

Floyd–Warshall e Dijkstra

Tópicos Avançados em Programação

Instituto de Informática
Universidade Federal de Goiás

25 de Abril de 2018

Sumário

1 Introdução

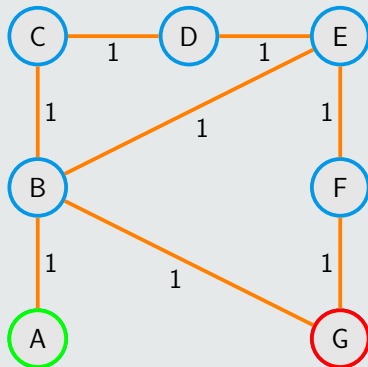
2 Flody-Warshall

3 Dijkstra

Introdução

Caminho mínimo

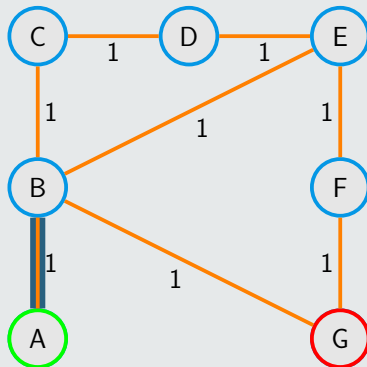
Menor caminho de A para G. Custo das arestas = 1. BFS!



Introdução

Caminho mínimo

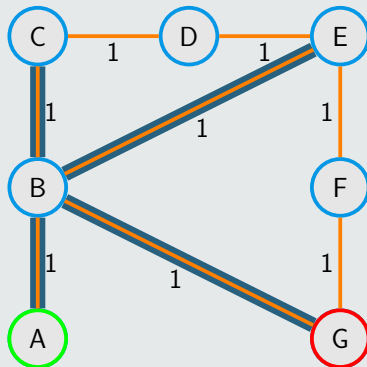
Menor caminho de A para G. Custo das arestas = 1. BFS!



Introdução

Caminho mínimo

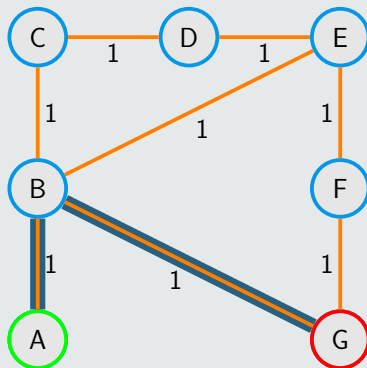
Menor caminho de A para G. Custo das arestas = 1. BFS!



Introdução

Caminho mínimo

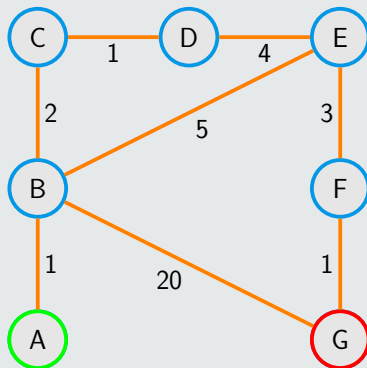
Menor caminho de A para G. Custo das arestas = 1. BFS!



Introdução

Caminho mínimo

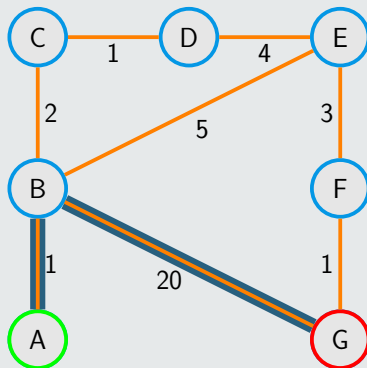
Menor caminho de A para G. Custo das arestas $\neq 1$. BFS?



Introdução

Caminho mínimo

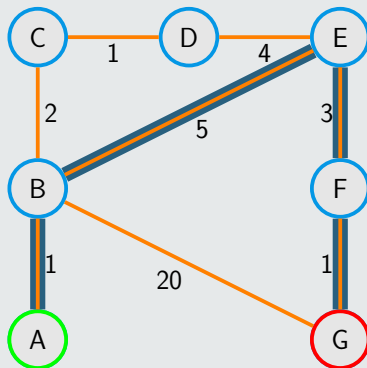
Menor caminho de A para G. Custo das arestas $\neq 1$. BFS?



Introdução

Caminho mínimo

Menor caminho de A para G. Custo das arestas $\neq 1$. BFS?



Introdução

Então como resolver?

- ✓ Dado um grafo $G = (V, E)$
 - Quais são as menores distâncias entre cada par de vértices v_i e v_j , onde $v_i, v_j \in V$ e $N \leq 200$.
 - Quais são as menores distâncias entre um vértice v_i para todos os outros vértices v_j , onde $v_i, v_j \in V$ e $N \leq 1000$.

Introdução

Então como resolver?

- ✓ Dado um grafo $G = (V, E)$
 - Quais são as menores distâncias entre cada par de vértices v_i e v_j , onde $v_i, v_j \in V$ e $N \leq 200$.
 - ◇ Algoritmo **Flody-Warshall**
 - ◇ Complexidade $\mathcal{O}(|V|^3)$
 - Quais são as menores distâncias entre um vértice v_i para todos os outros vértices v_j , onde $v_i, v_j \in V$ e $N \leq 1000$.

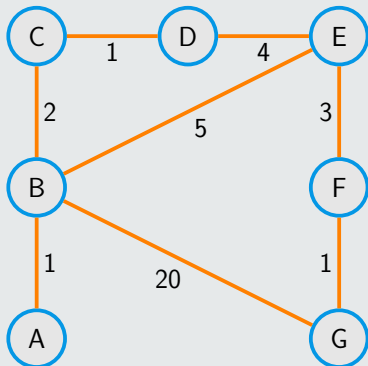
Flody-Warshall

Rpresentação do grafo - Matriz de adjacência

- ✓ Dado um grafo $G = (V, E)$, a matriz de adjacência M é definida por uma matriz de ordem $|V| \cdot |V|$, de forma que:
- $M[i, i] = 0, \forall i \in V$
 - $M[i, j] = \text{custo}(i, j)$, se existir aresta de i para j
 - $M[i, j] = \infty$, se não existir aresta de i para j

Flody-Warshall

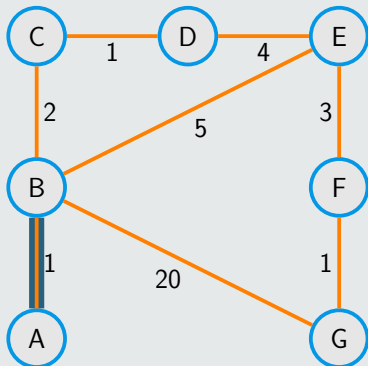
Representação do grafo - Matriz de adjacência



	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	∞	∞	∞	∞	∞
B	1	0	2	∞	5	∞	20
C	∞	2	0	1	∞	∞	∞
D	∞	∞	1	0	4	∞	∞
E	∞	5	∞	4	0	3	∞
F	∞	∞	∞	∞	3	0	1
G	∞	20	∞	∞	∞	1	0

Flody-Warshall

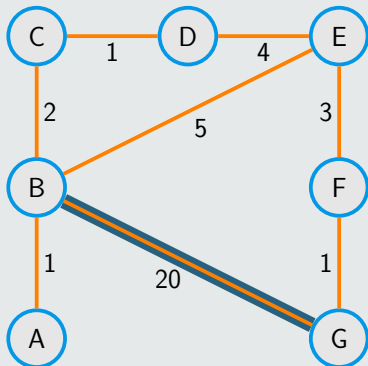
Representação do grafo - Matriz de adjacência



	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	∞	∞	∞	∞	∞
B	1	0	2	∞	5	∞	20
C	∞	2	0	1	∞	∞	∞
D	∞	∞	1	0	4	∞	∞
E	∞	5	∞	4	0	3	∞
F	∞	∞	∞	∞	3	0	1
G	∞	20	∞	∞	∞	1	0

Flody-Warshall

Representação do grafo - Matriz de adjacência



	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	∞	∞	∞	∞	∞
B	1	0	2	∞	5	∞	20
C	∞	2	0	1	∞	∞	∞
D	∞	∞	1	0	4	∞	∞
E	∞	5	∞	4	0	3	∞
F	∞	∞	∞	∞	3	0	1
G	∞	20	∞	∞	∞	1	0

Flody-Warshall

Vértice intermediário

- ✓ Um vértice **intermediário** em um caminho do vértice v_1 até v_n , apresentado por $C = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n\}$, é qualquer vértice u que não seja v_1 ou v_n , ou seja, $u \in V - \{v_1, v_2\}$.



Flody-Warshall

Ideia do algoritmo

- ✓ A ideia principal do algoritmo se baseia no principio de que um caminho entre dois vértices v_i e v_j existe se:
 - 0: há uma aresta v_i para v_j , ou
 - 1: há um caminho de v_i para v_j que passa por vértices intermediários do conjunto de vértices $k = \{v_1\}$, ou
 - 2: há um caminho de v_i para v_j que passa por vértices intermediários do conjunto de vértices $k = \{v_1, v_2\}$, ou
 - \vdots
 - n: há um caminho de v_i para v_j que passa por vértices intermediários do conjunto de vértices $k = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n\}$.

Flody-Warshall

Algoritmo - Inicialização da matriz de adjacência

```
int grafo[n][n];

for(int i = 0; i < n; i++){
    for(int j = 0; j < n; j++){
        grafo[i][j] = 1e9;
    }
    grafo[i][i] = 0;
}
```

Flody-Warshall

Algoritmo - Preenchimento da matriz de adjacência

```
for(int i = 0; i < m; i++){  
    //indexado de 0  
    cin >> de >> para >> custo;  
    grafo[ de ][ para ] = custo;  
    //caso o grafo nao seja orientado  
    grafo[ para ][ de ] = custo;  
}
```

Flody-Warshall

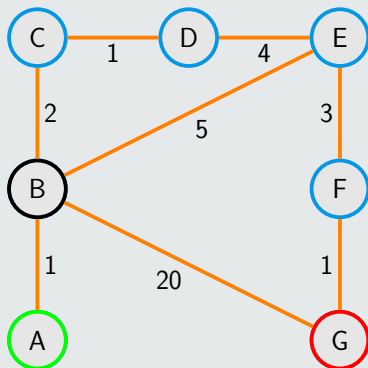
Algoritmo - Flody-Warshall

```
for(int k = 0; k < n; k++){  
    for(int i = 0; i < n; i++){  
        for(int j = 0; j < n; j++){  
            grafo[i][j] = min( grafo[i][j], grafo[i][k] + grafo[k][j] );  
        }  
    }  
}
```

Flody-Warshall

Exemplo de execução

```
grafo[A][G] = min( grafo[A][G], grafo[A][B] + grafo[B][G] );
```

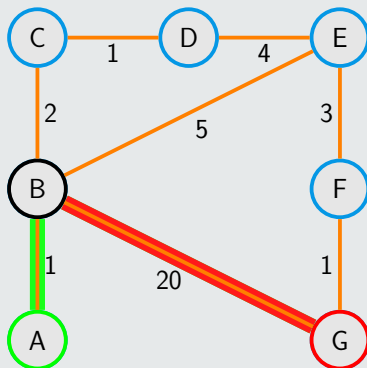


	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	∞	∞	∞	∞	∞
B	1	0	2	∞	5	∞	20
C	∞	2	0	1	∞	∞	∞
D	∞	∞	1	0	4	∞	∞
E	∞	5	∞	4	0	3	∞
F	∞	∞	∞	∞	3	0	1
G	∞	20	∞	∞	∞	1	0

Flody-Warshall

Exemplo de execução

```
grafo[A][G] = min( 1e9, 1 + 20 );
```

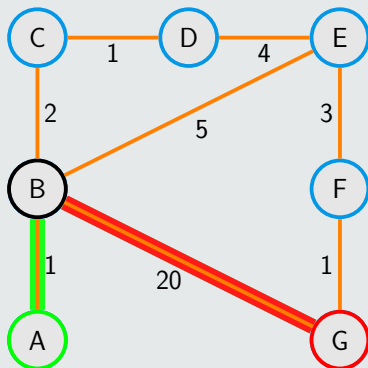


	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	∞	∞	∞	∞	∞
B	1	0	2	∞	5	∞	20
C	∞	2	0	1	∞	∞	∞
D	∞	∞	1	0	4	∞	∞
E	∞	5	∞	4	0	3	∞
F	∞	∞	∞	∞	3	0	1
G	∞	20	∞	∞	∞	1	0

Flody-Warshall

Exemplo de execução

grafo[A][G] = 21;

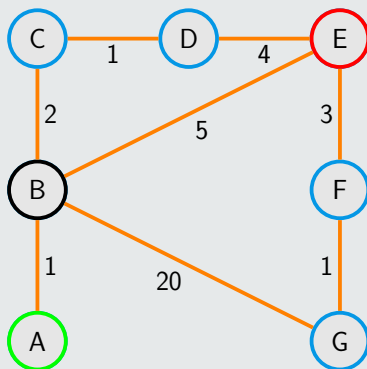


	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	∞	∞	∞	∞	21
B	1	0	2	∞	5	∞	20
C	∞	2	0	1	∞	∞	∞
D	∞	∞	1	0	4	∞	∞
E	∞	5	∞	4	0	3	∞
F	∞	∞	∞	∞	3	0	1
G	∞	20	∞	∞	∞	1	0

Flody-Warshall

Exemplo de execução

$\text{grafo}[A][E] = \min(\text{grafo}[A][E], \text{grafo}[A][B] + \text{grafo}[B][E]);$

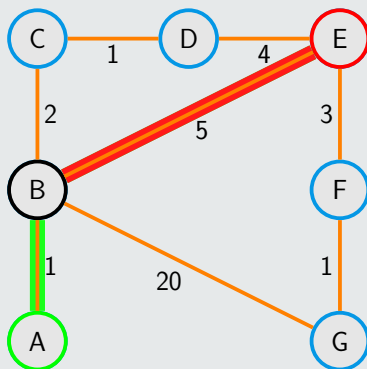


	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	∞	∞	∞	∞	21
B	1	0	2	∞	5	∞	20
C	∞	2	0	1	∞	∞	∞
D	∞	∞	1	0	4	∞	∞
E	∞	5	∞	4	0	3	∞
F	∞	∞	∞	∞	3	0	1
G	∞	20	∞	∞	∞	1	0

Flody-Warshall

Exemplo de execução

`grafo[A][E] = min(1e9, 1 + 5);`

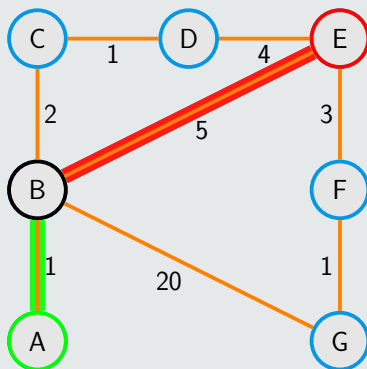


	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	∞	∞	∞	∞	21
B	1	0	2	∞	20	∞	20
C	∞	2	0	1	∞	∞	∞
D	∞	∞	1	0	4	∞	∞
E	∞	5	∞	4	0	3	∞
F	∞	∞	∞	∞	3	0	1
G	∞	20	∞	∞	∞	1	0

Flody-Warshall

Exemplo de execução

grafo[A][E] = 6;

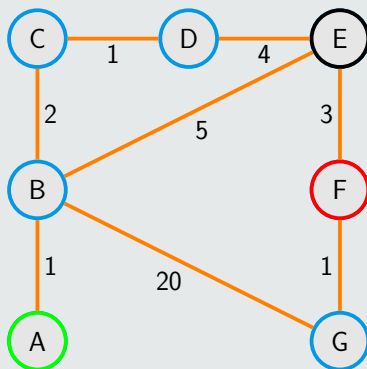


	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	∞	∞	6	∞	21
B	1	0	2	∞	5	∞	20
C	∞	2	0	1	∞	∞	∞
D	∞	∞	1	0	4	∞	∞
E	∞	5	∞	4	0	3	∞
F	∞	∞	∞	∞	3	0	1
G	∞	20	∞	∞	∞	1	0

Flody-Warshall

Exemplo de execução

$\text{grafo}[A][F] = \min(\text{grafo}[A][F], \text{grafo}[A][E] + \text{grafo}[E][F]);$

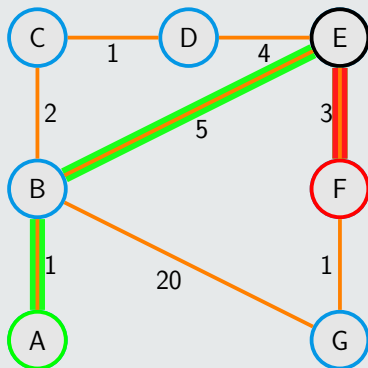


	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	∞	∞	6	∞	21
B	1	0	2	∞	5	∞	20
C	∞	2	0	1	∞	∞	∞
D	∞	∞	1	0	4	∞	∞
E	∞	5	∞	4	0	3	∞
F	∞	∞	∞	∞	3	0	1
G	∞	20	∞	∞	∞	1	0

Flody-Warshall

Exemplo de execução

`grafo[A][F] = min(1e9, 6 + 3);`

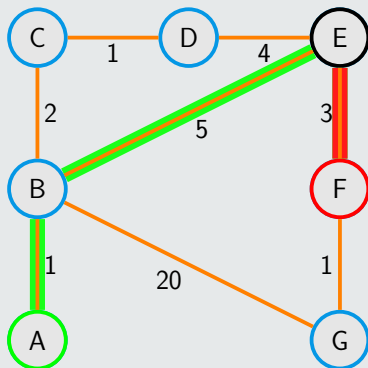


	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	∞	∞	6	∞	21
B	1	0	2	∞	5	∞	20
C	∞	2	0	1	∞	∞	∞
D	∞	∞	1	0	4	∞	∞
E	∞	5	∞	4	0	3	∞
F	∞	∞	∞	∞	3	0	1
G	∞	20	∞	∞	∞	1	0

Flody-Warshall

Exemplo de execução

grafo[A][F] = 9;

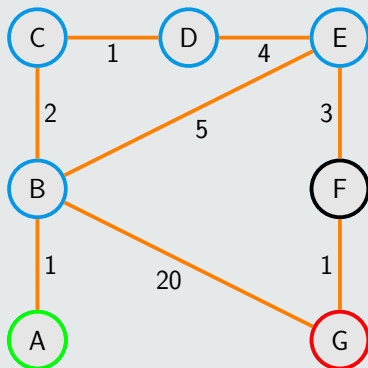


	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	∞	∞	6	9	21
B	1	0	2	∞	5	∞	20
C	∞	2	0	1	∞	∞	∞
D	∞	∞	1	0	4	∞	∞
E	∞	5	∞	4	0	3	∞
F	∞	∞	∞	∞	3	0	1
G	∞	20	∞	∞	∞	1	0

Flody-Warshall

Exemplo de execução

$\text{grafo}[A][G] = \min(\text{grafo}[A][G], \text{grafo}[A][F] + \text{grafo}[F][G]);$

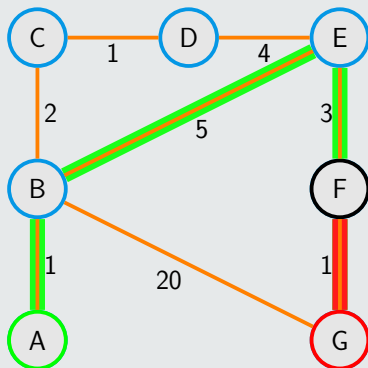


	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	∞	∞	6	9	21
B	1	0	2	∞	5	∞	20
C	∞	2	0	1	∞	∞	∞
D	∞	∞	1	0	4	∞	∞
E	∞	5	∞	4	0	3	∞
F	∞	∞	∞	∞	3	0	1
G	∞	20	∞	∞	∞	1	0

Flody-Warshall

Exemplo de execução

`grafo[A][G] = min(21, 9 + 1);`

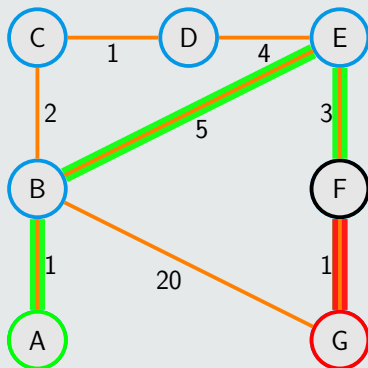


	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	∞	∞	6	9	21
B	1	0	2	∞	5	∞	20
C	∞	2	0	1	∞	∞	∞
D	∞	∞	1	0	4	∞	∞
E	∞	5	∞	4	0	3	∞
F	∞	∞	∞	∞	3	0	1
G	∞	20	∞	∞	∞	1	0

Flody-Warshall

Exemplo de execução

grafo[A][G] = 10;



	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	∞	∞	6	9	10
B	1	0	2	∞	5	∞	20
C	∞	2	0	1	∞	∞	∞
D	∞	∞	1	0	4	∞	∞
E	∞	5	∞	4	0	3	∞
F	∞	∞	∞	∞	3	0	1
G	∞	20	∞	∞	∞	1	0

Introdução

Então como resolver?

- ✓ Dado um grafo $G = (V, E)$
 - Quais são as menores distâncias entre cada par de vértices v_i e v_j , onde $v_i, v_j \in V$ e $N \leq 200$.
 - ◇ Algoritmo **Flody-Warshall**
 - ◇ Complexidade $\mathcal{O}(|V|^3)$
 - Quais são as menores distâncias entre um vértice v_i para todos os outros vértices v_j , onde $v_i, v_j \in V$ e $N \leq 1000$.

Introdução

Então como resolver?

- ✓ Dado um grafo $G = (V, E)$
 - Quais são as menores distâncias entre cada par de vértices v_i e v_j , onde $v_i, v_j \in V$ e $N \leq 200$.
 - ◇ Algoritmo **Flody-Warshall**
 - ◇ Complexidade $\mathcal{O}(|V|^3)$
 - Quais são as menores distâncias entre um vértice v_i para todos os outros vértices v_j , onde $v_i, v_j \in V$ e $N \leq 1000$.
 - ◇ Algoritmo **Dijkstra**
 - ◇ Complexidade $\mathcal{O}(|E| \log |V|)$

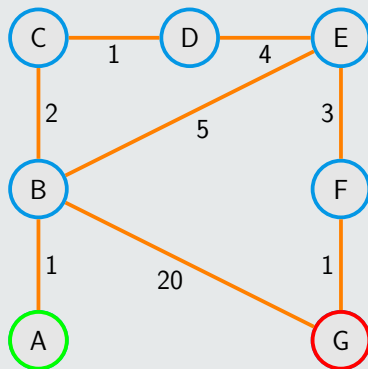
Dijkstra

Algoritmo - Dijkstra

- ✓ Exemplo de implementação : Dijkstra C++

Dijkstra

Exemplo de execução - Menor caminho de A para G



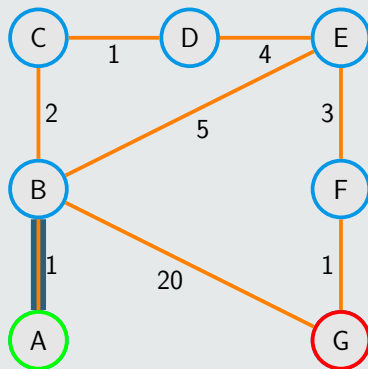
1

Dist	A	B	C	D	E	F	G
A	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Fila	0, 0
------	------

Dijkstra

Exemplo de execução - Menor caminho de A para G



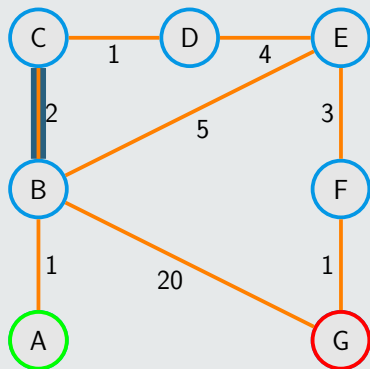
1

Dist	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	∞	∞	∞	∞	∞

Fila	0, A	1, B
------	------	------

Dijkstra

Exemplo de execução - Menor caminho de A para G



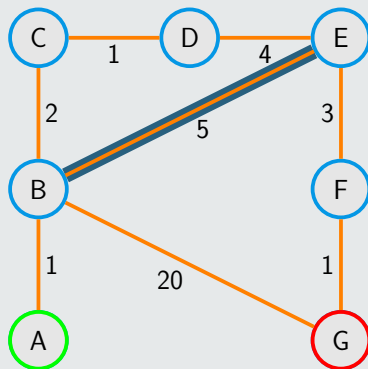
1

Dist	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	3	∞	∞	∞	∞

Fila	1, B	3, C
------	------	------

Dijkstra

Exemplo de execução - Menor caminho de A para G



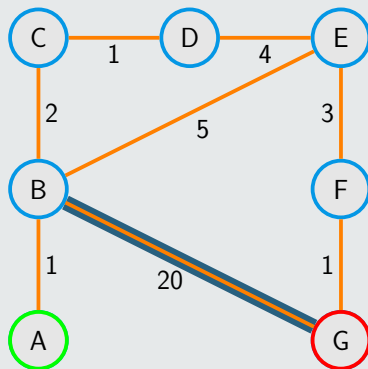
1

Dist	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	3	∞	6	∞	∞

Fila	3, C	6, E
------	------	------

Dijkstra

Exemplo de execução - Menor caminho de A para G



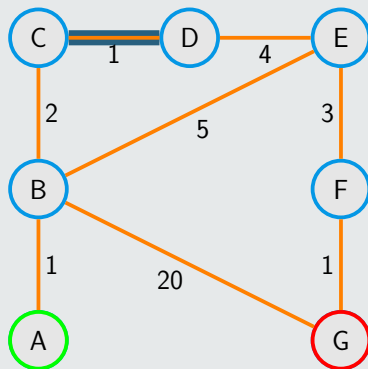
1

Dist	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	3	∞	6	∞	21

Fila	1, B	3, C	6, E	21, G
------	------	------	------	-------

Dijkstra

Exemplo de execução - Menor caminho de A para G



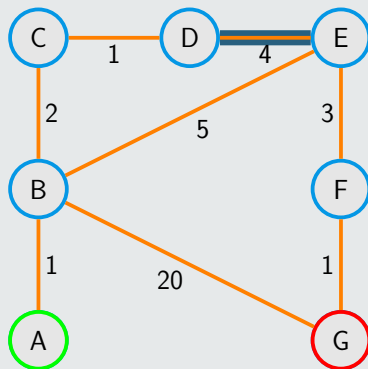
Dist	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	3	4	6	∞	20

1

Fila	3, C	4, D	6, E	21, G
------	------	------	------	-------

Dijkstra

Exemplo de execução - Menor caminho de A para G



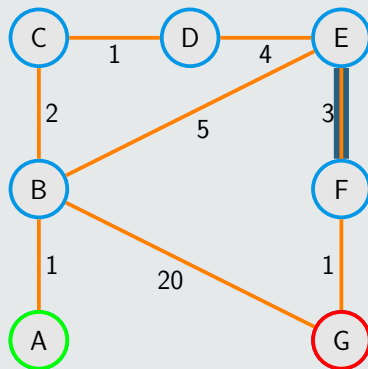
1

Dist	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	3	4	6	∞	21

Fila	4, D	6, E	21, G
------	------	------	-------

Dijkstra

Exemplo de execução - Menor caminho de A para G



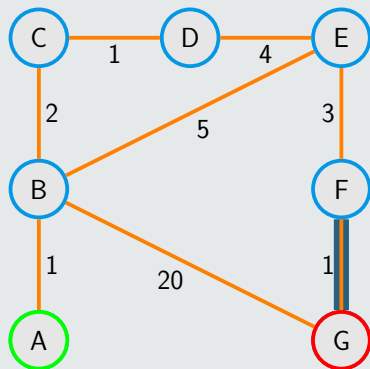
1

Dist	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	3	4	6	9	21

Fila	6, E	9, F	21, G
------	------	------	-------

Dijkstra

Exemplo de execução - Menor caminho de A para G



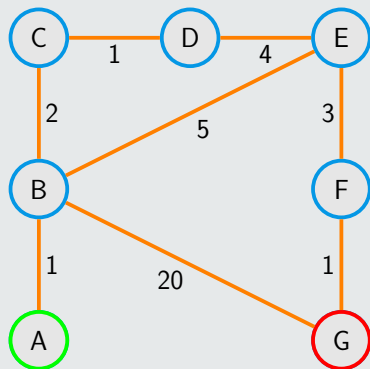
1

Dist	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	3	4	6	9	10

Fila	9, F	10, G	21, G
------	------	-------	-------

Dijkstra

Exemplo de execução - Menor caminho de A para G



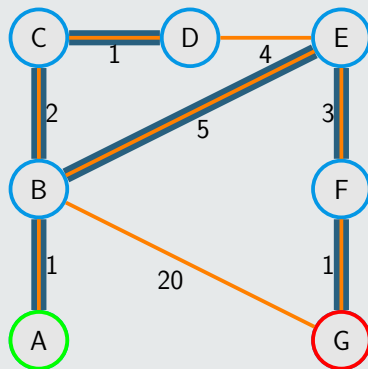
1

Dist	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	3	4	6	9	10

Fila	10, G	21, G
------	-------	-------

Dijkstra

Exemplo de execução - Menor caminho de A para G



1

Dist	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	3	4	6	9	10

Fila 21, G

Dúvidas

Dúvidas ?