CEJA >>
CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS

MATEMÁTICA

Ensino Fundamental II

Marilêne A. Marinho
Wendel de Oliveira Silva

Fascículo 11
Unidades 31, 32 e 33

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

PRODUÇÃO DO MATERIAL CEJA (CECIERJ)

Elaboração de Conteúdo
Marilêne A. Marinho
Wendel de Oliveira Silva

Diretoria de Material Didático
Bruno José Peixoto

Coordenação de Design Instrucional
Flávia Busnardo
Paulo Vasques de Miranda

Revisão de Língua Portuguesa
José Meyohas

Design Instrucional
Renata Vittoretti

Diretoria de Material Impresso
Ulisses Schnaider

Projeto Gráfico
Núbia Roma

Ilustração
Renan Alves

Programação Visual
Bianca Giacomelli
Filipe Dutra

Capa
Renan Alves

Produção Gráfica
Fábio Rapello Alencar

C391

CEJA : Centro de educação de jovens e adultos. Ensino fundamental II. Matemática / Marilêne A. Marinho, Wendel de Oliveira Silva. Rio de Janeiro : Fundação Cecierj, 2019.

Fasc. 11 – unid. 31-32-33

54p.; 21 x 28 cm.

ISBN: 978-85-458-0185-6

1. Matemática. 2. Triângulos. 3. Quadriláteros. 4. Teorema de Pitágoras. 5. Estatística. I> Silva Wendel de Oliveira. II. Marinho, Marilêne A. Título.

CDD: 510

Referências bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.
Texto revisado segundo o novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa.

Sumário

Prezado(a) Aluno(a),

Seja bem-vindo a uma nova etapa da sua formação. Estamos aqui para auxiliá-lo numa jornada rumo ao aprendizado e conhecimento.

Você está recebendo o material didático impresso para acompanhamento de seus estudos, contendo as informações necessárias para seu aprendizado e avaliação, exercício de desenvolvimento e fixação dos conteúdos.

Além dele, disponibilizamos também, na sala de disciplina do CEJA Virtual, outros materiais que podem auxiliar na sua aprendizagem.

O CEJA Virtual é o Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) do CEJA. É um espaço disponibilizado em um site da internet onde é possível encontrar diversos tipos de materiais como vídeos, animações, textos, listas de exercício, exercícios interativos, simuladores, etc. Além disso, também existem algumas ferramentas de comunicação como chats, fóruns.

Você também pode postar as suas dúvidas nos fóruns de dúvida. Lembre-se que o fórum não é uma ferramenta síncrona, ou seja, seu professor pode não estar online no momento em que você postar seu questionamento, mas assim que possível irá retornar com uma resposta para você.

Para acessar o CEJA Virtual da sua unidade, basta digitar no seu navegador de internet o seguinte endereço: http://cejarj.cecierj.edu.br/ava

Utilize o seu número de matrícula da carteirinha do sistema de controle acadêmico para entrar no ambiente. Basta digitá-lo nos campos "nome de usuário" e "senha".

Feito isso, clique no botão "Acesso". Então, escolha a sala da disciplina que você está estudando. Atenção! Para algumas disciplinas, você precisará verificar o número do fascículo que tem em mãos e acessar a sala correspondente a ele.

Bons estudos!

CEJA >>
CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS

Triângulos, quadriláteros e suas relações métricas

Matemática - Fascículo 11 - Unidade 31

Objetivos de aprendizagem

1. Identificar as principais propriedades dos triângulos;

2. Reconhecer as principais propriedades dos quadriláteros.

3. Utilizar as relações métricas no triângulo retângulo para resolver problemas.

Para início de conversa...

Os polígonos são figuras geométricas planas formadas por segmentos de retas fechados. O encontro dos segmentos é denominado vértice do polígono, e os segmentos de retas recebem o nome de arestas.

Qualquer polígono recebe o nome de acordo com o número de lados da figura.

No que se refere às medidas de seus ângulos, um polígono pode ser **Convexo**: se possui todos os seus ângulos internos convexos — isto é, entre 0° e 180°; ou **Côncavo**: se possui um ângulo interno côncavo — superior a 180°.

Os triângulos e os quadriláteros são os polígonos convexos mais utilizados, tanto como base para o estudo de outras figuras geométricas, quanto no nosso dia a dia. Nesta unidade, faremos uma revisão sobre as principais propriedades desses polígonos.

1. Triângulos e suas propriedades

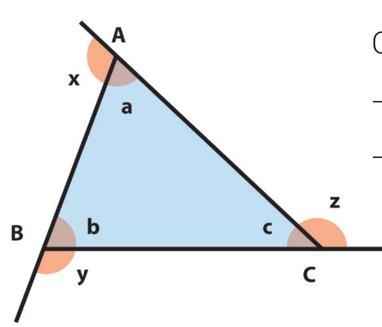
Os Polígonos de três lados, os chamados triângulos, são importantes figuras geométricas, pois são base para exploração de propriedades dos demais polígonos, além de serem amplamente utilizados em diversas aplicações práticas, como, por exemplo, no cálculo de distância, na construção civil e na Astronomia.

Os triângulos podem ser classificados tanto pela medida de seu lado quanto pela medida de seus ângulos.

1.1 Os ângulos de um triângulo

A soma dos ângulos internos de um triângulo (S_i) é igual a 180º.

A soma dos ângulos externos de um triângulo (S_e) é igual a 360º.



Observe o triângulo ABC ao lado:

→a, b, c são as medidas dos ângulos internos;

→x, y, z são as medidas dos ângulos externos.

Figura 31.1: Triângulo ABC

Então, temos:

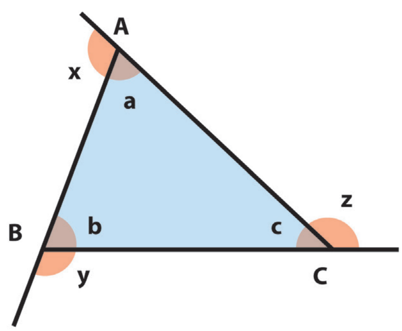
a + b + c = 180º e x + y + z = 360º

Logo, S_i = 180º e S_e = 360º

1.2 Relação entre as medidas de um ângulo interno e o ângulo externo adjacente a ele

Em qualquer triângulo, o ângulo interno e o ângulo externo de mesmo vértice são ângulos adjacentes suplementares.

Observe o triângulo ABC a seguir. Podemos escrever as seguintes equações:



a + x = 180º

b + y = 180º

c + z = 180º

Figura 31.2: Triângulo ABC

1.3 Relação entre a medida de um ângulo externo e a medida dos dois ângulos internos não adjacentes a ele

Em qualquer triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

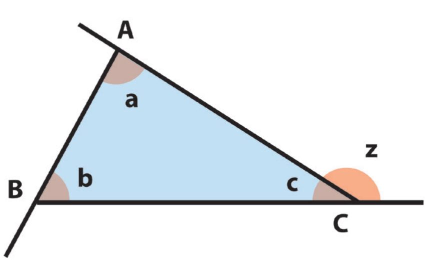


Figura 31.3: Triângulo ABC

Observe o triângulo ABC ao lado. Podemos escrever:

z+c=180º(adjacentes suplementares);

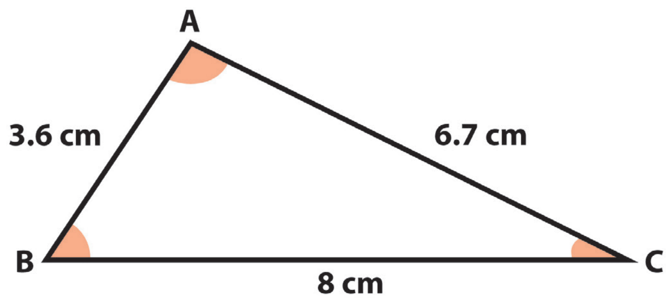
a + b + c = 180º (Si).

Com as duas igualdades, podemos estabelecer:

$$\left.\begin{array}{l} z+c=180^\circ \\ a+b+c=180^\circ \end{array}\right\} z+c=a+b+c \Rightarrow z=a+b$$

1.4 Propriedade que relaciona os lados com os ângulos de um triângulo.

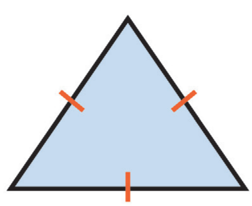
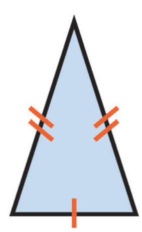
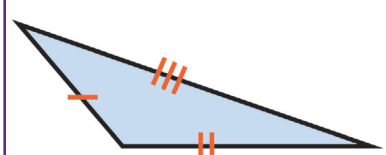
Se dois lados de um triângulo são desiguais, então, o maior lado opõe-se ao maior ângulo. Como exemplo, veja o triângulo ABC a seguir:



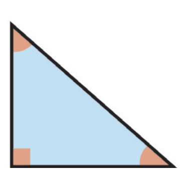
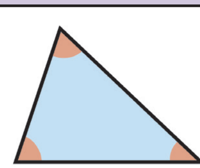
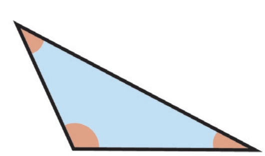
Oposto

1.5 Classificação de Triângulos

Quadro 31.1: Quanto à medida dos lados

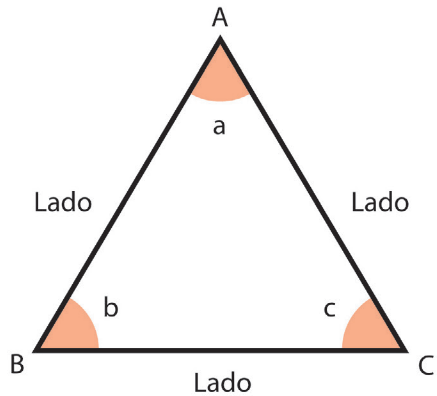
Equilátero	Isósceles	Escaleno
 Possui os três lados com medidas iguais (e os três ângulos também).	 Possui dois lados com medidas iguais (e dois ângulos iguais).	 Possui os três lados com medidas diferentes (e todos os ângulos também com medidas diferentes).

Quadro 31.2: Quanto à medida dos ângulos

Triângulo Retângulo	Triângulo Acutângulo	Triângulo Obtusângulo
 Possui um ângulo reto (medida igual a 90º).	 Possui três ângulos agudos (medida menor que 90º e maior que 0º).	 Possui um ângulo com medida maior que o ângulo reto (> 90º) e menor que 180º.

1.6 Elementos básicos de um Triângulo

I) Vértices, lados e ângulos.



Vértices: A, B e C

Lados: AB, BC e AC

Ângulos: a, b, c

Figura 31.4: Triângulo ABC

II) Altura: segmento de reta que une um vértice ao lado oposto (ou ao seu prolongamento), formando um ângulo de 90º com esse lado.

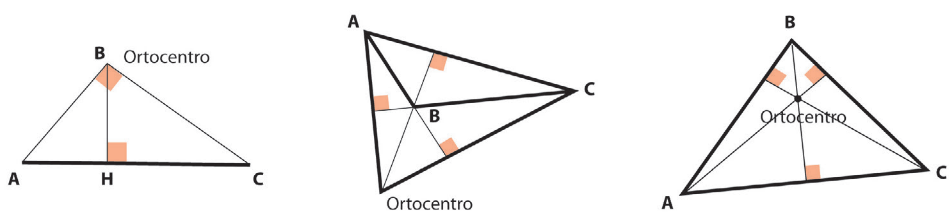
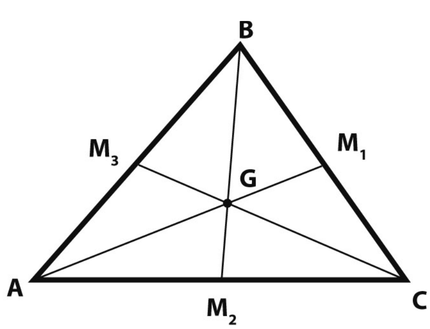


Figura 31.5: Altura dos triângulos

Importante

O ponto de encontro das alturas é chamado de **ortocentro**.

III) Mediana: é um segmento de reta com origem em um dos vértices do triângulo e extremidade no ponto médio do lado oposto ao vértice (a mediana divide o lado oposto em duas partes iguais).



AM1 é a mediana relativa ao lado BC.

BM2 é a mediana relativa ao lado AC.

CM3 é a mediana relativa ao lado AB.

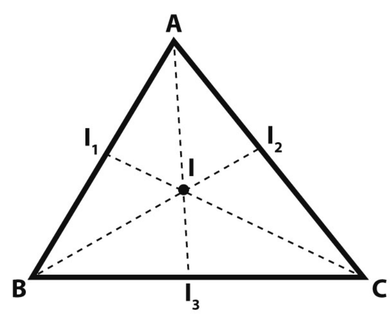
G é o ponto de encontro das medianas.

Figura 31.6: Triângulo ABC

Importante

Todo triângulo possui três medianas, que se encontram num único ponto chamado de **baricentro**.

IV) Bissetriz interna: é o segmento de reta que une um vértice ao lado oposto, dividindo o ângulo desse vértice em dois ângulos congruentes.



AI_3 é bissetriz interna do ângulo A.

BI_2 é bissetriz interna do ângulo B.

CI_1 é bissetriz interna do ângulo C.

I é o ponto de encontro das bissetrizes internas.

Figura 31.7: Triângulo ABC

Importante

Todo triângulo possui três bissetrizes internas, que se encontram em um único ponto chamado **incentro**.

1.7 Propriedades do triângulo isósceles e do triângulo equilátero

A) Propriedades do Triângulo Isósceles

No triângulo isósceles, alguns elementos recebem nomes especiais:

- lado diferente recebe o nome de base;
- os ângulos adjacentes à base são chamados *ângulos da base*;
- o ângulo oposto à base é chamado *ângulo do vértice*.

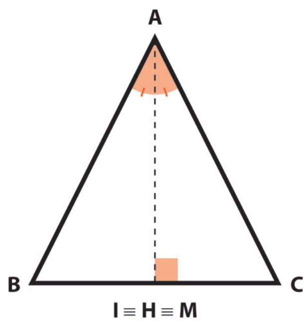
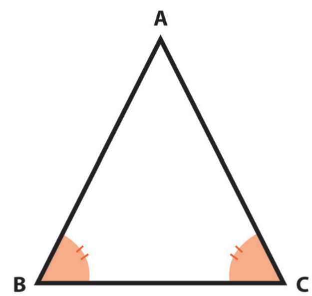
i) Em todo triângulo isósceles, a bissetriz (I) do ângulo do vértice coincide com a altura (H) relativa à base e com a mediana (M).	ii) Em todo triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.
	

Figura 31.8: Triângulo ABC

B) Propriedades do Triângulo Equilátero

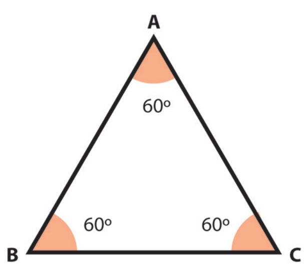
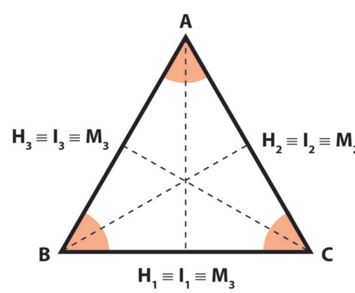
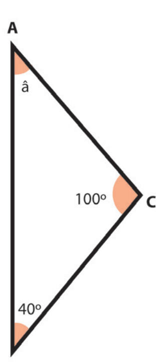
i) Em todo triângulo equilátero, os três ângulos internos são iguais e medem 60º cada um;	ii) Em todo triângulo equilátero, as medianas, as alturas e as bissetrizes coincidem.
	

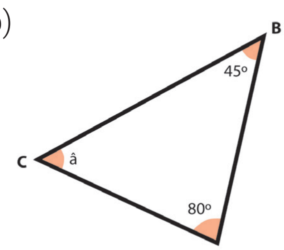
Figura 31.9: Triângulos equiláteros

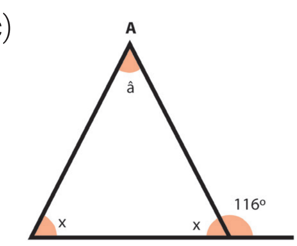
Anote as respostas em seu caderno

Atividade 1

Calcule o valor do ângulo â nas figuras a seguir:

a) 

b) 

c) 

Anote as respostas em seu caderno

Anote as respostas em seu caderno

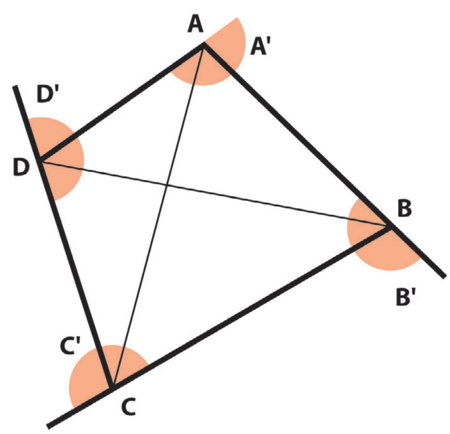
Atividade 2

Num triângulo isósceles ABC, as bissetrizes dos ângulos da base, B e C, formam um ângulo de 140°. Ache a medida do ângulo â.

Anote as respostas em seu caderno

2. Quadriláteros e propriedades

Quadrilátero é o polígono que possui quatro lados. Nos quadriláteros, dois lados ou dois ângulos não consecutivos são chamados opostos.



$\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são lados opostos.
$\hat{A}$ e $\hat{C}$, $\hat{B}$ e $\hat{D}$ são ângulos internos
$\overline{AC}$ $\overline{BD}$ são diagonais.
$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ são ângulos internos

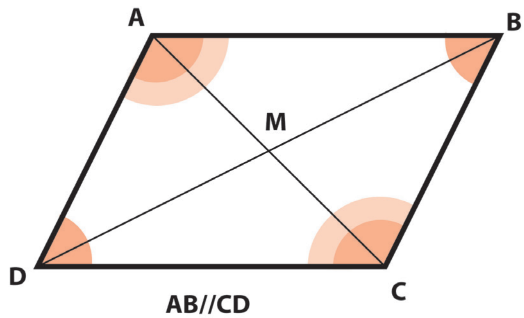
Soma dos ângulos internos (S_i):
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^o$
$S_i = 360^o$
Soma dos ângulos externos (S_e):
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^o$
$S_e = 360^o$

Figura 31.10: Quadrilátero ABCD

2.1 Quadriláteros notáveis

Alguns quadriláteros que possuem propriedades particulares são chamados quadriláteros notáveis.

- **Paralelogramo**: é todo quadrilátero que possui **lados opostos paralelos**.
- Em todo paralelogramo, os lados paralelos são congruentes (possuem a mesma medida);
- Em todo paralelogramo, os ângulos opostos são congruentes;
- As diagonais interceptam-se no ponto médio de cada uma delas.



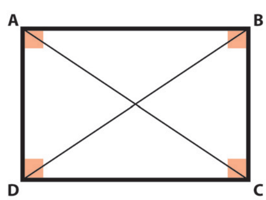
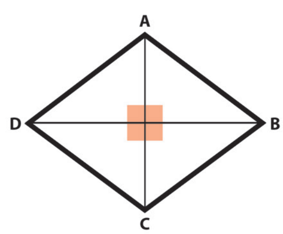
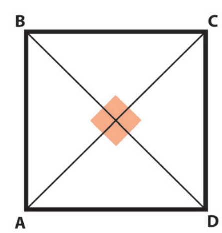
AB//CD
AD//BC

$\hat{A} \equiv \hat{C}$ são ângulos opostos

$\hat{B} \equiv \hat{D}$ são ângulos opostos

Figura 31.11: Paralelogramo ABCD

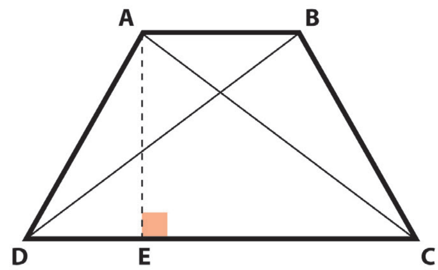
Quadro 31.3: Principais Paralelogramos

Retângulo	Losango	Quadrado
 é paralelogramo que possui 4 ângulos retos.	 é o paralelogramo que possui os quatro lados iguais.	 é o paralelogramo que possui os quatro lados e os quatro ângulos congruentes.
$\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\hat{D}=90^o$ $\overline{AC} \cong \overline{BD}$	$\overline{AC} \perp \overline{BD}$ $\overline{BD}$ *é bissetriz de* $\hat{B}$ *e* $\hat{D}$ $\overline{AC}$ *é bissetriz de* $\hat{A}$ *e* $\hat{C}$	$\overline{AC} \perp \overline{BD}$ $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\hat{D}=90^o$ $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ $\overline{BD}$ é bissetriz de $\hat{B}$ e $\hat{D}$ $\overline{AC}$ é bissetriz de $\hat{A}$ e $\hat{C}$ $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$

Atenção ⚠

O quadrado é o único quadrilátero regular. Possui propriedades ao mesmo tempo do retângulo (ângulos internos de 90°) e do losango (lados congruentes).

- **Trapézio:** é o quadrilátero que apresenta apenas dois lados paralelos, chamados de bases.

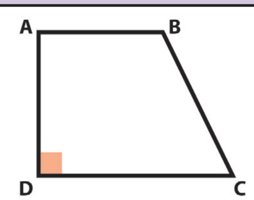
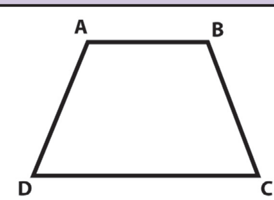
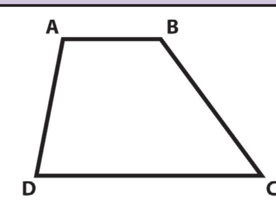


$\overline{AB}$ base menor
$\overline{CD}$ base maior
$\overline{AE}$ altura (menor distância entre as bases)

$\overline{AB} // \overline{CD}$

Figura 31.12: Trapézio ABCD

Quadro 31.4: Tipos de Trapézio

Trapézio Retângulo	Trapézio Isósceles	Trapézio Escaleno
 possui dois ângulos de 90°.	 possui os dois lados não paralelos iguais.	 possui os lados não paralelos diferentes.
$\overline{AC} // \overline{CD}$ $\hat{A} = \hat{D}$^= 90º *$\overline{AD}$ é a altura do trapézio*	$\hat{A} = \hat{B}$ $\hat{C} = \hat{D}$ $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ *(as diagonais são congruentes)*	$\overline{AC} \neq \overline{CD}$

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 3

1) Dê a(s) condição(ões) para que o quadrilátero seja um:

a) paralelogramo b) retângulo c) losango
d) quadrado e) trapézio f) trapézio isósceles

2) (PUCCAMP) – Considere as afirmações.

I) Todo retângulo é um paralelogramo.
II) Todo quadrado é um retângulo.
III) Todo losango é um quadrado.

Associe a cada uma delas a letra V, se for verdadeira, ou F, caso seja falsa.

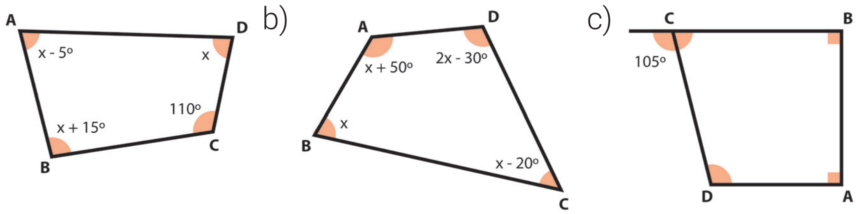
Anote as respostas em seu caderno

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 4

Calcule os ângulos internos dos quadriláteros.

a) b) c)



Anote as respostas em seu caderno

4.3 Relações Métricas no Triângulo Retângulo

4.3.1 O Triângulo Retângulo

Como vimos anteriormente, o que diferencia esse triângulo dos demais é que um dos seus ângulos internos é sempre igual a 90° (ângulo reto). O triângulo retângulo tem características próprias e regras particulares – seus lados recebem nomes específicos:

O lado que for oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa; os outros dois lados são chamados de catetos.

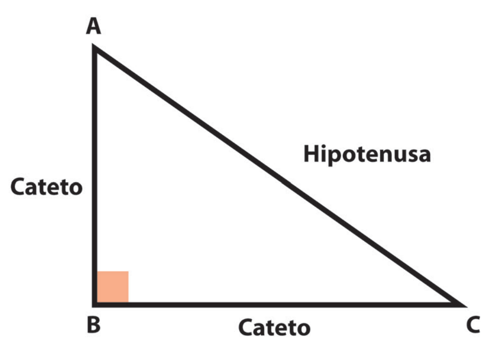


Figura 31.13: triângulo retângulo ABC.

Curiosidades

As descobertas dos babilônios na Astronomia eram baseadas no triângulo retângulo. O triângulo retângulo facilita vários cálculos e oferece uma melhor noção de localização, do traçado de rotas terrestres e de navegação.

4.3.1.1 Elementos do triângulo retângulo

Dado o triângulo retângulo ABC, reto em A, com hipotenusa igual a a e catetos iguais a b e c:

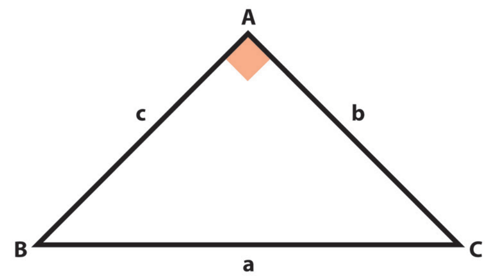


Figura 31.14: Triângulo retângulo ABC

Se nesse mesmo triângulo retângulo, traçarmos uma reta (h) que parta do vértice A e que seja perpendicular ao lado a no ponto H, essa reta será a altura do triângulo retângulo e irá dividir o lado a em dois lados: *m* e *n*.

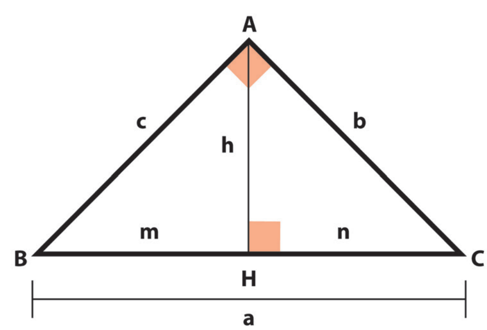


Figura 31.15: Triângulo retângulo ABC

Formamos mais dois triângulos retângulos: ABH e AHC.

Atenção ⚠

Podemos perceber que, com a altura traçada, obtemos três triângulos retângulos, ou seja, ΔABC, ΔBHA, e ΔCHA que esses triângulos são semelhantes entre si.

4.3.2 Relações métricas do triângulo retângulo:

A partir dos triângulos retângulos ΔABC, ΔBHA e ΔCHA formados na figura anterior, por semelhança de triângulos, estabelecemos as seguintes relações:

1ª) O quadrado de um cateto é igual ao produto da hipotenusa pela projeção desse cateto sobre a hipotenusa.

$$\boxed{\begin{array}{l} c^2 = m \cdot a \\ b^2 = n \cdot a \end{array}}$$

2ª) O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa à hipotenusa.

$$\boxed{b \cdot c = a \cdot h}$$

3ª) O quadrado da altura é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

$$\boxed{h^2 = m \cdot n}$$

4ª) a quarta relação é baseada na 1º e na 2º, pois, se somarmos as duas, chegaremos a uma outra relação.

$c^2 + b^2 = m \cdot a + n \cdot a \rightarrow$ colocando a em evidência.

$c^2 + b^2 = a\,(m + n) \rightarrow$ observando no triângulo retângulo, percebemos que a medida de

$a = m + n$.

$c^2 + b^2 = a \cdot a$

$\boxed{a^2 = b^2 + c^2} \rightarrow$ conhecida como ***Teorema de Pitágoras****.

(*Na próxima unidade, vamos nos deter no Teorema de Pitágoras.)

5ª) é uma relação dos ângulos internos do triângulo retângulo. A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo retângulo é igual a 180º; no caso do triângulo retângulo, em que um dos ângulos sempre terá medida igual a 90º, os outros dois serão complementares, ou seja, a sua soma será 90º. Matematicamente, dizemos que:

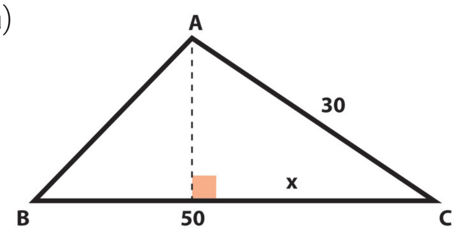
$$\boxed{\text{med}\,(A\hat{B}C) + \text{med}\,(A\hat{C}B) = 90^\circ}$$

Anote as respostas em seu caderno

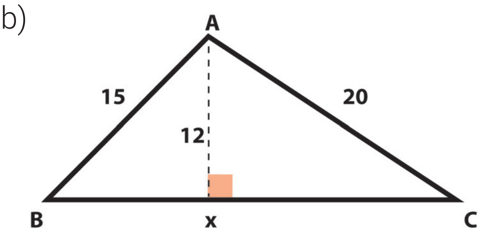
Atividade 5

Determine o valor de x nos triângulos retângulos abaixo:

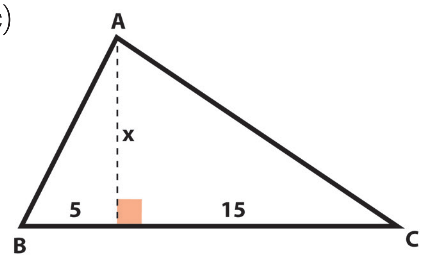
a)



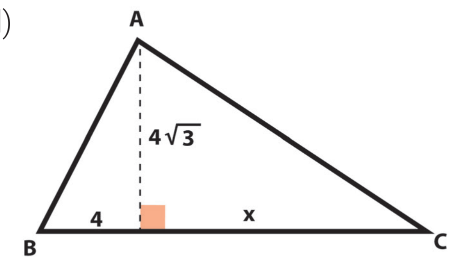
b)



c)



d)

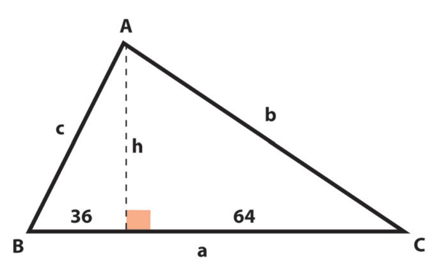


Anote as respostas em seu caderno

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 6

Dado o triângulo ABC abaixo, determine as medidas a, b, c e h.



Anote as respostas em seu caderno

Resumo

Nesta unidade, você viu que:

- A soma dos ângulos internos de um triângulo (S_i) é igual a 1800.

- A soma dos ângulos externos de um triângulo (S_e) é igual a 3600.
- Se dois lados de um triângulo são desiguais, então, o maior lado opõe-se ao maior ângulo.
- Em relação à medida dos seus lados, um triângulo pode ser classificado como equilátero (os três lados iguais), isósceles (dois lados iguais) e escaleno (os três lados diferentes).
- Em relação à medida dos seus ângulos, um triângulo pode ser classificado como retângulo (possui um ângulo reto), acutângulo (possui os três ângulos agudos) e obtusângulo (possui um ângulo obtuso, isto é, maior que 90º).
- Num triângulo retângulo, os lados recebem nomes especiais: o lado maior recebe o nome de hipotenusa, os outros dois lados são denominados catetos.
- Num quadrilátero convexo, a soma dos ângulos internos (S_i) é igual a 360º; a soma dos ângulos externos (S_e) também é igual a 360º.
- O paralelogramo e o trapézio são quadriláteros notáveis.
- Nos paralelogramos, as duas diagonais se cruzam no ponto médio, os ângulos opostos possuem medidas iguais e os lados paralelos também possuem medidas iguais.
- Um paralelogramo pode ser: **retângulo:** possui os quatro ângulos, cada um medindo 90º e os lados paralelos opostos iguais; **losango:** possui os quatro lados com medidas iguais, ângulos opostos iguais, sendo dois ângulos agudos (medida menor que 90º) e dois ângulos obtusos (medida maior que 90º), lados paralelos entre si; e **quadrado:** possui quatro lados com medidas iguais e os quatro ângulos com medidas iguais a 90º cada um.

Referências

DANTE, Luiz Roberto. *Tudo é Matemática*. 8ª série. 2ª edição.São Paulo. Editora Ática, 2005.

IMENES, Luiz Márcio. *Matemática*. 9ºano. 1ª edição. São Paulo, Editora Moderna, 2009.

JAKUBOVIC, José e LELLIS, Marcelo. *Matemática na medida certa*. 8ª série. 5ª edição. São Paulo. Editora Scipione, 1999.

Sites:

http://matematica.obmep.org.br/ 3 matematica@obmep.org.br

http://www.obaricentrodamente.com/2015/04/relacoes-metricas-no-triangulo-retangulo.html

http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/rived/modulo_relmetricas/teo_relmet1.htm

Respostas das atividades

Atividade 1

A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°; logo, temos:

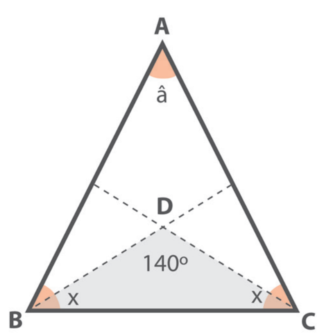
a) $\hat{a} + 40° + 100° = 180° \Rightarrow \hat{a} = 180º - 140° \Rightarrow \hat{a} = 40º$

b) $\hat{a} + 45° + 80° = 180° \Rightarrow \hat{a} = 180º - 125° \Rightarrow \hat{a} = 55º$

c) $x + 116° = 180° \Rightarrow x = 180º - 116° \Rightarrow x = 64º$

$\hat{a} + x + x = 180° \Rightarrow \hat{a} = 180º - 128° \Rightarrow \hat{a} = 52º$

Atividade 2



A partir do triângulo ABC, traçamos as bissetrizes dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$. Encontramos o triângulo BDC (sombreado). Daí, temos que:

$140° + x + x = 180° \rightarrow 140° + 2x = 180° \rightarrow$

$2x = 180° - 140° \rightarrow 2x = 40° \rightarrow x = 20°$

Como a bissetriz divide um ângulo ao meio:

Temos que o ângulo $\hat{B} = 2 \,.\, 20° = 40°$ e $\hat{C} = 2 \,.\, 20° = 40°$. Como $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180$, temos: $\hat{A} + 40° + 40° = 180°$
$\hat{A} = 100°$.

Atividade 3

1) a) lados opostos paralelos.
b) quatro ângulos congruentes.
c) quatro lados congruentes.

d) quatro lados e quatro ângulos congruentes.
e) apenas dois lados paralelos.
f) os dois lados não paralelos são congruentes.

2) V, V, F (todo quadrado é um losango mas nem todo losango é um quadrado)

Atividade 4

a) $x + 110° + x + 15° + x - 5° = 360 \Rightarrow 3x = 360° - 120° \Rightarrow x = \frac{240°}{3} \Rightarrow x = 80°$

$\hat{A} = 80° - 5° \Rightarrow \hat{A} = 75°$ $\quad\quad$ $\hat{C} = 110°$

$\hat{B} = 80° + 15° \Rightarrow \hat{B} = 95°$ $\quad\quad$ $\hat{D} = 80°$

b) $x + 50° + x + x - 20° + 2x - 30° = 360°$

$5x + 50° - 50° = 360° \rightarrow 5x = 360° \rightarrow x = 72°$

Portanto:

$\hat{A} = 72° + 50° \rightarrow \hat{A} = 122°$
$\hat{B} = 72°$
$\hat{C} = 72° - 20° \rightarrow \hat{C} = 52°$
$\hat{D} = 2 . 72° - 30° \rightarrow \hat{D} = 114°$

c) $\hat{C} = 180° - 105° \Rightarrow \hat{C} = 75°$

$\hat{D} = 180° - 75° \Rightarrow \hat{D} = 105°$
$\hat{A} = \hat{B} = 90°$

Atividade 5

a) Para determinar o valor de x no triângulo dado, vamos utilizar a seguinte relação: o quadrado de um cateto é igual ao produto da hipotenusa pela sua projeção.

$b^2 = a . m$

$30^2 = 50x \Rightarrow x = \frac{900}{50} \Rightarrow x = 18.$

b) Vamos utilizar a seguinte relação: $a.h = b.c$

$12x = 20 . 15 \Rightarrow x = \frac{300}{12} \Rightarrow x = 25.$

c) A relação que vamos utilizar é: $h^2 = m . n$

$x^2 = 5 . 15 \Rightarrow x = 5\sqrt{3}.$

d) Usaremos a mesma relação do item anterior: $h^2 = m . n$

$\left(4\sqrt{3}\right)^2 = 4 . x \Rightarrow x = \frac{48}{4} \Rightarrow x = 12.$

Atividade 6

A medida a corresponde à hipotenusa. Portanto, a = 36 + 64 $\rightarrow$ a = 100.

Podemos determinar *b*, aplicando a relação $b^2 = n \cdot a$. Nesse caso, temos:

$b^2 = 64 \cdot 100 \rightarrow b = \sqrt{64} \cdot \sqrt{100} \rightarrow b = 8 \cdot 10 \rightarrow b = 80$.

Para determinarmos *c*, aplicamos a mesma relação do item anterior: $c^2 = m \cdot a$. Nesse caso temos: $c^2 = 36 \cdot 100 \rightarrow c = \sqrt{36} \cdot \sqrt{100} \rightarrow b = 6 \cdot 10 \rightarrow b = 60$.

À altura h, podemos aplicar a relação $h^2 = m \cdot n$. Nesse caso, temos $h^2 = 36 \cdot 64 \rightarrow h = \sqrt{36} \cdot \sqrt{64} \rightarrow h = 6.8 \rightarrow h = 48$.

Exercícios

1. Classifique cada afirmação em verdadeira (V) ou falsa (F).

a) Todo retângulo é um paralelogramo.

b) Todo paralelogramo é um retângulo.

c) Todo quadrado é um retângulo.

d) Todo paralelogramo é um losango.

e) Todo quadrado é um losango.

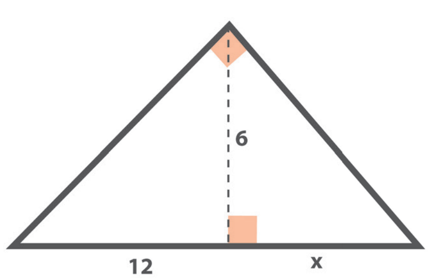
2. Determine os lados de um retângulo cujo perímetro mede 280 cm e que tem base 20 cm maior que a altura.

3. Um ângulo interno de um paralelogramo mede 55°. Quanto medem os demais ângulos internos?

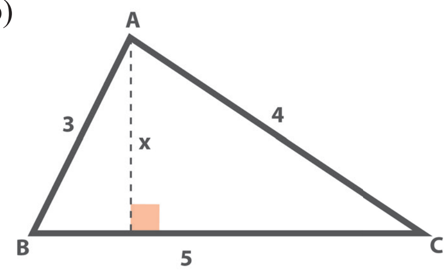
4. Determine o comprimento dos lados de um losango cujo perímetro mede 110cm.

5. Determine o valor desconhecido em cada item:

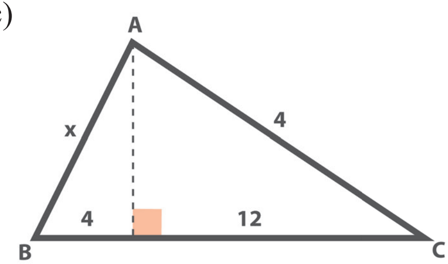
a)



b)



c)



6. Um edifício tem 15 m de altura. Uma escada é colocada a 8 m de sua base, ligada ao topo do edifício. Qual o comprimento dessa escada?

a)12m b) 30m c) 15m d) 17m e) 20m

Respostas dos exercícios

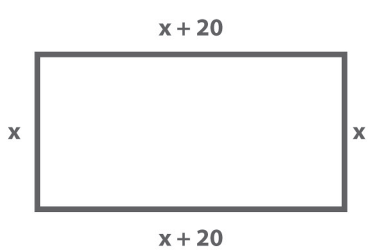
1. a. (V)

   b. (F) ex:  é um paralelogramo, mas não é um retângulo.

   c. (V)

   d. (F) ex:  é um paralelogramo, mas não é um losango. Lembre-se de que o losango é um paralelogramo que possui os quatro lados iguais.

   e. (V)

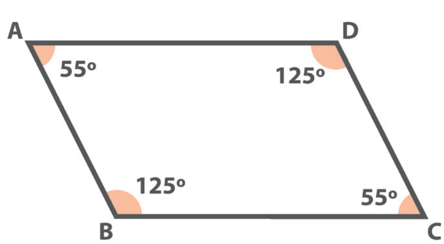
2. 

Perímetro = 280 cm

$x + x + 20 + x + x + 20 = 280 \rightarrow 4x + 40 = 280 \rightarrow$

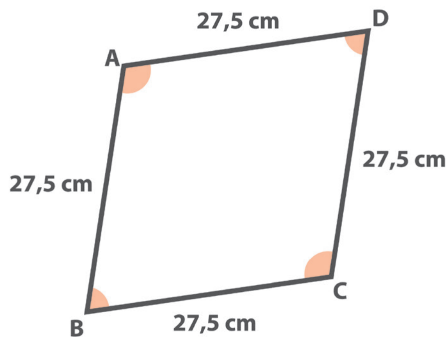
$4x = 240 \rightarrow x = 60$

R: Os lados medem 60 cm e 80 cm

3. 

OBS.: Lembre-se de que num paralelogramo, os ângulos opostos são iguais e a soma de seus ângulos internos é 360°.

4. Sabendo que o perímetro do losango é 110 cm e que o losango possui todos dos lados com medidas iguais, basta dividir 110 por 4.



R: 27,5 cm.

5. a. Aplicaremos a relação $h^2 = m \cdot n$.

$6^2 = 12 \cdot x \rightarrow 36 = 12x \rightarrow x = 3$cm.

b. Aplicaremos a relação $b \cdot c = a \cdot h$.

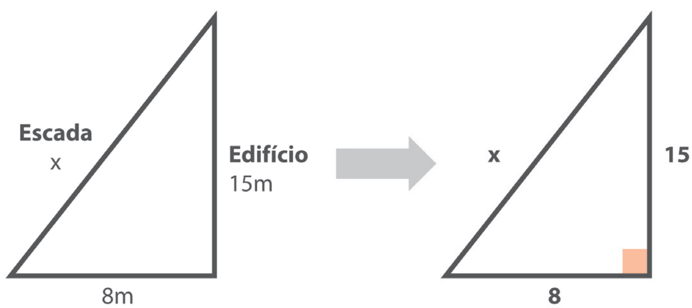
$3 \cdot 4 = 5 \cdot x \rightarrow 12 = 5x \rightarrow x = 2{,}4$cm.

c. Aplicaremos a relação $c^2 = m \cdot a$.

$a = 4 + 12 \rightarrow a = 16$

$x^2 = 4 \cdot 16 \rightarrow x = \sqrt{4} \cdot \sqrt{16} \rightarrow x = 2.4 \rightarrow x = 8$ cm.

6.



Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$x^2 = 8^2 + 15^2 \rightarrow x^2 = 64 + 225 \rightarrow x^2 = 289 \rightarrow x = 17$. Portanto, a escada possui 17m de comprimento. R: Letra d.

CEJA >>
CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS

O Teorema de Pitágoras e suas aplicações

Matemática - Fascículo 11 - Unidade 32

Objetivos de aprendizagem

1. Aplicar o Teorema de Pitágoras para encontrar medidas desconhecidas dos lados do triângulo retângulo;
2. Utilizar o Teorema de Pitágoras na dedução de fórmulas relativas a quadrados e triângulos equiláteros;
3. Construir alguns números irracionais, utilizando o Teorema de Pitágoras.

Para início de conversa...

O filósofo e matemático grego Pitágoras, por volta do século VI a.C., fundou uma escola, chamada Escola Pitagórica, na qual a ciência era considerada um bem comum, e todos pesquisavam e discutiam coletivamente. Os Pitagóricos tinham o conhecimento como única aspiração e, com isso, as contribuições científicas conquistadas não possuíam autoria individual. O lema da escola pitagórica era "Tudo é Número". Eles procuravam explicar a Natureza através dos números. O emblema da Escola de Pitágoras era o pentágono estrelado – ou pentagrama. Os estudos dos pitagóricos trouxeram grandes contribuições para a Matemática, principalmente na Geometria. Entre essas contribuições, a de maior sucesso foi, sem dúvida, o conhecido teorema de Pitágoras - considerado uma das principais descobertas da Matemática.

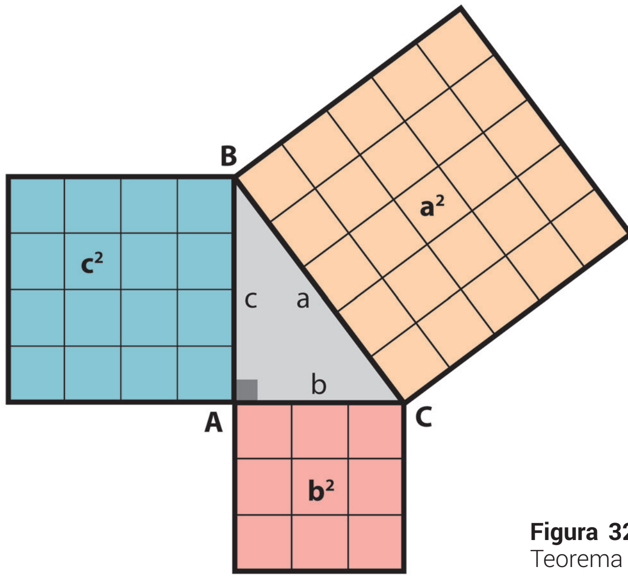
Para a descoberta de seu famoso teorema, é possível que Pitágoras e seus discípulos tivessem se baseado nos conhecimentos geométricos dos egípcios e em mosaicos, que apareciam com frequência em paredes de construções do Antigo Egito.

1. O Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras descreve uma relação existente no triângulo retângulo – que, como vimos, possui um ângulo reto, isto é, que mede 90º, e é formado por dois catetos e a hipotenusa, que constitui o maior segmento do triângulo e localiza-se opostamente ao ângulo reto.

Acredita-se que Pitágoras tenha obtido conhecimentos geométricos com agrimensores egípcios, que já usavam o triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5. Pitágoras percebeu que, construindo um quadrado sobre cada um dos lados de um triângulo de lados 3u, 4u e 5u (sendo *u* uma unidade de comprimento qualquer), como mostra a figura abaixo, apareceria a seguinte relação:

"A área do quadrado formado sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados formados sobre os catetos."



$a^2 = b^2 + c^2$

onde:

a = hipotenusa

b = cateto

c = cateto

Figura 32.1: Representação gráfica do Teorema de Pitágoras

Representamos essa relação pela fórmula $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

Pitágoras percebeu, então, que essa relação valeria para todo e qualquer triângulo retângulo.

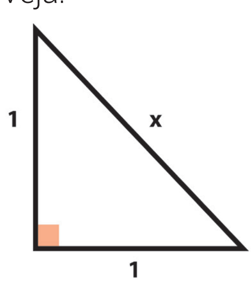
Curiosidades

Este vídeo apresenta uma interessante demonstração do Teorema de Pitágoras. https://www.youtube.com/watch?v=9OiX5OoBdew

1.1 O Teorema de Pitágoras e os Números Irracionais

Foi por meio do Teorema de Pitágoras que os números irracionais começaram a ser introduzidos na Matemática. O primeiro irracional a surgir foi $\sqrt{2}$, que apareceu no cálculo da hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos medindo 1.

Veja:



$x^2 = 1^2 + 1^2$

$x^2 = 1 + 1$

$x^2 = 2$

$x = \sqrt{2}$

Figura 32.2: Triângulo retângulo com catetos medindo 1 e hipotenusa medindo $\sqrt{2}$

Atenção

Os números irracionais são aqueles que não podem ser escritos na forma de fração, pois em suas formas decimais, consistem em números infinitos não periódicos. Por exemplo: 0,152896475268521786... ; 1,41421356237309504... ; 4,2360679774997896964O...

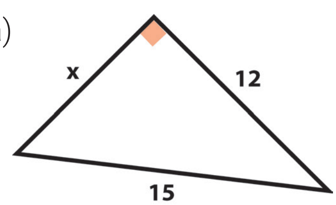
$$x^2 = 1^2 + 1^2$$
$$x^2 = 1 + 1$$
$$x^2 = 2$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{2}$$
$$x = \sqrt{2}$$
$$\sqrt{2} = 1{,}414213562373....$$

Anote as respostas em seu caderno

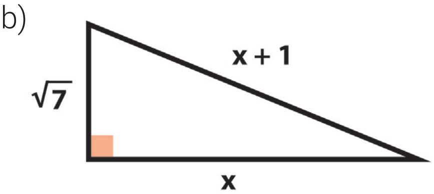
Atividade 1

1) Calcule o valor de *x*, aplicando o Teorema de Pitágoras:

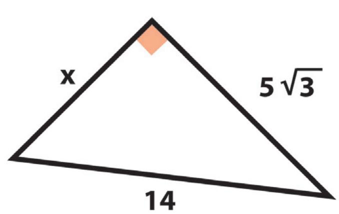
a)



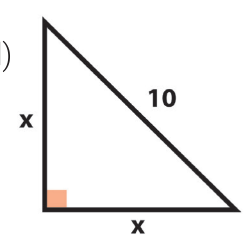
b)



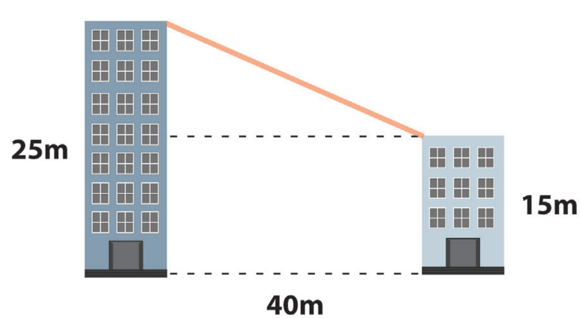
c)



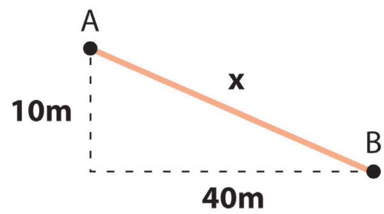
d)



2) Um ciclista acrobático passará de um prédio a outro com uma bicicleta especial e sobre um cabo de aço, como demonstra o esquema a seguir:



Qual é a medida mínima do comprimento do cabo de aço?

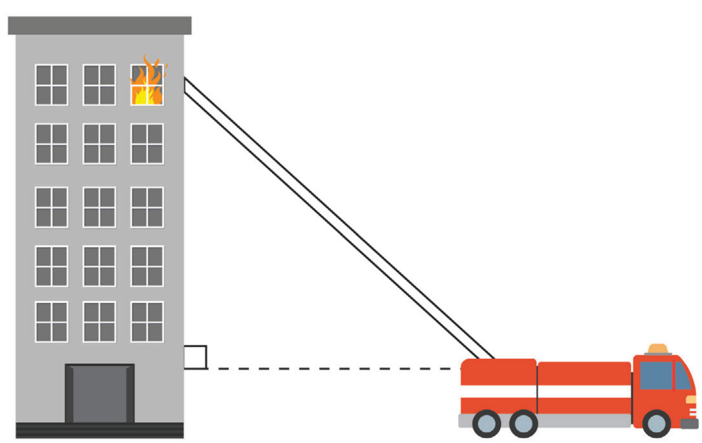


Anote as respostas em seu caderno

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 2

Durante um incêndio em um edifício residencial, os bombeiros utilizaram uma escada Magirus de 10m para atingir a janela de um dos apartamentos incendiados. A escada estava colocada a 1m do chão, sobre um caminhão que se encontrava afastado do edifício. Qual é a altura desse apartamento em relação ao chão?



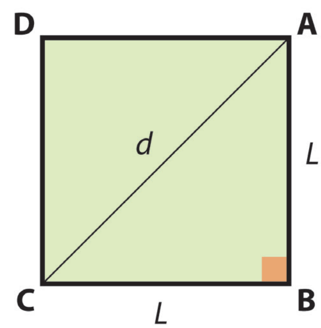
Anote as respostas em seu caderno

2. O Aplicações Notáveis do Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras possui grande importância na construção de fórmulas, como, por exemplo, no estabelecimento de uma fórmula geral para calcular a altura e a área de um triângulo equilátero e para calcular a diagonal de um quadrado. Vejamos a seguir.

2.1 Diagonal do Quadrado

Seja ABCD um quadrado cujo lado mede *L*. Vamos calcular a diagonal *d* do quadrado em função do lado *L*. O problema pode também ser formulado assim: dado um quadrado de lado *L*, calcule a diagonal *d*.



$$d^2 = L^2 + L^2$$
$$d^2 = 2L^2$$
$$d = \sqrt{2L^2}$$
$$d = L\sqrt{2}$$

Figura 32.3: Quadrado ABCD

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 3

Calcular a diagonal de um quadrado de 6 cm de lado.

Anote as respostas em seu caderno

2.2 Altura de um Triângulo Equilátero

Como vimos na unidade anterior, o Triângulo Equilátero possui os lados e os ângulos internos com medidas iguais. Assim, dado o triângulo equilátero ABC, vamos estabelecer uma expressão geral para o cálculo da altura.

Observe as demonstrações a seguir:

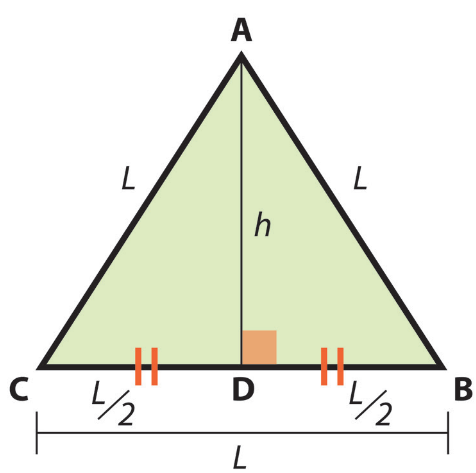


Figura 32.4: Triângulo equilátero ABC

A altura do triângulo equilátero divide-o em dois triângulos retângulos congruentes (ΔABD e ΔACD), sendo L o lado e h a altura. Vamos calcular a altura h do triângulo em função de L.

$$L^2 = h^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \rightarrow L^2 = h^2 + \frac{L^2}{4} \rightarrow L^2 - \frac{L^2}{4} = h^2 \rightarrow \frac{3L^2}{4} = h^2 \rightarrow$$

$$h^2 = \frac{3L^2}{4} \rightarrow h = \sqrt{\frac{3L^2}{4}} \rightarrow h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, a altura h de um triângulo equilátero de lado L pode ser obtida pela fórmula

$$\boxed{h = \frac{L\sqrt{3}}{2}}$$

2.3 Área do Triângulo Equilátero

A área de um triângulo é definida pela metade do produto da área da base pela altura. Continuando a análise do triângulo ABC acima, vamos determinar uma expressão capaz de calcular a área de qualquer triângulo equilátero (S_Δ).

$$S_\Delta = \frac{\text{base . altura}}{2} \rightarrow S_\Delta = \frac{L \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2}}{2} \rightarrow S_\Delta = \frac{\frac{L^2\sqrt{3}}{2}}{2} \rightarrow S_\Delta = \frac{L^2\sqrt{3}}{2} . \frac{1}{2} \rightarrow S_\Delta = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

Assim, a área de um triângulo retângulo pode ser através da fórmula

$$\boxed{S_\Delta = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}}$$

Podemos notar que as expressões estão todas em função da medida do lado do triângulo equilátero.

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 4

1) Determine a altura do triângulo equilátero cujo lado mede 12cm.

2) A altura de um triângulo equilátero mede $10\sqrt{3}$cm . Determine a área desse triângulo.

3) Determine a altura de um triângulo equilátero que possui perímetro igual a 30cm.

Anote as respostas em seu caderno

Resumo

Nesta unidade, você viu que:

- Num triângulo retângulo, a área do quadrado formado sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados formados sobre os catetos (Teorema de Pitágoras $\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$)
- Foi por meio do Teorema de Pitágoras que os números irracionais começaram a ser introduzidos na Matemática. O primeiro irracional a surgir foi $\sqrt{2}$.
- O Teorema de Pitágoras possui grande importância na construção de fórmulas, como a da área de um triângulo equilátero, da altura de um triângulo equilátero e da diagonal de um quadrado.

Referências

DANTE, Luiz Roberto. *Tudo é Matemática*. 8ª série. 2ª edição.São Paulo. Editora Ática, 2005.

IMENES, Luiz Márcio. *Matemática*. 9ºano. 1ª edição. São Paulo, Editora Moderna, 2009.

JAKUBOVIC, José e LELLIS, Marcelo. *Matemática na medida certa*. 8ª série. 5ª edição. São Paulo. Editora Scipione, 1999.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. "*Teorema de Pitágoras*"; Brasil Escola. Disponível em <http://brasilescola.uol.com.br/matematica/teorema-pitagoras.htm>. Acesso em 02 de junho de 2017.

Sites:

http://matematica.obmep.org.br/ 3 matematica@obmep.org.br

http://www.obaricentrodamente.com/2015/04/relacoes-metricas-no-triangulo-retangulo.html

http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/rived/modulo_relmetricas/teo_relmet1.htm

Respostas das atividades

Atividade 1

1) a) Aplicando Pitágoras, temos:

$$15^2 = x^2 + 12^2 \Rightarrow 225 = x^2 + 144 \Rightarrow 225 - 144 = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{81} \Rightarrow x = \pm 9;$$

Como x é comprimento, então deve ser um número positivo; no nosso caso, $x = 9$.

b) $(x+1)^2 = x^2 + (\sqrt{7})^2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 + 7 \Rightarrow 2x = 7 - 1 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2} \Rightarrow x = 3$

c) $14^2 = x^2 + (5\sqrt{3})^2 \Rightarrow 196 = x^2 + 25.3 \Rightarrow x^2 = 196 - 75 \Rightarrow x^2 = 121 \Rightarrow x = \pm\sqrt{121} \Rightarrow x = \pm 11$

Como x é medida de um cateto, então, $x = 11$.

d) $10^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow 2x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = \frac{100}{2} \Rightarrow x^2 = 50 \Rightarrow x = \pm\sqrt{50} \Rightarrow x = \pm 5\sqrt{2}$

Como x é medida dos catetos, temos $x = 5\sqrt{2}$.

2) Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$x^2 = 10^2 + 40^2$

$x^2 = 100 + 1600$

$x^2 = 1700$

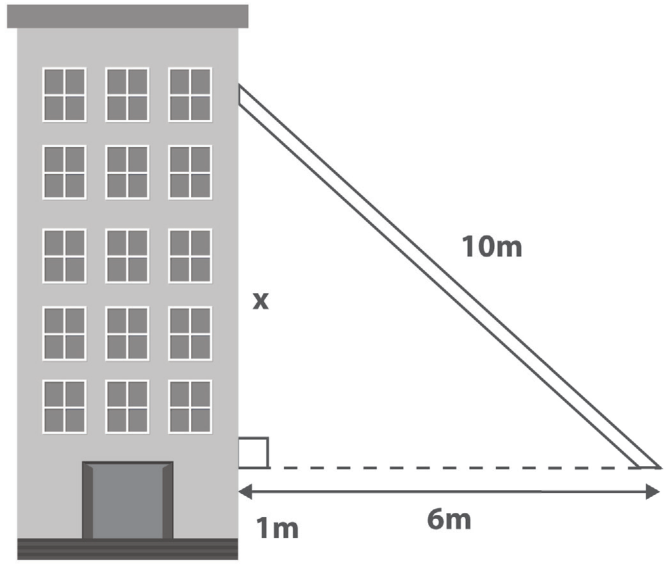
$x = \sqrt{1700}$

$x = 41,23$ (aproximadamente)

Atividade 2

Vamos fazer uma figura como modelo matemático:

Aplicando Pitágoras, temos:



$$10^2 = 6^2 + x^2 \rightarrow 100 - 36 = x^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{64} \rightarrow x = \pm 8$$

Como é medido o valor de x = 8.

A escada encontra-se a 1 m do chão; então, temos que a altura da janela é x + 1 = 8 + 1= 9 m.

Atividade 3

1) Utilizando a fórmula anterior da diagonal do quadrado ($d = L\sqrt{2}$), temos:

$d = L\sqrt{2}$, onde L é o tamanho do lado deste quadrado.

$d = L\sqrt{2}$ (substituindo L por 6)

Logo, a diagonal de um quadrado de 6 cm de lado mede $d = 6\sqrt{2}$.

Atividade 4

1) $L = 12\text{cm}$

$$h = \frac{L\sqrt{3}}{2} \rightarrow h = \frac{12\sqrt{3}}{2} \rightarrow h = 6\sqrt{3}\ \text{cm}$$

Logo, a medida da altura desse triângulo é $6\sqrt{3}$cm.

2) $h = 10\sqrt{3}$

$$h = \frac{L\sqrt{3}}{2} \rightarrow 10\sqrt{3} = \frac{L\sqrt{3}}{2} \rightarrow 20\sqrt{3} = L\sqrt{3} \rightarrow L = \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \rightarrow L = 20\text{cm}$$

Para determinar a área, utilizaremos a fórmula $S_{\Delta} = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$

$$S_{\Delta} = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \rightarrow S_{\Delta} = \frac{20^2\sqrt{3}}{4} \rightarrow S_{\Delta} = \frac{400\sqrt{3}}{4} \rightarrow S_{\Delta} = 100\sqrt{3}\,cm^2$$

Logo, a área desse triângulo é $100\sqrt{3}$cm².

3) Perímetro é a soma dos lados; então, cada lado desse triângulo equilátero mede 10cm. Logo:

$$L = 10cm$$

$$h = \frac{10\sqrt{3}}{2} \rightarrow h = 5\sqrt{3} \rightarrow h \cong 8,66\ cm$$

Exercícios

1. Um quadrado tem 4cm de lado. Determine a medida da diagonal desse quadrado.

2. O lado de um triângulo equilátero mede 12cm. Determine a medida da altura desse triângulo.

3. A diagonal de um quadrado mede $11\sqrt{2}$cm. Determine a medida do lado e o perímetro desse quadrado.

4. Se um quadrado tem 225cm² de área, qual é a medida, expressa em forma decimal, da diagonal desse quadrado? Faça $\sqrt{2} = 1,41$.

5. O lado de um triângulo equilátero mede 6cm. Encontre a área desse triângulo.

6. A diagonal de um quadrado mede 4cm. Determine a área desse quadrado.

Respostas dos exercícios

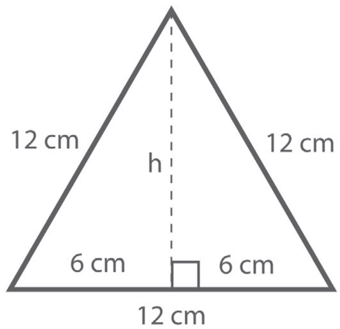
1. a diagonal *d* do quadrado é $L\sqrt{2}$. Como L é a medida do lado do quadrado, temos: d = $4\sqrt{2}$. Utilizando a fórmula:

$$d^2 = 4^2 + 4^2 \rightarrow d^2 = 16 + 16 \rightarrow d^2 = 32 \rightarrow d = \sqrt{32} \rightarrow d = 4\sqrt{2}\ cm$$

2. a altura de um triângulo equilátero é dada por $h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$. Logo:

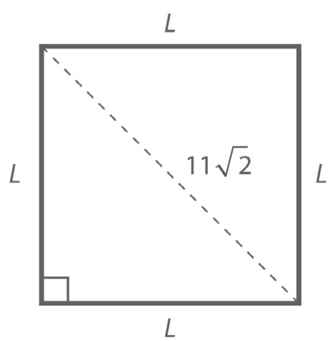
$$h = \frac{L\sqrt{3}}{2} \rightarrow h = \frac{12\sqrt{3}}{2} \rightarrow h = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

Ou, aplicando o Teorema de Pitágoras:



$$12^2 = h^2 + 6^2$$
$$144 = h^2 + 36$$
$$144 - 36 = h^2$$
$$h^2 = 108$$
$$h = \sqrt{108} \rightarrow h = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

3. a² = b² + c²



$$d = 11\sqrt{2} \text{ cm}$$
$$\text{Fórmula} : d = L\sqrt{2}$$
$$11\sqrt{2} = L\sqrt{2} \rightarrow L = \frac{11\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \rightarrow L = 11 \text{ cm}$$
$$\text{Perímetro}: 4.L = 4.11 = 44 \text{ cm}$$

4. Se a área do quadrado é 225cm², temos:

$$L^2 = 225 \rightarrow L = \sqrt{225} \rightarrow L = 15 \text{ cm}$$

Calculando a diagonal:

$$d = L\sqrt{2} \rightarrow d = 15\sqrt{2}.$$

$$\text{Como } \sqrt{2} \cong 1{,}41 \rightarrow d = 15.1{,}41 \rightarrow d = 21{,}15 \text{ cm}$$

5. Como o lado do triângulo mede 6cm, temos:

$$S_\Delta = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \rightarrow S_\Delta = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \rightarrow S_\Delta = \frac{36\sqrt{3}}{4} \rightarrow S_\Delta = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

6. Como a diagonal do quadrado mede 6 cm, temos que:

$$d = L\sqrt{2} \rightarrow 4 = L\sqrt{2} \rightarrow L = \frac{4}{\sqrt{2}} \rightarrow L = \frac{4}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \rightarrow L = \frac{4\sqrt{2}}{2} \rightarrow L = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

Como o lado do quadro mede , a área do quadrado ( ) será:

$$S_Q = L^2 \rightarrow S_Q = \left(2\sqrt{2}\right)^2 \rightarrow S_Q = 4.2 \rightarrow S_Q = 8\,cm^2$$

CEJA
CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS

Estatística

Matemática - Fascículo 11 - Unidade 33

Objetivos de aprendizagem

1. Saber identificar e distinguir população e amostra;
2. Identificar e distinguir as variáveis estatísticas;
3. Ler, interpretar e construir dados estatísticos registrados em tabelas e gráficos;
4. Diferenciar e calcular frequência absoluta e relativa de pesquisa;
5. Determinar as medidas de tendências centrais: Média, Moda e Mediana;
6. Construir gráficos de setores.

Para início de conversa...

O Tratamento da Informação é um eixo da Estatística que está associado à sistematização, leitura e interpretação de Gráficos e Tabelas, e que utiliza a linguagem matemática para representar conteúdos relacionados às mais variadas áreas do conhecimento. Para compreender e interpretar de forma rápida e eficaz esse tipo de informação, é preciso dominar essa linguagem, que, além de dados numéricos, textos e recursos gráficos, envolve medidas, proporcionalidade e porcentagens. Em determinadas situações, envolve, ainda, números negativos, coordenadas (gráfico de linhas) e ângulos (gráfico de setores).

1. População e Amostras

A População e a Amostra têm importância fundamental na análise estatística. Dizem respeito a métodos para a obtenção de informação sobre uma população a partir de informações contidas em uma amostra retirada da população.

População: É o conjunto de todas as coisas que se pretende estudar. Por exemplo: os usuários de um plano de saúde, os membros de uma equipe de futebol, os funcionários de uma empresa, os eleitores de um município, estado ou país, etc. A população não necessariamente se refere a pessoas; ela também pode ser relacionada a um conjunto de objetos ou informações. Na estatística, a população é classificada como finita (quando o número de elementos de um grupo não é muito grande) e infinita (quando o número de elementos, nesse caso, é muito elevado).

Amostra: É a parte representativa da população; aquela que realmente é estudada. O objetivo de se selecionar uma amostra é obter informações que sejam representativas da população como um todo. A maneira mais simples de se fazer isso é escolher uma amostra aleatória, de maneira que cada membro da população tenha igual probabilidade de estar em qualquer amostra.

Exemplos:

- Pesquisa de opinião pública: a população é o número total de habitantes de um país; a amostra é uma parte dessa população.

- Pesquisa de um novo tratamento para certa doença: a população é o conjunto total de pessoas com a doença ou que venham a ter a doença, um número que não é conhecido; a amostra é o conjunto de doentes escolhido para testar o tratamento.

Atenção ⚠

O tamanho de uma população faz com que, em geral, seja impossível ou impraticável estudá-la na sua totalidade. O custo para a realização de observações envolvendo todos os elementos de uma população pode ser inviável. E, ainda, pode ser que nem todos os membros individuais de uma população sejam observáveis, por limitações técnicas, por exemplo.

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 1

Responda às perguntas:

a) O que você entende por população e amostra?

b) Por que uma amostra, em alguns casos, é utilizada para representar uma população?

Anote as respostas em seu caderno

2. Variáveis estatísticas

Chamamos de variáveis estatísticas (ou simplesmente de variável) cada elemento investigado em uma determinada pesquisa. Observe os dados da pesquisa abaixo:

Certa empresa realizou uma pesquisa com seus funcionários e elaborou uma tabela para melhor representar os resultados obtidos.

Tabela de Informações dos funcionários da Empresa X

NOME	ESCOLARIDADE	ESTADO CIVIL	Nº DE FILHOS	ALTURA (m)
Antônio	Ensino Superior	Solteiro	0	1,72
Carmem	Ensino Médio	Casado	3	1,55
Damares	Ensino Fundamental	Solteiro	0	1,50
Fausto	Ensino Médio	Casado	2	1,78
Jorge	Ensino Superior	Solteiro	0	1,75
Janaína	Ensino Fundamental	Casado	1	1,56
Priscila	Ensino Médio	Solteiro	0	1,60
Richard	Ensino Fundamental	Casado	2	1,86
Sônia	Ensino Superior	Casado	1	1,63

Chamamos de variáveis quantitativas as variáveis que representam quantidades. Na pesquisa acima, "Nº de filhos" e "Altura" são variáveis quantitativas. As variáveis quantitativas podem ser **discretas** ou **contínuas**.

As variáveis quantitativas discretas são encontradas por meio de contagem, como, em nosso exemplo, a variável "N° de filhos". Já as variáveis quantitativas contínuas, normalmente, são determinadas mediante uma medição, como ocorre em nosso exemplo com a variável "Altura".

Quando as variáveis qualitativas apresentam uma qualidade (ou atributo) como resposta, podem ser classificadas como nominais ou ordinais. As variáveis qualitativas nominais não apresentam uma ordenação entre as respostas, como ocorre em nosso exemplo com a variável "Estado Civil". Já as variáveis qualitativas ordinais possuem determinada ordenação, como acontece com a variável "Escolaridade".

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 2

Em uma determinada escola, foram coletadas informações sobre as seguintes variáveis estatísticas de seus alunos:

a) altura b) idade c) classe social d) número de irmãos

e) matéria preferida f) esporte preferido

Dentre as variáveis citadas, quais são quantitativas? E quais são qualitativas?

Anote as respostas em seu caderno

3. Frequência Absoluta e Frequência Relativa

Ao se realizar uma pesquisa, os dados coletados são organizados em uma tabela de distribuição de frequência. Como exemplo, utilizaremos a tabela abaixo para representar os alunos de um curso de Informática.

Alunos do curso de Informática		
Nível	**Frequência absoluta (fa)**	**Frequência relativa (fr)**
Iniciante	32	40%
Intermediário	28	35%
Avançado	20	25%
Total	80	100%

Numa tabela de distribuição de frequência, como a anterior, devem constar os seguintes itens:

Frequência ou frequência absoluta (fa): Corresponde ao número de vezes que um dado se repete. Pela tabela do nosso exemplo, observamos que 32 alunos estão no nível "Iniciante"; 28, no nível "Intermediário"; 20, no nível "Avançado".

Frequência relativa (fr): É o quociente (divisão) entre a frequência absoluta e o total da amostra. A frequência relativa é expressa em porcentagem: Pela tabela, observamos que *fr* do nível "Iniciante" é $\frac{32}{80} = 40\%$; *fr* do nível "Intermediário" é $\frac{28}{80} = 35\%$ e *fr* do nível "Avançado" é $\frac{20}{80} = 25\%$.

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 3

Pedro lançou um dado 50 vezes e anotou, em uma tabela, os números que surgiram na face superior.

6	4	2	1	6	3	3	1	5	4
1	2	4	5	1	1	4	6	3	1
1	3	6	4	1	1	5	4	2	6
5	4	2	1	5	4	6	3	6	5
4	1	1	3	3	2	2	3	2	1

a) Construa uma tabela de distribuição de frequências (fa e fr);

b) Qual o número que mais apareceu?

c) Qual a frequência relativa do número 4?

d) Nesses 50 lançamentos, qual é o percentual de um resultado menor que 3?

Anote as respostas em seu caderno

4. Média (Me), Moda (Mo) e Mediana (Md)

Em estatística, as medidas mais comuns de distribuição de dados são a *média*, a *moda* e a *mediana*.

Média (ou média aritmética simples): dado um conjunto de dados numéricos, obtém-se a média somando os valores de todos os dados e dividindo a soma pelo número de dados.

Exemplo: No exemplo abaixo, os dados referem-se ao consumo diário de combustível de uma frota de 10 carros, em litros.

Combustível consumido pela frota em um dia (em litros)									
32	52	28	43	48	46	34	50	36	42

Para encontrarmos o consumo médio dessa frota, calculamos:

$$Ma = \frac{32+52+28+43+48+46+34+50+36+42}{10} = \frac{411}{10} = 41{,}1 \text{ litros.}$$

Portanto, Ma = 41,1 litros de combustível.

De modo geral, podemos dizer que, na média, o consumo de combustível da frota foi de 41,1 litros de combustível diário.

Moda: é o valor mais frequente de um conjunto de dados. A Moda é uma medida útil especialmente para reduzir a informação de um conjunto de dados qualitativos, apresentados sob a forma de nomes ou categorias, para os quais não se pode calcular a média e, por vezes, a mediana.

Exemplo: Um pesquisador registrou os batimentos cardíacos dos jogadores de três equipes de futebol masculino. Veja o resultado na tabela abaixo:

Número de batimentos cardíacos por minuto	75	76	77	78	79	80	85	88	90	92
Frequência	3	9	5	7	2	3	6	2	7	4

Observe que 76 batimentos cardíacos por minuto é o valor que mais aparece na tabela e que sua frequência é 9.

Neste caso, dizemos que 76 é a moda dessa amostra de dados estatísticos. Portanto, Mo = 76.

Mediana: é o valor intermediário que separa a metade superior da metade inferior de um conjunto de dados. No caso de um número par de dados, a mediana será a média dos dois valores centrais. Ou seja, ordenados os elementos da amostra (de forma crescente ou decrescente), a mediana é o valor (pertencente ou não à amostra) que a divide ao meio, isto é, 50% dos elementos da amostra são menores ou iguais à mediana e os outros 50% são maiores ou iguais à mediana.

Exemplo:

O quadro abaixo apresenta o número de gols marcados em todas as 25 rodadas de um campeonato de futebol de várzea.

Rodada	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª
Gols	**25**	**23**	**20**	**29**	**32**	**19**	**28**	**35**	**42**	**40**
Rodada	11ª	12ª	13ª	14ª	15ª	16ª	17ª	18ª	19ª	20ª
Gols	**21**	**16**	**26**	**18**	**22**	**21**	**44**	**42**	**28**	**31**
Rodada	21ª	22ª	23ª	24ª	25ª					
Gols	**30**	**25**	**24**	**23**	**28**					

Para encontrarmos a mediana no número de gols por rodada, devemos, primeiramente, dispor esses valores em ordem crescente ou decrescente. Chamamos essa disposição de **rol**.

16 – 18 – 19 – 20 – 21 – 21 – 22 – 23 – 23 – 24 – 25 – 25 – 26 – 28 – 28 – 28 – 29 – 30 – 31 – 32 – 35 – 40 – 42 – 42 – 44

Como mencionado anteriormente, quando há uma quantidade ímpar de valores, a mediana (Md) será o valor central desse rol. Em nosso exemplo, o valor central é a 13ª posição, isto é, mediana (Md) = 26.

Mas se quiséssemos encontrar a mediana dos gols das dez primeiras rodadas? Como deveríamos proceder?

Rodada	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª
Gols	**25**	**23**	**20**	**29**	**32**	**19**	**28**	**35**	**42**	**40**

Bastaria organizar os dez primeiros resultados em um rol.

Disposição em rol: 19 – 20 – 23 – 25 – 28 – 29 – 32 – 35 – 40 – 42

Como a quantidade de valores é par, a mediana será a média aritmética dos dois valores centrais. Observe que os dois valores centrais são a 5ª e a 6ª posições.

Portanto: $$Md = \frac{28 + 29}{2} = \frac{57}{2} = 28,5$$

Md = 28,5 gols

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 4

Determine a Média (Me), a Moda (Mo) e a Mediana (Md) do conjunto de dados da tabela a seguir:

Tabela: Gastos com conta de água.

MESES	JAN.	FEV.	MAR.	ABR.	MAI.	JUN.
Gasto (em R$)	25,00	24,00	35,00	28,00	35,00	33,00

Anote as respostas em seu caderno

5. Os gráficos

Os gráficos têm como função traduzir o que poderia ser dito em palavras - e em números, grandezas e tabelas de dados - em informação visual mais direta, clara, expressiva e mais universal.

Através de um gráfico, é possível demonstrar o comportamento de um conjunto de variáveis que se relacionam e que podem ser comparadas. Os tipos mais comuns de gráficos são:

1. Gráfico de colunas: mais utilizado quando há uma grande quantidade de dados a ser exibidos. Serve para comparar elementos semelhantes (variáveis quantitativas e qualitativas), sendo que cada dado é representado por um retângulo na horizontal, localizado em um plano cartesiano. Veja o exemplo.

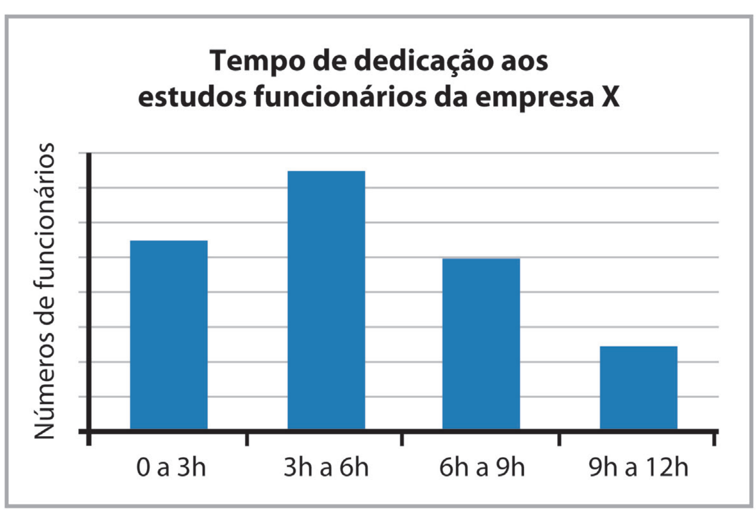


Figura 33.1: Gráfico de colunas

2. Gráfico de barras: semelhante ao gráfico de colunas. Os dados ficam dispostos na posição horizontal. Veja o exemplo.

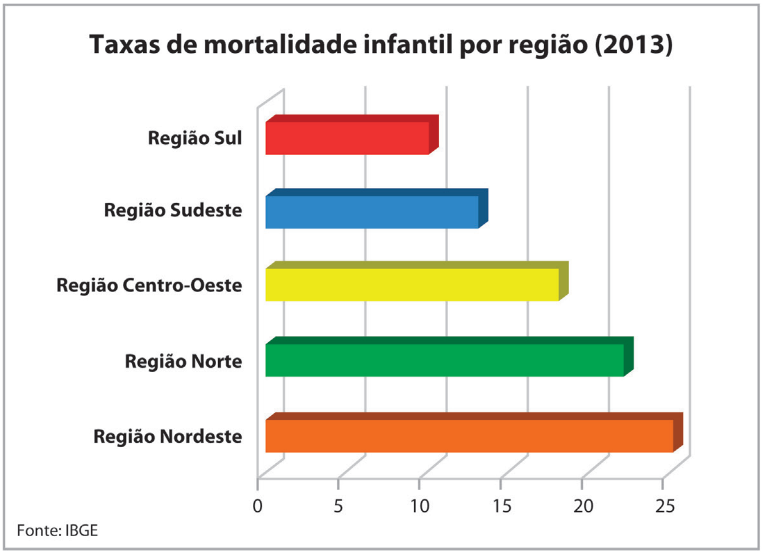


Figura 33.2: Gráfico de barras

3. Gráfico de linhas: é adequado quando a intenção é levar o leitor a uma análise sobre a variação de um dado em determinado período. Veja o exemplo.

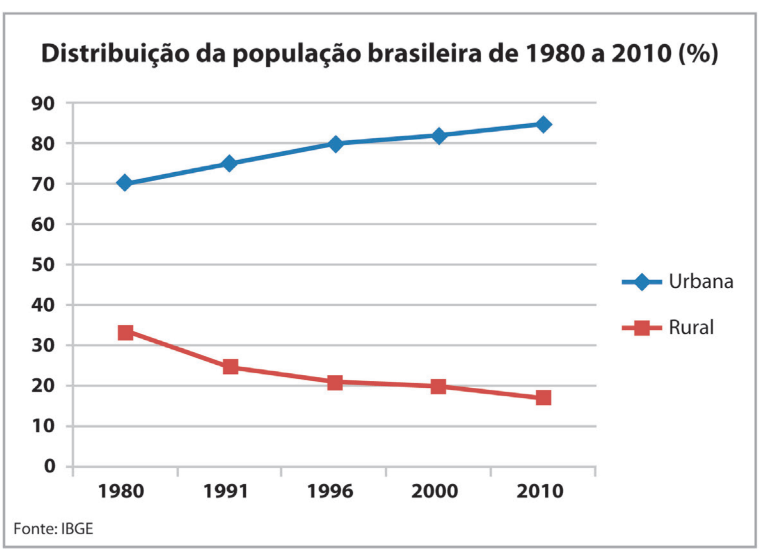


Figura 33.3: Gráfico de linhas

4. Gráfico de setores (conhecido como "pizza"): são mais indicados para mostrar poucos números. Os dados de um gráfico desse tipo sempre se referem a um mesmo universo. Veja o exemplo.

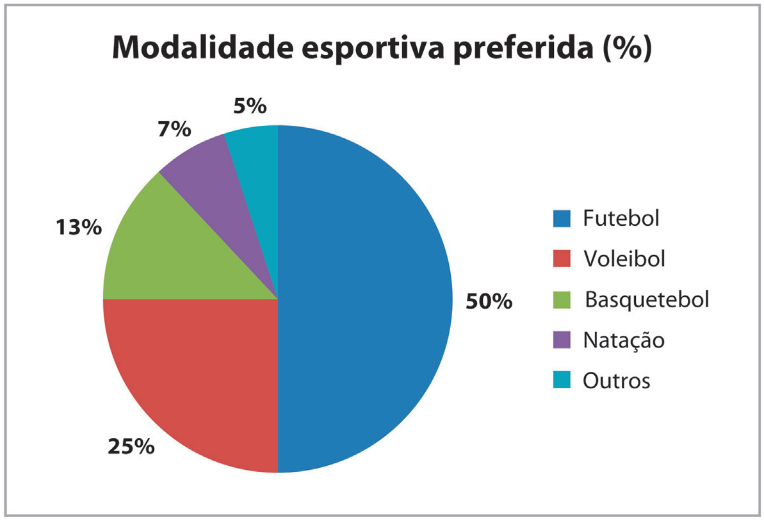


Figura 33.4: Gráfico de setores

Obs.: Em unidade anterior, vimos como se constrói gráfico de linhas e de colunas. Nesta unidade, nos deteremos à construção de gráficos de setores.

Para representar os dados em um gráfico de setores, é preciso que os valores estejam em porcentagem. Para isso, devemos definir a frequência relativa dos dados observados. Vejamos o exemplo e os passos a seguir.

Exemplo: Uma escola de Ensino Médio realizou uma pesquisa, com seus 400 alunos, sobre a preferência por modalidades esportivas. Os dados foram distribuídos em uma tabela. Veja:

Tabela 33.1: Frequências dos esportes preferidos em uma escola

Esporte Preferido	Frequência Absoluta (fa)	Frequência relativa (fr)
Futebol	160	40%
Vôlei	120	30%
Basquete	60	15%
Natação	40	10%
Outros	20	5%
Total	400	100%

Como o gráfico é de setores, os dados percentuais serão distribuídos, levando-se em conta a proporção da área a ser representada relacionada aos valores das porcentagens. A área representativa no gráfico será demarcada da seguinte maneira:

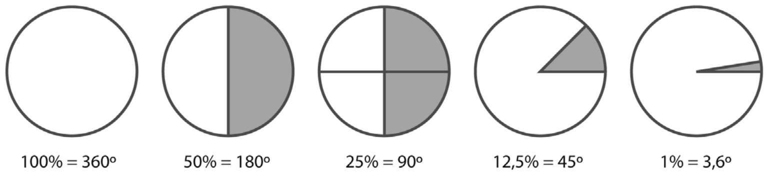


Figura 33.1: Área representativa dos esportes preferidos em uma escola

Para chegarmos à conclusão de que 1% da área do círculo corresponde a 3,6º, podemos também realizar uma regra de três simples:

Área (%)	Ângulo (º)
100	360
1	X

$$\frac{100}{1} = \frac{360}{x} \Rightarrow 100x = 360 \Rightarrow x = \frac{360}{100}$$

$$x = 3{,}6^{\circ}$$

Sabendo que cada 1% de área do círculo equivale a 3,6º, basta multiplicarmos as porcentagens (fr) por 3,6º, para determinarmos o ângulo de cada item. Veja:

Tabela 33.2: Frequência relativa dos esportes preferidos em uma escola

ESPORTE	(fr)	Ângulo
Futebol	40%	40 x 3,6 =144º
Vôlei	30%	30 x 3,6 = 108º
Basquete	15%	15 x 3,6 = 54º
Natação	10%	10 x 3,6 = 36º
Outros	5%	5 x 3,6 = 18º
Total	100%	360º

Para construir o gráfico, esboçamos uma circunferência, marcando o seu raio, e, com o auxílio do transferidor, traçamos um ângulo com vértice no centro da circunferência, relativo à primeira porcentagem. Veja a ilustração ao lado.

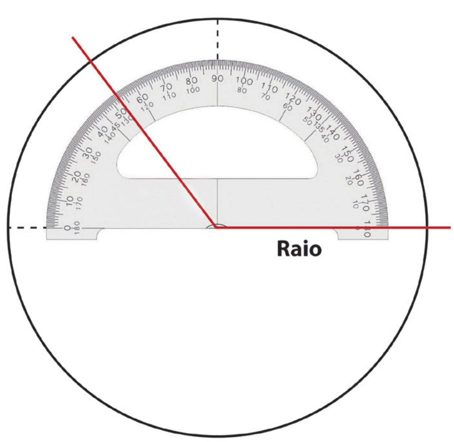


Figura 33.2: Transferidor

Em seguida, marcamos os demais ângulos a partir do raio traçado referente à porcentagem do ângulo anterior, e assim sucessivamente, até que todos os ângulos sejam marcados. Vale lembrar que o centro da circunferência será o vértice de todos os ângulos. Feita a marcação dos ângulos, basta pintar os setores, fazer a anotação das porcentagens e construir uma legenda. Observe o gráfico pronto:

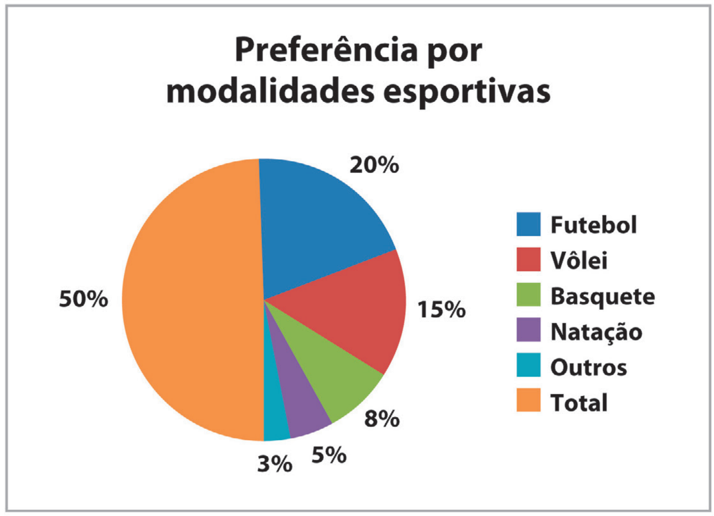


Figura 33.3: Gráfico da preferência por modalidades esportivas em uma escola

Resumo

- A População e a Amostra têm importância fundamental na análise estatística. **População** é o conjunto de todas as coisas que se pretende estudar; **Amostra** é uma parte representativa da população;
- As variáveis estatísticas podem ser **quantitativas** ou **qualitativas**. As variáveis quantitativas podem ser *discretas* ou *contínuas*. Já as variáveis qualitativas podem ser nominais ou ordinais;
- Os dados coletados em uma pesquisa, normalmente, são organizados em uma tabela de distribuição de frequência, a saber, **Frequência absoluta**, que corresponde ao número de vezes a que um dado se refere, e **Frequência relativa**, que é a razão entre a frequência absoluta pelo total da amostra;
- A **Média**, a **Moda** e a **Mediana** são as medidas mais comuns de distribuição de dados em Estatística;
- Através de um gráfico, é possível demonstrar o comportamento de um conjunto de variáveis que se relacionam e que podem ser comparadas.

Referências

BIGODE, Antonio José Lopes. *Matemática hoje é feita assim*. 1a ed. São Paulo: Editora FTD, 2000.

BOLFARINE, H. & Bussab, W.O. *Elementos de amostragem*, Edgard Blucher, 1999.

BONJORNO, José Roberto, BONJORNO, Regina Azenha & OLIVARES, Ayrton. *Matemática: fazendo a diferença*. 1a ed. São Paulo: Editora FTD, 2006.

CENTURIÒN, Marília, JAKUBOVIC, José & LELLIS, Marcelo. *Matemática na medida certa*. 3a ed. São Paulo: Scipione, 2003.

DANTE, Luis Roberto. *Tudo é Matemática*. São Paulo: Editora Ática, 2009.

GIL, Antonio Carlos. *Metodologia do Ensino Superior.* 3a ed. São Paulo: Editora Atlas, 1997.

MARQUES, Monica Baeta. *Metodologia do Ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: Universidade Castelo Branco, 2008.

MOORE, D. S. *A estatísitica básica e sua prática*, 2a edição, São Paulo: LTC, 2005.

MORI, Iracema e ONAGA, Dulce Satiko. *Matemática: idéias e desafios*. 14a ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2007.

SPINELLI, Walter & SOUZA, Maria Helena. *Matemática*. 1a ed. São Paulo: Editora Ática, 2001.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. "*População e amostras*"; Brasil Escola. Disponível em <http://brasilescola.uol.com.br/matematica/populacao-amostras.htm>. Acesso em 10 de junho de 2017.

Sites:

https://novaescola.org.br/conteudo/163/graficos-tabelas-organizar-informacoes

http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/

http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/graficos-setores.htm

Respostas das atividades

Atividade 1

Sugestão de resposta

a) A população é o conjunto de todos os indivíduos ou objetos que possuem, ao menos, uma característica em comum, no qual desejamos obter informações estatísticas. Já a amostra é um subconjunto (ou parte) dessa população, da qual serão coletados os dados para a pesquisa estatística.

b) Porque nem sempre é possível representar toda a população.

Atividade 2

Quantitativas: altura, idade, número de irmãos. Qualitativas: classe social, esporte preferido e matéria preferida.

Atividade 3

a)

LANÇAMENTO DE UM DADO		
Número	**f**	**fr (%)**
1	12	$\frac{12}{50}=24\%$
2	7	$\frac{7}{50}=14\%$
3	10	$\frac{10}{50}=20\%$
4	7	$\frac{7}{50}=14\%$
5	5	$\frac{5}{50}=10\%$
6	9	$\frac{9}{50}=18\%$
TOTAL	**50**	**100%**

b) 1

c) 14%

d) Os números menores que 3 são “2” e “1”. Como a frequência de “1” é 12 e a frequência de “2” é 7, temos que 12 + 7 = 19. Portanto, a soma das frequências de “1” e “2” é 19. Basta calcular: $\frac{19}{50}$ = 0,38 = 38%.

Atividade 4

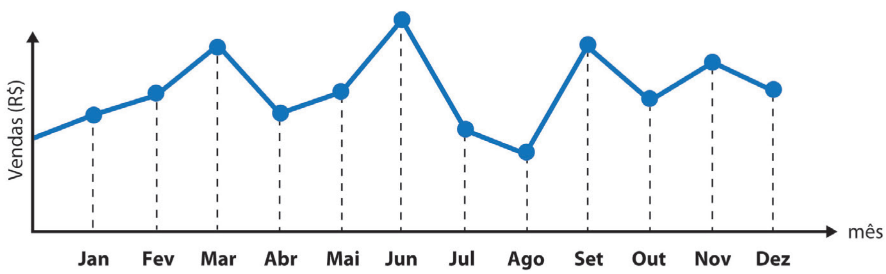
a) Média = $\frac{25+24+35+28+35+33}{6}=\frac{180}{6}=30$

b) Moda = 35

c) Mediana de (24 25 28 33 35 35) = $\frac{28+33}{2}=\frac{61}{2}=30,5$

Exercícios

1. (ENEM 2012 - adaptado) O dono de uma farmácia resolveu colocar à vista do público o gráfico a seguir, que apresenta a evolução do total de vendas (em reais) de certo medicamento ao longo do ano de 2011.



De acordo com o gráfico, quais os meses em que ocorreram a maior e a menor venda absoluta em 2011?

2. A massa, em quilogramas, de 20 trabalhadores de uma empresa de transporte com 100 funcionários está registrada a seguir: 55 – 70 – 76 – 64 – 56 – 70 – 86 – 66 – 78 – 77 – 84 – 91 – 52 – 92 – 86 – 70 – 81.

Com base nessas informações, responda:

a) Qual a população dessa pesquisa?

b) Qual é a sua amostra?

c) Qual é a variável utilizada nessa pesquisa? Essa variável é discreta ou contínua?

d) Que frequências absolutas têm os valores 70kg, 86kg, 91kg e 92kg?

3. Determine a Média (Me), a Moda (Mo) e a Mediana (Md) dos seguintes conjuntos de valores:

a)

10	12	11	12	09	08	13
18	16	11	12	10	09	15

b)

2,3	2,1	1,5	1,9	2,2	2,7	1,5
2,4	2,5	3,5	1,5	2,4	2,5	3,5

4. Carlos é aluno do curso de Matemática. Certo dia, com o propósito de realizar um trabalho de Estatística, ele resolve perguntar a idade de cada um de seus 16 colegas de turma. O quadro a seguir apresenta as anotações dele:

Idade dos colegas de Carlos

19	20	19	21	23	32	35	32
23	27	22	19	28	30	21	42

a) Organize esses dados em um rol.

b) Elabore uma tabela de distribuição de frequências (absoluta e relativa) com os dados coletados por Carlos.

c) Qual foi a população e a amostra dessa pesquisa?

d) Qual a frequência absoluta da idade de 21 anos?

e) Qual a frequência relativa da idade de 32 anos?

5. A escola em que Jorge estuda promoveu uma Olimpíada de Matemática. Ao todo, participaram 1000 alunos, e os critérios de avaliação foram: ótimo, bom, regular e ruim. Veja os resultados a seguir:

Avaliação	Nº de Alunos
Ótimo	150
Bom	500
Regular	200
Ruim	150
Total	1000

A princípio, construa uma planilha de porcentagens e, em seguida, construa o gráfico de setores que melhor represente esses dados.

Respostas dos exercícios

1. A maior venda acontece em junho, e a menor em agosto.

2. a. Todos os 100 funcionários da empresa.
   b. Os 20 trabalhadores.
   c. Quantitativa contínua.
   d. 70kg = 3 frequências; 86kg = 2 frequências; 91kg = 1 frequência; 92kg = 1 frequência.

3. a. $$Me = \frac{10+12+11+12+9+8+12+18+16+11+12+10+9+15}{14} = \frac{166}{14} \approx 11,85$$

Mo = 12 (possui frequência 3)

Para determinarmos a mediana, vamos organizar os dados em rol.

08; 09; 09; 10; 10; 11; 11; 12; 12; 12; 13; 15; 16; 18

Como há um número par de valores, a mediana será determinada pela média aritmética da 7ª e 8ª posições. $Md = \frac{11+12}{2} = \frac{23}{2} = 11,5$.

b.

$$Me = \frac{2,3+2,1+1,5+1,9+2,2+2,7+1,5+2,4+2,5+3,5+1,5+2,4+2,5+3,5}{14} = \frac{32,5}{14} \approx 2,32$$

Mo = 1,5 (possui frequência 3)

Para determinarmos a mediana, vamos organizar os dados em rol.

1,5 – 1,5 – 1,5 – 1,9 – 2,1 – 2,2 – 2,3 – 2,4 – 2,4 – 2,5 – 2,5 – 2,7 – 3,5 – 3,5

Como há um número par de valores, a mediana será determinada pela média aritmética da 7ª e 8ª posições. $Md = \frac{2,3+2,4}{2} = \frac{4,7}{2} = 2,35$.

4. a. 19; 19; 19; 20; 21; 21; 22; 23; 23; 27; 28; 30; 32; 32; 35; 42

   b. Tabela das idades dos colegas de Carlos

Idade	Frequência Absoluta (fa)	Frequência relativa (fr)
19	3	$\frac{3}{16}$ = 0,1875 = 18,75%
20	1	$\frac{1}{16}$ = 0,0625 = 6,25%
21	2	$\frac{2}{16}$ = 0,125 = 12,5%
22	1	$\frac{1}{16}$ = 0,0625 = 6,25%
23	2	$\frac{2}{16}$ = 0,125 = 12,5%
27	1	$\frac{1}{16}$ = 0,0625 = 6,25%
28	1	$\frac{1}{16}$ = 0,0625 = 6,25%
30	1	$\frac{1}{16}$ = 0,0625 = 6,25%
32	2	$\frac{2}{16}$ = 0,125 = 12,5%
35	1	$\frac{1}{16}$ = 0,0625 = 6,25%
42	1	$\frac{1}{16}$ = 0,0625 = 6,25%
TOTAL	16	100%

c. 19; 19; 19; 20; 21; 21; 22; 23; 23; 27; 28; 30; 32; 32; 35; 42

d. A população e a amostra foram a mesma: todos os 16 alunos colegas de Carlos.

e. Fa de 21 = 2

f. $\frac{2}{16} = 0{,}125 = 12{,}5\%$

5. A princípio, construa uma planilha de porcentagens e, em seguida, construa o gráfico de setores que melhor represente esses dados.

Planilha de porcentagem

Avaliação	Fa	Fr
Ótimo	150	$\frac{150}{1000} = \frac{15}{100} = 15\%$
Bom	500	$\frac{500}{1000} = \frac{50}{100} = 50\%$
Regular	200	$\frac{200}{1000} = \frac{20}{100} = 20\%$
Ruim	150	$\frac{150}{1000} = \frac{15}{100} = 15\%$
Total	1000	100%

Agora que descobrimos a porcentagem de cada avaliação, vamos determinar cada ângulo no círculo. Lembre-se de que, para isso, devemos multiplicar a porcentagem por 3,6º. Veja a tabela abaixo:

Avaliação	Fa	Ângulo
Ótimo	15%	15 . 3,6 = 54º
Bom	50%	50 . 3,6 = 180º
Regular	20%	20 . 3,6 = 72º
Ruim	15%	15 . 3,6 = 54º
Total	100%	360%

Veja como fica o gráfico de setor: