Stürmer, Felix - 230127 - Informatik(Diplom) - stuermer@cs.tu-berlin.de
Oskamp, Robert - 306952 - Mathematik(Diplom) - robert.oskamp@gmx.de
Olthoff, Inken - 305844 - Mathematik(Diplom) - some-body@gmx.de
Neumann, Cedrik - 301635 - Mathematik(Diplom) - c.neumann@live.de

1. Der Algorithmus zum Auffinden des Medians in linearer Zeit sieht folgendermaßen aus:
Sei A eine Liste von Zahlen mit $|A| = n$, von denen wir den Median suchen und $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ die Stelle an der wir den Median in einer sortierten Liste finden würden.
Wenn A weniger als z.B. 10 Elemente besitzt, dann sortieren wir A und geben das k-te Element aus.
Ansonsten teilen wir A in $\lceil \frac{n}{5} \rceil$ viele Teilmengen S_i, die aus (maximal) 5 Elementen bestehen und suchen für alle Teilmengen einzeln den Median M_i.
Als nächstes berechnen wir den Median M der Mediane M_i und teilen die Menge A in drei disjunkte Teilmengen A_1, A_2 und A_3. Hierbei gilt für die Mengen $a_1 < M \; \forall a_1 \in A_1$, $a_2 = M \; \forall a_2 \in A_2$ und $a_3 > M \; \forall a_3 \in A_3$.
Wenn jetzt für k gilt $k \leq |A_1|$, dann suche den Median in A_1 mit $k = k$.
Wenn für k gilt $k > |A_1| + |A_2|$, dann suche Median in A_3 mit $k = k - |A_1| - |A_2|$.
Wenn keine der beiden Bedingungen gilt, dann gib M als Median aus.

Formal kann man auch schreiben:

median(A, k) {
  if ($n \leq 10$) {
    sort A
    return the element at the k-th position of A
  }
  partition A into subsets S_i of five elements
  for ($i = 1, \; \ldots, \; n/5$) {
    M_i =median($S_i, 3$)
  }
  M =median($\{M_i\}_{i=1,\ldots,\; n/5},\; n/10$)
  partition A into A_1 with $a_1 < M \; \forall a_1 \in A_1$, A_2 with $a_2 = M \; \forall a_2 \in A_2$ and A_3 with $A_3 = A \setminus (A_1 \cup A_2)$
  if ($k \leq |A_1|$) {
    return median(A_1, k)
  }
  else if ($k > |A_1| + |A_2|$) {
    return median($A_3, k - |A_1| - |A_2|$)
  }
  else return M
}

Für die Laufzeit gilt:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq \tfrac{12 \cdot n}{5} + T(\tfrac{n}{5}) + T(\tfrac{7 \cdot n}{10}) \\ &= \tfrac{12 \cdot n}{5} + \tfrac{c \cdot n}{5} + \tfrac{7 \cdot c \cdot n}{10} \\ &= n \cdot (\tfrac{12}{5} + \tfrac{9 \cdot c}{10}) \end{aligned}$$

und damit ist die Laufzeit (asymptotisch) linear in n.

2. Sei s die Kantenlänge der kubischen Zelle und der Abstand der n Punkte $\geq \varepsilon$.
In jedem Schritt halbieren wir die Kantenlängen. Also haben im k-ten Schritt die kubischen Zellen die Kantenlänge $s \cdot 2^{-k}$
Damit die n Punkte sicher in verschiedenen kubischen Zellen liegen, muss die Diagonale der Zellen $< \varepsilon$ sein. Somit erhalten wir eine maximale Tiefe k für die gilt:

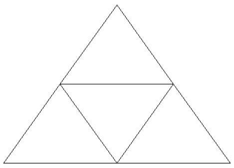
$$s \cdot 2^{-k} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow k > -\log_2 \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{3} \cdot s} \right)$$

3. Betrachte ein Prisma, welches als Grundfläche ein gleichseitiges Dreick hat. Die Grundfläche ist so durch vier teilbar, dass wieder gleichseitige Dreiecke entstehen (siehe nachfolgende Skizze). Teilt man dann noch die Höhe des Prismas durch zwei, so erhält man aus einer solchen Prisma Zelle 8 translierte und um den Faktor 0.5 skalierte Prisma Zellen. Mit diesen Zellen kann jeweils wieder in gleicher Weise verfahren werden, so dass bei dieser Unterteilungsstrategie beliebig viele affin transformierte Versionen des Ausgangsprismas entstehen

Stürmer, Felix - 230127 - Informatik(Diplom) - stuermer@cs.tu-berlin.de
Oskamp, Robert - 306952 - Mathematik(Diplom) - robert.oskamp@gmx.de
Olthoff, Inken - 305844 - Mathematik(Diplom) - some-body@gmx.de
Neumann, Cedrik - 301635 - Mathematik(Diplom) - c.neumann@live.de

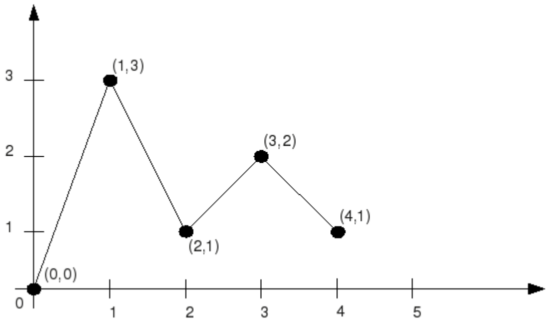
können.



4. Die Basisfunktionen für einen B-Spline erster Ordnung sehen folgendermaßen aus:
$N_i^1(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} \cdot N_i^0(t) + \frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}} \cdot N_{i+1}^0(t)$

$$N_i^1(t) = \begin{cases} \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} \cdot N_i^0(t) & \text{, falls } t_i \le t < t_{i+1} \\ \frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}} \cdot N_{i+1}^0(t) & \text{, falls } t_{i+1} \le t < t_{i+2} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Ein B-Spline erster Ordnung für die Kontrollpunkte $d_0 = (0,0)$, $d_1 = (1,3)$, $d_2 = (2,1)$, $d_3 = (3,2)$ und $d_4 = (4,1)$ sieht wie folgt aus:



Erklären Sie den Zusammenhang zwischen Grad, Stetigkeit und Träger bei B-Splines an diesem Beispiel.
Ein B-Spline vom Grad g ist $g-1$ mal stetig differenzierbar, also in C^{g-1}, zusätzlich vergrößert sich mit höherem Grad der Träger. Im Beispiel haben Grad $g = 1$ und sehen an den Kontrollpunkten Ecken, was darauf hindeutet, dass zwar Stetigkeit vorliegt, aber dass die Ableitung nicht mehr stetig ist, es liegt also C^0 Stetigkeit vor.

5. Wir haben eine Kurve durch Kontrollpunkte p_i im Raum gegeben, sowie Basisfunktionen $\beta_i(x)$.
Die Kontrollpunkte p_i werden nun durch die Basisfunktionen β_i gewichtet und addiert, so dass wir folgendes erhalten:

$$\sum_i p_i \beta_i(x)$$

Für diese so konstruierte Kurve soll nun affine Invarianz gilt, also

$$T\left(\sum_i p_i \beta_i(x)\right) = \sum_i T p_i \beta_i(x)$$

Dies gilt trivialerweise für lineare Abbildungen.
Wir können unsere Transformation T als linearen Abbildung mit einer Translation $T = A + a$ darstellen, wobei A die lineare Abbildung und a die Translation darstellt. (Wissen aus CG1)
Nun gilt für unser T:

$$T\left(\sum_i p_i \beta_i(x)\right) = \sum_i T p_i \beta_i(x)$$

$$\Leftrightarrow (A+a)\left(\sum_i p_i \beta_i(x)\right) = \sum_i (A+a)\, p_i \beta_i(x)$$

$$\Leftrightarrow A\left(\sum_i p_i \beta_i(x)\right) + a = \sum_i \left(A p_i \beta_i(x) + a \beta_i(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow A\left(\sum_i p_i \beta_i(x)\right) + a = \sum_i A p_i \beta_i(x) + \sum_i a \beta_i(x)$$

und dies gilt genau dann, wenn die β_i an jeder Stelle eine Partition der Eins sind, also $\sum_i \beta_i(x) = 1\ \forall x$.