7.3 — De Groot

(2) $X_1, \dots, X_n \sim \text{Bernoulli}(\theta)$, ~~pois $X_1=1$~~ temos que $\xi(\theta) = \text{Unif}[0,1]$ ~~tt~~ ou uma Beta(1,1) como ~~a~~ $\xi(\theta)$ é uma família conjugada. Sabemos que $\xi(\theta|X)$ ~~n~~ é uma Beta. Sendo $S = \sum x_i$, teremos que $\xi(\theta|\underset{x}{\cancel{S}}) \sim \text{Beta}(1-S, 1+n-S)$. Logo

$$Var(\theta|x) = \frac{f(S,n)}{3+n}$$

Temos que, para cada n, $\max f(S,n) = \frac{1}{(2+n)^2} \max((1+y)(1+n-y))$

$$= \frac{1}{4}$$

Logo, ~~∀~~ $Var(\theta|x) \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3+n}$ Se $n \geq 22$, $\frac{1}{3+n} \leq \frac{1}{25} \Rightarrow \frac{1}{4(3+n)} \leq 0.01$

e portanto $Var(\theta|x) \leq 0.01$

Agora quero mostrar que $f(S,n) \geq 1/10$. Se $n \leq 7$, $6n+6 \geq n^2$ e, então $10n+10 \geq n^2+4n+4 \Rightarrow \frac{n+1}{(2+n)^2} \geq 1/10$. Como $f(S,n)$, para ~~a~~ cada n, é $\min\limits_{n \geq S \geq 0} f(S,n) = \frac{n+1}{(2+n)^2}$, quando $S=0$ ou n. Assim

$$\frac{1}{10(3+n)} \geq 0.01 \Rightarrow \frac{100}{10} \geq 3+n \Rightarrow 7 \geq n.$$

(17) O numero de minutos de espera de um onibus demanda tem distribuição normal $X \sim Unif(0,\theta)$, onde θ é desconhecido. Suponha que a priori é dada ~~pppor~~ por

$$\xi(\theta) = \begin{cases} \frac{192}{\theta^4} & \text{para } \theta \geq 4 \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

Se observamos uma amostra de 5, 3, 8 qual a posterior de θ?

Seja $x_1 = 5$, $x_2 = 3$ e $x_3 = 8$

$$f(x_i|\theta) = \prod \frac{1}{\theta} \mathbb{1}(x_i \in (0,\theta)) = \frac{1}{\theta^3} \mathbb{1}(x_1, x_2, x_3 \in (0,\theta])$$

Logo, ~~$\xi(\theta)$~~ $\xi(\theta|x) \propto f(x_1,x_2,x_3|\theta)\,\xi(\theta) \propto \frac{1}{\theta^7}$

mas como devemos ter $\theta \geq 4$ e $x_i \in (0,\theta]$, então $\theta \geq 8$

vamos verificar a constante $c(x)$

$$\int_8^\infty \xi(\theta|x)\,d\theta = \int_8^\infty c(x)\frac{1}{\theta^7}d\theta = 0 + c(x)\frac{8^{-6}}{6}$$

$$= \frac{c(x)}{6.8^6} = 1 \Rightarrow cx = 6.8^6$$

Então, $\xi(\theta|x) = \begin{cases} 6.8^6/\theta^7, & \theta \geq 8 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

(19) Seja $X_1,\dots,X_n$ a v.a. com p.d.f. $f(x|\theta)$ é dada por

$$f(x|\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & \text{para } 0<x<1\\ 0, & \text{c.c}\end{cases}$$

suponha θ desconhecida $(\theta>0)$, e $\xi(\theta) \sim \text{Gamma}(\alpha,\beta)$ $(\alpha>0, \beta>0)$ determine a média e a variância da posterior de θ.

$$f(x_1,\dots,x_n|\theta)=\prod \theta x_i^{\theta-1} = \theta^n\left(\prod x_i\right)^{\theta-1} \propto \theta^n\left(\prod x_i\right)^{\theta}$$

$$\xi(\theta)\propto \theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}$$

Logo:

$$\xi(\theta|x_1,\dots,x_n)\propto \theta^n\left(\prod x_i\right)^{\theta}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}$$
$$\propto \theta^n e^{\theta\sum \ln x_i}\,\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}$$
$$= \theta^{(\alpha+n)-1}e^{-\theta(\beta-\sum \ln x_i)}$$

Observe que $\xi(\theta|x_1,\dots,x_n) \propto$ Gamma, exato por uma constante, que depende de x. Os parametros dessa Gama são $\alpha+n$ e $\beta-\sum \ln x$ portanto

$$E(\theta|x_1,\dots,x_n)=\frac{\alpha+n}{\beta-\sum \ln x}$$

$$Var(\theta|x_1,\dots,x_n)=\frac{\alpha+n}{(\beta-\sum \ln x_i)^2}$$

(21) Seja $X_1, \ldots, X_n \sim Exp(\theta)$. E seja $\xi(\theta)$ uma priori ~~imp~~ imprópria com p.d.f $1/\theta$ para $\theta > 0$. Encontre a posterior de θ e mostre que ~~ela tem pelo~~ a media de θ é $1/\bar{x}_n$

$f(x_1, \ldots, x_n \mid \theta) = \prod f(x_i \mid \theta) = \prod \theta \exp(-\theta x_i)$	~~$\xi(\theta \mid x) = \prod f \frac{1}{\theta}\, \xi$~~
$= \theta^n \exp(-\theta \sum x_i)$	$\xi(\theta \mid x) = \frac{\prod f(x \mid \theta)\, \frac{1}{\theta}}{m(x)}$
$\xi(\theta \mid x_1, \ldots, x_n) \propto \theta^n \exp(-\theta \sum x_i) \cdot \theta^{-1},\ \theta > 0$	$=$
$= \theta^{n-1} \exp(-\theta \sum x_i)$	

É uma Gama$(n, \sum x_i)$, ou seja

$$E(\theta \mid x_1, \ldots, x_n) = \alpha/\beta = 1/\bar{x}_n$$