

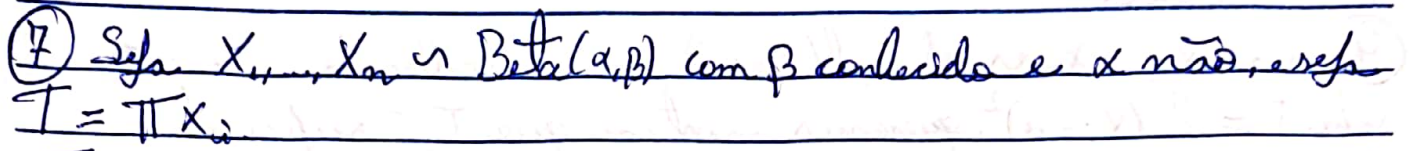
7.7 - De Groot

④. Seja X_1, \dots, X_n $\text{Normal}(\mu, \sigma^2)$ com μ conhecida e σ não
seja $T = \sum (X_i - \mu)^2$, queremos mostrar que T é suficiente

sendo $f(x|\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{1}{2}(x-\mu)^2)$

$$f_m(x|\sigma^2) = \prod f(x|\sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp(-\frac{1}{2} \sum (X_i - \mu)^2)$$

sendo $u(x) = 1$ e $v(r(x), \sigma^2) = f_m(x|\sigma^2)$, podemos usar o
critério da Fatoração logo T é suficiente


$$f_m(x|\alpha) = \prod f(x_i|\alpha) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)^m} (\prod x_i)^{\alpha-1} (\prod (1-x_i))^{\beta-1}$$

sendo $u(x) = (\prod (1-x_i))^\beta$ e $v(T, \alpha) = \frac{1}{B(\alpha, \beta^n)} \cdot T^{\alpha-1}$. Logo, pelo critério ~~de~~ de estimação:

(13) Suponha X_1, \dots, X_n com p.d.f $f(x|\theta)$, onde $\theta \in \Omega$, suponha $T = r(X_1, \dots, X_n)$ e $T' = r'(X_1, \dots, X_n)$ são estatísticas com T' uma função um para um de T . O valor de T' pode ser determinado por T sem saber X_1, \dots, X_n e o valor de T pode ser determinado por T' sem saber os valores de X_1, \dots, X_n . Mostre que T' é suficiente para θ se e só se T também é.

Seja h tal que $T' = h(T)$ e h é injetiva

(\Rightarrow) ~~Seja~~ Suponha T uma estatística suficiente para θ . Assim,

$$f_n(x|\theta) = u(x) v(T, \theta)$$

para algumas funções $u, v \geq 0$. Nesse caso $T = h^{-1}(T')$ e, portanto

$$f_n(x|\theta) = u(x) v(h^{-1}(T'), \theta)$$

Logo v só depende dos dados por T' , pela regra da fatoração, T' é suficiente.

(\Leftarrow) Análogo a ida.

⑩. Seja $\theta \in \Omega$. Seja X uma v.a. com p.d.f. $f_n(x|\theta)$ condicional em θ . Seja $T(x) = r(x)$ uma estatística. Assuma que T é suficiente. Prove que, para \forall prior p.d.f. para θ , a p.d.f. posterior de θ dada $X = x$ depende em x apenas de $r(x)$.

Temos que, a posterior é

$$\tilde{E}(\theta|x) = \frac{f_n(x|\theta) E(\theta)}{\int_{\Omega} f_n(x|\theta) E(\theta) d\theta} = \frac{u(x) v(r(x), \theta) E(\theta)}{\int_{\Omega} u(x) v(r(x), \theta) E(\theta) d\theta}$$

$$\text{temos que, } g_n(x) = \int_{\Omega} f_n(x|\theta) E(\theta) d\theta = \int_{\Omega} u(x) v(r(x), \theta) E(\theta) d\theta = u(x) \int_{\Omega} v(r(x), \theta) E(\theta) d\theta$$

Logo, pelo critério da fatoração. Logo, $E(\theta|x)$ depende de x apenas através de $r(x)$.