8.8 - De Groot

5 Suponha $X \sim Normal(0, \sigma^2)$, σ^2 desconhecida. Encontre a informação de Fisher em X.

Temos que, $f(x|\sigma^2)$ é definido em $\mathbb{R}$ e $\forall \sigma^2 > 0$, $f(x|\sigma^2) > 0$ em toda reta.

$$\lambda(x|\sigma^2) = \log\left((\sqrt{2\pi\sigma^2})^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}\right\}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2)$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{\sigma^2} + \log 2\pi + \log\sigma^2\right]$$

Daí,

$$\lambda'(x|\sigma^2) = -\frac{1}{2}\left[-\frac{x}{(\sigma^2)^2} + \frac{1}{\sigma^2}\right]$$

$$\lambda''(x|\sigma^2) = -\frac{1}{2}\left[\frac{2x^2}{(\sigma^2)^3} - \frac{1}{(\sigma^2)^2}\right] = -\frac{x^2}{(\sigma^2)^3} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}$$

Portanto, $-I(\sigma^2) = E[\lambda''(x|\sigma^2)] = E\left[-\frac{x^2}{(\sigma^2)^3} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\right] = -\frac{E[x^2]}{(\sigma^2)^3} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}$

$$= -\frac{[Var(X) + E[X]^2]}{(\sigma^2)^3} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}$$

$$= -\frac{\sigma^2}{(\sigma^2)^3} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} = -\frac{1}{2(\sigma^2)^2}$$

Isto é, $I(\sigma^2) = \frac{1}{2\sigma^4}$

(4) $X_1, \dots, X_n \sim \text{Bernoulli}(p)$. Mostre que $\bar{X}_n$ é um estimador eficiente de p. Para isso devemos provar que $\forall p \in (0,1)$ vale $Var(\bar{X}_n) = 1/nI(p)$, ou, de forma equivalente, que $\bar{X}_n = u(\theta)\lambda'(X|\theta) + v(\theta)$ para u e v (tomando $\theta = p$)

$$\lambda_n(X|\theta) = \log\left(\theta^{\sum X_i}(1-\theta)^{n-\sum X_i}\right)$$
$$= \sum X_i \log\theta + (n - \sum X_i)\log(1-\theta)$$

Logo, $\lambda_n'(X|\theta) = \sum X_i/\theta - (n - \sum X_i)/(1-\theta)$

$$= n\bar{X}_n/\theta - n(1-\bar{X}_n)/(1-\theta), \text{ pois } n\bar{X}_n = \sum X_i$$
$$= [n(\bar{X}_n - \theta)]/[\theta(1-\theta)], \quad u(\theta) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}, \quad v(\theta) = \theta$$

$$\therefore u(\theta) \cdot \lambda_n'(X|\theta) + v(\theta) = \bar{X}_n - \theta + \theta = \bar{X}_n$$

Então $\bar{X}_n$ é eficiente

(10) Suponha $X_1, \dots, X_n \sim \text{Normal}(0, \sigma)$, com $\sigma > 0$ desconhecido. Encontre o limite inferior para a desigualdade da informação inequality for the variance de algum estimador não viesado de $\log \sigma$.

Seja T um estimador não-viesado para $\log \sigma$, isto é,

$$E_\theta[T] = \log\theta = m(\theta) \text{ e } m'(\theta) = \sigma^{-1}$$

Vou calcular $I(\sigma)$. Para isso:

$$\lambda(x|\theta) = \log\{(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1}\exp(-\tfrac{1}{2}\tfrac{x^2}{\sigma^2})\}$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2}[\log 2\pi + \log\sigma^2]$$
$$\lambda'(x|\theta) = -\frac{1}{2}\left[\frac{-2x^2}{\sigma^3} + \frac{2}{\sigma}\right]$$
$$\lambda''(x|\theta) = -\frac{1}{2}\left[\frac{6x^2}{\sigma^4} - \frac{2}{\sigma^2}\right]$$

$$I(\theta) = -E(\lambda''(x|\sigma)) = \frac{1}{2}E\left[\frac{6x^2}{\sigma^4} - \frac{2}{\sigma^2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{6}{\sigma^2}E[x^2] - \frac{2}{\sigma^2}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sigma^2} = \frac{2}{\sigma^2}$$

Isto é, $\text{Var}(T) \geq \frac{m'(\sigma)^2}{nI(\sigma)} = \frac{1}{2n}$