8.2 - De Groot

(4) $X, Y \sim N(0,1)$, queremos encontrar r tal que *

$P(X^2+Y^2 \leq r^2) \leq 0.99$, com r mínimo possível.

Sabemos que X^2 e Y^2 são chi-quadrado com 1 grau de liberdade ~~e~~ e a soma X^2+Y^2 é uma chi-quadrado com 2 graus de liberdade. ~~e~~ Queremos que

$$P(X^2+Y^2 \leq r^2) = 0.99$$

$\Leftrightarrow r^2 = 9.21$ ← tabela da chi

$\Rightarrow r \approx 3.03$

(7) Sendo $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., X_i tem c.d.f F_i contínua. Também seja a variável aleatória Y definida pela relação

$$Y = -2\sum_{i=1}^{n} \log F_i(X_i)$$

Mostre que $Y \sim \chi^2(2n)$

Seja $T_i := F_i(X_i)$ (sendo $x \in [0,1]$)

$$P(T_i \leq x) = P(F_i(X_i) \leq x) = P(X_i \leq F_i^{-1}(x)) = F_i(F_i^{-1}(x)) = x$$

Logo, $T_i \sim \text{Unif}[0,1]$

Seja $Z_i := -2\log T_i$. Vou encontrar a distribuição de Z_i.

Tome $x \in [0,\infty)$ (o intervalo de $-\log[0,1]$)

$$P(Z_i \leq x) = P(\log T_i \geq -x/2) = P(T_i \geq e^{-x/2}) = 1 - P(T_i \leq e^{-x/2}) = 1 - e^{-x/2}$$

Logo, $Z_i \sim \exp(1/2)$

Assim $Y = \sum Z_i \sim \text{Gamma}(n, 1/2) = \text{Gama}(2n/2, 1/2) = \chi^2(2n)$

(10) Seja $X_1, \ldots, X_6 \sim N(0,1)$, e seja

$$Y = (X_1 + X_2 + X_3)^2 + (X_4 + X_5 + X_6)^2$$

Determine o valor de c para que $cY \sim \chi^2$

Temos que, $X_1 + X_2 + X_3 \sim N(0,3)$, daí

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(X_1 + X_2 + X_3) \sim N(0,1),$$

$$\frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)^2 \sim \chi^2(1)$$

Logo, $\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)^2 + \frac{1}{3}(X_4+X_5+X_6)^2 \sim \chi^2(2)$

$c = 1/3$

tilibra

(13) Prove que a distribuição de $\hat{\sigma}_0^2$ no exemplo 8.2.1 e 8.2.2 é uma gama $\left(\frac{n}{2}, n/(2\sigma^2)\right)$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$$

Pelo exemplo 8.2.2,

$$\frac{X_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$$

Logo, $\frac{n\,\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n) \equiv \text{Gamma}(n/2, 1/2)$

E, $\hat{\sigma}_0^2 \sim \text{Gamma}(n/2, n/2\sigma^2)$