Computer Graphics 2
Übungsblatt 2
Gruppe 5

Stürmer, Felix - 230127 - Informatik(Diplom) - stuermer@cs.tu-berlin.de
Oskamp, Robert - 306952 - Mathematik(Diplom) - robert.oskamp@gmx.de
Olthoff, Inken - 305844 - Mathematik(Diplom) - some-body@gmx.de
Neumann, Cedrik - 301635 - Mathematik(Diplom) - c.neumann@live.de

1. Aus der Vorlesung wissen wir, dass eine Bézierkurve folgendermaßen aussieht:

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot B_i^n(t), \qquad t \in [0,1],\ b_i \in R^d$$

und die dazugehörige Ableitung

$$p'(t) = n \cdot (\sum_{i=0}^{n-1} (b_{i+1} - b_i) B_i^{n-1}(t))$$

Außerdem wissen wir, dass für das letzte Segment der durch von de Casteljau erzeugte Kurve folgendes gilt:

$$p'(t) = n \cdot (b_1^{n-1}(t) - b_0^{n-1}(t))$$

und man erhält durch sukzessives Einsetzen

$$b_k^{n-1}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i-1} b_{i+k}$$

Zusammen gilt dann für das letzte Segment

$$\begin{aligned} p'(t) &= n \cdot (\textstyle\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i-1} b_{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i-1} b_i) \\ &= n \cdot (\textstyle\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i-1} (b_{i+1} - b_i)) \\ &= n \cdot (\textstyle\sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t)(b_{i+1} - b_i)) \end{aligned}$$

Und damit gilt Gleichheit für die Ableitung der Bézierkurve und dem letzten Segment des de Casteljau Algorithmuses.

2. Wenn eines der beiden Polynome konstant ist, also $p(u) = c$, c konstant, so ist das Tensorprodukt dieses und eines anderen echten linearen Polynoms $q(v)$, keine Fläche, sondern eine Kurve, nämlich $f(u,v) = (p(u), q(v)) = (c, q(v))$, da wir hier nur einen Feiheitsgrad haben. Wenn beide Polynomiale konstant sind, so erhalten wir einen Punkt.
Sei nun keines der Polynome konstant, dann behalten wir unsere zwei Freiheitsgerade und erhalten damit durch das Tensorprodukt eine Fläche, d.h. für p, $q : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ bijektiv, da wir ein lineares Polynom haben, erhalten wir $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $(u,v) \to f(u,v) = (p(u), q(v))$ bijektiv.

3. Sei $q(u,v)$ eine parametrische Fläche im Parametergebiet $[a,b] \times [c,d]$. Analog zum Bogenmaß einer parametrischen Kurve $p(u)$, gegeben durch $s : [a,b] \to [0, s(b)]$, $s(u) = \int_a^u ||p'(t)||dt$, ist der Flächeninhalt der parametrischen Fläche $q(u,v)$ gegeben durch

$$A : [a,b] \times [c,d] \mapsto [0, A(b,d)],\ (u,v) \to A(u,v) = \int_a^u \int_c^v ||q_u(s,t) \times q_v(s,t)||dtds$$

4. Betrachte die parametrische Fläche der Kugel $q(u,v) = \begin{pmatrix} cos(u)cos(v) \\ sin(u)cos(v) \\ sin(v) \end{pmatrix}$. Dann ist $q_u(u,v) = \begin{pmatrix} -sin(u)cos(v) \\ cos(u)cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}$ und $q_v(u,v) = \begin{pmatrix} -cos(u)sin(v) \\ -sin(u)sin(v) \\ cos(v) \end{pmatrix}$. Es gilt aber $||q_u(u,v)|| = cos(v)$ und das ist für alle $v \neq k \cdot \pi$ ungleich 1 und damit nicht normal, wodurch in diesen Punkten die Tangentenvektoren für keine Parametrisierung der Kugel orthonormal sein können.

Betrachte nun die parametrisierte Fläche $q(u,v) = \begin{pmatrix} cos(u) \\ sin(u) \\ v \end{pmatrix}$. Dann ist $q_u(u,v) = \begin{pmatrix} -sin(u) \\ cos(u) \\ 0 \end{pmatrix}$ und $q_v(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es gilt $||q_u(u,v)|| = \sqrt{sin^2(u) + cos^2(u)} = 1$ und $||q_v(u,v)|| = \sqrt{1^2} = 1$ jeweils für alle u und v, die Tangentenvektoren sind also normal. Weiter gilt $\langle q_u, q_v \rangle = -sin(u) \cdot 0 + cos(u) \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$ für alle u und v. Daher sind für diese Parametrisierung die Tangentenvektoren überall orthonormal.

Stürmer, Felix - 230127 - Informatik(Diplom) - stuermer@cs.tu-berlin.de
Oskamp, Robert - 306952 - Mathematik(Diplom) - robert.oskamp@gmx.de
Olthoff, Inken - 305844 - Mathematik(Diplom) - some-body@gmx.de
Neumann, Cedrik - 301635 - Mathematik(Diplom) - c.neumann@live.de

5. Wählt man zur lokalen Polynomapproximation konstante Polynome, so haben die Tangenten an jedem Punkt der Fläche Steigung 0, was im Allgemeinen nicht die tatsächliche Steigung der Flächentangente in jedem Punkt ist.
   Als exakte Formel für die Tangenten kann man eine Abwandlung des doppelten de Casteljau Algorithmuses benutzen. Um die Tangente in u-Richtung zu erhalten wenden wir den de Casteljau Algorithmus auf die Parameterlinien in v-Richtung an (mit festen v_0-Wert) und erhalten eine Bézierkurve in u-Richtung. Als nächstes berechnen wir mit dem de Casteljau Algorithmus das letzte Segment der Bézierkurve in u-Richtung. Dieses ist dann äquivalent zu dem Tangentenvektor in u-Richtung (siehe Aufgabe 1). Für den Tangentenvektor in v-Richtung geht man analog vor.
   Damit erhalten wir die beiden Tangentenvektoren, da der de Casteljau Algorithmus in seiner ursprünglichen Form einen exakten Punkt der Fläche berechnen kann. Außerdem entsprechen die Tangentenvektoren einer Fläche in eine Richtung der Tangente der zu dieser Richtung gehörenden Parameterlinie in dem Punkt.