7.8 - De Groot

3) Seja $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Pareto}(x_0, \alpha)$, x_0 e α desconhecidos ($x_0 > 0$ e $\alpha > 0$)

$$f(x \mid x_0, \alpha) = \begin{cases} \dfrac{\alpha x_0^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}, & x \geq x_0 \\ 0 & x < x_0 \end{cases}$$

Queremos mostrar que $T_1 = \min(X_1, \ldots, X_n)$ e $T_2 = \prod X_i$, são estatísticas suficientes conjuntas.

$$f(x \mid x_0, \alpha) = \frac{\alpha x_0^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} \mathbb{1}(x \geq x_0)$$

$$f_n(x \mid x_0, \alpha) = \frac{\alpha^n x_0^{\alpha n}}{\prod (x_i)^{\alpha+1}} \mathbb{1}(x_1, \ldots, x_n \geq x_0)$$

$$= 1 \cdot \frac{\alpha^n x_0^{\alpha n}}{\left(\prod (x_i)\right)^{\alpha+1}} \mathbb{1}(\min(x_i) \geq x_0)$$

$$= 1 \, \frac{(\alpha x_0^{\alpha})^n}{T_2^{\alpha+1}} \mathbb{1}(T_1 \geq x_0)$$

$$= u(x) \cdot v(T_1, T_2, \alpha, x_0)$$

Então T_1 e T_2 são estatísticas conjuntas suficientes.

(8) Suponha $X_1, \ldots, X_n \sim Exp(\beta)$, com β desconhecido $(\beta > 0)$. O MLE de β é uma estatística mínima suficiente?

Sabemos que $\hat{\beta} = 1/\bar{X}_n$ e pelo teorema 7.8.3 é suficiente mínima.

(12) Suponha $X_1, \dots, X_n$ com pdf

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2}, & 0 \leq x \leq \theta \\ 0, & c.c \end{cases}$$

Sendo θ desconhecido. Determine o MLE da mediana dessa distribuição e mostre que o estimador é mínimo suficiente para θ

$$f_n(x|\theta) = \frac{2^n \prod(x_i)}{\theta^{2n}} \mathbb{1}(0 \leq x_i \leq \theta)$$

Queremos $\theta \geq x_i, \forall i$ mas queremos o menor possível pois se encontra no denominador assim $\hat{\theta}_{MLE} = \max\{X_i\}$.

A mediana é dada pelo valor m tal que $P(X < m) = 1/2$, logo:

$$\int_{-\infty}^{m} f(x|\theta)\,dx = \int_{0}^{m} \frac{2x}{\theta^2}\,dx = \int_{0}^{m} \frac{2x}{\theta^2}\,dx = \frac{x^2}{\theta^2}\Big|_0^m = \frac{m^2}{\theta^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow |m| = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\theta\right|$$

Como $\theta \geq 0$, $m = \frac{1}{\sqrt{2}}\theta$, e pela invariância do MLE, vale que

$$\hat{m}_{MLE} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\theta}_{MLE}$$

Pelo critério de fatoração, $f_n(x|\theta) = \left(2^n(\prod(x_i))\right)\left(\frac{\mathbb{1}(0 \leq \hat{\theta}_{MLE} \leq \theta)}{\theta^{2n}}\right)$, logo $\hat{\theta}_{MLE}$ é suficiente, por injetividade $\hat{m}_{MLE}$ também é, e é mínima suficiente por 7.8.3

(16) Suponha $X_1, \ldots, X_n \sim$ Poisson(λ), com λ desconhecida, e a distribuição a priori de λ é uma gamma. O estimador de Bayes para λ com erro quadrático como função de perda é uma estatística mínima suficiente.

$\lambda \sim$ Gama(α, β)

Se $S = \sum X_i$, sabemos que Gamma é de uma família conjugada.
Logo: $\lambda | X \sim$ Gama($\alpha + S, \beta + n$)
O estimador de Bayes por perda quadrada $E[\lambda | X] = \frac{\alpha + S}{\beta + n}$

$f(x|\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \mathbb{1}\{x > 0\} \Rightarrow \cancel{f_n(x|\theta)}\ f_n(x|\lambda) = \frac{\lambda^S e^{-n\lambda}}{\prod X_i!} \mathbb{1}\{X_1, \ldots, X_n \geq 0\}$

Assim, se $u(x) = \frac{1}{\prod X_i!}$ e $v(T, \lambda) = \lambda^S e^{-\lambda n}$, temos que

S é estatística suficiente para λ por MLE e por 7.8.3 é mínimo. Logo o estimador de Bayes (função injetiva de S) também será.