8.3 - DeGroot

(8) Suponha $X \sim \chi^2(200)$, explique por que o teorema central do limite pode ser usado para encontrar o valor de $P(160 < X < 240)$.

Note que, $X = \sum_{i=1}^{200} X_i^2$, $X_i \sim (0,1)$

Temos que, $X_i^2 \sim \chi^2(1)$, tal que, $E[X_i^2] = 1$ e $\sigma^2 = Var[X_i^2] = 2$

Pelo teorema central do limite,

$$\frac{\frac{1}{n}\sum X_i^2 - 1}{\sqrt{2/n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Isto é, $\frac{X/n - 1}{\sqrt{2}/n^{1/2}} = \frac{X n^{-1/2} - n^{1/2}}{\sqrt{2}} \xrightarrow{d} N(0,1)$

Usando essa aproximação para $n = 200$

$$P\left(\frac{X \cdot 200^{-1/2} - 200^{1/2}}{\sqrt{2}} \leq x\right) \approx \Phi(x)$$ → cdf da Normal

Logo,

$$P\left(X \leq \frac{\sqrt{2}x + 200^{1/2}}{200^{-1/2}}\right) \approx \Phi(x)$$

$$P(X \leq 20x + 200) \approx \Phi(x)$$

Fazendo, $y = 20x + 200 \Rightarrow x = y/20 - 10$

temos que,

$$P(X \leq y) \approx \Phi(y/20 - 10)$$

Em particular, $P(160 < X < 240) = P(X < 240) - P(X < 160)$

$= \Phi(2) - \Phi(-2)$

$= 2\Phi(2) - 1$

≈ 0.9545 //

tilibra