7.5 - De Groot

① Seja $X_1, \ldots, X_n$ numeros distintos. Seja Y uma variavel aleatoria discreta com distribuição

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & y \in \{x_1, \ldots, x_n\} \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$$

$$E(Y) = \sum y_i f(y_i) = \frac{1}{n} \sum y_i = \frac{1}{n} \sum x_i = \bar{X}_n$$

$$E(Y^2) = \sum y_i^2 f(y_i) = \frac{1}{n} \sum y_i^2 = \frac{1}{2} \sum x_i^2$$

Logo, $Var(Y) = \frac{1}{n} \sum x_i^2 - X_n^2 = \frac{1}{n} \sum x_i^2 - 2\bar{X}_n^2 + X_n^2$

$$= \frac{1}{n} \sum x_i^2 - \frac{2\bar{X}_n}{n} \sum x_i + \frac{1}{n} \sum X_n^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum (x_i^2 - 2\bar{X}_n x_i + \bar{X}_n^2]$$

$$= \frac{1}{2} \sum (x_i - \bar{X}_n)^2$$

(4) Suponha $X_1, \ldots, X_n \sim$ Bernoulli(θ), θ desconhecido, $0 < \theta < 1$.
Queremos mostrar que o MLE de θ não existe se todo valor observado é 0 ou 1, temos que

$$f(x|\theta) = \theta^{s}(1-\theta)^{n-s}$$

Se $S=0$, $f(x|\theta) = (1-\theta)^n$ é decrescente, então o máximo é atingido quando $\theta = 0$ que é fora do intervalo. Análogo para $S=1$.

9) Suponha $X_1, \dots, X_n$ amostra com pdf $f(\tilde{x}|\theta)$ dada por

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & \text{para } 0<x<1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Suponha também θ desconhecido. Encontre o MLE de θ.

$f_n(\tilde{x}|\theta) = \prod \theta x_i^{\theta-1} = \theta^n \prod x_i^{\theta-1} = \theta^n (\prod x_i)^{\theta-1}$, $\min(x_i) > 0$ e $\max(x_i) < 1$

Se $L(\theta) = \log f_n(\tilde{x}|\theta) = n \log \theta + (\theta-1) \sum \log x_i$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} L(\theta) = \frac{n}{\theta} + \sum \log x_i = 0 \Leftrightarrow \hat{\theta} = \frac{n}{\sum \log x_i} > 0$$

(10) Suponha $X_1, \dots, X_n$ amostra aleatória com p.d.f $f(x|\theta)$ dada por

$$~~f(x|\theta)~~ \quad f(x|\theta) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|}$$

também, suponha que o valor de θ é desconhecido. Encontre o MLE de θ.

$$f_n(\tilde{x}|\theta) = \prod \frac{1}{2} e^{-|x_i-\theta|} = \frac{1}{2^n} e^{-\sum |x_i-\theta|}$$

$$L(\theta) = \ln f_n(\tilde{x}|\theta) = -n\log 2 - \underbrace{\sum |x_i-\theta|}$$

Queremos θ que minimize isso

$$\hat{\theta} = \text{mediana}\{x_1, \dots, x_n\}$$