

动态信息素更新蚁群算法在指派问题中的应用

姜长元

(湖州师范学院理学院, 湖州 313000)

摘 要: 建立指派问题的数学模型, 将其转化为旅行商问题, 利用蚁群算法求解此问题。蚁群算法是一种解决组合优化问题的有效算法, 但同样存在搜索速度慢, 易于陷于局部最优的缺陷。该文提出一种具有动态信息素更新的蚁群算法, 通过具体的算例分析, 表明该算法比传统的蚁群算法有更快的收敛速度和较好的稳定性。

关键词: 组合优化; 蚁群算法; 指派问题; 动态信息素

Application of Dynamic Pheromone Updating Ant Colony Algorithm to Assignment Problem

JIANG Chang-yuan

(School of Science, Huzhou Teachers College, Huzhou 313000)

【Abstract】 This paper establishes the mathematical model of assignment problem. Assignment problem is translated into Traveling Salesman Problem(TSP), and Ant Colony Algorithm(ACA) is used to solve the TSP. ACA is an effective algorithm to solve combinatorial problems. Its searching speed is slow and it is easy to fall in local best as other evolutionary algorithm. In this paper, the dynamic pheromone updating ACA is proposed. Experimental results on TSP show that the algorithm has faster convergence speed and greater stability than classical ACA.

【Key words】 combinatorial optimization; Ant Colony Algorithm(ACA); assignment problem; dynamic pheromone

1 概述

指派问题是运筹学特殊线性规划中的一类问题, 有着十分广泛的应用, 通常可以用分支定界法, 或隐枚举法以及匈牙利法来求解^[1]。由这些算法的原理可知其很难在计算机上编程实现。

蚁群算法是利用群集智能解决组合优化问题的典型例子, 由意大利学者 M.Dorigo, A.Colomni 等人于 1992 年首先提出^[2-3]。它是继模拟退火算法、遗传算法、人工神经网络算法等启发式搜索算法后又一种应用于组合优化问题的算法。

本文将指派问题等价描述为 TSP 问题, 利用动态信息素更新蚁群算法求解, 取得了很好的结果。

2 指派问题

2.1 问题描述

设在某一团体中有 i 个智能体和 j 项任务。智能体可以是人、团体中的部门或计算机等。定义决策变量 $x_{ij}, i=1, 2, \dots, M, j=1, 2, \dots, N, x_{ij}$ 取值如下:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{指派第 } i \text{ 个智能体完成第 } j \text{ 项任务} \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases}$$

p_{ij} 为智能体 i 完成任务 j 的可能性, $0 \leq p_{ij} \leq 1$ 。 $V_{ij} > 0$ 为智能体 i 为了完成任务 j 所要付出的代价, 可以是时间、费用等。则可建立指派问题的数学模型^[4]:

$$\min \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M (1-p_{ij}) \cdot V_{ij} \cdot x_{ij} \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^N x_{ij} \leq S_i, i=1, 2, \dots, M \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^M x_{ij} \leq D_j, j=1, 2, \dots, N \quad (3)$$

此模型表示: 按照分配结果进行工作后, 能够完成的任务尽量得多, 没有完成的部分所花费的代价最小。约束条件表示智能体 i 最多可以同时进行 S_i 项任务的处理, 对于任务 j , 允许同时有不超过 D_j 个智能体协同处理。

2.2 与 TSP 问题等价

使用蚁群算法求解指派问题, 首先要将该类指派问题等价描述为 TSP 问题。等价 TSP 问题中的两城市之间的距离根据完成任务所付出的代价和任务被完成的可能性计算得到。设所有智能体的集合为 $R = \{r_i | 1 \leq i \leq M\}$, 所有任务的集合为 $L = \{l_j | 1 \leq j \leq N\}$, i, j 均为自然数。模型中城市节点为智能体和任务的集合。即 $CITY = R + L$ 。城市间距离 D 的设置如下式:

$$D_{i'j'} = \begin{cases} d_{i'j'} & 1 \leq i' \leq M, M < j' \leq M+N \\ MAX & 1 \leq i' \leq M, 1 \leq j' \leq M \quad \text{or} \\ & (M < i' \leq M+N, M < j' \leq M+N) \\ 0 & M < i' \leq M+N, 1 \leq j' \leq M \end{cases} \quad (4)$$

其中, $d_{i'j'} = (1-p_{i'(j'-M)}) \cdot V_{i'(j'-M)}$; p_{ij} 为任务 j 被智能体 i 完成的可能性; V_{ij} 为智能体 i 完成任务 j 所付出的代价; MAX 是一个足够大的常数, 以避免算法中某一智能体挑选其他智能体作为任务完成, 或某一任务变成其他任务的完成者。

在表示智能体的城市中随机设置 q 只蚂蚁, 将其作为起

基金项目: 浙江省教育厅科研基金资助项目(20060315)

作者简介: 姜长元(1975—), 男, 讲师、硕士, 主研方向: 算法设计与分析, 智能计算, 智能仿生算法

收稿日期: 2007-09-04 **E-mail:** jcy@hutczj.cn

始城市。在选择最优解的过程中,当 q 只蚂蚁中的某一只找到的解比当前最优解所计算出来的路径长度短时,用这个更短的解替换最优解。在经过很多代的搜索过程后,必然可以搜索到问题的最优解或次优解。

3 蚁群算法

3.1 TSP 问题的描述

给定 n 个城市集合 $\{0,1,2,\dots,n-1\}$ 及城市之间环游花费 $C_{ij}(0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq n-1, i \neq j)$ 。TSP 问题是指找到一条经过每个城市一次且回到起点的最小花费环游。若将每个顶点看成是图上的节点,花费 C_{ij} 为连接顶点 V_i, V_j 边上的权,TSP 问题就是在一个具有 n 个节点的完全图上找到一条花费最小的 Hamilton 回路。

3.2 蚁群算法的描述

给定一个有 n 个城市的 TSP 问题,人工蚂蚁的数量为 m 。人工蚂蚁的行为符合下列规律:根据路径上激素浓度,以相应的概率选取下一步路径;不再选取自己本次循环已经走过的路径为下一步路径,用一个数据结构(tabulist)来控制;完成一次循环后,根据整个路径长度来释放相应浓度的信息素,更新走过的路径上的信息素浓度。

用 $\tau_{ij}(t)$ 表示在 t 时刻,边 (i,j) 上的信息素浓度。经过 n 个时刻,当蚂蚁完成了一次循环之后,相应边上的信息素浓度必须进行更新处理,模仿人类记忆的特点,对旧信息进行削弱,同时,必须将最新的蚂蚁访问路径信息加入到 τ_{ij} ,这样得到:

$$\tau_{ij}(t+n) = (1-\rho) \cdot \tau_{ij}(t) + \Delta \tau_{ij} \quad (5)$$

其中, $0 < \rho < 1$ 是信息素的消逝系数。

$$\Delta \tau_{ij} = \sum_{k=1}^m \Delta \tau_{ij}^k \quad (6)$$

其中, $\Delta \tau_{ij}^k$ 是第 k 个蚂蚁在时间 t 到 $t+n$ 之间,在边 (i,j) 上增加的信息素改变量。它的值由下式确定:

$$\Delta \tau_{ij}^k = \begin{cases} \frac{Q}{L_k} & \text{若第 } k \text{ 只蚂蚁在本次循环中经过 } ij \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \quad (7)$$

其中, Q 是一个常量,用来表示蚂蚁完成一次完整的路径搜索后所释放的信息素总量; L_k 是第 k 个蚂蚁的路径总花费,它等于第 k 个蚂蚁经过的各段路径上所需的花费 C_{ij} 的总和。如果蚂蚁的路径总花费越高,那么其在单位路径上所释放的信息素浓度就越低。

$P_{ij}^k(t)$ 表示在 t 时刻蚂蚁 k 由位置 i 转移到位置 j 的概率:

$$P_{ij}^k(t) = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}(t)]^\alpha \cdot [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{k \in allowed_k} [[\tau_{ik}(t)]^\alpha \cdot [\eta_{ik}]^\beta]} & j \in allowed_k \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (8)$$

其中, $\eta_{ij} = 1/C_{ij}$, C_{ij} 为经过路径 (i,j) 所需的花费; α 和 β 2个参数,分别用来控制信息素和路径长度的相对重要程度; $allowed_k$ 是第 k 个蚂蚁下一步可以选择的城市的集合, $allowed_k = \{0,1,\dots,n-1\} - tabu_k$ 。与实际蚁群不同,人工蚁群系统具有记忆功能, $tabu_k(k=1,2,\dots,m)$ 用以记录蚂蚁 k 当前所走过的城市,集合 $tabu_k$ 随着进化过程作动态调整。

3.3 蚁群算法的流程

在初始化时, m 只蚂蚁被放置在不同的城市上,赋予每

条边上的信息素浓度为 $\tau_{ij}(0) = C$ (C 为常数),即各路径上和信量相等。每个蚂蚁的 tabulist 的第1个元素赋值为它所在的城市。当蚂蚁们完成了一次完整的巡游后,计算 $\Delta \tau_{ij}^k$,并且更新每条边上的信息素浓度。然后开始新一轮的循环。当循环的次数达到事先定义好的 NC_{MAX} 或者所有的蚂蚁都选择了同一种路径方式时,整个程序终止。

3.4 动态信息素更新规则

文献[2]从对蚂蚁行为活动的分析中得到蚁群算法的基本思想,随之将其应用于解决 TSP 问题。算法思想的构思、建模过程的正确性是毋庸置疑的,但是,当 M. Dorigo 将蚁群算法应用于 TSP 问题时,感觉某些地方和蚁群活动的真实情况有所差异。在真实的蚁群中,蚂蚁选择的路径一直存在多样性,是有限制的,回到 TSP 问题,情况有所不同,正如式(8)的描述, $allowed_k = \{0,1,\dots,n-1\} - tabu_k$,在一次巡游中,随着蚂蚁访问过城市的增加, $tabu_k$ 中的元素逐渐增加, $allowed_k$ 中的元素逐渐减少,一直到巡游结束。极端的情况出现在最后一步,蚂蚁的选择不受转移概率的支配,正反馈机制在后期没有体现或者体现得非常不充分。也就是说,在蚂蚁的一次巡游过程中,蚂蚁对于路径的选择越来越受到禁忌表的制约,后期路径选择的效果明显比前期的差^[5-6]。

多次的实验结果表明:在一次巡游过程中,蚂蚁的前半程巡游质量高于后半程。通过与已知最优解图形的比较,发现蚂蚁后半程的巡游路径基本不可能是最优解的组成部分。在基本蚁群算法或蚁群优化算法中,对这些非优路径同样进行信息素更新,干扰了后继蚂蚁的寻优过程,基于这种想法,提出了新的信息素更新方法,通过弱化后半程的信息素对于后继蚂蚁的影响来解决这个问题。

新的信息素更新方法要点在于在一次巡游过程中,加强前半程的信息素更新幅度,减少后半程的信息素更新幅度,通过一定的比例分配,达到减少前导蚂蚁搜索结果中非优路径对后继蚂蚁的影响,从而提高后继蚂蚁巡游质量。

这里, n 表示 TSP 问题的规模, s 表示集合 $tabu_k$ 的元素个数。为了不增加算法的复杂性,且不失一般性,采用线性递减更新信息素的分配方法:将式(7)中的 Q 前面乘以 $(n+1-s)/n$ 这样一个因子,这样,随着蚂蚁巡游过的城市越来越多, s 逐渐增大,从而实现动态信息素更新的思想。

3.5 算法步骤

指派问题的动态信息素更新蚁群算法步骤如下:

step 1 建立指派问题的等价 TSP 模型;

step 2 初始化信息素、迭代步数、最优解,设置信息素消逝速度等参数;

step 3 while (迭代步数 < 预定的迭代次数 NC_{MAX});

step 3.1 初始化蚂蚁,将 q 只蚂蚁随机放在代表智能体的城市中;

step 3.2 for $k=1$ to $2 * \max(M,N)$ 步长为 2;

step 3.2.1 每只蚂蚁根据状态转移策略选择一项任务 l_j ,同时完成 l_j 的智能体数不超过 D_j ;

step 3.2.2 随机选择一个智能体 r_i , r_i 已接受的任务数目不超过 S_i ;

step 3.2.3 将 j,i 2个节点按顺序记录在该蚂蚁的解中;
end for

step 3.3 对所有蚂蚁按照动态信息素更新规则进行处理,更新信息素;

step 3.4 在所有解中,如果存在比最优解更好的解,更新最优解;
end while

4 仿真实验

实验 1: 有 3 台设备、5 项加工任务,如表 1、表 2 所示。参数选择为 $\alpha=1, \beta=2, \rho=0.3, q=5$ 。

表 1 完成任务所付出的代价

设备	任务				
	1	2	3	4	5
1	9.501	8.214	9.355	1.389	4.451
2	2.311	4.447	9.169	2.208	9.318
3	6.608	6.154	4.103	1.987	4.660

表 2 完成任务的可能性

设备	任务				
	1	2	3	4	5
1	0.818 0	0.838 5	0.794 8	0.275 7	0.284 4
2	0.660 2	0.568 1	0.956 8	0.437 3	0.869 2
3	0.342 0	0.370 4	0.522 6	0.136 5	0.264 8

本算法找到的最优解为(1-2,4; 2-1,5; 3-3, 前为设备, 后为加工任务)。按照该分配方案所得到的期望任务代价为 6.295 5。

多次运行情况如表 3 所述。

表 3 任务分配数据

代数	最优解个数	平均误差
10	5	0.132 1
20	7	0.024 3
40	8	0.011 6

经 60 代后只有极少数蚂蚁无法找到最优解。若去掉信息素动态更新规则,采用一般规则,程序执行时间要慢 40%以上,由此也可说明采用动态信息素更新规则能较快地找到最优解。

实验 2: 有 8 个部门需要完成 8 项任务,如表 4、表 5 所示。参数选择为 $\alpha=1, \beta=2, \rho=0.3, q=1$ 。

表 4 完成任务所付出的代价

部门	任务							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	9.501	8.214	9.355	1.389	4.451	8.381	3.046	3.784
2	2.311	4.447	9.169	2.208	9.318	0.196	1.897	8.600
3	6.608	6.154	4.103	1.987	4.660	6.813	1.934	8.537
4	4.860	7.919	8.936	6.038	4.186	3.795	6.822	5.936
5	8.913	9.218	0.579	2.722	8.462	8.318	3.028	4.966
6	7.621	7.382	3.529	1.988	5.252	5.023	5.417	8.998
7	4.565	1.763	8.132	0.153	2.026	7.095	1.509	8.216
8	0.185	4.057	0.099	7.468	6.721	4.289	6.979	6.449

表 5 完成任务的可能性

部门	任务							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.818 0	0.835 3	0.794 8	0.275 7	0.284 4	0.732 9	0.483 3	0.415 4
2	0.660 2	0.568 1	0.956 8	0.437 3	0.869 2	0.225 9	0.280 8	0.705 0
3	0.342 0	0.370 4	0.522 6	0.136 5	0.264 8	0.579 8	0.261 1	0.874 4
4	0.289 7	0.702 7	0.880 1	0.711 8	0.288 3	0.460 4	0.567 8	0.315 0
5	0.341 2	0.546 6	0.173 0	0.193 9	0.682 8	0.729 8	0.594 2	0.768 0
6	0.534 1	0.444 9	0.279 7	0.199 1	0.423 5	0.640 5	0.459 2	0.970 8
7	0.727 1	0.694 6	0.971 4	0.298 7	0.315 5	0.609 1	0.202 9	0.990 1
8	0.309 3	0.621 3	0.252 3	0.661 4	0.534 0	0.379 8	0.550 3	0.788 9

本文算法找到的最优解为(1-2, 2-6, 3-7, 4-5, 5-3, 6-8, 7-4, 8-1, 前为部门, 后为任务)。按照该分配方案所得到的期望任务代价为 6.863 1。

多次运行情况如表 6 所示。

表 6 任务分配数据

代数	最优解个数	平均误差
30	5	0.175 8
50	7	0.064 7
100	8	0.010 2

若不采用信息素动态更新规则,而用一般规则,仿真实验表明程序执行时间要慢 30%以上。

5 结束语

本文建立了指派问题的数学模型,并将指派问题转化为等价的 TSP 问题,使用动态信息素更新蚁群算法,很好地完成了此类问题的求解。该算法对于智能体数和任务数相等或不等的情况同样适用。但是,该算法思想只得到了实验上的验证,其收敛性等还有待于进一步的证明,而且算法的参数选择只能通过仿真实验得出,无法给出理论指导,因此,更多深入细致的工作还有待于进一步展开。

参考文献

- [1] 钱颂迪. 运筹学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1990: 128-134.
- [2] Dorigo M, Maniezzo V, Colomni A. Ant System: Optimization by a Colony of Cooperating Agents[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1996, 26(1): 29-41.
- [3] Dorigo M, Gambardella L M. Ant Colony System: A Cooperative Learning Approach to the Traveling Salesman Problem[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 1997, 1(1): 53-66.
- [4] 何坚勇. 运筹学基础[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 43-97.
- [5] 朱庆保, 杨志军. 基于变异和动态信息素更新的蚁群优化算法[J]. 软件学报, 2004, 15(2): 185-192.
- [6] 马溪骏, 潘若愚, 杨善林. 基于信息素递减的蚁群算法[J]. 系统仿真学报, 2006, 18(11): 3297-3300.

(上接第 147 页)

参考文献

- [1] Golomb S W. Shift Register Sequences[M]. Laguna Hills, CA, USA: Aegean Park, 1982.
- [2] No J S, Golomb S W. New Binary Pseudorandom Sequences with

Ideal Autocorrelation[J]. IEEE Trans. on Inform. Theory, 1998, 44(2): 814-817.

- [3] 刘 刚, 林志远. 二元域本原多项式求解[J]. 现代电子技术, 2002, 26(4): 57-58.