9.5 - De Groot

(8) Suponha $X_1, \dots, X_n \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$, com μ e σ^2 desconhecidos. Seja $\sigma_0^2 \in \mathbb{R}^+$, e suponha que deseja testar a seguinte hipótese para um nível de significância α_0 $(0 < \alpha_0 < 1)$

$$H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2.$$
$$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$$

Seja $S_n^2 = \sum (X_i - \bar{X}_n)^2$, e suponha que o procedimento de teste a ser usado especifica que H_0 deve ser rejeitado se $S_n^2 / \sigma_0^2 \geq c$. Além disso, seja $\pi(\mu, \sigma^2 | S)$ a função poder do teste. Explique como escolhemos a constante c e para que independentemente do valor de μ, ~~o seguinte~~ seja válido que:

$$\pi(\mu, \sigma^2 | S) < \alpha_0 \quad \text{se } \sigma^2 < \sigma_0^2,$$
$$\pi(\mu, \sigma^2 | S) = \alpha_0 \quad \text{se } \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ e}$$
$$\pi(\mu, \sigma^2 | S) > \alpha_0 \quad \text{" } \sigma^2 > \sigma_0^2.$$

Queremos um teste nível α_0. $S_n^2 = \sum (X_i - \bar{X}_n)^2$

Rejeitamos H_0 se $S_n^2 / \sigma_0^2 \geq c$

$\pi(\mu, \sigma^2 | S) = P(S_n^2 \geq c\, \sigma_0^2 \mid (\mu, \sigma^2))$

Se $\sigma^2 = \sigma_0$, provamos que $S_n^2 \sim \chi^2_{n-1}$

Logo, queremos que $P(S_n^2 / \sigma_0^2 \geq c \mid \sigma^2 = \sigma_0^2) = \alpha_0$

Tome $c = (\chi^2_{n-1})^{-1}(1 - \alpha_0) \iff 1 - \chi^2_{n-1}(c) = \alpha_0$

Agora suponha que $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ então $S_n^2 / \sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$, e então,

$$T = \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \cdot \frac{S_n^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

$\pi(\mu, \sigma^2 | S) = P(S_n^2/\sigma_0^2 \geq c \mid \mu, \sigma^2)$

$= P(T > c\,\sigma_0^2/\sigma^2 \mid \mu, \sigma^2)$

$= 1 - \chi^2_{n-1}(c\,\sigma_0^2/\sigma^2)$

Se $\sigma^2 < \sigma_0^2$, então $\sigma_0^2/\sigma^2 > 1$, logo $\chi^2_{n-1}(c) < \chi^2_{n-1}(c\,\sigma_0^2/\sigma^2)$

E assim $\pi(\mu, \sigma^2 | S) < 1 - \chi^2_{n-1}(c) = \alpha_0$

Se $\sigma^2 > \sigma_0^2$, então $\sigma_0^2/\sigma^2 < 1$, e analogamente $\pi(\mu, \sigma^2 | S) > \alpha_0$