 < \sum X_i < \mu c_2) = P(\frac{1}{c_2} \sum X_i < \mu < \frac{1}{c_1} \sum X_i)$

Defina,

$$A = \frac{1}{G^{-1}(\gamma_2)} \sum X_i$$

$$B = \frac{1}{G^{-1}(\gamma_1)} \sum X_i$$

Então, (A, B) é um intervalo de confiança γ para μ.