7.7 - De Groot

(4) Seja $X_1, \dots, X_n \sim$ Normal(μ, σ^2) com μ conhecida e σ não seja $T = \sum (X_i - \mu)^2$, queremos mostrar que T é suficiente

sendo $$f_n(x|\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^2\right)$$

$$f_n(x|\sigma^2) = \prod f(x|\sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum(X_i-\mu)^2\right.$$

sendo $u(x) = 1$ e $v(r(x), \sigma^2) = f_n(X|\sigma^2)$, podemos usar o critério da Fatoração logo T é suficiente.

(7) Seja $X_1, \ldots, X_n \sim Beta(\alpha, \beta)$ com β conhecido e α não, e seja $T = \prod X_i$.

Temos que,

$$f_n(x|\alpha) = \prod f(x_i|\alpha) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)^n} (\prod(x_i))^{\alpha-1} (\prod(1-x_i))^{\beta-1}$$

sendo $u(x) = (\prod(1-x_i))^{\beta-1}$ e $v(T,\alpha) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)^n} \cdot T^{\alpha-1}$, logo, pelo critério ~~da~~ de ~~t~~ fatoração.

13) Suponha $X_1, \dots, X_n$ com p.d.f $f(x|\theta)$, onde $\theta \in \Omega$, suponha $T = r(X_1, \dots, X_n)$ e $T' = r'(X_1, \dots, X_n)$ são estatísticas com T' uma função um para um de T i.e. o valor de T' pode ser determinado por T sem saber $X_1, \dots, X_n$ e o valor de T pode ser determinado por T' sem saber os valores de $X_1, \dots, X_n$. Mostre que T' é suficiente para θ se e só se T também é.

Seja h tal que $T' = h(T)$ e h é injetiva

($\Rightarrow$) ~~Seja~~ Suponha T uma estatística suficiente para θ. Assim,

$$f_n(x|\theta) = u(x)\, v(T, \theta)$$

para algumas funções $u, v \geq 0$. Nesse caso $T = h^{-1}(T')$ e, portanto

$$f_n(x|\theta) = u(x)\, v(h^{-1}(T'), \theta)$$

Logo v só depende dos dados por T', pela regra da fatoração, T' é suficiente.

($\Leftarrow$) Análogo a ida.

16. Seja $\theta \in \Omega$. Seja X ~~uma~~ com p.d.f. $f_n(x|\theta)$ condicional em θ. Seja $T(x) = r(X)$ uma estatística. Assuma que T é suficiente. Prove que, para $\forall$ prior p.d.f. para θ, a ~~p~~ p.d.f. posterior de θ ~~e~~ dado $X = x$ depende em x ~~p~~ apenas de $r(x)$.

Temos que, a posterior é

$$\xi(\theta|x) = \frac{f_n(x|\theta)\, \xi(\theta)}{g_n(\theta)} = \frac{u(x)\, v(r(x), \theta)\, \xi(\theta))}{g_n(x)}$$

temos que, $g_n(x) = \int_\Omega f_n(x|\theta)\xi(\theta)\, d\theta = \int_\Omega u(x) v(r(x), \theta) \xi(\theta)\, d\theta = u(x) \int_\Omega v(r(x),\theta) d\theta$

Onde pelo critério da fatorização. Logo, $\xi(\theta|x)$ depende de x apenas através de $r(x)$.