8.7 - De Groot

~~7~~ (4) Suponha que $X \sim$ Geometric (p). Encontre uma estatística $S(X)$ que seja não viesada de p.

Queremos encontrar um estimador não viesado para $1/p$

1. Encontrar um estimador para p

A p.m.f de X é $f(x|p) = (1-p)^{x-1}p$ e $1/p$

Vou encontrar por método dos momentos, pois é mais simples.

Veja que $E[X] = 1/p < \infty$, o que é condição necessária para o método.

Assim $m_1 = \bar{X}_n = E[X|p] = 1/p$

Pelo método dos momentos $\hat{p} = 1/\bar{X}_n$ é estimador para p.

2. Estimar para $1/p$

Do (1) um estimador para $1/p$ é $\bar{X}_n$

3 Calcular viés do estimador

$$E[\bar{X}_n] = \frac{E[X_1 + \cdots + X_n]}{n} = \frac{1}{n} \cdot n\, E[X_1] = 1/p$$

4. Corrigir viés: Como $\text{Viés}(S(p)) = E[\bar{X}_n] - 1/p = 0$, o estimador é não viesado e não precisa de correção.

(6) Suponha que $X_1, \dots, X_n$ formam uma amostra ~~aleatória~~ normal com ~~med~~ μ, σ^2 desconhecidas ~~[illegible]~~. Seja $\hat{\sigma}_0^2$ e $\hat{\sigma}_1^2$ 2 estimadores de $\hat{\sigma}^2$, definidos como

$\sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n}\sum (X_i - \bar{X}_n)^2 \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum (X_i - \bar{X}_n)^2$$

Mostre que o MSE de $\hat{\sigma}_0^2$ é ~~pequeno~~ menor que o MSE de $\hat{\sigma}_1^2$ para qualquer possibilidade de μ e σ^2.

Seja $T = c\sum (X_i - \bar{X}_n)^2$ um estimador para σ^2. Temos que $\left(\frac{X_i - \bar{X}_n}{\sigma}\right) \sim N(0,1)$, logo

$$\frac{T}{\sigma^2 c} = \sum \left(\frac{X_i - \bar{X}_n}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

$$E[T] = c\sigma^2(n-1)$$
$$Var(T) = c^2\sigma^4(2(n-1))$$
$$MSE(T) = E[(T-\sigma^2)^2] = E[T^2] - 2\sigma^2 E[T] + (\sigma^2)^2$$
$$= Var[T] + E[T]^2 - 2\sigma^2 E[T] + \sigma^4$$
$$= \sigma^4((n^2-1)c^2 - 2(n-1)c + 1)$$

Temos que minimizar o erro MSE, minimizando a equação do 2º grau, ou seja, achando

$$\hat{c} = \arg\min (n^2-1)c^2 - 2(n-1)c + 1$$
$$= \frac{1}{n+1}$$

Logo, se $\forall c > \hat{c}$, o MSE é crescente. Assim, como $\frac{1}{n} < \frac{1}{n-1}$, temos que $\hat{\sigma}_0^2 < \hat{\sigma}_1^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (\mu, \sigma^2)$

(11) Suponha que uma droga é administrada a 2 animais A e B. Sabe-se que a resposta média dos animais do tipo A é a mesma que a dos ~~B~~ animais do tipo B, mas o valor comum desta média é desconhecida e deve ser estimada. Sabe-se também que a variância da resposta dos animais do tipo A é quatro vezes maior que a variância da resposta dos animais do tipo B. Sejam $X_1, \ldots, X_m$ as respostas do tipo A e ~~X~~ $Y_1, \ldots, Y_n$ as do tipo B. Finalmente considere o estimador $\hat{\theta} = \alpha \bar{X}_m + (1-\alpha)\bar{Y}_n$

(a) ~~Find~~ ~~quanto~~ para qualquer valor de α, m e n, ~~p~~ $\hat{\theta}$ é um estimador não-viesado?

Vamos verificar o viés para isso vamos calcular $E[\hat{\theta}]$, isto é,

$$E[\hat{\theta}] = \alpha E[\bar{X}_m] + (1-\alpha) E[\bar{Y}_n]$$
$$= \alpha E[X_1] + (1-\alpha) E[\cancel{X} Y_1] \Big\} \text{ mesma media}$$
$$= \alpha E[X_1] + (1-\alpha) E[X_1]$$
$$= E[X_1] = \theta$$

Logo, é não-viesado

(b) Para valores fixos de m e n, qual valor de α produz um estimador não-viesado com variância mínima?

Queremos minimizar $Var(\hat{\theta})$ com m e n fixos

$$Var(\hat{\theta}) = Var(\alpha \bar{X}_m + (1-\alpha)\bar{Y}_n)$$
$$= \alpha^2 Var(\bar{X}_m) + (1-\alpha)^2 Var(\bar{Y}_n)$$
$$= \frac{\alpha^2}{m^2} m \, Var(X_1) + \frac{(1-\alpha)^2}{n^2} n \, Var(Y_1)$$
$$= \frac{\alpha^2}{m} Var(Y_1) \, 4 + \frac{(1-\alpha)^2}{n} Var(Y_1)$$
$$= \frac{Var(Y_1)}{mn} [4n\alpha^2 + m(1-\alpha)^2]$$
$$= \frac{Var(Y_1)}{mn} [(4n+m)\alpha^2 - 2m\alpha + m]$$

O α que minimiza é $1/(1+4(n/m))$

13) Suponha que $X_1, \dots, X_n$ formam uma amostra aleatoria com p.d.f. $f(x|\theta)$, onde o valor do parametro θ é desconhecido. Seja $X = (X_1, \dots, X_n)$, e ~~a~~ T uma estatística. Assuma que $S(X)$ é um estimador não viesado de θ tal que $E_\theta[S(X)|T]$ não depende de θ. Seja $S_0(t)$ como ~~a media~~ a mediana condicional de $S(X)$ dado T.

(a) Mostre que $S_0(t)$ é um estimador não viesado de θ

$$E[S_0(X)] = E[E[S(X)|T]] \underset{\text{lei da esperança total}}{=} E[S(X)] = \theta$$

(b) ~~Sabemos que $R(\theta)$ $R(\theta, S_0) \leq$~~
Mostre que, $Var_\theta(S_0) \leq Var(S)$, $\forall \theta$.

~~$Var_\theta(S_0)$~~ Sabemos que $R(\theta, S_0) = E[(S_0(X) - \theta)^2] = Var(S_0) + \cancel{Vies(S_0)^2}^{\,0}$
$R(\theta, S_0) = E[(S(X) - \theta)^2] = Var(S) + \cancel{Vies(S)^2}^{\,0}$

Por Rao Blackwell $R(\theta, S_0) \leq R(\theta, S)$ se T é estatística suficiente. Se T não for suficiente temos que usar o teorema 4.7.4, onde:

$$Var(S(X)) = E_\theta[Var(S(X)|T)] + Var[E_\theta(S(X)|T)]$$
$$= E_\theta[Var(S(X)|T)] + Var(S_0(X))$$

Como $E_\theta[Var(S(X)|T)] \geq 0$, vale que

$$Var(S) \geq Var(S_0).$$