Exercício 1:
A probabilidade condicional de (A) dado (B) denotada por (P(A|B)) é definida como a probabilidade de (A) ocorrer, assumindo que (B) já ocorreu.

Para demostrar que $(P(A \mid A \wedge B) = 1)$

$P(A \mid A \wedge B)$ é a probabilidade de (A) ocorrer dado que $(A \wedge B)$ já ocorreu.

Se $(A \wedge B)$ ocorreu então (A) certamente ocorreu, isso significa que sob a condição de $(A \wedge B)$, (A) é um fato garantido.

Assim a probabilidade de (A) ocorrer, dado que $(A \wedge B)$ já ocorreu é de 100% ou 1

$$P(A \mid A \wedge B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(A \wedge B)}$$

$P(A \wedge B)$ é a probabilidade conjunta de (A) e (B) ocorrerem. Quando calculamos a probabilidade de (A) dado que $(A \wedge B)$ ocorreu, basicamente estamos perguntando qual é a probabilidade de (A) ocorrer se sabemos que $(A \wedge B)$ ocorreu. Como $(A \wedge B)$ implica que (A) ocorreu, a fração se torna $(P(A \wedge B) / P(A \wedge B))$ que é igual a 1.

O problema reflete um principio da probabilidade condicional. Se um evento implica em outro , a probabilidade do evento implicado, dado o primeiro, é 1. Logicamente se algo já aconteceu, a probabilidade de ter acontecido é 100%.

$$P(\text{ DorDeDente} \mid \text{Cárie }) = \frac{P(\text{DorDeDente} \wedge \text{Cárie})}{P(\text{Cárie})}$$

A partir da tabela fornecida, pode encontrar:

(P (DorDeDente) ∧ teste (Cárie)) = 0,108+0,012=0,12

(P (Cárie) = 0,108+0,012+0,072+0,008 = 0,2)

$$P(\text{DorDeDente}|\text{Cárie}) = \frac{0{,}12}{0{,}2} = 0{,}6$$

B (P((Cárie) | (DorDeDente) V (boticão)))

Dessa forma primeiro calcula a probabilidade de (DorDeDente) | V (boticão) que já foi dado como 0,416 dai dado a probabilidade conjunta (P(teste(Cárie) ∧ teste(DorDeDente) V teste(boticão))) é a soma das probabilidades de ter cárie quando há dor de dente ou boticão (0,108 + 0,012 + 0,072 = 0,192)

$$P(\text{Cárie} \mid \text{DorDeDente V boticão}) = \frac{0{,}192}{0{,}416} = 0{,}4615$$

Exercício 2:

P(Doença | Positivo) = $\frac{\text{P(Positivo | Doença) . P(Doença)}}{\text{P(Positivo)}}$

P(Doença) | (Positivo) é a probabilidade de ter a doença dado que o teste foi positivo.

P(Positivo) | (Doença) é a probabilidade de um teste positivo dado que a pessoa tem a doença, que é 0,99 ou 99%.

P(Doença) é a probabilidade pré-teste de ter a doença, que é 0,0001 ou 1%.

P(Positivo) é a probabilidade total de um teste positivo que inclui verdadeiro positivo e falso positivo.

Para encontrar P(Positivo) deve considerar os verdadeiros quanto falsos positivos.

P(Positivo) = P(Positivo | Doença) . P(Doença) + P(Positivo | não doença)

P(positivo) = (0,99 x 0,0001) + (0,01 x (1 – 0,0001))

P(Positivo) = 0,000099 + 0,0099 = 0,009999

P(Doença | Positivo) = $\frac{0{,}99\text{x}0{,}0001}{0{,}009999} = \frac{0{,}000099}{0{,}009999} = 0{,}0099$

Saber que é uma doença rara é uma boa notícia porque, mesmo com um teste positivo a probabilidade de realmente ter a doença é baixa.

A probabilidade de realmente ter a doença, mesmo após um resultado positivo é de 99% de precisão e é de aproximadamente 0,99% ou certa de 1 em 100.

Exercício 3:

Evento A:

P(A) = (1)(10) uma em dez moedas é falça.

Evento B:

Moeda normal P (B | A) = (1)(2) 50% de chance de ser cara

Moeda falsa P (B | A) = (1) 100% de chance ser cara.

A probabilidade de moeda ser falsa dado que obteve cara é:
P (A | B) = $\frac{\text{P(B | A) x P(A)}}{\text{P(B)}}$

Para encontrar P(B) deve considerar as moedas verdadeiras e falsas:

P(B) = P(B | A) . P(A) + P(B | A) . P(A)

P(B) = (1.1/10) + (1/2 . 9/10)

$P(B) = \frac{1}{10} + \frac{9}{20} = \frac{1 + 9/2}{10} = \frac{11}{20}$

$P(A \mid B) = \frac{1.1/10}{11/20} = \frac{1}{10} . \frac{20}{11} = \frac{2}{11}$

A probabilidade de a moeda ser falsa após obter cara em um lançamento é ((2)(11))

A probabilidade de obter 5 vezes seguidas com uma moeda normal é ((1)(2)^5 = (1)(32)) enquanto com a moeda falsa é (1).

Evento C:

P (C | A) = 1 com a moeda falsa

P (C | A) = 1/32 com a moeda normal

P (A | C) = é a probabilidade de a moeda ser falsa dado que obteve cara 5 vezes.

$P (A \mid C) = \frac{P(C \mid A) . P(A)}{P(C)}$

P(C) = P(C | A) . P(A) + P(C | A) . P(A)

$P(C) = \left(1 . \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{32} . \frac{9}{10}\right)$

P(C) = 1/10 + 9/320 = 32+9/320 = 41/320

$P(A \mid C) = \frac{1.1/10}{41/320}$ = 1/10 . 320/41 = 32/41

A probabilidade de a moeda ser falsa após obter cara em cinco lançamentos consecutivos é ((32)(41))

A probabilidade condicional e o Teorema de Bayes podem ser usados para atualizar nossas crenças com base em novas evidências. Após um único lançamento resultando em cara, a chance de ter escolhido a moeda falsa aumenta de 1 em 10 para 2 em 11. Após cinco caras consecutivas, a probabilidade de ter escolhido a moeda falsa aumenta significativamente para 32 em 41.

Exercício 4:

$P(Azul \mid T\_Azul) = \frac{P(T\_Azul \mid Azul) . P(Azul)}{P(T\_Azul)}$

(P(Azul) | (T_Azul)) é a probabilidade de o taxi ser azul, dado que a testemunha disse que é azul.

(P(T_Azul) | (Azul)) é a probabilidade de a testemunha dizer que o taxi é azul quando realmente é azul, que é 0,75 ou 75%.

P(Azul) é a probabilidade a priori de um taxi ser azul, que é 0,1 ou 10%.

P(T_Azul) é a probabilidade total de a testemunha dizer que o taxi é azul.

Para calcular P(T_Azul) deve considerar a chance da testemunha dizer que é azul quanto ele ser realmente azul, quanto a testeminha dizer que é azul quando na verdade é verde.

P(T_Azul) = p(T_Azul | Azul) . P(Azul) + P(T_Azul | Verde) . P(Verde)

(P(T_Azul) | (Verde)) = 1 – P(T_Verde) | (Verde) = 1 -0,75 = 0,25 sendo que se a chance de acertar é 75% então, a de errar é 25%.

P(Verde) = 0,9

P(T_Azul) = (0,75 . 0,1) + (0,25 . 0,9) = 0,075 + 0,225 = 0,3

$$P(Azul \mid T\_Azul) = \frac{0{,}75 \,.\, 0{,}1}{0{,}3} = \frac{0{,}075}{0{,}3} = 0{,}25$$

A probabilidade do taxi ser realmente azul, dado que a testemunha disse que era azul sob condições de pouca iluminação, é de 25%. Isso se da a alta proporção de taxi verdes na cidade.

Exercício 5:

Prevalência do vírus 1% ou 0,01.

Teste A:

Sensibilidade (V_Positivo) 95% ou 0,95.

Taxa de falso positivo 10% ou 0,1.

Teste B:

Sensibilidade (V_Positivo) 90% ou 0,9.

Taxa de falso positivo 5% ou 0,05.

$$P(Virus \mid Positivo) = \frac{P(Positivo \mid Virus) \,.\, P(Virus)}{P(Positivo)}$$

(P(Virus) | (Positivo)) é a probabilidade de ter o vírus dado um resultado positivo.

(P(Positivo) | (Virus)) é a sensibilidade do teste.

P(Virus) é a prevalência do vírus.

P(Positivo) é a probabilidade total de um resultado positivo, que inclui verdadeiro ou falso positivo.

$P(\text{Positivo}) = P(\text{Positivo} \mid \text{Virus}) \,.\, P(\text{Virus}) + P(\text{Positivo} \mid \tilde{N}\text{virus}) \,.\, p(\tilde{N}\text{virus})$

$P(\text{Positivo})A = 0{,}95 \,.\, 0{,}01 + 0{,}1 \,.\, 0{,}99 = 0{,}0095 + 0{,}099 = 0{,}1085$

$$P(\text{Virus} \mid \text{Positivo})A = \frac{0{,}95 \,.\, 0{,}01}{0{,}1085} = \frac{0{,}0095}{0{,}1085} = 0{,}0876$$

$P(\text{Positivo})B = 0{,}9 \,.\, 0{,}01 + 0{,}05 \,.\, 0{,}99 = 0{,}009 + 0{,}0495 = 0{,}0585$

$$P(\text{Virus} \mid \text{Positivo})B = \frac{0{,}9 \,.\, 0{,}01}{0{,}0585} = \frac{0{,}009}{0{,}0585} = 0{,}1538$$

A probabilidade de realmente ter vírus dado um resultado positivo é aproximadamente.

Teste A: 8,76%

Teste B: 15,38%

Sendo assim o teste B é mais indicado para quem tem realmente o vírus. Isso se da a menor taxa de falso positivo em comparação com o teste A, tornando o teste B mais confiável em uma indicação de presença do vírus quando o resultado é positivo.

Mesmo que o teste A tenha uma sensibilidade ligeiramente maior, a menor taxa de falso positivo do teste B o torna mais confiável para indicar a presença do vírus em caso de resultado positivo.