2, 3, 6, 9, 10

7.9 - DeGroot

(2) Suponha $X_1, \dots, X_n \sim Unif(0, \theta)$, onde o valor do parametro θ é desconhecido $(\theta > 0)$ e deve ser estimado. Suponha que para qualquer estimador $S(X_1, \dots, X_n)$, o MSE $R(\theta, S) = E_\theta[S(X) - h(\theta)]^2$. Explique porque o estimador $S_1(X_1, \dots, X_n) = 2\bar{X}_n$ é inadmissível

Ou seja, queremos mostrar que existe S_0 tal que $R(\theta, S_0) < R(\theta, S_1)$. Já vimos que a estatística $T = \max(X_i)$ é suficiente, ~~em~~ pois

$$f_n(X|\theta) = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}\{X_1, \dots, X_n \leq \theta\} = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}(\max(X_i) \leq \theta) \text{ é fatorável}$$

Por Rao-Blackwell, seja $S_0(X) := E_\theta[2\bar{X}_n | T]$. Nesse caso, como $2\bar{X}_n \neq g(t)$, isto é, não é uma função de T, e $R(\theta, 2\bar{X}_n) = E_\theta[(2\bar{X}_n - \theta)^2) < \infty$, vale a desigualdade

$$R(\theta, S_0) < R(\theta, 2\bar{X}_n)$$

Então $\bar{X}_n$ é inadmissível.

③ Considere o exercício anterior e o estimador S_1 seja definido como no mesmo. Determine o $R(\theta, S_1)$, para $\theta > 0$

$$R(\theta, S_1) := E_\theta[(S_1(X) - \theta)^2]$$
$$= E_\theta[(2\bar{X}_n - \theta)^2]$$
$$= 4 \underbrace{E_\theta[(\bar{X}_n - \theta/2)^2]}_{Var}$$
$$= 4\, Var(\bar{X}_n)$$
$$= \frac{4}{n^2} \sum_{i}^{n} Var(X_i)$$
$$= \frac{4}{n} Var(X_i)$$
$$= \frac{4}{n} \cdot \frac{1}{12} \cdot \theta^2 = \frac{\theta^2}{3n}$$

(6) Suponha $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$, com α desconhecido e β conhecido. Explique por que $\bar{X}_n$ é um estimador inadmissível para a média ~~E~~ dessa distribuição com ~~erro quadrado~~ função de perda quadrada.

Temos que seguir os mesmos ~~casso~~ passos do 2:

1. Encontrar T estatística suficiente
2. Ver que ~~δ~~ $S_0 \neq g(T)$
3. Aplicar Rao-Blackwell

1. Já provamos que $T = \prod X_i$ é estatística suficiente para a média:

$$f_n(x|\alpha) = \frac{\beta^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha)^n} (\prod x_i)^{\alpha - 1} e^{-\beta \sum x_i} \quad \text{é fatorável}$$

2. De fato $\bar{X}_n$ não é função de $\prod X_i$

3. Se ~~defin~~ definirmos $S_0 := E_\theta[\bar{X}_n | \prod X_i]$ e vemos que $R(\alpha/\beta, \bar{X}_n) = E[(\bar{X}_n - \alpha/\beta)^2] < \infty$, por Rao-Blackwell, $R(\alpha/\beta, S_0) < R(\alpha/\beta, \bar{X}_n)$, então $\bar{X}_n$ não é admissível.

10) Seja $X_1, \ldots, X_n$ com p.d.f $f(x|\theta)$, $\theta \in \Omega$. Suponha que o valor de θ pode ser estimado e que T é uma estatística suficiente para θ. Seja S um estimador arbitrário de θ, e seja S_0 outro estimador definido como $S_0 = E[S|T]$. Mostre que for every value of $\theta \in \Omega$

$$E[|S_0 - \theta|] \leq E_\theta[|S - \theta|]$$

Pelo exercício 9, temos que $|E(X)| \leq E[|X|]$

$$\begin{aligned} E[|S-\theta| \,|\, T] &\geq |E[S-\theta|T]| \\ &= |E_\theta[S|T] - \theta| \\ &= |S_0 - \theta| \end{aligned}$$

Portanto, $E_\theta[|S_0 - \theta|] \leq E[E[|S-\theta| \,|\, T]] = E_\theta[|S-\theta|]$