7.6 - De Groot

(3) Suponha $X_1, \ldots, X_n \sim Exp(\beta)$, com β desconhecido.
Queremos MLE para a mediana que vamos denotar por φ.
Dado que Exp é contínua $P(X_1 \geq \varphi) = 0.5 \Rightarrow e^{-\beta\varphi} = 0.5$, pois
β é o parametro da Exp. Logo $\log(e^{-\beta\varphi}) = \log(1/2) \Rightarrow -\beta\varphi = -\log 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi = (\log 2)/\beta$.

Sabemos que o MLE de β é $\hat{\beta} = 1/\Sigma X_i$. Sendo $g(\beta) = (\log_2)/\beta$.
Pela invariancia do estimador e ~~φ~~ $\varphi = g(\beta) \Rightarrow \hat{\varphi} = g(\hat{\beta}) = \log 2/\hat{\beta} = S \log_2$

Então, $S \log 2$ é o MLE para φ

5) Seja $X_1, \dots, X_n \sim \text{Unif}[a,b]$, com a e b desconhecidos, queremos o EMV para $(a+b)/2$.

~~Temos que~~ $\cancel{f_n(X|a,b) = \prod f(x_i|a,b) = \frac{1}{(b-a)^n} \mathbb{1}\{x_1, \dots, x_n \in [a,b]\}}$

~~Se~~ $\cancel{x_i \notin [a,b]}$ ~~então~~ $\cancel{f_n(x|a,b) = 0}$

Sabemos que $\hat{b} = \max(X_i)$ e $\hat{a} = \min(X_i)$ são estimadores MLE para b e a respectivamente então a média tem MLE

$$\hat{\mu} = \frac{\max(X_i) + \min(X_i)}{2}$$

(11) Suponha que $X_1, \dots, X_n \sim Unif(0, \theta)$, com θ desconhecido. Mostre que a sequência de MLE de θ é uma sequência consistente.

Temos que mostrar que $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$.

Sabemos que $\hat{\theta}_n = \max\{X_i\}$ é o MLE de θ, e que $P(X_i \leq \theta) = 1$, assim $P(\hat{\theta}_n \leq \theta) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
P(\theta - \hat{\theta}_n < \varepsilon) &= P(\hat{\theta}_n > \theta - \varepsilon) \\
&= 1 - P(\hat{\theta}_n \leq \theta - \varepsilon) \\
&= 1 - P(X_1 \leq \theta - \varepsilon, \dots, X_n \leq \theta - \varepsilon) \\
&= 1 - P(X_1 \leq \theta - \varepsilon) \dots P(X_n \leq \theta - \varepsilon) \\
&= 1 - P(X_1 \leq \theta - \varepsilon)^n \\
&= 1 - \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n \to 1, \text{ quando } n \to \infty
\end{aligned}
$$

, pois $\theta - \varepsilon < \theta$

Concluímos que $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$.

20) Queremos provar que o estimador método dos momentos da média da Poisson é o MLE.

Seja $X_1, \dots, X_n \sim \text{Poisson}(\theta)$

MLE:

$$f_n(x|\theta) = \frac{e^{-n\theta}\,\theta^{\sum x_i}}{\prod x_i!}$$

$$\Rightarrow L(\theta|x) = -n\theta + \sum x_i \ln\theta + \sum \ln(x_i!)$$

Assim, $$\frac{\partial}{\partial\theta} L(\hat{\theta}|x) = -n\ \frac{\sum x_i}{\hat{\theta}} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \overline{X}_n$$

Momentos:

Temos 1 momento θ. Além disso $E(X_1) = \theta$ é finito. Podemos usar o método. O método amostral é $m_1 = \cancel{E[X_1|\theta]}\ \frac{1}{n}\sum_i X_i$ e $\mu_1(\theta) = E(X_1|\theta) = \theta$. Logo pelo método dos momentos $\overline{X}_n = m_1 = \mu_1(\hat{\theta}) = \hat{\theta}$

22) Seja $X_1, \dots, X_n \sim \text{Unif}[0, \theta]$

a) Queremos encontrar o EMM de θ.

Temos que θ é 1-dimensional e $E[X|\theta] = \theta/2$ é finito, logo o metodo amostral é $m_1 = \frac{1}{n} \sum X_i$ e $\mu_1(\theta) = E(X_1|\theta) = \theta/2$. Então o EMM é $\overline{X}_n = \frac{\hat{\theta}}{2} \Rightarrow \hat{\theta} = 2\overline{X}_n$.

b) Note que, $2\overline{X}_n \neq \max(X_1, \dots, X_n) = \hat{\theta}_{MLE}$

(23) Seja $X_1,\dots,X_n \sim \text{Beta}(\alpha,\beta)$. e seja $\theta=(\alpha,\beta)$.

a) Queremos encontrar o EMM para θ, só que aqui temos 2 parametros. Como média é variancia estão definidos. $m_1=\frac{1}{n}\sum X_i=\bar{X}_n$ e $m_2=\frac{1}{n}\sum X_i^2$. Além disso, $\mu_1(\theta)=E(X_1|\theta)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ e

$$\mu_2= E(X_1^2|\theta) = Var(X_1|\theta)+E(X_1|\theta)^2$$
$$= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}+\frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2}$$
$$= \frac{\alpha}{(\alpha+\beta)^2}\left[\frac{\beta}{(\alpha+\beta+1)}+\alpha\right]$$

Pelo método $\bar{X}_n=\frac{\hat\alpha}{\hat\alpha+\hat\beta}$, $\frac{1}{n}\sum X_i^2=\frac{\hat\alpha}{(\hat\alpha+\hat\beta)^{\cancel{2}}}\left[\frac{\cancel{(\hat\alpha+\hat\beta)}(\hat\alpha+1)}{(\hat\alpha+\hat\beta+1)}\right]$

$$\hat\alpha(1-\bar{X}_n)=\hat\beta\bar{X}_n \Rightarrow \hat\alpha=\frac{\hat\beta\bar{X}_n}{(1-\bar{X}_n)}$$

Logo, $\frac{1}{\bar{X}_n}=\frac{1}{n}\sum X_i^2-\frac{\hat\beta\bar{X}_n/(1-\bar{X}_n)+1}{\hat\beta\bar{X}_n/(1-\bar{X}_n)+\hat\beta+1}-\frac{\hat\beta\bar{X}_n+1-\bar{X}_n}{\hat\beta+1-\bar{X}_n}$

$$\Rightarrow (\hat\beta+1-\bar{X}_n)\sum X_i^2=n\bar{X}_n(\beta\bar{X}_n+1-\bar{X}_n)$$
$$\Rightarrow \hat\beta\left[\sum X_i^2-n\bar{X}_n\cdot\bar{X}_n\right]=n\bar{X}_n\cancel{(\beta\bar{X}_n+1-\bar{X}_n)}-n\bar{X}_n^2+\bar{X}_n\sum X_i^2-\sum X_i^2$$
$$\Rightarrow \hat\beta=\frac{\left[\bar{X}_n-\bar{X}_n^2+\bar{X}_n\cdot\overline{X_n^2}-\overline{X_n^2}\right]}{\overline{X_n^2}-\bar{X}_n^2}=\frac{(1-\bar{X}_n)(\bar{X}_n-\overline{X^2})}{\overline{X^2}-\bar{X}^2}$$

Por fim $\hat\alpha=\frac{(\bar{X}_n-\overline{X_n^2})}{\overline{X_n^2}-\bar{X}_n^2}\cdot\bar{X}_n$

b) $f(x|\theta)=\frac{(\prod x_i)^{\alpha-1}(\prod(1-x_i))^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)^n}$

$$L(\theta|x)=(\alpha-1)\sum\ln(x_i)+(\beta-1)\sum\ln(1-x_i)-n[\ln(\Gamma(\alpha))+\ln(\Gamma(\beta))-\ln(\Gamma(\alpha+\beta))$$
$$\frac{\partial L}{\partial\alpha}=\sum\ln(x_i)-n\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}+\frac{\Gamma'(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\cdot 1=0$$

Note que, o valor envolve $\sum\ln(x_i)$ que não aparece no EMM, logo não é o mesmo.