第22卷 第6期
2013年12月

运 筹 与 管 理
OPERATIONS RESEARCH AND MANAGEMENT SCIENCE

Vol. 22,No. 6
Dec. 2013

一类非确定型多目标指派问题及其算法研究

付晓薇[1]， 郭 强[2]， 马芹芹[3]

(西北工业大学 理学院应用数学系,陕西 西安 710129)

摘 要:研究每个人承担的工作数不受限制,但每项工作只能由一人承担的情况下,如何给每个人指派工作,才能使完成所有工作的工期最短,并且在此前提下,使完成所有工作的总用时最少. 针对这种多目标非确定型指派问题,本文给出了一种向量标记算法,这种算法不但使用方便,而且有很好的运算效率。

关键词:指派问题;双层目标;最短工期;矩阵网络;标号算法

中图分类号:O221 文章标识码:A 文章编号:1007-3221(2013)06-0034-05

A Multiple Objective Uncertainty Assignment Problem and the Study of Its Algorithm

FU Xiao-wei[1], GUO Qiang[2], MA Qin-qin[3]

(Department of Applied Mathematics, School of Science, Northwestern Polytechnical University, Xi' an 710129, China)

Abstract: To study under the conditions of the number of each person' s jobs is unlimited, but every job is completed by only one person, how to allocate existing jobs we can get the shortest duration of all jobs, and in the case of the shortest duration how to allocate these jobs can make the whole completed time least. For the multi-objective and non-deterministic assignment problem, a vector-sign algorithm is proposed, and this algorithm is not only convenient, but also has good computational efficiency.

Key words: assignment problem; multi-objective; the shortest duration; matrix network; vector-sign algorithm

0 引言

指派问题形式多样,用途广泛。如果按照每个人承担的任务数的情况划分,可以分为确定型指派问题和非确定型指派问题。前者的特点是每人承担的任务数是事先确定的,而后者则相反。经典指派问题[1]是一种最简单的确定型指派问题,可以直接利用匈牙利算法求解;一对多的确定型指派问题,可以先转化成一对一的指派问题,再利用匈牙利算法求解,也可以用平衡运输问题的解法求解[2],还可以用其它的单调迭代算法求解[3];对于确定型指派问题,还有人研究了多对一的情形[4],并给出了相应的算法。

在当今竞争激烈的社会,人们也很关心能者多劳的指派问题(即要完成所有任务,但每个人承担的任务数不受限制),这种非确定型指派问题属于NP-Hard问题,不但复杂度高,而且寻找精确最优解很困难,原因是,这种情况下,若假设第k个人承担的工作数为r_k,则让m个人完成n项工作,共有,

$$\sum_{\sum_{k=1}^{m} r_k = n} C_n^{r_1} C_{n-r_1}^{r_2} \cdots C_{n-r_1-r_2-\cdots-r_{m-1}}^{r_m} = \sum_{\sum_{k=1}^{m} r_k = n} \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdots r_m!},(r_k = 0,1,2,\cdots,n;k = 1,2,\cdots,m)$$

种不同的可行指派方案,这无疑是一个非常巨大的数字。因此,任何试图通过遍历寻找精确最优解的方法,如文献[5~6]给出的分枝定界法、文献[7]给出的动态规划法、文献[8]给出的一种单调迭代算法等等,都不宜推广到大规模问题上。为此,多数学者都把这类问题的研究放在近似算法上,如文献[9]给出了交叉

收稿日期:2012-07-19

作者简介:付晓薇(1986-),女,硕士研究生,主要研究方向:最优化理论与算法;郭强(1961-),男,副教授,硕士生导师,主要研究方向:最优化理论与算法,运筹与网络规划;马芹芹(1986-),女,硕士研究生,主要研究方向:最优化理论与算法。

粒子群算法、文献[10~11]给出了遗传算法、文献[12]给出了蚁群算法等智能方法，但这些近似算法会因随机性而难以保证稳定的精确性。另外，上述文献对这类问题的研究，都局限于单目标，其实，以工期最短为目标的最优指派方案通常都不唯一，因此，对于这类指派问题，研究在工期最短的前提下，进一步使总用时最少的双层目标规划，无疑有着更为重要的现实意义。

基于上述原因，本文提出了一种双层指派问题，并给出了一种标号算法，该算法不但简便，而且有良好的运算效率和近似效果。

1　双层目标的最优指派问题描述及数学模型

本文所要研究的一类非确定型指派问题描述如下：

安排 m 人完成 n 项可以同时开展的工作，要求每项工作只能由一人完成，但是每人承担的工作数不限。已知第 i 人做第 j 项工作的用时为 c_{ij}（注：当某个 $c_{ij}=\infty$ 时，表示第 i 个人不承担第 j 项工作）。

研究：如何把这 n 项工作指派给这 m 个人，才能保证工期最短，并且在此前提下，使总用时最少。

引入的决策变量

$$x_{ij}=\begin{cases}1,\text{第 } i \text{ 个人做每 } j \text{ 项工作}\\0,\text{其它}\end{cases}\quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

则对应的数学模型为 $\min\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\min\left(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\right)\sum\limits_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\\ \text{s. t.}\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}=1,\quad (j=1,2,\cdots,n)\\ \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=n\\ x_{ij}\in\{0,1\},(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)\end{cases}\end{cases}$$

该规划的内层目标是求工期最短，换句话说就是完成所有任务的时间跨度最小，外层目标是求总用时最少，换句话说就是完成所有任务的总代价最小。

2　双层目标的最优指派问题的算法

为方便论述算法，先引入以下概念。

定义 1　设网络中的所有节点按照矩阵形式排列，第 j 列的节点只相邻可达第 $j+1$ 列的节点，节点赋权而边不赋权，则称该网络为矩阵网络（如图 1）。

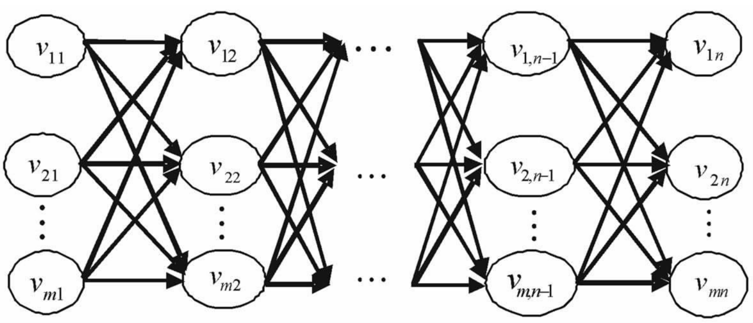

图 1

定义 2　按照矩阵网络结构，将从首列节点到末列节点的路径，称为该矩阵网络的一条节点路。节点路上所有节点的权值之和称为节点路长值。由节点路上同行节点的权值相加得到的向量称为节点路向量。

定义 3　设向量 $d=(d_1,\cdots,d_m)^T$，则称 $\max\{d_1,d_2,\cdots,d_m\}$ 为向量 d 的宽，记作 $[d]$。

定义 4　设向量 $d=(d_1,\cdots,d_m)^T$，则称 $\sum_{i=1}^{m} d_i$ 为向量 d 的质量，记作 $\langle d\rangle$。

定义 5　规定 $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} \oplus c_{ij} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_i + c_{ij} \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}$，称为向量 $d=(d_1,d_2,\cdots,d_i,\cdots,d_m)^T$ 与数 c_{ij} 的向数和。

定理　工期 $=\min\{$网络矩阵的节点路向量的宽$\}$，总用时 = 节点路长值。

证明　(反证法) 若网络矩阵中最小的节点路向量的宽(d)不是工期，则必存在另一个节点路向量，其宽等于工期(L)。显然 $d<L$，说明存在工期更短的指派方案，与 L 为工期矛盾，结论成立。节点路向量第 i 分量即为第 i 个人完成其承担的所有工作的总用时，故节点路长值即为完成全部工作的总用时。

在矩阵网络(如图 1)中，若给节点 v_{ij} 赋权值为 $c_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$。则在引入上述概念后，该指派问题可被视为一种网络最优路径问题：在节点路向量的宽最小的所有节点路中，寻找一条节点路长值最小的节点路，其对应的指派方案即为工期最短的前提下总用时最少的指派方案。

为此，可以用一种标记算法求解这个优化问题，具体算法步骤如下：

(1) 用时矩阵及其对应的网络矩阵为：

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \cdots & v_{mn} \end{pmatrix}$$

给出初始标记 $b_{i1}=(0,\cdots,c_{i1},\cdots,0)^T$ (即 b_{i1} 的每 i 分量为 c_{i1}，其他各分量为 0)，$b_{ij}\Leftarrow(\infty,\infty,\cdots,\infty)^T(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,3,\cdots,n)$，给出初始指针矩阵 $p(i,j)\Leftarrow(i,j)(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$。

(2) 令 $i\Leftarrow1,j\Leftarrow1,k\Leftarrow1$。

(3) 依次进行向数和运算和向量宽比较，若 $[b_{ik}\oplus c_{j,k+1}]<[b_{j,k+1}]$，则 $b_{j,k+1}\Leftarrow b_{ik}\oplus c_{j,k+1}$，$p(j,k+1)\Leftarrow p(i,k)$，转到 5；否则($[b_{ik}\oplus c_{j,k+1}]\geqslant[b_{j,k+1}]$)，转到 4。

(4) 若 $[b_{ik}\oplus c_{j,k+1}]=[b_{j,k+1}]$，且 $\langle b_{ik}\oplus c_{j,k+1}\rangle<\langle b_{j,k+1}\rangle$，则 $b_{j,k+1}\Leftarrow b_{ik}\oplus c_{j,k+1}$，$p(j,k+1)\Leftarrow p(i,k)$ 转到 5；否则($[b_{ik}\oplus c_{j,k+1}]>[b_{j,k+1}]$)，$b_{j,k+1}$ 和 $p(j,k+1)$ 都不变，转到 5。

(5) 若 $j<m$，则 $j\Leftarrow j+1$，转到 3；否则($j=m$)，转到 6。

(6) 若 $i<m$，则 $i\Leftarrow i+1,j\Leftarrow1$，转到 3；否则($i=m$)，转到 7。

(7) 若 $k<n-1$，则 $k\Leftarrow k+1,i\Leftarrow1,j\Leftarrow1$，转到 3；否则($k=n-1$)，转到 8。

(8) 计算 $\min_{i\leqslant i\leqslant m}\{[b_{in}]\}\triangleq[b_{\lambda n}]$，输出最优指派方案：$(\lambda,n)$，$p(\lambda,n)\triangleq(\lambda_1,n-1)$，$\cdots$，$p(\lambda_{n-2},2)\triangleq(\lambda_{n-1},1)$。

算法注释：

(1) 指针矩阵的功能：指针 $p(i,j)$ 表示指向节点 v_{ij} 的最优路径，节点路的最优路径走向可由指针矩阵 $p(i,j)(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 指出。

(2) 最优指派方案表示：第 λ_{n-1} 人承担第 1 项工作，第 λ_{n-2} 人承担第 2 项工作，……，第 λ_1 人承担第 $n-1$ 项工作，第 λ 人承担第 n 项工作。

(3) 由矩阵网络结构及算法过程知，该算法复杂度为 $o(m^2n)$，为多项式算法。

3　算法的进一步改进

3.1　改进方法 1

对于上述给出的近似多项式算法，再作一些简单的改进，还可以使工期和总用时的精度进一步提高。

若引入节点的状态标号：

$$w(i,j)=\begin{cases}0, \text{节点 } v_{ij} \text{ 为临时标记时} \\ 1, \text{节点 } v_{ij} \text{ 为固定标记时}\end{cases} \quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

则其方法如下：

(1) 用时矩阵及其对应的网络矩阵为：

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \cdots & v_{mn} \end{pmatrix}$$

给出初始标记　$b_{i1}=(0,\cdots,c_{i1},\cdots,0)^T$　（即 b_{i1} 的每 i 分量为 c_{i1}，其他各分量为 0）

$b_{ij} \Leftarrow (\infty,\infty,\cdots,\infty)^T(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,3,\cdots,n)$

给出初始指针矩阵 $p(i,j) \Leftarrow (i,j)(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$.

给出临时标记 $w(i,j)=0(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$.

(2) 求 $\min\{[b_{ij}] \mid w(i,j)=0,1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n\} \triangleq \mu$，若 μ 不存在（说明所有 $w(i,j)=1$），转到 6；否则（μ 存在），转到 3.

(3) 记 $\min\{\langle b_{ij}\rangle \mid [b_{ij}]=\mu,w(i,j)=0,1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n\} \triangleq \mu_0$，

$s \Leftarrow \{i \mid \langle b_{ij}\rangle=\mu_0,w(i,j)=0,1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n\}$，

$t \Leftarrow \{j \mid \langle b_{ij}\rangle=\mu_0,w(s,j)=0,1\leqslant j\leqslant n\}$.

(4) 若 $[b_{st}\oplus c_{j,t+1}] < [b_{j,t+1}]$，则 $b_{j,t-1} \Leftarrow b_{st}\oplus c_{j,t+1}$，$p(j,t+1) \Leftarrow p(s,t)$，$w(s,t)=1$ 转到 2；否则（$[b_{st}\oplus c_{j,t+1}] \geqslant [b_{j,t+1}]$），转到 5。

(5) 若 $[b_{st}\oplus c_{j,t+1}] = [b_{j,t+1}]$，且 $\langle b_{st}\oplus c_{j,t+1}\rangle < \langle b_{j,t+1}\rangle$，则 $b_{j,t+1} \Leftarrow b_{st}\oplus c_{j,t+1}$，$p(j,t+1) \Leftarrow p(s,t)$，$w(s,t)=1$，转到 2；否则（$[b_{st}\oplus c_{j,t+1}] > [b_{j,t+1}]$），$b_{j,t+1}$ 和 $p(j,t+1)$ 都不变，$w(s,t)=1$，转到 2。

(6) 计算 $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{[b_{in}]\} \triangleq [b_{\lambda n}]$，输出最优指派方案：

$$(\lambda,n),p(\lambda,n) \triangleq (\lambda_1,n-1),\cdots,p(\lambda_{n-2},2) \triangleq (\lambda_{n-1},1)。$$

3.2　改进方法 2

找出用时矩阵各列中的最小值，按照最小值从大到小的顺序，将网络矩阵按列重排，再对排序后的矩阵网络采用算法改进 4.1。其中排序复杂度为 $o(n^2)$；标号算法的复杂度为 $o(m^2n)$，由于 $m<n$，故该算法复杂度为 $o(n^2)$ 或 $o(m^2n)$，为多项式算法。

4　计算实例与分析

针对每项工作只能由一人承担，每人承担的工作数不受限制情况，要求完成所有工作，如何指派才能使工期最短，并在此前提下使总用时最少的指派方案。用上述算法求解下列三个问题，并比较算法改进的效果。

问题 1

工　作 / 人	W1	W2	W3	W4	W5	W6
R1	6	6	3	5	5	2
R2	6	7	3	4	5	3
R3	7	6	5	4	4	4

问题 2

工　作 / 人	W1	W2	W3	W4	W5	W6
R1	6	7	11	14	4	10
R2	5	20	8	6	7	5
R3	12	5	14	11	9	11
R4	12	4	10	15	5	13

问题 3

工作 人	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	W8	W9	W10
R1	6	6	3	5	5	2	6	5	3	7
R2	6	7	3	4	5	3	5	7	3	9
R3	8	4	6	3	6	6	7	7	4	7
R3	7	6	5	4	4	4	6	4	6	6
R5	8	7	4	5	3	3	4	4	5	5
R6	9	3	4	2	6	7	5	3	4	6

计算结果见下表。

问题 算法		问题 1	问题 2	问题 3
标号算法	工期	11	11	9
	总用时	25	41	36
改进 1	工期	9	11	8
	总用时	26	41	39
改进 2	工期	9	11	8
	总用时	25	36	39

从上表可以得出: 对于问题 1,在标号算法基础上,经过改进 1,工期会有所缩短; 在改进 1 基础上,利用改进 2 求解,总用时会有所减少; 对于问题 2,经过两次改进,在工期不变的基础上减少了总用时; 问题 3 在经过两次改进之后缩短了工期。此外还有很多例子可以证实,两次改进在工期或者总用时上都会有所减少,这表示两次改进均为有效改进。利用改进后的标号算法求解该类型指派问题,我们将会得到近似程度相对较高的解。

5 结束语

本文针对一类人员承担任务数无限制的双层指派问题,给出了一种向量标号算法,并在此基础上作了改进,这属于多项式近似算法,该方法较遗传算法等从稳定性和运算效率方面都有提高,从而为求解多目标最优指派问题提供了一种新的思路。此类非确定型指派问题在实际中应用广泛,此外,还可以拓展出一些其它类型的指派问题(例如一事需由多人承担) 等,这些将是下一步的研究方向。

参考文献:

[1] Yang L Y, Nie M H, Wu Z W, et al.. Modeling and solution for assignment problem [J]. International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2008, 2(2): 205-212.
[2] 石忠民. 广义指派问题 [J]. 运筹与管理,1999,8(1):21-26.
[3] 郭强. 分配问题的一种新的迭代算法 [J]. 系统工程与电子技术,2004,26(12):1915-1949.
[4] Kong C, Ren Y T, Ge H L, et al.. Competition assignment algorithm based on hungarian method [J]. Journal of Northeast Agricultural University, 2007, 14(1): 67-71.
[5] Mazzola J B, Neebe A W. Resource-constrained assignment scheduling [J]. Operations Research, 1986, 34(4): 560-572.
[6] 李引珍,郭耀煌. 一类带有时间约束指派问题的分枝定界算法 [J]. 系统工程理论与实践,2005,25(6):39-43.
[7] Arora S, Puri M C. A variant of time minimizing assignment problem [J]. European Journal of Operational Research, 1998, (110): 314-325.
[8] 郭强. 人数少于任务数的全指派问题的迭代算法 [J]. 计算机工程与应用,2007,43(24):91-103.
[9] 高尚,杨靖宇,吴小俊. 求解指派问题的交叉粒子群优化算法 [J]. 计算机工程与应用,2004,5(1):60-62.
[10] 刘民,吴澄,杨英杰. 并行多机调度问题的一种基于组合规则的遗传算法 [J]. 电子学报,2000,28(5):52-54.
[11] 尹文君,刘民,吴澄. 带工艺约束并行机调度问题的一种新的遗传算法 [J]. 电子学报,2001, 29(11):1482-1485.
[12] 陈义宝,姚建初,钟毅芳,等. 基于蚁群系统的工件排序问题的一种新算法 [J]. 系统工程学报,2002,17(5):476-480.