11.2 - DeGroot

(2) Mostre que $E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$, de fato como $E[Y|X] = \beta_0 + \beta_1 X$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X})}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$$

Vemos que, $\sum (Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X}) = \sum (X_i - \bar{X}) Y_i + \sum (X_i - \bar{X}) \bar{Y}$

$$= \sum (X_i - \bar{X}) Y_i + \bar{Y} \sum (X_i - \bar{X})$$

$$= \sum (X_i - \bar{X}) Y_i - \bar{Y} \cancel{(- n\bar{X} + \sum X_i)} \to 0$$

$$\Rightarrow E[E[Y_i | X]] = E[\beta_0 + \beta_1 X] = \beta_0 + \beta_1 X$$

Logo, $E[\hat{\beta}_1] = \frac{\sum (X_i - \bar{X}) E[Y_i]}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$

$$= \frac{\sum (X_i - \bar{X})(\beta_0 + \beta_1 X)}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$$

$$= \frac{\sum (X_i - \bar{X}) \beta_0 + \beta_1 \sum X_i (X_i - \bar{X})}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \leftarrow \sum (X_i - \bar{X}) = 0$$

$$= \frac{\beta_1 \sum X_i (X_i - \bar{X})}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$$

$$\overset{(*)}{=} \beta_1$$

(*) Pois, $\sum X_i (X_i - \bar{X}) = \sum X_i^2 - \bar{X} \sum X_i \quad n\bar{X}$

$$= \sum X^2 - 2\bar{X} \sum X_i + \bar{X} \underbrace{\sum X_i}$$

$$= \sum (X_i - \bar{X})^2$$

(3) Mostrar que $E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$

$$E[\hat{\beta}_0] = E[\bar{Y}_n] - E[\hat{\beta}_1 \bar{X}]$$

$$= \frac{1}{n} \sum (\beta_0 + \beta_1 X_i) - \beta_1 \bar{X}$$

$$= (\beta_0 + \beta_1 \bar{X}) - \bar{X}_n \beta_1 = \beta_0$$

⑥ Mostrar que em um problema ~~simples~~ simples de regressão linear, os estimadores $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ serão independentes se $\bar{x} = 0$

~~Suponha Alas Amd~~ Ambos $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ são funções lineares de variáveis $Y_1, \ldots, Y_n$ são indepentes e tem distribuição normal identical. A distribuição conjunta de $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ é uma distribuição normal bivariada. Segue que $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ são não correlacionadas onde $\bar{x}_n = 0$. Portanto, pela propriedade da distribuição normal bivariada segundo a Eq. 11.2.6.