Disciplina: Matemática para o Ensino Básico I

Prof. Hélio Pires de Almeida
Curso de Matemática – **UFPB**VIRTUAL
helio@mat.ufpb.br

Colaboradores: Prof. Edson de Figueirêdo Lima Junior (Tratamento da Informação)
Prof. Lenimar Nunes de Andrade (Geometria)

Ambiente Virtual de Aprendizagem: Moodle (www.ead.ufpb.br)
Site do Curso: (www.mat.ufpb.br/ead)
Site da **UFPB**VIRTUAL www.virtual.ufpb.br
Telefone **UFPB**VIRTUAL (83) 3216 7257

Carga horária: 60 horas **Créditos: 04**

Ementa

- Aritmética
- Geometria Plana
- Tratamento da Informação.

Descrição

Nesta disciplina apresentaremos alguns tópicos de Aritmética, Geometria Plana e Tratamento da Informação, que já são estudados no Ensino Básico, mas não será uma mera repetição do que foi feito lá. Aqui eles serão abordados de um modo mais amplo e mais crítico, sob a forma de resolução de problemas, para que o aluno amplie e consolide os seus conhecimentos sobre esses assuntos, capacitando-o para ensiná-los nas séries do Ensino Básico.

Objetivos

Ao final da disciplina o aluno deverá ser capaz de:

- Efetuar cálculos de máximo divisor comum ou de mínimo múltiplo comum, usando o Teorema Fundamental da Aritmética;
- Efetuar cálculos de máximo divisor comum, usando o Algoritmo da Divisão;
- Resolver problemas que envolvam os conceitos de máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum;
- Resolver problemas que envolvam proporcionalidade, juros simples ou compostos, valor atual e valor futuro;
- Identificar os principais elementos da geometria plana;
- Reconhecer uma relação de semelhança entre dois triângulos;
- Utilizar, na resolução de problemas, as relações métricas num triângulo retângulo;
- Calcular área de polígonos, círculo e de setor circular;

- Usar o Teorema de Pitágoras e a fórmula de Herão na resolução de problemas;
- Identificar os principais tipos de tabelas e gráficos;
- Ler e interpretar dados contidos em tabelas e gráficos simples;
- Recolher e organizar dados e informações;
- Produzir textos a partir da interpretação de gráficos e tabelas;
- Elaborar tabelas e gráficos elementares para apresentação de conjuntos de dados;
- Formular e resolver problemas envolvendo o conteúdo programático desta disciplina, e
- Ensinar o conteúdo desta disciplina nas séries do Ensino Básico.

Unidades Temáticas Integradas

Unidade I **Aritmética**

- Propriedades das operações com números inteiros
- Produtos notáveis
- Potenciação
- Múltiplos e divisores
- Algoritmo da divisão
- Números primos
- Máximo divisor comum
- Mínimo múltiplo comum
- Razão e proporção
- Regra de três
- Progressões
  - Progressões aritméticas
    - Fórmula do termo de ordem n
    - Fórmula da soma dos n primeiros termos
  - Progressões geométricas
    - Fórmula do termo de ordem n
    - Fórmula da soma dos n primeiros termos
    - Soma dos termos de uma progressão geométrica infinita
- Matemática financeira
  - Porcentagem
  - Juros simples
  - Juros compostos
  - Valor atual e Valor futuro
  - Taxa efetiva

Unidade II **Geometria Plana**

- Introdução
    - Ponto, Reta e Plano
    - Objetos congruentes
    - Posições relativas de retas
    - Segmentos, Semi-retas e Ângulos
    - Polígonos
    - Triângulos
    - Círculo e Circunferência

- Semelhança
    - Triângulos semelhantes
    - Relações métricas num triângulo retângulo
    - Razões Trigonométricas

- Áreas
    - Áreas de polígonos
    - Área de um retângulo
    - Área de um paralelogramo
    - Área de um triângulo
    - Área de um trapézio
    - Área de um losango
    - Área de um polígono
    - Área de um círculo
    - Área de um setor circular

- O Teorema de Pitágoras
- Fórmula de Herão
- Exemplos

Unidade III **Tratamento da Informação**

- Trabalhando com tabelas e gráficos
    - Conhecendo conceitos e características
    - Desenvolvendo atividades

Unidade I Aritmética

1. Situando a Temática

Nesta unidade estudaremos alguns tópicos de Aritmética que já são estudados no Ensino Fundamental ou Médio, mas aqui eles serão abordados de uma forma mais crítica, com o objetivo de ampliar e consolidar os seus conhecimentos sobre esse conteúdo, dando-lhe condições para, entre outras coisas, desempenhar de modo satisfatório a função de professor.

Apresentaremos definições e resultados básicos seguidos de alguns exemplos ou exercícios ilustrativos. Os resultados serão apresentados, na sua maioria, sem demonstrações, mas se você tiver interesse em estudá-las poderá encontrá-las nas referências bibliográficas. Uma justificativa para a omissão das demonstrações é tornar o texto conciso e também porque este não pretende ser auto-suficiente.

Este texto complementa-se na plataforma *moodle*, onde estão as listas de exercícios e atividades relacionadas com o texto.

2. Problematizando a Temática

Quando fazemos operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, porcentagens, etc., estamos explorando um dos ramos da matemática, chamado Aritmética. Podemos dizer que a aritmética é o ramo da matemática que trata das propriedades dessas operações. Na aritmética também são estudadas as propriedades dos inteiros relativas a noções de número primo, divisibilidade e resolução de equações com soluções inteiras. Daí percebe-se que o uso da Aritmética está presente não somente em toda a Matemática, mas nas outras ciências e também no nosso cotidiano, pois, no nosso dia-a-dia, a todo instante, temos necessidade de tomar algum tipo de decisão que envolve operações aritméticas, das mais elementares, como uma simples adição, até àquelas mais sofisticadas como, por exemplo, calcular os juros cobrados numa venda a prazo. Vejamos a situação do exemplo seguinte.

Exemplo: *Paulo vai comprar cerâmica para revestir o piso de uma sala retangular medindo* $6m \times 5m$. *O pagamento pode ser feito à vista, com 5% de desconto, ou em duas parcelas iguais sem desconto, sendo a primeira paga no ato da compra. Qual é a taxa de juros embutida na venda a prazo? Se o dinheiro de Paulo está aplicado a uma taxa de 10% ao mês, qual é a melhor opção de pagamento?*

Numa situação como esta, precisamos de conhecimentos de aritmética para calcular a área do piso da sala e saber a quantidade necessária de cerâmica, e também para calcular a taxa de juros embutida no pagamento a prazo para, a partir daí, escolher a melhor opção de pagamento.

3. Conhecendo a Temática

3.1 Propriedades das operações com números inteiros

A seguir, listamos algumas propriedades básicas das operações de adição e multiplicação com números inteiros, isto é, aqueles que pertencem ao conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

1. *Comutatividade*: $\forall a, b \in \mathbb{Z},\ a + b = b + a$ e $ab = ba$
2. *Associatividade*: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z},\ a + (b + c) = (a + b) + c$ e $(ab)c = a(bc)$
3. *Existência de elementos neutros*: $\forall a \in \mathbb{Z},\ a + 0 = a$ e $1 \times a = a$
4. *A multiplicação é distributiva em relação à adição*: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z},\ a(b + c) = ab + ac$
5. *Integridade*: Se $a, b \in \mathbb{Z}$, então $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$

6. *Tricotomia*: Dados $a, b \in Z$, ocorre uma, e somente uma, das possibilidades seguintes: ou $a = b$ ou $a < b$ ou $b < a$
7. $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$, se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$
8. *Leis de Cancelamento*:
   - **a.** $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, \quad a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$
   - **b.** $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, c > 0, \quad a \leq b \Leftrightarrow ac \leq bc$
   - **c.** $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, c < 0, \quad a \leq b \Leftrightarrow ac \geq bc$
   - **d.** $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, \quad a + c = b + c \Leftrightarrow a = b$
   - **e.** $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, c \neq 0, \quad ac = bc \Leftrightarrow a = b$

Atenção: Observe que no item (c) os sentidos das desigualdades são opostos. Isto ocorre porque *c < 0.*

Observação: Quando estamos resolvendo uma equação ou inequação e passamos um termo de um membro para outro, invertendo o seu sinal, o que nos permite fazer isso são as propriedades listadas acima.

São as leis do cancelamento que permitem que uma equação ou inequação permaneça válida após somarmos ou subtrairmos uma mesma quantidade a ambos os seus membros. Resultado semelhante se obtém quando se multiplica ou divide ambos os membros por uma mesma quantidade não-nula, lembrando que, no caso de inequação, quando a quantidade é negativa o sentido da desigualdade se inverte.

Exemplo: Vejamos o uso dessas propriedades quando resolvemos uma simples equação do tipo $5x - 7 = 5$.

Operação	Propriedade
$4x - 7 = 5$	
$(4x - 7) + 7 = 5 + 7$	Lei do cancelamento (8.d)
$4x + (-7 + 7) = 12$	Associatividade
$4x + 0 = 12$	
$4x = 4 \times 3$	Elemento neutro da adição
$x = 3$	Lei do cancelamento (8.b)

3.2 Produtos notáveis

Usando propriedades das listadas acima podemos verificar, facilmente, as igualdades seguintes, para quaisquer números reais a e b. Essas expressões são conhecidas como *produtos notáveis*.

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
4. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
5. $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
6. $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

3.3 Potenciação

Se a é um número real qualquer e n um número inteiro positivo, ou seja, $n \geq 1$, o produto de a por ele mesmo n vezes é a n-ésima potência de a e é denotado a^n. Se $a \neq 0$, definimos $a^0 = 1$ e $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$.

Cuidado! A potência a^0 é definida somente quando $a \neq 0$.

A partir das definições e das propriedades listadas acima, as igualdades seguintes podem ser verificadas, $\forall m, n \in \mathbb{Z}, \ \forall a, b \in \mathbb{R}^*$.

1. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.
2. $a^m a^n = a^{m+n}$.
3. $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$.
4. $a^n b^n = (ab)^n$.
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$.

Exemplos

1. $10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{100} = 0{,}01$.
2. $2^3 \times 2^5 = 2^{3+5} = 2^8 = 256$.
3. $\dfrac{3^8}{3^5} = 3^8 \times 3^{-5} = 3^{8-5} = 3^3 = 27$.
4. $\dfrac{10^4}{5^4} = \left(\dfrac{10}{5}\right)^4 = 2^4 = 16$.
5. $(2^3)^2 = (2^2)^3 = 2^6 = 64$.
6. $3^2 \times 5^2 = (3 \times 5)^2 = 15^2 = 225$.
7. $\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^5}{3^4} = \left(\frac{3}{2}\right)^5 \times 3^{-4} = 3^5 \times 2^{-5} \times 3^{-4} = 3^{5-4} \times 2^{-5} = 3 \times 2^{-5} = \dfrac{3}{2^5} = \dfrac{3}{32}$.

3.4 Múltiplos e divisores

Definição: *Sejam* $a, b \in \mathbb{Z}$. *Se existir* $q \in \mathbb{Z}$ *tal que* $a = qb$, *diremos que* a *é um múltiplo de* b. *Se* $b \neq 0$, *também dizemos que* b *é um divisor de* a *ou que* b *é um fator de* a, *e denotamos isto por* $b \mid a$. (Lê-se “b divide a”).

Quando $b \mid a$ também dizemos que a é divisível por b ou que a divisão de a por b é exata. Se $b \neq 0$ e $a = qb$ também escrevemos $a \div b = q$ ou $\dfrac{a}{b} = q$.

Neste caso, dizemos que a é o dividendo, b o divisor, e q o quociente da divisão de a por b. A notação $b \nmid a$ significa que b não divide a, ou seja, não existe número inteiro q para o qual acontece $a = qb$. Em símbolos, $b \nmid a \Leftrightarrow a \neq qb, \quad \forall q \in \mathbb{Z}.$

Exemplo: $3 \mid 6$ mas $3 \nmid 5$.

> **Observação**: O número 0 é múltiplo de qualquer número inteiro, pois $0 = 0 \times b, \quad \forall b \in \mathbb{Z}.$ Observe também que todo número inteiro não-nulo divide 0.

Dado $a \in \mathbb{Z}$, denotando por $M(a)$ e $D(a)$, respectivamente, o conjunto dos números inteiros múltiplos de a e o dos divisores de a. Temos que $M(a) = \{0, \pm a, \pm 2a, \pm 3a, \ldots\}$ é um conjunto infinito, ao passo que

$D(a)$ é sempre finito, desde que $a \neq 0$. Quando $a = 0$, $M(0) = \{0\}$ e $D(0)$ é um conjunto infinito pois, como já observamos, todo inteiro não-nulo divide 0.

Exemplo: Os conjuntos de múltiplos e de divisores de 6 são, respectivamente, $M(6) = \{0, \pm 6, \pm 12, \pm 18, \ldots\}$ e $D(6) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$.

Proposição: Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

1. Se $a \mid b$ e $b \mid c$ então $a \mid c$;
2. Se $a \mid b$ e $b \mid a$ então $a = \pm b$;

Se $a \mid b$ e $a \mid c$ então $a \mid (bx + cy), \forall x, y \in \mathbb{Z}$.

Exemplo: Como $3 \mid 6$ e $6 \mid 60$, então $3 \mid 60$. Isso pode ser verificado diretamente, assim: $6 = 2 \times 3$ e $60 = 10 \times 6 \Rightarrow 60 = 10(2 \times 3) = (10 \times 2) \times 3 = 20 \times 3$.

Exemplo: Como $3 \mid 6$, $3 \mid 21$ e $114 = 5 \times 6 + 4 \times 21$, então $3 \mid 114$.

3.5 Algoritmo da divisão

Se b divide a, vimos que $a = qb$, onde o inteiro q é o quociente da divisão de a por b. Por exemplo, como 6 divide 42 podemos escrever $42 = 7 \times 6$ e 7 é o quociente da divisão de 42 por 6. Quando b não divide a, não existe inteiro q tal que $a = qb$ porque a divisão de a por b não é exata. Mas, mesmo assim, podemos relacionar a e b por meio de uma expressão. Por exemplo, 6 não divide 45, mas podemos escrever $45 = 7 \times 6 + 3$. É fácil perceber o que ocorre nessa expressão. De fato,

$$\left.\begin{array}{l} 45 = 42 + 3 \\ 42 = 7 \times 6 \end{array}\right\} \Rightarrow 45 = 7 \times 6 + 3.$$

Sabemos que quando dividimos 45 por 6 obtemos um quociente 7 e um resto 3. Estes são os únicos números, além de 45 e 6, que aparecem na expressão acima. Daí, concluímos que, apesar de 45 não ser divisível por 6, é possível relacioná-los por meio do quociente e do resto da divisão de 45 por 6.

Isto que acabamos de ver é apenas um caso particular de uma situação mais geral, cuja validade é garantida pelo teorema seguinte, conhecido como ***Algoritmo da Divisão***.

Teorema: Se a e b pertencem ao conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$, dos números naturais, sendo $b \neq 0$, então existem $q, r \in \mathbb{N}$, chamados respectivamente de quociente e resto da divisão de a por b, tais que $a = qb + r$, onde $0 \leq r < b$.

Além disso, os números q e r são determinados de modo único.

Observe que b divide a se, e somente se, $a = qb = qb + 0$, ou seja, se, e somente se, o resto da divisão de a por b é $r = 0$.

Atenção: O teorema acima também vale para números inteiros quaisquer a e b, desde que $b \neq 0$. Esse caso mais geral será tratado em outra disciplina, mais adiante.

Exemplo: Deseja-se colocar dois litros e meio de refrigerante em copos de $200\ ml$. Quantos desses copos são necessários?

Uma solução: Sabemos que $2{,}5\ l = 2500\ ml$ e $2500 = 12 \times 200 + 100$. Então, são necessários $12 + 1 = 13$ copos, pois enchendo-se 12 copos ainda restam $100\ ml$.

No Moodle...

Na plataforma *Moodle* você encontrará vários exercícios envolvendo múltiplos, divisores e o algoritmo da divisão.

3.6 Números primos

Todo número inteiro $n \neq 0$ é divisível por ± 1 e por $\pm n$. Esses divisores serão chamados divisores triviais de n. Se existirem outros divisores de n, eles são chamados de divisores não-triviais. Os divisores de n que são diferentes de $\pm n$ são chamados divisores próprios de n. Alguns números inteiros possuem apenas divisores triviais. Por exemplo, os números 5 e 7 têm essa propriedade, pois $D(5) = \{\pm 1, \pm 5\}$ e $D(7) = \{\pm 1, \pm 7\}$.

Um número inteiro n, diferente de 1 e de -1, é chamado primo se os seus únicos divisores são os triviais. Caso o inteiro n possua divisor não trivial, ele é chamado de número composto. Assim, um número inteiro n é composto se, e somente se, existem números inteiros a e b tais que $a \neq \pm 1$, $a \neq \pm n$ e $n = ab$.

Também podemos dizer que n é primo se, e somente se, para $a, b \in Z$, $n = ab$ acarreta $a = \pm 1$ ou $a = \pm n$.

Dialogando e Construindo Conhecimento

Como os divisores de 2 são ± 1 e ± 2, temos que 2 é um número primo. Verifique que todo primo maior do que 2 é ímpar.

Observação: É um fato matemático que p é primo se, e somente se, $-p$ é primo. Assim, podemos restringir o estudo dos números primos aos números inteiros positivos. É o que faremos. De agora em diante, vamos enunciar alguns resultados apenas para números naturais, mas deve ficar bem claro que resultados análogos também valem para inteiros negativos.

Um número n pode dividir o produto de dois números sem que divida algum desses números. Por exemplo, 6 divide $72 = 8 \times 9$, mas 6 não divide 8 e 6 não divide 9. De acordo com o teorema seguinte, isso não acontece quando n é um número primo.

Teorema: Se p é um número primo e $p \mid ab$, então $p \mid a$ ou $p \mid b$.

Corolário: Se $p, p_1, p_2, \ldots, p_k$ são números primos e $p \mid p_1 p_2 \cdots p_k$ então $p = p_i$, para algum $i = 1, 2, \ldots, k$.

Exemplo: Se p é um primo e $p \mid 28$ então $p = 2$ ou $p = 7$, uma vez que $28 = 2 \times 2 \times 7$.

Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou é um produto de fatores primos. Isso é o que afirma o seguinte teorema, conhecido como **Teorema Fundamental da Aritmética**.

Teorema: Se n é um número natural maior do que 1, então existem números primos $p_1, p_2, \ldots, p_k$ tais que $n = p_1 p_2 \cdots p_k$.

A expressão $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ é chamada decomposição (ou fatoração) de n em fatores primos e $p_1, p_2, \ldots, p_k$ são os fatores primos de n. Podem ocorrer fatores primos iguais. Por exemplo, $1500 = 2\times 2\times 3\times 5\times 5\times 5$.

O teorema acima também pode ser enunciado assim:

Teorema: Se $n > 1$ é um número natural então existem números primos $p_1, \ldots, p_r$ únicos, com $p_1 < \cdots < p_r$, e números naturais $n_1, \ldots, n_r$ também únicos, tais que $n = p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}$.

A fatoração do número 1500, de acordo com essa expressão, é $1500 = 2^2 \times 3\times 5^3$.

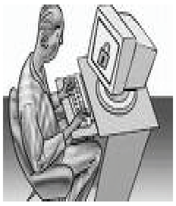
Do teorema acima, conclui-se que se b divide a então todo fator primo de b também é fator primo de a. Isso é equivalente a dizer que se $a = p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}$ então $b = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$, onde $0 \le k_i \le n_i$, $i = 1, \ldots, r$. Daí segue o seguinte teorema:

Teorema: Se $a = p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}$, onde $p_1, \ldots, p_r$ são números primos distintos e $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$, então a quantidade de divisores positivos de a é $(n_1 + 1)\times \cdots \times (n_r + 1)$.

Exemplo: Como $500 = 2^2 \times 5^3$, todo divisor positivo de 500 é da forma $2^s \times 5^t$, com $0 \le s \le 2$ e $0 \le t \le 3$. Também podemos afirmar que o número de divisores positivos de 500 é igual a $(2+1)(3+1) = 12$. Esses divisores são $1, 2, 2^2, 5, 5^2, 5^3, 2\times 5, 2\times 5^2, 2\times 5^3, 2^2\times 5, 2^2 \times 5^2$ e $2^2\times 5^3$.

O Teorema Fundamental da Aritmética mostra que todo número natural $n > 1$ decompõe-se em fatores primos. Isso, por si só, já mostra a importância dos números primos na aritmética. Essa importância não se restringe apenas ao aspecto teórico, ela está presente no nosso cotidiano. Quando efetuamos uma transação bancária, seja num terminal de atendimento ou pela internet, fornecemos informações sigilosas. Para que o sigilo dessas informações seja mantido elas são *criptografadas* por processos baseados em números primos. Nesses processos são utilizados números extremamente grandes. Quanto maiores forem os números usados, mais difícil se tornará a quebra do sigilo. Daí o interesse e a importância de se descobrirem números primos cada vez maiores. Além de transações bancárias, muitas outras informações sigilosas trocadas pela internet também são criptografadas.

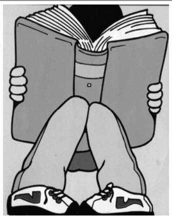
Ampliando o seu Conhecimento



A criptografia é o ramo da matemática que estuda técnicas de codificação (ou cifragem) de mensagens, isto é, técnicas que tornam as mensagens acessíveis apenas a quem está autorizado. O processo de codificação também é chamado de criptografia. Você pode saber mais sobre criptografia acessando:

<http://www.infowester.com/criptografia.php>
<http://www.clubedohardware.com.br/artigos/667>
<http://pt.wikipedia.org/wiki/Criptografia>.

Ampliando o seu Conhecimento



Pode-se provar que o conjunto dos números primos é infinito. No entanto, se conhece apenas uma quantidade finita deles. O maior número primo conhecido atualmente foi descoberto em agosto de 2008, é o número $2^{43.112.609} - 1$. Este número é formado por $12.978.189$ algarismos.

Definição: Um número natural n é chamado *perfeito* se ele é igual à soma dos seus divisores positivos próprios. Se n é maior do que essa soma, recebe a denominação de *deficiente* e, se é menor do que tal soma, é dito *abundante*.

Exemplo: Os números 6 e 28 são perfeitos; 8 e 15 são deficientes, já 12 e 20 são abundantes. De fato,

Número	Divisores próprios positivos	Soma dos divisores próprios positivos
6	1, 2, 3	1+2+3=6
28	1, 2, 4, 7, 14	1+2+4+7+14=28
8	1, 2, 4	1+2+4=7
15	1, 3, 5	1+3+5=9
12	1, 2, 3, 4, 6	1+2+3+4+6=16
20	1, 2, 4, 5, 10	1+2+4+5+10=22

Ampliando o seu Conhecimento

Todos os números perfeitos conhecidos até hoje são pares. Não se sabe ainda se existe número perfeito ímpar. São conhecidos apenas 46 números perfeitos, todos eles da forma $(2^n - 1)2^{n-1}$. Pode ser provado que todo número perfeito par é dessa forma. Não se sabe ainda se o conjunto dos números perfeitos é finito ou infinito.

Atualmente, o maior número perfeito que se conhece foi descoberto em agosto de 2008, é o número $(2^{43.112.609} - 1) \times 2^{43.112.608}$.

Ampliando o seu Conhecimento

Marin Mersenne foi um matemático francês. Ele nasceu no dia 8 de setembro de 1588 na pequena cidade de Oizé, província de Maine, na França, e morreu no dia 1 de setembro de 1648 em Paris, na França. Você pode saber mais sobre Mersenne, números primos, números de Mersenne, números perfeitos, etc. acessando:

<http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Mersenne.html>
<http://www.mersenne.org/status.htm>;
<http://www.mersenne.org/>;
<http://primes.utm.edu/mersenne/>
<http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.perfect.html>;
<http://primes.utm.edu/largest.html>

Em *[4]*, você encontra alguns fatos e curiosidades sobre esse assunto.

3.7 Máximo divisor comum

Vamos considerar a seguinte situação: desejamos recortar uma folha de papel retangular, medindo $30\,cm \times 45\,cm$, em pedaços quadrados todos com as mesmas dimensões. Como determinar as dimensões desses pedaços de modo que eles tenham a maior área possível?

Uma solução: Se x é a medida dos lados destes quadrados, então x deve ser um divisor de 30 e também de 45. Como os divisores positivos de 30 e de 45 são

$D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ e $D(45) = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$, x deve ser um elemento da interseção destes dois conjuntos, ou seja, $x \in D(30) \cap D(45) = \{1, 3, 5, 15\}$.

Como queremos que os pedaços de papel tenham a maior área possível, devemos tomar $x = 15\ cm$.

Nesse problema, o valor que tomamos para x é o maior inteiro positivo que divide 30 e 45 simultaneamente e, por isso, é chamado de máximo divisor comum de 30 e 45. Vamos denotá-lo por $mdc\{30, 45\}$, ou seja, $mdc\{30, 45\} = 15$.

O máximo divisor comum de dois números pode ainda ser definido assim:

Definição: Sejam a e b inteiros, sendo pelo menos um deles não-nulo. Um inteiro **positivo** d é chamado máximo divisor comum de a e b, que vamos denotar por $mdc\{a,b\}$, se as duas condições seguintes são satisfeitas.

1. $d\,|\,a$ e $d\,|\,b$
2. se $c \in \mathbb{Z}$ é tal que $c\,|\,a$ e $c\,|\,b$ então $c\,|\,d$.

A condição (1) afirma que d é um divisor comum de a e b, enquanto a condição (2), além de dizer que d é o maior divisor comum de a e b, também garante que d é divisível por qualquer divisor comum de a e b.

Definição: Se $mdc\{a,b\}=1$ dizemos que a e b são *relativamente primos* ou *primos entre si*.

Atenção: Observe que dois números são relativamente primos se, e somente se, eles não têm fatores primos em comum.

Exemplo: Os números 9 e 40 são relativamente primos, pois $9 = 3^2$ e $40 = 2^3 \times 5$.

Observação: Dados dois inteiros a e b, às vezes é conveniente usar os mesmos primos para decompô-los em fatores primos. Isto é possível pondo expoente nulo em cada primo que aparece numa decomposição e não divide o número correspondente a esta decomposição. Isto também pode ser feito com mais de dois números.

Exemplo: $18 = 2\times 3^2$ e $40 = 2^3 \times 5$ mas podemos escrever $18 = 2\times 3^2 \times 5^0$ e $40 = 2^3 \times 3^0 \times 5$.

Este recurso é muito útil para calcular o mdc.
De fato, se $a = p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}$ e $b = p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r}$, onde $m_1, m_2, \ldots, m_r, n_1, n_2, \ldots, n_r \geq 0$, temos que

$$mdc\{a,b\} = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}\text{, onde } k_i = mínimo\{m_i, n_i\},\quad i = 1,\ldots,r.$$

Exemplo: Para calcular mdc{1050,936}, escrevemos $1050 = 2\times3\times5^2\times7\times13^0$ e $936 = 2^2\times3^2\times5^0\times7^0\times13$. Então, $mdc\{1050,936\} = 2\times3\times5^0\times7^0\times13^0 = 6$.

Exercício: Um terreno plano, de forma retangular, medindo $720\,m$ de comprimento por $1040\,m$ de largura, foi dividido em lotes quadrados, com dimensões iguais. Em quantos lotes, no mínimo, esse terreno foi dividido?

Solução: Quanto maior for a área de cada lote, menor será a quantidade deles. Então, a quantidade será mínima quando a área deles for máxima, e isso ocorrerá quando as medidas dos seus lados forem iguais ao $mdc\{720,1040\} = 80$. Como $720 = 80 \times 9$ e $1040 = 80\times 13$, segue que o terreno foi dividido em, no mínimo, $9\times 13 = 114$ lotes.

Teorema: Se $a,b,q,r \in Z$ e $a = qb + r$ então $mdc\{a,b\} = mdc\{b,r\}$.

Este teorema, combinado com o algoritmo da divisão, nos fornece um algoritmo para calcular o mdc de dois números, conhecido como Algoritmo de Euclides ou Algoritmo Euclidiano, que vamos apresentar no exemplo seguinte.

Exemplo: Vamos encontrar $mdc\{1050,936\}$ usando o Algoritmo de Euclides.

Esse algoritmo faz uso de aplicações repetidas do algoritmo da divisão, da seguinte maneira.

$$1050 = 1 \times 936 + 114$$
$$936 = 8 \times 114 + 24$$
$$114 = 4 \times 24 + 18$$
$$24 = 1 \times 18 + 6$$
$$18 = 3 \times 6 + 0$$

Pelo teorema acima temos que

$$1050 = 1 \times 936 + 114 \Rightarrow mdc\{1050, 936\} = mdc\{936, 114\}$$
$$936 = 8 \times 114 + 24 \Rightarrow mdc\{936, 114\} = mdc\{114, 24\}$$
$$114 = 4 \times 24 + 18 \Rightarrow mdc\{114, 24\} = mdc\{24, 18\}$$
$$24 = 1 \times 18 + 6 \Rightarrow mdc\{24, 18\} = mdc\{18, 6\}$$
$$18 = 3 \times 6 + 0 \Rightarrow mdc\{18, 6\} = mdc\{6, 0\} = 6$$

Daí, concluímos que

$$\begin{aligned} mdc\{1050, 936\} &= mdc\{936, 114\} = mdc\{114, 24\} = \\ &= mdc\{24, 18\} = mdc\{18, 6\} = mdc\{6, 0\} = 6 \end{aligned}.$$

Observe que $mdc\{1050, 936\}$ é o último resto não-nulo da sequência de aplicações do algoritmo da divisão.

Em alguns casos o cálculo do mdc pode ser simplificado pelo teorema seguinte.

Teorema: Seja $k \neq 0$. Se $a = km$ e $b = kn$ então $mdc\{a, b\} = k(mdc\{m, n\})$.

Como consequência imediata deste teorema temos o corolário seguinte:

Corolário: Se a e b são não-nulos e $mdc\{a, b\} = d$, então $\frac{a}{d}$ e $\frac{b}{d}$ são relativamente primos.

Exemplo: $mdc\{100, 72\} = 4mdc\{25, 18\} = 4 \times 1 = 4$.

A definição de mdc pode ser estendida, naturalmente, para três ou mais números inteiros. O máximo divisor comum de $n_1, n_2, \ldots, n_r$ é o maior inteiro que divide cada um destes números. Analogamente ao que já foi feito para dois inteiros, também podemos usar a definição seguinte.

Definição: Sejam $n_1, n_2, \ldots, n_r$ números inteiros. Dizemos que d é o máximo divisor comum de $n_1, n_2, \ldots, n_r$ se as duas condições seguintes são satisfeitas.

1. $d \mid n_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$
2. se $c \mid n_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$, então $c \mid d$.

O método de fatoração em primos pode ser usado para calcular $mdc\{n_1, n_2, \ldots, n_r\}$ de forma análoga à usada para o cálculo do mdc de dois números. O Algoritmo Euclidiano também pode ser usado para calcular $mdc\{n_1, n_2, \ldots, n_r\}$, desde que aplicado recursivamente.

De fato, observemos que $mdc\{a, b, c\} = mdc\{a, mdc\{b, c\}\}$. No caso geral, temos o teorema seguinte:

Teorema: $mdc\{n_1, n_2, \ldots, n_{r-1}, n_r\} = mdc\{n_1, \ldots, n_{r-2}, mdc\{n_{r-1}, n_r\}\}$.

Este teorema mostra que o cálculo de $mdc\{n_1, n_2, \ldots, n_r\}$ pode ser feito por meio de $r-1$ cálculos de mdc de dois números. Então podemos aplicar o Algoritmo de Euclides para calcular $mdc\{n_1, n_2, \ldots, n_r\}$, bastando, para tanto, aplicá-lo em cada um dos $r-1$ cálculos de mdc de dois números.

Exemplo: $mdc\{45, 18, 12\} = mdc\{45, mdc\{18, 12\}\} = mdc\{45, 6\} = 3$.

Você pode verificar esse resultado calculando o mdc diretamente, por fatoração dos três números. Faça isso!

Exemplo: Vamos calcular $mdc\{45, 18, 12\}$ usando o algoritmo de Euclides. Inicialmente aplicamos o algoritmo para calcular $mdc\{18, 12\}$ e depois para calcular $mdc\{45, mdc\{18, 12\}\}$. Vejamos:

$$18 = 1 \times 12 + 6$$

$$12 = 2 \times 6 + 0$$

Então $mdc\{18, 12\} = mdc\{12, 6\} = mdc\{6, 0\} = 6$

Agora aplicamos o algoritmo para calcular $mdc\{45, 6\}$.

$$45 = 7 \times 6 + 3$$

$$6 = 2 \times 3 + 0$$

Então $mdc\{45, 6\} = mdc\{6, 3\} = mdc\{3, 0\} = 3$.

3.8 Mínimo múltiplo comum

Considere a seguinte situação: José e Maria sacaram uma mesma quantia num caixa eletrônico. José recebeu apenas cédulas de R$ 20,00 e Maria apenas cédulas de R$ 50,00. No mínimo, quanto cada um sacou?

Para responder essa pergunta, devemos observar que a quantia sacada por José tem que ser um múltiplo de 20 e a de Maria, um múltiplo de 50. Logo, como os dois sacaram a mesma quantia, ela deve ser múltiplo de 20 e de 50. Sendo múltiplo de 20, só pode ser 20, 40, 60, 80, 100, 120,… e sendo múltiplo de 50, só pode ser 50, 100, 150,.... Daí se conclui que cada um sacou, no mínimo, R$ 100,00.

Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, qualquer inteiro que seja múltiplo de a e de b é chamado múltiplo comum de a e b. Observe que ab e todos os seus múltiplos são múltiplos comuns de a e b. O menor inteiro positivo que é múltiplo comum de a e b é chamado de mínimo múltiplo comum de a e b, e vamos denotá-lo por $mmc\{a, b\}$. Essa definição é equivalente à seguinte.

Definição: Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, um inteiro **positivo** m é chamado de *mínimo múltiplo comum* de a e b, que vamos denotar por $mmc\{a, b\}$, se as duas condições seguintes são satisfeitas.

1. m é múltiplo comum de a e b
2. Se $n \in \mathbb{Z}$ é múltiplo comum de a e b então n é múltiplo de m.

Da condição (2), concluímos que $m \leq n$, garantindo que o mínimo múltiplo comum é único.

Exemplo: Vamos calcular $mmc\{4, 6\}$. Denotando por M(4) e M(6), respectivamente, os conjuntos dos múltiplos positivos de 4 e 6, temos

$$M(4) = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, \ldots\}$$

$$M(6) = \{6, 12, 24, 30, 36, 42, \ldots\}$$

Um inteiro positivo n é um múltiplo comum de 4 e 6 se, e somente se, $n \in M(4) \cap M(6) = \{12, 24, \ldots\}$. Daí segue que $mmc\{4, 6\} = 12$.

Observação: Também podemos calcular $mmc\{a,b\}$ usando a decomposição de a e b em fatores primos. De fato, se $a = p_1^{s_1} \cdots p_r^{s_r}$ e $b = p_1^{t_1} \cdots p_r^{t_r}$, em que $s_1,\ldots,s_r,t_1,\ldots,t_r \geq 0$, temos que $mmc\{a,b\} = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$, em que $k_i = máximo\{s_i, t_i\}, \quad i = 1,\ldots,r$.

Exemplo: Vamos calcular $mmc\{60, 50\}$.
Como $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ e $50 = 2 \times 3^0 \times 5^2$, segue-se que $mmc\{60, 50\} = 2^2 \times 3 \times 5^2 = 300$.

Exercício: Um terreno plano quadrado que mede menos de $2\,ha$ foi dividido em lotes quadrados. Metade dele foi dividida em lotes quadrados que medem $1024\,m^2$ e a outra metade foi dividida em lotes, também quadrados, que medem $576\,m^2$. Calcule a área desse terreno.
Solução: A metade da área desse terreno deve ser múltiplo de 1024 e de 576. Portanto, deve ser múltiplo de $mmc\{1024, 576\} = 9216$. Então a área deve ser múltiplo de $18432 = 2 \times 9216$. Como o terreno mede menos de $2\,ha$, e $2\,ha = 20000\,m^2$, concluímos que a área desse terreno mede $18432\,m^2$.

O teorema seguinte estabelece uma relação entre mmc e mdc.

Teorema: Se $a, b \in \mathbb{Z}$ então $(mmc\{a,b\})(mdc\{a,b\}) = |ab|$.

Corolário: Se a e b são inteiros relativamente primos então $mmc\{a,b\} = |ab|$.

Exercício: Determine os valores de n de modo que $mdc\{80, n\} = 5$ e $mmc\{80, n\} = 560$.
Solução: Pelo teorema acima, temos que $|80n| = 5 \times 560 = 2800$. Daí segue que $80n = 2800$ ou $80n = -2800$. Portanto, $n = 35$ ou $n = -35$.

A definição de mínimo múltiplo comum pode ser estendida naturalmente para três ou mais números e o cálculo de $mmc\{n_1, n_2, \ldots, n_{r-1}, n_r\}$ pode ser feito por meio da decomposição desses números em fatores primos ou por repetidos cálculos de mmc de dois números, pois $mmc\{n_1, n_2, \ldots, n_{r-1}, n_r\} = mmc\{n_1, \ldots, n_{r-2}, mmc\{n_{r-1}, n_r\}\}$.

No Moodle...

Na plataforma ***Moodle*** você encontra vários exercícios que complementam este assunto.

3.9 Razão e proporção

No dia-a-dia fazemos uso dos conceitos de razão e de proporção nas mais diversas situações. Por exemplo, na cozinha, preparando um bolo ou um simples cafezinho; no supermercado, comparando os preços de um mesmo produto que é apresentado em embalagens diferentes; comparando quantidades de uma mesma grandeza ou de grandezas diferentes; calculando o rendimento de uma aplicação financeira, etc.

Quando dizemos que numa certa comunidade existem quatro mulheres para cada três homens, significa que se denotarmos por m o número de mulheres, e por h o número de homens dessa comunidade, temos que $m = \frac{4}{3}h$ ou $\frac{m}{h} = \frac{4}{3}$. Por isso dizemos que nessa comunidade a *razão* entre o número de mulheres e o de homens é de $\frac{4}{3}$ ou ainda que o número de mulheres e o de homens estão numa razão de *4* para *3*.

Definição: A *razão* entre duas grandezas a e b é o quociente $\frac{a}{b}$. Também se usa a notação $a:b$ para denotar a razão $\frac{a}{b}$.

A **porcentagem** é um dos exemplos mais comuns de razão. Quando dizemos que *40%* dos indivíduos de certa comunidade são negros, significa que existem *40* negros para cada *100* indivíduos dessa comunidade, ou seja, a razão entre o número de negros e o total de indivíduos é de $\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$. Daí se vê que *40%* é equivalente a uma razão de $\frac{2}{5}$, ou seja, para cada 5 indivíduos dessa comunidade, em média, 2 são negros.

Também podemos considerar razão entre grandezas diferentes. Por exemplo, quando dizemos que um carro faz *12* quilômetros por litro (*12 km/l*) significa que para cada 12 quilômetros ele consome *1* litro de combustível. Neste caso, a razão entre a distância percorrida e a quantidade de combustível consumida é de *12* para *1*, ou $\frac{12}{1} = 12$. Também são razões entre grandezas diferentes: densidade demográfica, velocidade, etc.

Exercício: Para obter uma determinada coloração um pintor mistura tinta vermelha com amarela na razão de $\frac{2}{3}$. Em *15* litros de tinta com essa coloração foram usados quantos litros de tinta vermelha?

Solução: Como a razão é de $\frac{2}{3}$, são usados 2 litros de tinta vermelha para cada 3 litros de tinta amarela. Assim, em cada *5* litros dessa mistura, tem 2 litros de tinta vermelha e 3 litros de tinta amarela. Portanto, em *15* litros dessa mistura são usados *6* litros de tinta vermelha.

Exercício: A planta baixa de um loteamento foi desenhada na escala de 1:300.

1. Qual é a área real de um lote que nessa planta tem área de $100\,cm^2$?
2. Quais são as dimensões, nessa planta, de um lote retangular cujas dimensões reais são $15\,m \times 30\,m$?

Solução:

1. Como a razão é de 1 para 300, cada cm na planta equivale a $300\,cm = 3\,m$ no loteamento. Então, $1\,cm^2$ na planta equivale a $9\,m^2$ no loteamento. Como o lote tem área de $100\,cm^2$ na planta, a área real desse lote é $900\,m^2$.

2. Se x é uma medida, em cm, na planta, então a medida correspondente no loteamento é $y = 300\,cm$. Então, cada cm no loteamento equivale a $\frac{1}{300}cm$ na planta. Como $15\,m \times 30\,m = 1500\,cm \times 3000\,cm$, um lote com essas dimensões no loteamento, é representado na planta com as dimensões $\frac{1500}{300}cm \times \frac{3000}{300}cm = 5\,cm \times 10\,cm$.

Agora consideremos os dois exemplos seguintes.

Exemplo: Uma copiadora cobra R$ 0,10 por cópia, independente do número de cópias. A tabela seguinte mostra o custo de algumas quantidades de cópias.

TABELA DE PREÇOS	
Número de cópias	Valor (R$)
5	0,50
10	1,00
15	1,50
20	2,00
25	2,50
30	3,00

Exemplo: Suponha que um prêmio de loteria de R$ 1.200.000,00 vai ser rateado entre o(s) ganhador(es). A tabela seguinte mostra algumas possibilidades de rateio desse prêmio.

Rateio do prêmio	
Número de ganhadores	Valor do rateio (R$)
1	1.200.000,00
2	600.000,00
3	400.000,00
4	300.000,00
5	240.000,00

No primeiro exemplo, à medida que se aumenta a quantidade de cópias o custo também aumenta, na mesma proporção, enquanto no segundo exemplo, ocorre o inverso, à medida que o número de ganhadores aumenta, o valor do rateio diminui, na mesma proporção. Observe que no primeiro exemplo o número de cópias e o custo estão na razão de 5 cópias para cada R$ 0,50, enquanto no segundo exemplo, as grandezas não obedecem alguma razão. Mas, em ambos os casos, temos proporcionalidade. No primeiro, a proporcionalidade é direta e, no segundo, inversa. Em ambos, dizemos que as grandezas envolvidas são proporcionais. Vamos tornar esses conceitos mais precisos nas definições seguintes.

Definição: Duas grandezas ou varáveis x e y são ditas *diretamente proporcionais* se à medida que uma **aumenta** (respectivamente diminui) a outra também **aumenta** (respectivamente diminui), **na mesma proporção**. Isto equivale a dizer que existe uma constante positiva k, chamada *fator de proporcionalidade*, tal que $y = kx$ ou $\frac{y}{x} = k$.

Definição: Duas grandezas ou variáveis x e y são ditas *inversamente proporcionais* se à medida que uma **aumenta** (respectivamente diminui) a outra **diminui** (respectivamente aumenta), **na mesma proporção**. Isto equivale a dizer que existe uma constante positiva k, chamada fator de proporcionalidade, tal que $y = \frac{k}{x}$ ou $xy = k$.

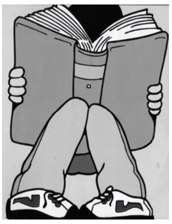
Voltemos aos dois exemplos anteriores. No primeiro, se y é o preço de x cópias então $y = 0{,}10x$. Logo, o fator de proporcionalidade é $k = 0{,}10$. No segundo, se houver x ganhadores e y for o valor do rateio, então $y = \frac{1.200.000}{x}$ ou $xy = 1.200.000$. Logo, $k = 1.200.000$.

Atenção: Se duas grandezas x e y são diretamente proporcionais, então quando se multiplica (ou divide) x por uma constante $c \neq 0$ o valor correspondente de y também fica multiplicado (ou dividido) por essa mesma constante. Vejamos porque isso acontece. Se k é a constante de proporcionalidade então $y = kx$. Assim, se $y' = kx'$ então

$$\begin{matrix} x & \to & y \\ x' & \to & y' \end{matrix} \quad \Rightarrow y' = kx' = k(cx) = c(kx) = cy.$$

De modo análogo, se duas grandezas x e y são inversamente proporcionais, então quando se multiplica x por uma constante $c \neq 0$ o valor correspondente y fica dividido por c ou, equivalentemente, y fica multiplicado por $\frac{1}{c}$.

Ampliando o seu Conhecimento



Ouvimos, com freqüência, alguém falar que duas grandezas são proporcionais, pelo fato de uma aumentar (ou diminuir) sempre que a outra aumenta (ou diminui). **Isso nem sempre é verdade**, pois não há garantia de que as grandezas aumentam (ou diminuem) na mesma proporção, isto é, se multiplicarmos (ou dividirmos) uma delas por uma constante, a outra também ficará multiplicada (ou dividida) por essa mesma constante.

Por exemplo, a área de um quadrado não é proporcional ao comprimento do seu lado; no entanto, se o comprimento do lado aumenta, a área também aumenta, **mas não aumenta na mesma proporção que o comprimento do lado**. . De fato, se o lado de um quadrado mede $2cm$, a sua área mede $4cm^2$, mas se multiplicarmos o lado por 3, a área passa a ser $36cm^2$, ou seja, fica multiplicada por 9.

Vamos considerar duas grandezas, x e y, diretamente proporcionais cujo fator de proporcionalidade é k. Se $a,b,c,d \in R^*$ então $a = kb$ e $c = kd$ se, e somente se, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. De fato,

$$a = kb \text{ e } c = kd \iff \frac{a}{b} = k \text{ e } \frac{c}{d} = k \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Daí concluímos que $a = kb$ e $c = kd$ se, e somente se, a razão de a para b é igual à de c para d.

De modo análogo mostra-se que se as grandezas são inversamente proporcionais com fator de proporcionalidade k, então

$$ab = k \text{ e } cd = k \iff \frac{a}{c} = \frac{d}{b} \iff \frac{a}{d} = \frac{c}{b}.$$

Isso mostra que grandezas proporcionais podem ser relacionadas por igualdade de frações, também chamadas de razões. Daí, concluímos que propriedades de proporções podem ser deduzidas por meio de propriedades de operações com frações. O teorema seguinte mostra algumas propriedades de proporções expressas por meio de igualdade de frações.

Teorema: Se $a,b,c,d \in \mathbb{R}^*$, com $a \neq b$, $c \neq d$ e $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Então:

1) $ad = bc$
2) $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$
3) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
4) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$
5) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$
6) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

3.10 Regra de três

Se $a,b,c,d \in \mathbb{R}^*$ são grandezas proporcionais e $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ então, conhecendo-se três dessas grandezas, pode-se determinar a quarta. Esse cálculo é conhecido como *regra de três simples*.

Exemplo: Uma distância d pode ser percorrida em duas horas a uma velocidade média de $60\ {}^{km}\!/_{h}$. Qual é a velocidade média para percorrê-la em três horas?

Aqui nós temos um caso de duas grandezas inversamente proporcionais, velocidade (v) e tempo (t), pois quanto maior for a velocidade menor será o tempo para percorrer a mesma distância d. Então

$$\begin{array}{ccc} t\,(horas) & & v\,(km/h) \\ 2 & \rightarrow & 60 \\ 3 & \rightarrow & x \end{array} \quad \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{x}{60} \Leftrightarrow 3x = 2 \times 60 \Leftrightarrow x = 40$$

Portanto, para percorrer a distância d em três horas, a velocidade média deve ser de $40\ {}^{km}\!/\!_{h}$.

Problemas de proporcionalidade geralmente são resolvidos por meio de regra de três, como fizemos no exemplo anterior. Mas eles também podem ser resolvidos por meio de equações algébricas. Vejamos o caso do exemplo acima. Usando a fórmula $d = vt$, encontramos $d = 120$. Então, para $t = 3$, temos $120 = 3v \Leftrightarrow v = 40$.

Dialogando e Construindo Conhecimento

Essa solução parece mais simples do que aquela que usa regra de três. No entanto, devemos observar que ela usa um ingrediente a mais, que é a fórmula $d = vt$, emprestada da Física, enquanto a outra solução, aparentemente, não usa. Mas só aparentemente, porque essa fórmula está implícita quando afirmamos que v é inversamente proporcional a t, o que equivale a dizer que existe uma constante $k > 0$ tal que $vt = k$. Essa constante é $k = d$.

Podemos encontrar situações envolvendo várias variáveis em que uma delas é proporcional às demais, podendo ser diretamente proporcional a algumas e inversamente proporcional às outras.

Definição: Se as variáveis $z, x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n$ estão relacionadas por uma equação do tipo $z = k\dfrac{x_1 x_2 \ldots x_m}{y_1 y_2 \ldots y_n}$, onde k é uma constante positiva, dizemos que z é diretamente proporcional a $x_1, x_2, \ldots, x_m$ e inversamente proporcional a $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Observe que essa definição generaliza as duas anteriores. Para ver isto, basta fixar todas as variáveis do lado direito da equação, com exceção de uma delas.

Exemplo: João, Maria e José abriram uma loja com R$ 30.000,00 tendo João participado com R$ 6.000,00, Maria com R$ 15.000,00 e José com R$ 9.000,00. Depois de um certo período eles obtiveram um lucro de R$ 5.000,00. Como deve ser dividido esse lucro entre eles?

É claro que o lucro deve ser dividido proporcionalmente ao investimento de cada um, ou seja, diretamente proporcional à respectiva quantia investida e todos na mesma proporção. Então, denotando por l_1, l_2 e l_3 os lucros de João, Maria e José, respectivamente, existe uma constante k tal que

$$l_1 = 6000k\ ,\ l_2 = 15000k\ ,\text{ e } l_3 = 9000k\,.$$

Como $l_1 + l_2 + l_3 = 5000$, temos que $30000k = 5000$, ou seja, $k = \frac{5000}{3000} = \frac{1}{6}$. Daí concluímos que

$$l_1 = 1000\,,\ l_2 = 2500 \text{ e } l_3 = 1500\,.$$

Portanto, o lucro deve ser dividido assim: R$ 1.000,00 para João, R$ 2.500,00 para Maria e R$ 1.500,00 para José.

Também podemos resolver este problema observando que João, Maria e José participaram, respectivamente, com $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{10}$ do capital. Logo, o lucro deve ser dividido nessa proporção.

Exemplo: O gerente de uma loja distribuiu um prêmio de R$ 3.000,00 com seus três funcionários, Mário, Simone e Carla. Esse prêmio foi dividido entre eles em partes inversamente proporcionais ao número de faltas ao trabalho durante o ano. Sabendo que Mário, Simone e Carla tinham, respectivamente, 8, 6 e 9 faltas, como foi dividido o prêmio?

Vamos denotar por p_1, p_2 e p_3 as partes de Mário, Simone e Carla, respectivamente. Então existe uma constante k tal que

$$p_1 = \tfrac{k}{8},\ p_2 = \tfrac{k}{6} \text{ e } p_3 = \tfrac{k}{9}.$$

Como $p_1 + p_2 + p_3 = 3000$, temos que $\frac{k}{8} + \frac{k}{6} + \frac{k}{9} = 3000$. Logo, $k = \frac{216000}{29}$.

Daí concluímos que $p_1 = \frac{216000}{29\times 8} = 931,03$, $p_2 = \frac{216000}{29\times 6} = 1241,38$ e $p_3 = \frac{216000}{29\times 9} = 827,59$.

Portanto, o prêmio deve ser dividido assim: R$ 931,03 para Mário, R$ 1.241,38 para Simone e R$ 827,59 para Carla.

Exemplo: O gerente de uma loja distribuiu um prêmio de R$ 5.000,00 com seus três funcionários, Carlos, Antônio e Gorete. Esse prêmio foi dividido entre eles em partes diretamente proporcionais ao tempo de serviço na loja e inversamente proporcionais ao número de faltas ao trabalho durante o ano. Sabendo que Carlos tinha 5 anos de tempo de serviço e 8 faltas, Antônio, 3 anos e 6 faltas, e Gorete, 6 anos e 9 faltas, como foi dividido o prêmio?

Vamos denotar por p_1, p_2 e p_3 as partes de Carlos, Antônio e Gorete, respectivamente. Então existe uma constante k tal que $p_1 = \frac{5k}{8}$, $p_2 = \frac{3k}{6}$ e $p_3 = \frac{6k}{9}$.

Como $p_1 + p_2 + p_3 = 5000$, temos que $\frac{5k}{8} + \frac{3k}{6} + \frac{6k}{9} = 5000$. Logo, $k = \frac{120000}{43}$.
Daí, concluímos que $p_1 = \frac{5\times 120000}{43\times 8} = 1744,19$, $p_2 = \frac{3\times 120000}{43\times 6} = 1395,35$ e $p_3 = \frac{6\times 120000}{43\times 9} = 1860,46$.
Portanto, o prêmio deve ser dividido assim: R$ 1.744,19 para Carlos, R$ 1.395,35 para Antônio e, para Gorete, R$ 1.860,46.

Exercício: Em 10 dias, 4 máquinas operando durante 6 horas por dia produzem 600 peças. Em quanto tempo, em dias, 5 máquinas idênticas a estas, operando 8 horas por dia, produzem 900 peças?
Solução: Neste caso temos 4 variáveis, d, h, m e p, onde

- d = número de dias
- h = número de horas que cada máquina opera por dia
- m = número de máquinas.
- p = número de peças.

Temos que d é diretamente proporcional a p e inversamente proporcional às variáveis h e m. De fato, se fixarmos o número de máquinas e a quantidade de horas de operação por dia, então a quantidade de peças produzidas é diretamente proporcional ao número de dias. Por outro lado, se fixarmos o número de peças a serem produzidas e o número de máquinas, então o número de dias necessários para produzir essa quantidade de peças é inversamente proporcional ao número de horas que essas máquinas devem operar por dia, ou seja, d inversamente proporcional a h. De modo análogo, vemos que d também é inversamente proporcional a m. Então, de acordo com a definição, existe uma constante positiva k tal que

$$d = k\frac{p}{mh}.$$

Para determinarmos o valor dessa constante k, usamos a informação que em 10 dias, 4 máquinas operando durante 6 horas por dia produzem 600 peças. Substituindo esses valores, segue que $10 = k\frac{600}{4\times 6}$, e concluímos que $k = \frac{2}{5}$. Logo, $d = \frac{2}{5}\frac{p}{mh}$. Então, quando $m = 5$, $h = 8$ e $p = 900$, temos que $d = \frac{2}{5} \times \frac{900}{5\times 8} = 9$.
Portanto, 5 máquinas operando 8 horas por dia, durante 9 dias, produzem 900 peças.

Observação: Podemos encontrar o valor de k na primeira equação e, uma vez encontrado esse valor, podemos determinar o valor de qualquer uma das quatro variáveis da segunda equação, desde que sejam conhecidos os valores de três delas. Vamos resolver esse mesmo problema usando regra de três composta, pelo “método das setas”.

Vamos dispor os dados do problema na tabela a seguir.

d	m	h	p
10	4	6	600
$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$
x	5	8	900

O sentido da seta na coluna de d igual ao da seta na de p e contrário nas colunas de m e h, significa que d é diretamente proporcional a p e inversamente proporcional a m e h. Nessa tabela, cada coluna representa uma fração cujo numerador é o valor para o qual a seta aponta, e a fração da coluna de d é igual ao produto das demais. Assim, $\frac{x}{10}=\frac{4}{5}\times\frac{6}{8}\times\frac{900}{600} \Rightarrow x=9$.

Esse é o método de resolução de problemas envolvendo proporcionalidade que a maioria dos professores ensina a seus alunos. Então é preciso que ele seja ensinado de modo que o aluno saiba por que ele funciona. Vamos usar esse exemplo para explicar o funcionamento desse método. Para isto, vamos resolver este problema por etapas, usando apenas regra de três simples em cada uma. Em cada etapa vamos deixar explicitadas as operações usadas para encontrar o valor da incógnita, para, no final da solução, explicar o funcionamento do método das setas.

Vamos dispor os dados do problema na tabela a seguir.

m	d	h	p
4	10	6	600
5	x	8	900

Na primeira etapa, duas das variáveis m, h e p são mantidas fixas e a terceira varia. Por exemplo, vamos fixar m e h e variar p. Assim, ficamos com a seguinte situação

m	d	h	p
4	10	6	600
4	z	6	900

que pode ser descrita assim: se em 10 dias 4 máquinas operando 6 horas por dia fabricam 600 peças, em quantos dias essas máquinas, operando nas mesmas condições, fabricam 900 peças? Como o número de peças depende apenas do número de dias, temos aí um problema de regra de três simples direta, cuja solução é $10 \to 600$ e $z \to 900 \Leftrightarrow \frac{z}{10}=\frac{900}{600} \Leftrightarrow z=15 \quad (z=\frac{900}{600}\times 10)$.

Então o nosso problema inicial está reduzido a este: se em 15 dias 4 máquinas operando 6 horas por dia fabricam 900 peças, em quantos dias 5 máquinas operando 8 horas por dia fabricam esse mesmo número de peças? Vamos dispor os dados desse novo problema na tabela seguinte.

m	d	h	p
4	15	6	900
5	x	8	900

Observe que eliminamos uma variável, pois agora p é constante. Repetimos o processo, mantendo uma das variáveis m ou h constante, por exemplo, $m=4$, e ficamos com a situação indicada na tabela seguinte.

m	d	h	p
4	15	6	900
4	y	8	900

Aqui temos um caso de regra de três simples inversa, cuja solução é $\frac{y}{15} = \frac{6}{8} \Leftrightarrow y = \frac{45}{4} \quad (y = \frac{6}{8} \times 15 = \frac{6}{8} z = \frac{6}{8} \times \frac{900}{600} \times 10)$.

O nosso problema inicial está reduzido a este: se em $\frac{45}{4}$ dias 4 máquinas operando 8 horas por dia fabricam 900 peças, em quantos dias 5 máquinas operando 8 horas por dia fabricam esse mesmo número de peças? Vamos dispor os dados desse problema na tabela

m	d	h	p
4	$\frac{45}{4}$	8	900
5	x	8	900

Mais uma vez temos um caso de regra de três simples inversa, cuja solução é $\frac{x}{\frac{45}{4}} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow x = \frac{4}{5} \times \frac{45}{4} \Leftrightarrow x = 9 \quad (x = \frac{4}{5} y = \frac{4}{5} \times \frac{6}{8} \times \frac{900}{600} \times 10)$.

Portanto, 5 máquinas operando 8 horas por dia durante 9 dias produzem 900 peças.

Observe que $x = \frac{4}{5} y = \frac{4}{5} \times \frac{6}{8} \times \frac{900}{600} \times 10 \Leftrightarrow \frac{x}{10} = \frac{4}{5} \times \frac{6}{8} \times \frac{900}{600}$, que é a expressão obtida pelo método das setas.

Também podemos usar o "*método de redução à unidade*" para resolver problemas de regra de três. Vamos aplicá-lo a este nosso problema, cujo enunciado vamos repetir para entendê-lo melhor e, em cada etapa, vamos dispor o resultado obtido numa tabela e, mais uma vez, vamos deixar explicitadas as operações realizadas para explicar o método das setas.

Em 10 dias, 4 máquinas operando durante 6 horas por dia produzem 600 peças. Em quanto tempo, em dias, 5 máquinas, idênticas a estas, operando 8 horas por dia, produzem 900 peças?

Dispondo os dados em uma tabela, temos

m	d	h	p
4	10	6	600
5	x	8	900

Em 10 dias, 4 máquinas operando durante 1 hora por dia produzem $\frac{1}{6} \times 600 = 100$ peças.

m	d	h	p
4	10	1	$\frac{1}{6} \times 600 = 100$

Então, em 10 dias, 4 máquinas operando durante 8 horas por dia produzem $\frac{8}{6} \times 600 = 800$ peças.

m	d	h	p
4	10	8	$\frac{8}{6} \times 600 = 800$

Daí, em 10 dias, 1 máquina operando durante 8 horas por dia produz $\frac{1}{4} \times \frac{8}{6} \times 600 = 200$ peças.

m	d	h	p
1	10	8	$\frac{1}{4} \times \frac{8}{6} \times 600 = 200$

Daí, em 10 dias, 5 máquinas operando durante 8 horas por dia produzem $\frac{5}{4}\times\frac{8}{6}\times 600=1000$ peças.

m	d	h	p
5	10	8	$\frac{5}{4}\times\frac{8}{6}\times 600=1000$

Então, em 1 dia, 5 máquinas operando durante 8 horas produzem $\frac{1}{10}\times\frac{5}{4}\times\frac{8}{6}\times 600=100$ peças.

Daí, em x dias, 5 máquinas operando durante 8 horas por dia produzem $\frac{x}{10}\times\frac{5}{4}\times\frac{8}{6}\times 600=100x$ peças.

m	d	h	p
5	x	8	$\frac{x}{10}\times\frac{5}{4}\times\frac{8}{6}\times 600=100x$

Como queremos que a produção seja de 900 peças, temos $100x=900 \Leftrightarrow x=9$.

Portanto, em 9 dias, 5 máquinas operando durante 8 horas por dia produzem 900 peças.

Observe que este método também justifica o das setas, pois $\frac{x}{10}\times\frac{5}{4}\times\frac{8}{6}\times 600=100x$ e $100x=900 \Rightarrow \frac{x}{10}=\frac{4}{5}\times\frac{6}{8}\times\frac{900}{600}$.

Tudo que fizemos neste exemplo também pode ser feito em outros casos.

Ampliando o seu Conhecimento

Nas edições 02, 05, 08, 09, 12, 14 e 46 da Revista do Professor de Matemática, da Sociedade Brasileira de Matemática, você encontra vários artigos sobre proporcionalidade. Na plataforma ***Moodle*** você vai encontrar vários exercícios sobre proporcionalidade.

3.11 Progressões

3.11.1 Progressões aritméticas

Uma sequência de números reais $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ é chamada uma progressão aritmética se, a partir do segundo termo, a diferença entre cada termo e o anterior é sempre constante. Essa constante é chamada razão da progressão aritmética e vamos denotá-la por r.

Em símbolos, uma progressão aritmética de razão r é uma sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ tal que $a_k - a_{k-1} = r,\quad k=2,3,\ldots$.

Uma progressão aritmética é dita finita (respectivamente infinita) se a quantidade de seus termos é finita (respectivamente infinita).

Exemplo: A sequência $(1,5,9,13,17)$ é uma progressão aritmética finita de razão $r=4$, enquanto $(1,3,5,7,\ldots)$ é uma progressão aritmética infinita de razão 2.

Considere uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ de razão r. Então:

1. $r>0$ se, e somente se, $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ é uma sequência crescente, isto é, $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$.
2. $r=0$ se, e somente se, $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ é uma sequência constante, isto é, $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots$.
3. $r<0$ se, e somente se, $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ é uma sequência decrescente, isto é, $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$.

Exemplo:

1. $(1, 4, 7, 11, \ldots, 91)$ é uma progressão aritmética finita crescente.
2. $(1, 4, 7, 11, \ldots)$ é uma progressão aritmética infinita crescente.
3. $(3, 3, 3, \ldots, 3)$ é uma progressão aritmética finita constante.
4. $(15, 13, 11, \ldots, -25)$ é uma progressão aritmética finita decrescente.
5. $(15, 13, 11, \ldots)$ é uma progressão aritmética infinita decrescente.

3.11.1.1 Fórmula do termo de ordem n

Conhecendo-se a razão r e o primeiro termo de uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ podemos determiná-la completamente, pois

$$a_2 - a_1 = r \Rightarrow a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 - a_2 = r \Rightarrow a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$$
$$a_4 - a_3 = r \Rightarrow a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$$
$$\vdots$$

Daí obtém-se a fórmula para o termo de ordem n (n-ésimo termo) de uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ de razão r, que é $a_n = a_1 + (n-1)r$.

Mais geralmente, se $1 \le k \le n$, temos que $a_n = a_k + (n-k)r$.

Exercício: Encontre o 15º termo de uma progressão aritmética de razão $r = 5$ cujo 3º termo é 2.

Solução: Denotando por $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ a progressão aritmética, temos que $r = 5$ e $a_3 = 2$. Então, $a_{15} = a_3 + (15-3)r \Rightarrow a_{15} = 2 + 12 \times 5 = 62$.

Exercício: Determine o 2º termo da progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ sabendo que $a_8 = 10$ e $a_{20} = 46$.

Solução: Como $a_{20} = a_8 + (20-8)r$, temos que $46 = 10 + 12r \Rightarrow r = 3$. Então $a_8 = a_2 + (8-2)r \Rightarrow 10 = a_2 + 6 \times 3 \Rightarrow a_2 = -8$.

Exercício: O cometa Halley pode ser visto da Terra, a olho nu, a cada 76 anos, e a última vez que isso aconteceu foi em 1986.

1. Quando será a próxima vez que isso acontecerá?
2. Neste milênio, em quantos anos diferentes isso acontecerá?
3. Neste milênio, em que ano isso acontecerá pela última vez?

Solução: Como somente a cada 76 anos o cometa Halley pode ser visto da Terra, a olho nu, os anos em que isso acontece formam uma progressão aritmética de razão $r = 76$. Então, a partir deste século, os anos em que isso ocorrerá formam a progressão aritmética $(2062, 2138, 2214, \ldots)$. Portanto:

1. A próxima vez que isso ocorrerá será no ano de 2062.
2. Para saber em quantos anos isso ocorrerá, neste milênio, devemos determinar quantos termos da progressão aritmética $(2062, 2138, 2214, \ldots)$ são menores do que 3000. Mas, como $a_n = a_1 + (n-1)r$, devemos determinar o maior valor de n de modo que $2062 + 76(n-1) < 3000$. Como n é um número natural, temos que $2062 + 76(n-1) < 3000 \Rightarrow 76(n-1) < 938 \Rightarrow n - 1 \le 12 \Rightarrow n \le 13$. Logo, neste milênio o cometa Halley poderá ser visto da Terra, a olho nu, em 13 anos diferentes.
3. Neste milênio, o cometa Halley poderá ser visto da Terra, a olho nu, pela última vez, no ano de 2974, pois $2062 + 12 \times 76 = 2974$.

Ampliando o seu Conhecimento

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função afim, ou seja, existem constantes reais a e b tais que $f(x)=ax+b, \forall x\in\mathbb{R}$. A sequência de números reais $(f(1), f(2), f(3),\ldots)$ é uma progressão aritmética. De fato, se $n\geq 2$, temos que $f(n)-f(n-1)=(an+b)-[a(n-1)+b]=a$. Daí concluímos que essa sequência é uma progressão aritmética de razão $r=a$.

Reciprocamente, se $(a_1,a_2,a_3,\ldots)$ é uma progressão aritmética de razão r então existe uma função afim $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $a_1=f(1), a_2=f(2), a_3=f(3),\ldots$. De fato, basta tomar $f(x)=rx+a_1-r$.

3.11.1.2 Fórmula da soma dos n primeiros termos

Consideremos uma progressão aritmética $(a_1,a_2,a_3,\ldots)$ e denotemos por S_n a soma dos n primeiros termos desta progressão, ou seja, $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$.
Queremos estabelecer uma fórmula para calcular S_n. Para tanto, precisamos do seguinte resultado, que pode ser verificado usando a fórmula do n-ésimo termo.

Proposição: Se $(a_1,a_2,a_3,\ldots)$ é uma progressão aritmética então $a_1+a_n=a_{k+1}+a_{n-k}$, $\forall k,\quad 1\leq k\leq n-1$.

Daí segue que $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\cdots=a_n+a_1$.

Voltemos à soma S_n. Podemos escrever

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n$$
$$S_n=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1$$

Somando membro a membro estas duas expressões obtemos $S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\cdots+(a_n+a_1)$.
Pela proposição anterior, cada soma entre parênteses é igual a a_1+a_n. Logo, como há n destas somas, temos que $2S_n=n(a_1+a_n)$.
Daí segue que $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$.

Exercício: Encontre a soma dos números ímpares entre 100 e 500.

Solução: Os números ímpares entre 100 e 500 formam um progressão aritmética de razão 2, em que o primeiro termo é 101 e o último é 499. Para sabermos quantos termos tem essa progressão aritmética, podemos usar a fórmula do n-ésimo termo, pois $a_n=a_1+(n-1)r \Rightarrow 499=101+(n-1)\times 2 \Rightarrow 499=101+2n-2 \Rightarrow n=200$. Então queremos encontrar a soma dos 200 números ímpares entre 100 e 500, que é $S_{200}=\dfrac{200(a_1+a_{200})}{2} \Rightarrow S_{200}=\dfrac{200(101+499)}{2}=60.000$.

Exercício: Calcule a soma dos inteiros múltiplos de 6 compreendidos entre 200 e 800.

Solução: Os inteiros múltiplos de 6 compreendidos entre 200 e 800 formam uma progressão aritmética de razão $r=6$. Como $200=33\times 6+2$, segue que o primeiro termo dessa progressão é $a_1=204$. Observando que

$800 = 133 \times 6 + 2$, concluímos que o último termo dessa progressão é $a_n = 798$. Usando a fórmula $a_n = a_1 + (n-1)r$, encontramos $n = 100$. Então, a soma procurada é

$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}) \times 100}{2} = \frac{(204 + 798) \times 100}{2} = 50.100.$$

3.11.2 Progressões geométricas

Uma sequência de números reais $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ é chamada uma progressão geométrica se cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por uma mesma constante. Essa constante é chamada razão da progressão geométrica e vamos denotá-la por q.

Em símbolos, uma progressão geométrica de razão q é uma sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ tal que $a_k = qa_{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots$.

Uma progressão geométrica é dita finita (respectivamente infinita) se a quantidade de seus termos é finita (respectivamente infinita).

Exemplo: A sequência $(1, -2, 4, -8, 16, -32, 64)$ é uma progressão geométrica finita de razão $q = -2$, enquanto $(1, 3, 9, 27, \ldots)$ é uma progressão geométrica infinita de razão 3.

Considere uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ de razão q. Então:

1. Se $q > 1$ e $a_1 > 0$, então $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ é uma sequência crescente, isto é, $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$
2. Se $q = 1$ então $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ é uma sequência constante, isto é, $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots$.
3. Se $0 < q < 1$ e $a_1 > 0$, então $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ é uma sequência decrescente, isto é, $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$.
4. Se $q > 0$ então todos os termos da sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ têm sinais iguais.
5. Se $q < 0$ então $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ é uma sequência alternada, isto é, os termos de ordem par têm sinais contrários aos dos termos de ordem ímpar.
6. Se $q = 0$ então todos os termos, a partir do segundo, são nulos.

3.11.2.1 Fórmula do termo de ordem n

Conhecendo-se a razão q e o primeiro termo de uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ podemos determiná-la completamente, pois

$$\begin{aligned} a_2 &= qa_1 \\ a_3 &= qa_2 = q^2 a_1 \\ a_4 &= qa_3 = q^3 a_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Daí obtém-se a fórmula para o n-ésimo termo:

$$a_n = q^{n-1} a_1, \quad \forall n \geq 1.$$

Mais geralmente, temos que

$$a_n = q^{n-k} a_k, \quad \forall n \geq k \geq 1.$$

Exercício: Determine a progressão geométrica de razão $q = 2$ cujo 5º termo é -1.

Solução: Substituindo os valores dados na fórmula $a_5 = q^4 a_1$ temos $-1 = 2^4 a_1 \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{16}$. Então a progressão geométrica é $(-\frac{1}{16}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, \ldots)$.

Exercício: Determine uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ sabendo que $a_3 = 16$ e $a_7 = 81$.

Solução: Considerando a fórmula $a_n = q^{n-k}a_k$, temos que $a_7 = q^{7-3}a_3 \Rightarrow 81 = 16q^4 \Rightarrow q^4 = \frac{81}{16} \Rightarrow q = \pm\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \pm\frac{3}{2}$.

Como encontramos dois valores para q, existem duas progressões satisfazendo às condições dadas.

Usamos novamente a fórmula $a_n = q^{n-1}a_1$ para encontrar a_1.

$$a_3 = q^2 a_1 \Rightarrow 16 = \left(\pm\frac{3}{2}\right)^2 a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{64}{9}.$$

As progressões satisfazendo as condições dadas são $(\frac{64}{9}, \frac{32}{3}, 16, 24, \ldots)$ e $(\frac{64}{9}, -\frac{32}{3}, 16, -24, \ldots)$.

Exercício: Um automóvel foi comprado por R$ 50.000,00. Sabendo-se que este automóvel sofre uma desvalorização de 10% ao ano, qual o seu valor de mercado 10 anos após a compra?

Solução: Como a desvalorização é de 10% ao ano, a cada ano, após a compra, o valor do automóvel é 90% do valor do ano anterior. Então os valores de mercado desse automóvel formam uma progressão geométrica cujo primeiro termo é 50.000 e a razão é $q = 0{,}9$.

Em casos como este, em que o primeiro termo da progressão geométrica corresponde ao ano zero, que é o ano da compra, é conveniente usar a notação $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ e, com essa notação, temos que $a_n = q^n a_0$. Devemos determinar o valor de a_{10}.

$$a_{10} = q^{10}a_0 \Rightarrow a_{10} = 0{,}9^{10} \times 50000 = 17433{,}92.$$

Portanto, o valor de mercado deste automóvel, 10 anos após a compra, é, aproximadamente, R$ 17.434,00.

3.11.2.2 Fórmula da soma dos n primeiros termos

Consideremos uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ de razão $q \neq 1$ e denotemos por S_n a soma dos n primeiros termos dessa progressão, ou seja, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$.

Multiplicando ambos os membros dessa equação por $-q$ obtemos $-qS_n = -qa_1 - qa_2 - \cdots - qa_{n-1} - qa_n = -a_2 - a_3 - \cdots - a_n - qa_n$.

Somando membro a membro as equações

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$-qS_n = -a_2 - a_3 - \cdots - a_n - qa_n$$

obtemos $S_n - qS_n = a_1 - qa_n \Rightarrow (1-q)S_n = a_1 - q^n a_1 \Rightarrow S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q}$.

Portanto,

$$S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Exercício: Calcule a soma dos 10 primeiros termos da progressão geométrica cujo primeiro termo é 512 e a razão é $q = \frac{1}{2}$.

Solução: Substituindo estes dados na fórmula, obtemos:

$$S_{10} = a_1\frac{1-q^{10}}{1-q} = 512 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}} = 1023.$$

3.11.2.3 Soma dos termos de uma progressão geométrica infinita

Se q é um número real tal que $0<|q|<1$ e $n \in \mathbb{N}$ então os valores de q^n se aproximam cada vez mais de zero à medida que os valores de n aumentam, de modo que, para valores muito grandes de n, o valor de q^n é aproximadamente igual a zero. Isto também pode ser dito assim: "q^n tende a zero quando n tende a infinito" ou, em símbolos, $q^n \to 0$ quando $n \to \infty$.

Consideremos uma progressão geométrica infinita $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ de razão q, com $0<|q|<1$. Já vimos que a soma dos n primeiros termos dessa progressão é dada por $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$. Como $q^n \to 0$ quando $n \to \infty$, temos que $S_n \to \frac{a_1}{1-q}$ quando $n \to \infty$. Por isso, denotando por S a soma de todos os termos dessa progressão, ou seja, $S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, dizemos que

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

Exercício: Calcule a soma de todos os termos da progressão geométrica $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots)$.

Solução: Temos uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $a_1 = 1$ e a razão é $q = \frac{1}{2}$. Então a soma dos seus termos é $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$, que é dada por

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Exercício: Encontre a geratriz da dízima periódica $0,333\ldots$

Solução: Temos que $0,333\ldots = 0,3 + 0,03 + 0,003 + \cdots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots$

Como $(\frac{3}{10}, \frac{3}{100}, \frac{3}{1000}, \ldots)$ é uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $\frac{3}{10}$ e a razão $\frac{1}{10}$, segue que

$$0,333\ldots = \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{3}.$$

Então $\frac{1}{3}$ é a geratriz da dízima periódica $0,333\ldots$.

3.12 Matemática financeira

3.12.1 Porcentagem

No nosso dia-a-dia fazemos uso freqüente de porcentagem, seja lendo jornais, revistas, ouvindo rádio, vendo televisão e até mesmo em conversas nos deparamos com índices percentuais. Daí, concluímos que é importante sabermos lidar com esses índices e a forma como eles são apresentados. Na prática, cálculos envolvendo índices percentuais resumem-se a operações com números decimais, pois, para efeito de cálculos, um percentual $r\%$ é representado por $\frac{r}{100}$, que é a forma decimal para representar esse percentual.

Exemplo: Para calcularmos 20% de 150, efetuamos as operações $\frac{20}{100} \times 150 = 0,2 \times 150 = 30$. Portanto, 20% de 150 é igual a 30. Este valor também pode ser obtido por meio de uma regra de três simples

$$\left.\begin{array}{l} 100 \to 20 \\ 150 \to x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{20 \times 150}{100} = 30.$$

Podemos observar neste exemplo que o uso da forma decimal do índice percentual simplifica o cálculo da porcentagem. Mais adiante, no cálculo de juros, isso se tornará muito mais evidente.

Exemplo: Se uma determinada mercadoria está à venda por um preço X e há um desconto de 10% para pagamento à vista, então o valor V, a ser pago à vista, corresponde a 90% de X. Vejamos como calcular esse valor.
Se o desconto é de 10% então V deve ser igual a x menos 10% de x. Expressando isso em números, temos que

$$V = x - \tfrac{10}{100}x = x - 0,1x = 0,9x.$$

Portanto, para calcular 90% de X basta multiplicar X por $0,9$, pois 90% de X é equivalente a $\tfrac{90}{100}x = 0,9x$. De um modo geral, para calcular $r\%$ de X basta multiplicar X por $\tfrac{r}{100}$.

A seguir mostramos os cálculos de algumas porcentagens usando a forma decimal do percentual.

Calcular	Operação
30% de 80	$0,3\times 80 = 24$
5% de 320	$0,05\times 320 = 16$
0,3% de 800	$0,003\times 800 = 2,4$
102,5% de 50	$1,025\times 50 = 51,25$
200% de 150	$2\times 150 = 300$
8% de 0,5	$0,08\times 0,5 = 0,04$

Exercício: O preço de certa mercadoria foi reajustado em 15% e, em seguida, teve um desconto de 20%. Calcule o percentual desse último preço em relação ao inicial.

Solução: Vamos supor que o preço inicial é x. Então, com o reajuste de 15% o preço passou a ser x mais 15% de x, que equivale a $x + 0,15x = 1,15x$. Aplicar um desconto de 20% sobre esse preço equivale a multiplicá-lo por 0,80. Então, com o desconto, o preço passou a ser $0,80(1,15x) = 0,80\times 1,15x = 0,92x$. Portanto, com o desconto, o preço passou a ser 92% do inicial.

Observação. Do exercício anterior podemos concluir que:

1. Ao contrário do que muitos pensam, um reajuste de 15% seguido de um desconto de 20% **não equivale a um desconto de 5%**.
2. O percentual do preço final em relação ao inicial não depende do preço inicial x. Em situações como essa, poderíamos arbitrar um valor para x, por exemplo $x = 100$, e efetuar as mesmas operações.

Exercício: O preço de certo produto em um supermercado sofreu um reajuste de 10% e, em seguida, outro de 20%. Calcule o percentual de um único reajuste que equivale a esses dois.

Solução: Neste caso o percentual que procuramos não depende do preço inicial do produto. Então podemos supor que esse preço era R$ 100,00. Com o reajuste de 10% o preço passou a ser R$ 110,00 e, com o segundo, R$ 132,00, pois 20% de 110 é igual a 22. Portanto, esses dois reajustes equivalem a um único reajuste de 32%.
Para entender melhor porque isso acontece, basta observar que um reajuste de 10% seguido de outro de 20% equivale a multiplicar o preço inicial pelo fator $1,2\times 1,1 = 1,32$.

Exercício: Pedro teve um aumento de R$ 270,00 no seu salário, que era de R$ 1.800,00. Calcule o percentual desse aumento.

Solução: Problemas desse tipo podem ser resolvidos por meio de regra de três simples ou usando a forma decimal de percentual. Vejamos as duas soluções.

$$\left.\begin{array}{l}1800 \rightarrow 100\% \\ 270 \ \rightarrow x\%\end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{100 \times 270}{1800} = 15.$$

Agora vejamos uma solução usando a forma decimal. Sendo o aumento de R$ 270,00 sobre um salário de R$ 1.800,00, o percentual, na forma decimal, é dado por $\frac{270}{1800} = 0,15 = \frac{15}{100}$.

Portanto, Pedro teve 15% de aumento no seu salário. Para entender porque o percentual é encontrado dessa maneira, basta observar que se x é o percentual, na forma decimal, então $1800x = 270$. Logo, $x = \frac{270}{1800}$.

Exercício: O salário de Maria teve um reajuste de 15% e passou a ser de R$ 2.875,00. Qual era o salário dela antes do reajuste?

Solução: Supondo que o salário antes do reajuste era x então com o reajuste de 15% passou a ser $1,15x$. Assim, temos que $1,15x = 2875$ e, daí, concluímos que $x = \frac{2875}{1,15} = 2500$. Portanto, o salário antes do reajuste era de R$ 2.500,00.

Exercício: Em 1950, a população de certa cidade era de 25.000 habitantes, e atualmente é de 113.250 habitantes. Qual foi o percentual de crescimento da população dessa cidade nesse período?

Solução: Denotando o percentual de crescimento por x, na forma decimal, temos que $25000(1+x) = 113250$. Então $1 + x = \frac{113250}{25000} = 4,53$. Daí, $x = 3,53 = \frac{353}{100}$. Portanto, a população cresceu 353%.

3.12.2 Juros simples

Quando se faz uma aplicação financeira, a quantia aplicada, P, é chamada principal ou capital inicial e, ao fim de um período de capitalização, o capital acrescido dos juros é o montante, M. Por exemplo, se uma aplicação de R$ 1.000,00 rendeu 10% de juros então P = R$ 1.000,00 e M = R$ 1.100,00, pois

M = P+0,10P = (1+0,10)P = 1,1P = R$ 1.100,00.

Os juros que incidem apenas sobre o principal são chamados de juros **simples**.

Exemplo: Suponha que uma dívida de R$ 1.000,00 foi contraída no dia 01/02/2007 a uma taxa mensal de juros simples de 10%. Qual era o valor desta dívida em 01/07/2007?

Resposta: A evolução dessa dívida no período de 01/02/2007 a 01/07/2007 pode ser observada na seguinte tabela.

Data	Juros	Dívida
01/02/2007	--	1.000,00
01/03/2007	100,00	1.100,00
01/04/2007	100,00	1.200,00
01/05/2007	100,00	1.300,00
01/06/2007	100,00	1.400,00
01/07/2007	100,00	1.500,00

Portanto, o valor da dívida em 01/07/2007 era de R$ 1.500,00.

Observe que (1000, 1100,…,1500) é uma progressão aritmética de razão 100. Isso não acontece por acaso. Na verdade, se uma quantia P_0 é aplicada a uma taxa de juros simples mensal i (expressa em forma decimal) e se denotamos por P_k o montante após k meses, então $(P_0, P_1, P_2, \ldots)$ é uma PA de razão $r = iP_0$. Logo, o montante após n meses é $P_n = P_0 + niP_0 = (1+ni)P_0$.

3.12.3 Juros compostos

Na prática, dificilmente ocorre aplicação de juros simples porque, em geral, os juros são calculados sobre o montante do período que antecede a capitalização. Neste caso diz-se que os juros são **compostos**.

Exemplo: Suponha que uma quantia de R$ 1.000,00 foi aplicada no dia 01/02/2007 a uma taxa mensal de juros compostos de 10%. Sabendo que os juros são capitalizados mensalmente, qual era o montante dessa aplicação em 01/07/2007?

Resposta: A evolução do montante dessa aplicação pode ser observada na tabela seguinte.

Data	Juros	Dívida
01/02/2007	--	1.000,00
01/03/2007	100,00	1.100,00
01/04/2007	110,00	1.210,00
01/05/2007	121,00	1.331,00
01/06/2007	133,10	1.464,10
01/07/2007	146,41	1.610,51

Neste exemplo os juros são calculados e somados ao capital, ou seja, capitalizados mensalmente. Quando isto ocorre diz-se que os períodos de juros ou períodos de tempo, ou períodos de capitalização são mensais. Mas podem ser considerados outros períodos de capitalização de juros, por exemplo, diários, quinzenais, bimestrais, trimestrais, semestrais, etc. No cálculo do montante é muito importante observar os períodos de juros. Veja que no exemplo acima os montantes são calculados mensalmente e seus valores estão em progressão geométrica de razão $q = 1{,}1$. Este exemplo é apenas uma situação particular do caso mais geral.

Se uma quantia C_0 é aplicada a uma taxa de juros compostos i (expressa em forma decimal) e C_0, C_1, C_2, etc. são os valores do capital calculados, respectivamente, no primeiro período de juros, no segundo, no terceiro, etc. então $(C_0, C_1, C_2, \ldots)$ é uma progressão geométrica de razão $q = 1 + i$. Então no final do n-ésimo período de juros o montante é $C_n = (1+i)^n C_0$.

> Na fórmula acima, n é o número de períodos de juros e i é a taxa usada em cada período. Por exemplo, considere um capital aplicado a uma taxa de 12% ao ano durante dois anos. Se os juros são calculados trimestralmente, devemos considerar a taxa trimestral que é 3%, ou seja, $i = 0{,}03$. Como dois anos correspondem a oito trimestres, devemos tomar $n = 8$.

Exercício: Maria investiu R$ 1.000,00 a juros de 3% ao mês. Qual o montante desse investimento seis meses depois?

Solução: Neste caso temos $C_0 = 1000$, $i = 0{,}03$ e $n = 6$. Então o montante é $C_6 = (1+0{,}03)^6 C_0 = 1{,}03^6 \times 1000 = 1194{,}05$.
Portanto, após seis meses o capital de R$ 1.000,00 se transformou em R$ 1.194,05.

3.12.4 Valor atual e Valor futuro

Também se diz que o capital inicial é o **valor atual** ou **valor presente**, que denotamos por A, e que o montante é o **valor futuro**, que denotamos por F. Então, com essa notação, temos $F = (1+i)^n A \quad ou \quad A = \dfrac{F}{(1+i)^n}$.

> Para encontrar o valor futuro basta multiplicar o valor atual por $(1+i)^n$, e para encontrar o valor atual basta dividir o valor futuro por $(1+i)^n$.

O valor de uma quantia depende da época na qual ela é considerada, ou seja, depende do seu valor atual ou futuro, conforme seja o caso. Por exemplo, a quantia de R$ 1.000,00 hoje não é a mesma coisa que eram R$

1.000,00 há um ano ou que serão daqui a um ano. Daí a importância da fórmula que relaciona os valores atual e futuro de uma quantia. Ela é útil, por exemplo, quando temos que tomar a decisão de fazer o pagamento de uma compra, à vista ou parcelado.

Exercício: Maria fez uma compra de R$ 800,00 em uma loja que oferece as seguintes opções de pagamento: (i) à vista, com 10% de desconto; (ii) em duas parcelas mensais de R$ 400,00, sendo que a primeira deve ser paga no ato da compra. Calcule a taxa mensal dos juros embutidos na venda a prazo.

Solução: Vamos comparar, numa mesma época, os valores pagos nas duas opções de pagamento e vamos chamar de época 0 e 1, respectivamente, a data da compra e a do pagamento da segunda parcela. Para facilitar a compreensão, vamos dispor os dados do problema na tabela a seguir.

Opção de pagamento	Época do pagamento	
	0	1
À vista	720	--
Parcelado	400	400

Podemos usar qualquer uma das duas épocas para comparar os valores das quantias pagas em cada uma das opções de pagamento. Para tornar os cálculos mais simples, vamos usar a época 0, ou seja, a data da compra. Então devemos calcular o valor da segunda parcela na época 0 e igualar a soma dos valores atuais das parcelas (na época 0) ao valor do pagamento à vista.

Denotando por i a taxa mensal de juros, temos que, na época 0, o valor pago na segunda parcela vale $\frac{400}{1+i}$. Para encontrar o valor de i, resolvemos a equação $400+\frac{400}{1+i}=720$, e encontramos $i=0,25$.
Portanto, a taxa de juros embutidos na venda a prazo é de 25% ao mês.

Exercício: Renata fez uma compra de R$ 100,00, que foram pagos em duas parcelas mensais de R$ 57,62, com vencimento da primeira um mês após a compra. Calcule a taxa mensal dos juros nesse financiamento.

Solução: Vamos comparar, numa mesma época, os valores pagos nas duas opções de pagamento e vamos chamar de época 0, 1 e 2, respectivamente, a data da compra, a do pagamento da primeira parcela, e a da segunda. Para facilitar a compreensão, vamos dispor os dados do problema na tabela a seguir.

Opção de pagamento	Época do pagamento		
	0	1	2
À vista	100	--	--
Parcelado	--	57,62	57,62

Podemos usar qualquer uma das três épocas para comparar os valores das quantias pagas em cada uma das opções de pagamento. Vamos usar a época 0, ou seja, a data da compra. Então devemos calcular o valor atual de cada parcela (valor na época 0) e igualar a soma V desses valores ao valor do pagamento à vista.
Denotando por i a taxa mensal de juros, temos que, na época 0, os valores pagos na primeira parcela e na segunda valem, respectivamente, $\frac{57,62}{1+i}$ e $\frac{57,62}{(1+i)^2}$. Para encontrar o valor de i, resolvemos a equação $\frac{57,62}{1+i}+\frac{57,62}{(1+i)^2}=100$, e encontramos $i\approx 0,10$.
Portanto, a taxa de juros foi de 10% ao mês, aproximadamente.

Exercício: Carlos comprou um computador por R$ 1.500,00, que podem ser pagos à vista ou em 6 parcelas de R$ 280,00, devendo a primeira ser paga um mês após a data da compra. Qual a melhor opção de pagamento, se o dinheiro de Carlos está aplicado a juros de 2% ao mês?

Solução: Vamos comparar, numa mesma época, os valores pagos nas duas opções, e vamos chamar de época 0,1, 2, etc. a data da compra, a data do pagamento da primeira parcela, a da segunda, etc. Para facilitar a compreensão, vamos dispor os dados do problema na tabela a seguir.

Opção de pagamento	Época do pagamento						
	0	1	2	3	4	5	6
À vista	1.500	--	--	--	--	--	--
Parcelado	--	280	280	280	280	280	280

Podemos usar qualquer uma das sete épocas para comparar os valores das quantias pagas em cada uma das opções de pagamento. Vamos usar a época 0, ou seja, a data da compra. Então devemos calcular o valor atual de cada parcela e comparar a soma V desses valores encontrados, com o valor do pagamento à vista. Se:

i) V > 1500, é melhor pagar à vista.

ii) V = 1500, é indiferente fazer o pagamento à vista ou parcelado.

iii) V < 1500, é melhor fazer o pagamento parcelado.

Aqui nós devemos considerar a taxa de juros de 2%, que é a taxa da aplicação do dinheiro de Carlos. Para obter o valor atual de uma parcela, na época 0, basta dividir o seu valor, que é 280, por $(1+0{,}02)^k$, onde k é o número de meses passados da data da compra até a do pagamento dessa parcela. Então

$$V = \frac{280}{1{,}02} + \frac{280}{1{,}02^2} + \frac{280}{1{,}02^3} + \frac{280}{1{,}02^4} + \frac{280}{1{,}02^5} + \frac{280}{1{,}02^6}.$$

Observe que as parcelas da soma do lado direito são os termos de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $\frac{280}{1{,}02}$ e a razão é $q = \frac{1}{1{,}02}$. Então, substituindo esses valores na fórmula da soma dos termos de uma de uma progressão geométrica, obtemos

$$V = \frac{280}{1{,}02} \times \frac{1-\left(\frac{1}{1{,}02}\right)^6}{1-\frac{1}{1{,}02}} = 1.568{,}40.$$

Daí, como V > 1.500, se conclui que é melhor pagar à vista.

3.12.5 Taxa efetiva

Se a taxa de juros relativamente a um determinado período de tempo é i, a taxa equivalente a n períodos de tempo é I, onde $1+I=(1+i)^n$. Essa taxa I também é chamada de *taxa efetiva*.

Exemplo: Uma taxa mensal de 4% equivale a um taxa anual efetiva de, aproximadamente, 60%.
De fato, neste caso, como o período de tempo é mensal e um ano tem 12 meses, fazemos $i=0{,}04$ e $n=12$ e obtemos

$$1+I=(1+0{,}04)^{12}=1{,}04^{12}\approx 1{,}601 \Rightarrow I \approx 0{,}601 \Rightarrow I \approx 60{,}1\%.$$

Exemplo: Para encontrar a taxa anual equivalente a uma taxa bimestral de 10%, consideramos $i=0{,}1$ e $n=6$. Assim, obtemos

$$1+I=(1+0{,}1)^6=1{,}1^6\approx 1{,}7716 \Rightarrow I\approx 0{,}7716 \Rightarrow I \approx 77{,}16\%.$$

Portanto, uma taxa bimestral de 10% equivale a uma taxa anual efetiva de, aproximadamente, 77,16%.

Exercício: Um empréstimo de R$ 30.000,00 deve ser pago em 48 parcelas mensais iguais com vencimento da primeira um mês após a assinatura do contrato. Sabendo que a taxa mensal de juros é 1,5%, calcule:

a) A taxa anual efetiva.

b) O valor de cada parcela.

Solução:

a) $1+I=(1+0{,}015)^{12}=1{,}015^{12}\approx 1{,}1956 \Rightarrow I \approx 0{,}1956 \Rightarrow I \approx 19{,}56\%$

b) Vamos calcular o valor atual de cada parcela na época da concessão do empréstimo (assinatura do contrato) e igualar a soma desses valores ao valor do empréstimo concedido. Denotando por p o valor que será pago em cada parcela, como o pagamento da primeira parcela ocorre um mês após a assinatura do contrato, temos que os valores atuais dessas parcelas são $\frac{p}{1+0,015}, \frac{p}{(1+0,015)^2}, \ldots, \frac{p}{(1+0,015)^{48}}$. Então devemos ter

$$30000 = \frac{p}{1,015} + \frac{p}{1,015^2} + \cdots + \frac{p}{1,015^{48}}.$$

A soma do lado direito é a soma dos 48 primeiros termos da progressão geométrica cujo primeiro termo é $a_1 = \frac{p}{1,015}$ e a razão é $q = \frac{1}{1,015}$.

Então,

$$3000 = \frac{p}{1,015} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{1,015}\right)^{48}}{1 - \frac{1}{1,015}} = \frac{(1,015^{48} - 1)p}{0,015 \times 1,015^{48}} \Rightarrow p = \frac{30000 \times 0,015 \times 1,015^{48}}{1,015^{48} - 1} \approx 881,25.$$

Portanto, o valor de cada parcela é R$ 881,25.

Dialogando e Construindo Conhecimento

Na plataforma *Moodle* você vai encontrar vários exercícios sobre matemática financeira.

4. Avaliando o que foi construído

Os assuntos abordados nesta unidade são apenas uma parte do conteúdo de Aritmética do Ensino Fundamental e do Médio. Não seria possível apresentar aqui todo esse conteúdo. Não foi fácil selecionar o que deveria constar aqui em detrimento de outros, pois deixamos de abordar tópicos tão importantes quanto os que aqui estão. Mas acreditamos que os conhecimentos adquiridos neste curso ajudarão o aluno a entender os tópicos que omitimos e que poderiam constar aqui. Aliás, na plataforma *moodle* encontraremos alguns exercícios sobre tópicos não mencionados aqui, mas que podem ser resolvidos por meio dos que mencionamos.

Na abordagem dos tópicos apresentamos apenas o mínimo necessário para entendê-los, ou seja, as definições, os principais resultados e alguns exemplos ilustrativos. Agimos dessa maneira porque pretendemos que este texto seja apenas um guia de estudos, uma vez que todo o seu conteúdo será detalhado por meio de exercícios
ou tarefas na plataforma *moodle*.

5. Referências

[1] **SANTOS**, José. P. de O., *Introdução à Teoria dos Números*. Coleção matemática Universitária, IMPA, 1998.
[2] **HEFEZ**, Abramo, *Elementos de Aritmética*. Sociedade Brasileira de Matemática (Textos Universitários), 2004.
[3] **LIMA**, Elon L., **CARVALHO**, Paulo C. P., **WAGNER**, Eduardo., **MORGADO**, Augusto C., *A Matemática do Ensino Médio*, Vol. 1, 2 e 3. Sociedade Brasileira de Matemática, 1998.
[4] **MORAIS FILHO**, Daniel C., *Um convite à Matemática*, EDUFCG/EDUEPB, 2006.
[5] **IMENES**, Luiz M. P., **JACUBOVIC**, José, *Considerações sobre o Ensino de Regra de Três Composta*, Revista do professor de Matemática, n° 2, Sociedade Brasileira de Matemática.
[6] **ÁVILA**, Geraldo, *Razões, proporções e regra de três*, Revista do professor de Matemática, n° 8, Sociedade Brasileira de Matemática.

Unidade II Geometria Plana

1. Situando a Temática

Nesta unidade introduzimos conceitos geométricos importantes tais como semelhança de triângulos e cálculo de áreas. Essas noções são indispensáveis para o estudo de outros temas no âmbito da Matemática como, por exemplo, Trigonometria, Geometria Analítica e também participam de outras disciplinas como Física, Química e Estatística.

2. Problematizando a Temática

Estima-se que o estudo da Geometria tenha sido iniciado há uns 4.000 anos com os babilônios e egípcios, provavelmente motivados por necessidades de natureza prática tais como medidas de terrenos e construções de moradias. Foram os gregos, por volta do século VI a.C., que iniciaram um estudo organizado em definições e demonstrações de proposições. Por volta do século III a.C. o trabalho mais importante era "Elementos", escrito por Euclides, que pretendia conter tudo de Matemática que era conhecido na época.

Além do cálculo de comprimentos e áreas no dia-a-dia, a aplicação do conhecimento geométrico permitiu que se soubesse há vários séculos como calcular também o raio da terra e distâncias astronômicas tais como a distância da Terra à Lua.

3. Conhecendo a Temática

3.1 Introdução

3.1.1 Ponto, Reta e Plano

A Geometria é o estudo dos objetos geométricos e de suas propriedades. Os objetos são definidos e suas propriedades, em geral, são demonstradas. Mas, nem tudo pode ser definido ou demonstrado. Os objetos que não são definidos são chamados conceitos primitivos e as propriedades que não podem ser demonstradas são chamadas postulados.

Os conceitos primitivos da Geometria são ponto, reta e plano. Tais objetos se situam no universo de nossas mentes, e para aproximá-los dos nossos sentidos é que os manipulamos através de representações ou aproximações. Um exemplo de um ponto é aquilo que mais se aproxima de uma bolinha muito pequena impressa no papel. Uma linha esticada aproxima-se da idéia de uma reta e uma folha de papel esticada, sem dobras, se aproxima da idéia de plano. Um ponto costuma ser denotado por uma letra latina maiúscula A, B, C, ..., uma reta é denotada por letras latinas minúsculas r, s, t, ... e um plano por letras gregas minúsculas $\alpha, \beta, \gamma, ...$

Os objetos geométricos, em geral, podem ser considerados como conjuntos de pontos. Quando dizemos que "um objeto A passa pelo objeto B" isto significa que "B pertence ao conjunto A" ou que "B é um subconjunto de A". Quando A e B possuem pontos em comum, dizemos que os objetos A e B se interceptam.

São exemplos de postulados da Geometria os seguintes:

- Em uma reta, bem como fora dela, há infinitos pontos.
- Em um plano há infinitos pontos.
- Por dois pontos distintos passa uma única reta.
- Por três pontos que não pertençam a uma mesma reta passa um único plano.
- Se dois pontos distintos pertencem a um plano, então a reta que passa por esses dois pontos também pertence a esse plano.

3.1.2 Objetos congruentes

Dois objetos são considerados congruentes se é possível mover um deles de modo a haver coincidência com o outro, ou seja, se eles forem superponíveis. Assim, dois objetos congruentes têm obrigatoriamente o mesmo tamanho e a mesma forma. Denotamos "A congruente a B" por $A \equiv B$.

3.1.3 Posições relativas de retas

Duas retas r e s serão chamadas coincidentes quando forem o mesmo conjunto de pontos, o que será denotado por $r = s$; serão chamadas concorrentes quando possuírem um único ponto P em comum $(r \cap s = \{P\})$; serão chamadas paralelas quando pertencerem a um mesmo plano e não tiverem ponto em comum. Veja a Figura 3.1.

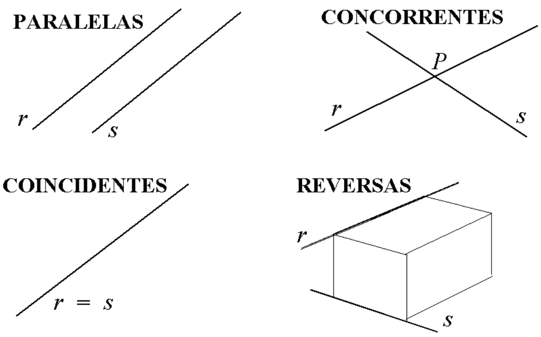


Figura 3.1: Posição relativa de duas retas

3.1.4 Segmentos, Semi-retas e Ângulos

Dados dois pontos A e B em uma reta r, o conjunto dos pontos de r que estão entre A e B, incluindo esses pontos, é chamado segmento de reta com extremidades A e B e é denotado por $\overline{AB}$. A relação estar entre dois pontos é considerada um conceito primitivo e, portanto, não é definida.

A medida ou comprimento de um segmento $\overline{AB}$, denotada por $m(\overline{AB})$, é um número real não-negativo obtido pela comparação com um segmento considerado unitário previamente escolhido. A medida de um segmento tem as seguintes propriedades:

- Se as extremidades de um segmento coincidem, então dizemos que ele é um segmento nulo e que sua medida é igual a zero.
- Se dois segmentos são congruentes, então eles devem ter a mesma medida.
- Se um ponto C pertence ao segmento $\overline{AB}$ então devemos ter $m(\overline{AB}) = m(\overline{AC}) + m(\overline{CB})$.

Dados dois pontos A e B, a distância entre eles é a medida do segmento $\overline{AB}$.

Seja r uma reta que contenha dois pontos A e B. A união do segmento $\overline{AB}$ com todos os pontos X de r tais que B está entre A e X é chamado semi-reta AB, denotada por $\overrightarrow{AB}$. Neste caso, o ponto A é chamado de origem da semi-reta $\overrightarrow{AB}$.

A união de duas semi-retas de mesma origem $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ é denominada ângulo formado pelas semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ ou simplesmente ângulo Â. Sua notação é $\widehat{BAC}$ ou Â.

Escolhido um ângulo considerado unitário, a medida de um ângulo Â é um número real que compara a abertura de Â com a do ângulo unitário. Em qualquer reta, um ponto A pertencente a essa reta divide a reta em duas semi-retas de mesma origem. A união dessas duas semi-retas é chamada ângulo raso. Ao dividirmos um ângulo raso em 180 partes congruentes, obtemos 180 ângulos e dizemos que cada um mede 1 grau, denotado por $1°$. Escolhendo o ângulo de 1 grau como sendo o unitário, temos que um ângulo raso mede $180°$. Dados dois ângulos Â e $\hat{B}$, se a soma das medidas deles for igual µa de um ângulo raso, então diremos que Â e $\hat{B}$ são suplementares e que um é o suplemento do outro. Se um ângulo for congruente a seu suplemento, então diremos que esse ângulo é reto. Assim, a todo ângulo reto atribuímos uma medida de $90°$.

Dialogando e Construindo Conhecimento

Construa uma justificativa para esta última afirmação.

Duas retas são chamadas *perpendiculares* quando o ângulo entre elas for um ângulo reto.

Denominamos *ângulo agudo* àquele cuja medida é inferior à de um ângulo reto e ângulo obtuso quando sua medida for superior à de um ângulo reto e inferior à de um ângulo raso.

3.1.5 Polígonos

Dados um número natural $n \geq 3$ e uma sequência de pontos distintos, $A_1, A_2, \cdots, A_n$ de um plano em que três desses pontos consecutivos não pertencem a uma mesma reta, chama-se polígono à união dos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$. Os pontos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são chamados vértices do polígono e os segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \cdots, \overline{A_nA_1}$ são chamados lados. Os ângulos $\hat{A}_1 = \widehat{A_nA_1A_2}, \hat{A}_2 = \widehat{A_1A_2A_3}, \cdots, \hat{A}_n = \widehat{A_{n-1}A_nA_1}$ são os ângulos internos do polígono. A soma das medidas de todos os lados é chamada perímetro do polígono.

Em uma situação como a descrita acima, uma diagonal de um polígono é todo segmento $\overline{A_iA_j}$ que não seja um lado do polígono.

Se um polígono tem todos os lados e ângulos internos com mesma medida então ele é chamado regular.

Dialogando e Construindo Conhecimento

Procure descobrir que relação existe entre a quantidade de lados de um polígono e a sua quantidade de ângulos internos.

Um polígono costuma ser denominado de acordo com o número, n, de lados que possui. Veja alguns exemplos na tabela 3.1.

n	nome	n	nome
3	trilátero ou triângulo	9	eneágono
4	quadrilátero	10	decágono
5	pentágono	11	undecágono
6	hexágono	12	dodecágono
7	heptágono	15	pentadecágono
8	octógono	20	icoságono

Tabela 3.1: Denominações de um polígono com n lados

São definidos vários tipos de quadriláteros:

- Um retângulo é um quadrilátero que tem os quatro ângulos internos retos;
- Um quadrado é um retângulo que tem os quatro lados congruentes;
- Um losango é um quadrilátero que tem os quatro lados congruentes;
- Um trapézio é um quadrilátero que tem dois lados paralelos (chamados bases).

3.1.6 Triângulos

Um tipo de polígono do qual mais se conhecem propriedades é o triângulo. Quanto às medidas dos lados, os triângulos classificam-se em:

- equiláteros – quando têm os três lados congruentes;
- isósceles – quando têm dois lados congruentes;
- escalenos – quando não têm lados congruentes.

Quanto às medidas dos ângulos internos, os triângulos classificam-se em:

- retângulos – se têm um ângulo reto ;
- acutângulos – se têm os três ângulos agudos;
- obtusângulos – se têm um ângulo obtuso.

Em um triângulo retângulo, o maior lado é chamado hipotenusa e os outros dois lados (adjacentes ao ângulo reto) são chamados catetos. Um resultado muito famoso envolvendo este tipo de triângulo é conhecido como Teorema de Pitágoras e diz que “o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos” – será demonstrado na seção 3.2.

Propriedades:

- Em todo triângulo, cada lado é menor do que a soma dos outros dois lados;
- O maior lado de um triângulo situa-se de modo oposto ao maior ângulo;
- A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a $180°$.

Estas propriedades podem ser demonstradas, mas não faremos isso aqui. No entanto, vamos fornecer um procedimento para a verificação da soma dos ângulos internos. Basta observar a dobradura sugerida pela Figura 3.2. Considerando um triângulo qualquer de ângulos internos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ recortado de uma folha de papel, podemos dobrar os três vértices do triângulo até eles se tocarem. Daí, podemos observar que a soma das medidas dos três ângulos internos é igual a $180°$.

Podemos calcular a soma dos ângulos internos de um polígono não triangular fazendo uma decomposição desse polígono em vários triângulos. Se o polígono for regular com n lados, então ele pode ser decomposto em n − 2 triângulos e, como a soma dos ângulos internos de todos os triângulos é igual à soma dos ângulos internos do polígono, temos que a soma dos ângulos internos do polígono é igual a $(n-2).180°$. Veja a Figura 3.3 onde temos um hexágono (n = 6) decomposto em quatro, ou seja, n − 2 triângulos.

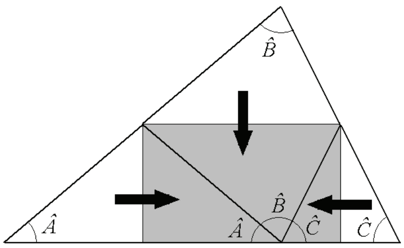


Figura 3.2: Soma dos ângulos internos de um triângulo

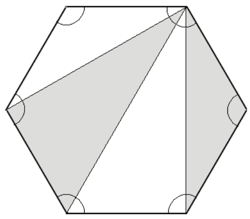


Figura 3.3: Polígono com n = 6 lados decomposto em (n − 2) triângulos

3.1.7 Círculo e circunferência

Dados um número real positivo r e um ponto O de um plano α, o conjunto de todos os pontos de α que estão a uma distância constante igual a r de O é chamado circunferência. O ponto O é chamado centro e a constante r é chamada raio da circunferência. O conjunto de todos os pontos de α cuja distância a O é menor do que ou igual a r é chamado círculo de centro O e raio r.

Um polígono é inscrito em uma circunferência se todos os seus vértices pertencem à circunferência. Se nenhum dos vértices do polígono pertence à circunferência, mas cada um dos seus lados intercepta-a em apenas um único ponto, então dizemos que o polígono é circunscrito à circunferência. Na Figura 3.4 temos um quadrado inscrito em e outro circunscrito a uma circunferência de raio r. Observe que no caso do quadrado inscrito, o lado do quadrado é igual a $r\sqrt{2}$ e no caso do quadrado circunscrito o lado do quadrado é igual a 2r.

Dialogando e Construindo Conhecimento

Procure descobrir por que a medida do lado de um quadrado inscrito em uma cicunferência de raio r é igual a $r\sqrt{2}$.

O comprimento de uma circunferência pode ser calculado em função do seu raio r. Para isso, podemos pensar no comprimento da circunferência como sendo uma situação limite do perímetro de um polígono regular de n lados inscrito na circunferência e considerando n o maior valor possível.

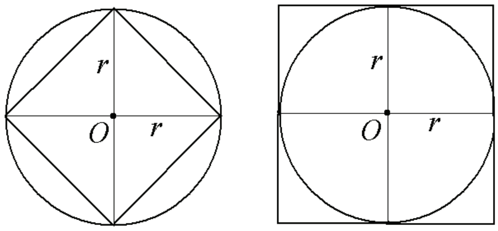


Figura 3.4: Quadrado inscrito e quadrado circunscrito a uma circunferência

Na Figura 3.5 consideramos uma circunferência de raio r com $\ell_n = \overline{BC}$ como sendo o lado de um polígono regular de n lados e $\ell_{2n} = \overline{AB}$ como o lado do polígono regular de 2n lados, ambos inscritos na circunferência. Usando o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos ABD e BDO, temos:

$$(\ell_{2n})^2 = a^2 + \left(\frac{\ell_n}{2}\right)^2 \qquad (3.1)$$

$$r^2 = \left(\frac{\ell_n}{2}\right)^2 + b^2 + \left(\frac{\ell_n}{2}\right)^2 + (r-a)^2 \qquad (3.2)$$

Da equação 3.2, obtemos

$$a = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{\ell_n}{2}\right)^2},$$

que pode ser substituído em 3.1 para fornecer o seguinte:

$$(\ell_{2n})^2 = \left(r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{\ell_n}{2}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{\ell_n}{2}\right)^2$$

o que leva à seguinte igualdade:

$$\ell_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - \ell_n^{\ 2}}} \qquad (3.3)$$

Já vimos que $\ell_4 = r\sqrt{2}$. Substituindo isso na equação 3.3, obtemos

$$\ell_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Usando repetidas vezes a equação 3.3, obtemos os seguintes resultados:

$$\ell_{16} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\ell_{32} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \qquad \ell_{64} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$$

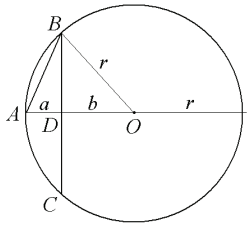


Figura 3.5: Lados de polígonos com n e $2n$ lados inscritos em uma circunferência

Multiplicando ℓ_n por n obtemos o perímetro, P_n, do polígono regular de n lados inscrito na circunferência de raio r. Na tabela 3.2 observamos alguns valores desses perímetros. Assim, quanto maior o valor de n, mais próximo de r × 6, 283185307179586477... o perímetro vai chegar. A metade desse coeficiente de r é o número 3, 141592653589793238... que costuma ser denotado pela letra grega π e é a constante mais famosa de toda a Matemática. Denotando por C o comprimento da circunferência de raio r, é possível demonstrar que

$$C = 2\pi r$$

n	P_n	n	P_n
4	5,6568542494 r	512	6,2831458807 r
8	6,1229349178 r	1024	6,2831754505 r
16	6,2428903045 r	2048	6,2831828430 r
32	6,2730969810 r	4096	6,2831846911 r
64	6,2806623139 r	8192	6,2831851531 r
128	6,2825245018 r	16384	6,2831852686 r
256	6,2830276022 r	32768	6,2831852975 r

Tabela 3.2: Perímetro de polígonos inscritos em circunferência de raio r

3.2 Semelhança

3.2.1 Triângulos semelhantes

Dois triângulos ABC e DEF são semelhantes (denotamos por $\Delta ABC \sim \Delta DEF$) quando existe uma correspondência entre seus vértices de modo que os ângulos internos
sejam congruentes ou, equivalentemente, os lados correspondentes sejam proporcionais. Veja a Figura 3.6.

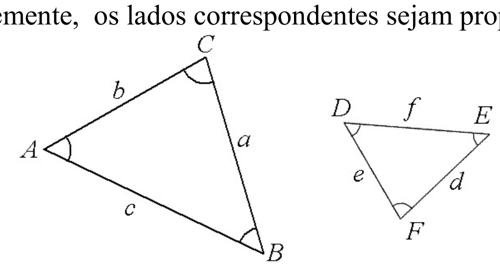


Figura 3.6: Semelhança de triângulos

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF \Leftrightarrow \hat{A} \equiv \hat{D}, \hat{B} \equiv \hat{E}, \hat{C} \equiv \hat{F}, \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k.$$

Neste caso $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, pois $\hat{A} \equiv \hat{D}, \hat{B} \equiv \hat{E}, \hat{C} \equiv \hat{F}, \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k =$ constante. A razão k entre os lados proporcionais é chamada razão de semelhança.

Existem três critérios para se concluir quando dois triângulos são semelhantes:

- AAA – ”caso ângulo-ângulo-ângulo” – Se dois triângulos têm seus ângulos dois a dois congruentes, então eles são semelhantes;
- LAL – ”caso lado-ângulo-lado” – Se dois triângulos têm dois pares de lados proporcionais e os ângulos entre eles congruentes, então eles são semelhantes;
- LLL – ”caso lado-lado-lado” – Se dois triângulos têm os três lados proporcionais, então eles são semelhantes.

Esses critérios podem ser todos demonstrados. Eles tornam mais simples a verificação da semelhança de triângulos mostrando que não há necessidade de observar todos os itens da definição. Por exemplo, se um triângulo tem lados medindo 3, 4 e 5 e outro triângulo tem lados medindo 15, 20 e 25, então, pelo caso LLL, podemos deduzir imediatamente que eles são semelhantes porque $\frac{3}{15}=\frac{4}{20}=\frac{5}{25}$; não há necessidade de calcular os ângulos internos nesse caso para percebermos que eles são dois a dois congruentes. O conceito de semelhança pode ser estendido para outros objetos geométricos. Se dois triângulos são semelhantes e a razão de semelhança é k, então as razões entre outros elementos desses triângulos também será igual a k – por exemplo, a razão entre as alturas também será igual a k.

3.2.2 Relações métricas num triângulo retângulo

Se um triângulo ABC é retângulo em C (ou seja, $\widehat{C}=90°$), então sua altura com relação à hipotenusa separa-o em dois outros triângulos retângulos ADC e BCD. Veja a Figura 3.7.

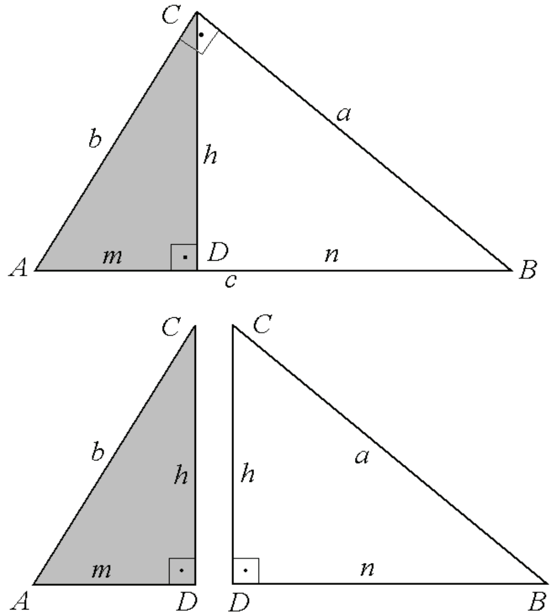


Figura 3.7: Triângulos retângulos semelhantes

Temos, assim, três pares de triângulos semelhantes:

- $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ porque eles têm os três ângulos dois a dois congruentes (eles têm um ângulo Â em comum, ambos têm um ângulo reto e, conseqüentemente, o terceiro ângulo é o suplemento da soma de Â com $90°$;
- $\Delta ABC \sim \Delta BCD$ (também porque eles têm os três ângulos dois a dois congruentes);
- $\Delta ACD \sim \Delta BCD$ (também porque eles têm os três ângulos dois a dois congruentes).

Usando agora a proporcionalidade entre os lados de triângulos semelhantes, temos:

$$\Delta ABC \sim \Delta ACD \Rightarrow \frac{b}{c}=\frac{h}{a}=\frac{m}{b},$$

$$\frac{b}{c}=\frac{h}{a}\Rightarrow ab=hc \tag{3.4}$$

$$\frac{b}{c}=\frac{m}{b}\Rightarrow b^2=mc \tag{3.5}$$

$$\frac{h}{a}=\frac{m}{b}\Rightarrow bh=am \tag{3.6}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta BCD \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{h}{b}=\frac{n}{a},$$

$$\frac{a}{c}=\frac{h}{b}\Rightarrow ab=hc \tag{3.7}$$

$$\frac{a}{c}=\frac{n}{a}\Rightarrow a^2=nc \tag{3.8}$$

$$\frac{h}{b}=\frac{n}{a}\Rightarrow ah=bn \tag{3.9}$$

$$\Delta ACD \sim \Delta BCD \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{m}{h}=\frac{h}{n},$$

$$\frac{b}{a}=\frac{m}{h}\Rightarrow bh=am \tag{3.9}$$

$$\frac{b}{a}=\frac{h}{n}\Rightarrow bn=ah \tag{3.10}$$

$$\frac{m}{h}=\frac{h}{n}\Rightarrow h^2=mn \tag{3.11}$$

Obtemos assim as seguintes relações entre a,b,c,h,m e n:

$$a^2=nc, b^2=mc, h^2=mn, bh=am, ab=hc, ah=bn$$

Somando-se as duas primeiras igualdades, obtemos também que:

$$a^2+b^2=nc+mc=(n+m)c=c^2\Rightarrow c^2=a^2+b^2$$

que é um importante resultado conhecido como **Teorema de Pitágoras**: ”Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”.

3.2.3 Razões Trigonométricas

Consideremos o triângulo retângulo da Figura 3.8 e seja α um dos seus ângulos agudos. O lado b é chamado cateto adjacente (vizinho) ao ângulo α e o lado c é o cateto oposto ao ângulo α.

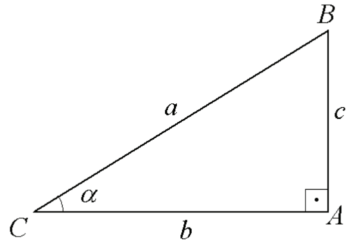


Figura 3.8: Razões trigonométricas de um triângulo retângulo

Definimos o seno de um ângulo agudo como sendo a razão entre o cateto que lhe é oposto e a hipotenusa, o cosseno desse ângulo como sendo a razão entre o cateto que lhe é adjacente e a hipotenusa e a tangente deste mesmo ângulo é definida como a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente, simbolicamente,

$$\text{sen } \alpha=\frac{c}{a}, \cos\alpha=\frac{b}{a}, \text{tg } \alpha=\frac{c}{b},$$

onde $sen\alpha, \cos\alpha$ e $tg\alpha$ denotam respectivamente o seno, o cosseno e a tangente de α.

As definições de seno, cosseno e tangente não dependem do tamanho do triângulo retângulo utilizado. Se dois triângulos retângulos têm um ângulo agudo α, então os três ângulos internos são congruentes e, conseqüentemente, os triângulos são semelhantes. Se os lados de um deles medirem a, b, c e os lados do outro triângulo medirem a', b', c' então o seno de α em um deles é igual a $\frac{c}{a}$ e no outro é $\frac{c'}{a'}$. Devido à semelhança, temos $\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}$. Assim, a noção de seno de um ângulo não depende do tamanho do triângulo. O mesmo vale para outras noções como cosseno e tangente.

O seno, o cosseno e a tangente de um ângulo possuem inúmeras propriedades. A título de ilustração, vamos obter duas delas:

- $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos\alpha}$. Para demonstrá-la, basta usar as seguintes definições:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\cos\alpha} = \frac{c/a}{b/a} = \frac{c}{b} = \text{tg } \alpha;$$

- $(\text{sen } \alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1,$ que é consequência imediata do Teorema de Pitágoras e das definições de seno e cosseno:

$$(\text{sen } \alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2+c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

3.3 Áreas

3.3.1 Áreas de polígonos

A área de um polígono é um número real não-negativo que mede a região do plano ocupada pelo polígono. A este respeito, temos as seguintes propriedades:

- polígonos congruentes têm mesma área;
- se o polígono P for decomposto em n polígonos $P_1, P_2, \cdots, P_n$ então

$$\text{área de } P = \text{área de } P_1 + \text{área de } P_2 + \cdots + \text{área de } P_n.$$

Veja a Figura 3.9 para um exemplo.

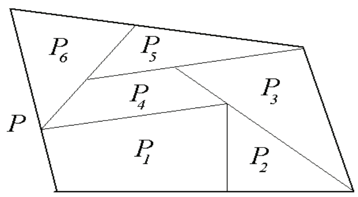


Figura 3.9: Decomposição do polígono P

Definimos a área de um quadrado cujo lado mede ℓ como sendo ℓ^2 e polígonos equivalentes como sendo aqueles que têm a mesma área.

3.3.2 Áreas de um retângulo

Consideremos um retângulo cujos lados medem a e b. Esse retângulo pode ser colocado lado a lado com outro retângulo congruente a ele, um quadrado de lado a e um quadrado de lado b para formar um quadrado maior de lado $a+b$, conforme a Figura 3.10. Seja R a área do retângulo dado (sombreado na figura). Como a área do quadrado maior é $(a+b)^2$, temos que

$$(a+b)^2 = a^2 + R + R + b^2$$

de onde podemos obter $R = ab$.

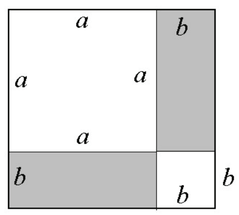


Figura 3.10: Área de retângulo

3.3.3 Áreas de um paralelogramo

Um paralelogramo ABCD de base b e altura h é equivalente a um retângulo ABEC de mesma base e mesma altura. Veja a Figura 3.11. Portanto, a área desse paralelogramo é bh.

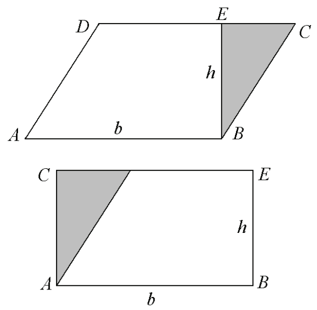


Figura 3.11: Área de um paralelogramo

3.3.4 Áreas de um triângulo

Um triângulo ABC de base b e altura h, juntamente com outro triângulo congruente BDC, podem ser colocados lado a lado para formarem um paralelogramo ABDC (Figura 3.12). Logo, a área do paralelogramo é o dobro da área do triângulo, ou seja, a área do triângulo ABC é $\frac{bh}{2}$.

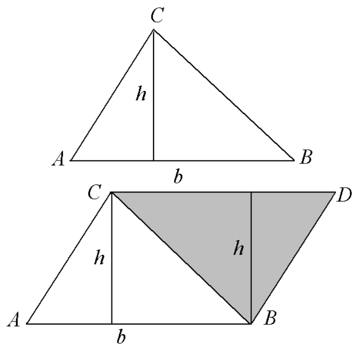


Figura 3.12: Área de um triângulo

3.3.5 Área de um trapézio

Um trapézio ABCD (Figura 3.13) pode ser decomposto em dois triângulos: ABC e ACD. Logo, a área T de um trapézio com bases a e b e altura h é dada por

$$T = \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{(a+b)h}{2}.$$

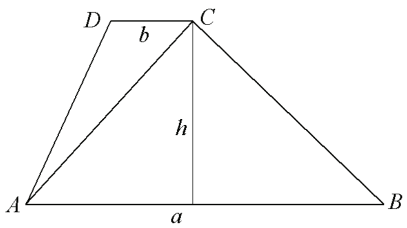


Figura 3.13: Área de um trapézio

3.3.6 Área de um losango

Um losango com diagonais medindo D e d pode ser decomposto em 4 triângulos retângulos congruentes (sombreados na Figura 3.14). Juntando com mais 4 triângulos retângulos congruentes (não sombreados na Figura 3.14) eles formam um retângulo de base D e altura d. Como a área desse retângulo é o dobro da área do losango, temos que a área do losango é igual a $\frac{Dd}{2}$.

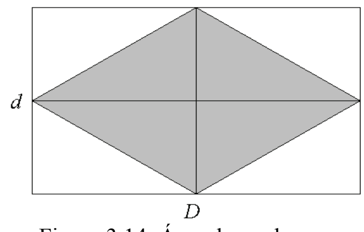


Figura 3.14: Área de um losango

3.3.7 Área de um polígono

Um polígono regular com n lados, cada um de comprimento a, pode ser decomposto em n triângulos de base a e altura h. Daí, a área do polígono será igual a n vezes a área de cada triângulo, isto é, a área do polígono é $n\left(\frac{ah}{2}\right)$. Denotando o semiperímetro $\frac{an}{2}$ por p, temos que a área do polígono regular com n lados é igual a ph (Figura 3.15).

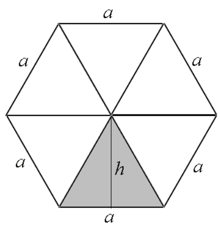


Figura 3.15: Área de um polígono

3.3.8 Área de um círculo

O cálculo da área de um círculo pode ser visto como uma situação limite do cálculo da área de um polígono regular com n lados, quando n é um número "muito grande". Supondo o polígono inscrito em um círculo de raio r, esse polígono pode ser decomposto em n triângulos de área $\frac{r^2}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{360°}{n}\right)$. Para verificar isso, basta usar as definições de seno e cosseno de um ângulo α em um triângulo retângulo; neste caso, um dos ângulos internos do triângulo é $\alpha = \frac{360°}{2n}$. Concluímos então que a área do polígono regular com n lados inscrito em um círculo de raio r é dada por $A_n = \frac{nr^2}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{360°}{n}\right)$.

Na tabela 3.3, é calculada a área de um polígono para um dado valor de n. Observando a sequência A_n, vemos que quanto maior o valor de n, mais próximo de πr^2 é a área do polígono. Assim, sem demonstração por enquanto, baseando-nos apenas na observação dessa tabela, concluímos que a área de um círculo de raio r é igual a πr^2. Oportunamente, quando estudarmos as técnicas de Cálculo Diferencial e Integral, veremos que este fato pode ser demonstrado rigorosamente.

n	P_n	n	P_n
8	2.8284271247 r²	256	3.1412772509 r²
16	3.0614674589 r²	512	3.1415138011 r²
32	3.1214451523 r²	1024	3.1415729404 r²
64	3.1365484905 r²	2048	3.1415877253 r²
128	3.1403311570 r²	4096	3.1415914215 r²

Tabela 3.3: Área de um polígono regular com n lados

3.3.9 Área de um setor circular

A área de um setor circular de raio r (Figura 3.16) pode ser calculada através de uma simples proporção, comparando-a com a área de um círculo. Se o ângulo central do setor for de α graus, isso significa que a área do setor é correspondente à fração $\dfrac{\alpha}{360°}$ da área do círculo, ou seja, será igual a $\dfrac{\alpha\pi r^2}{360°}$.

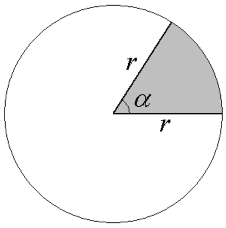


Figura 3.16: Área de um setor circular

3.4 O Teorema de Pitágoras

Diversas fórmulas e teoremas podem ser demonstrados com o auxílio do cálculo de áreas. Aqui, fornecemos outra demonstração do Teorema de Pitágoras.

Um quadrado de lado b+c pode ser decomposto em 4 triângulos retângulos congruentes de catetos b e c e hipotenusa a (sombreados na Figura 3.17), mais um quadrado de lado a. Calculando as áreas, obtemos:

$$(b+c)^2 = a^2 + \frac{bc}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{bc}{2}$$

Simplificando, obtemos $a^2 = b^2 + c^2$, que é o resultado procurado.

Outra demonstração pode ser feita com o auxílio das figuras 3.17 e 3.18. A Figura 3.18 pode ser considerada como tendo sido obtida a partir da Figura 3.17 através de uma nova disposição dos 4 triângulos congruentes sombreados. Essas figuras geométricas podem ser construídas facilmente usando-se papel ou cartolina. Como nos dois casos temos um quadrado maior de lado b + c e os triângulos sombreados têm a mesma área total nas duas figuras, então as áreas não sombreadas devem ter o mesmo valor. Na Figura 3.17 a área não sombreada é a^2, enquanto que na Figura 3.18 ela vale $b^2 + c^2$. Concluímos, mais uma vez, que $a^2 = b^2 + c^2$.

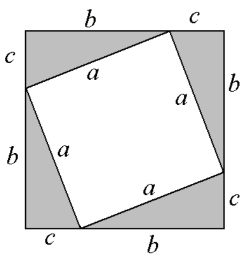


Figura 3.17: Teorema de Pitágoras

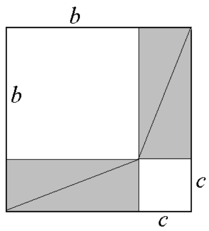


Figura 3.18: Teorema de Pitágoras

Ampliando o seu Conhecimento

Consideremos uma bandeira do Brasil com 3 m de largura e 2 m de altura. Supondo que o círculo azul tenha diâmetro 1 m e cada vértice do losango amarelo esteja a uma distância de 40 cm do lado do retângulo verde, calcule a área da parte amarela da bandeira.

3.5 Fórmula de Herão

A fórmula de Herão (matemático grego que provavelmente viveu na segunda metade do século I d.C.) é útil para calcular a área de um triângulo cujos lados a, b e c são conhecidos. Suponhamos que c seja o maior lado, ou seja, que $a \le b \le c$, como na Figura 3.19.

Sendo h a altura relativa ao lado C, temos que a área do triângulo é $S = \frac{1}{2}hc$. Usando o Teorema de Pitágoras nos triângulos ADC e BCD, temos que $b^2 = h^2 + (c-x)^2 = (h^2 + x^2) + c^2 - 2cx$. Substituindo essa segunda equação na primeira, obtemos $b^2 = a^2 + c^2 - 2cx$ de onde obtemos que

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}.$$

Como $h^2 = a^2 - x^2$, obtemos

$$\begin{aligned}
h^2 &= a^2 - \left(\frac{b^2 - a^2 - c^2}{2c}\right)^2 \\
&= \left(a + \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2c}\right)\left(a - \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2c}\right) \\
&= \frac{(2ac + b^2 - a^2 - c^2)(2ac - b^2 + a^2 + c^2)}{4c^2} \\
&= \frac{(b^2 - (a^2 - 2ac + c^2))((a^2 + 2ac + c^2) - b^2)}{4c^2} \\
&= \frac{(b^2 - (a-c)^2)((a+c)^2 - b^2)}{4c^2} \\
&= \frac{(b+a-c)(b-a+c)(a+c+b)(a+c-b)}{4c^2} \\
&= \frac{(a+b+c)(a+b+c-2c)(a+b+c-2a)(a+b+c-2b)}{4c^2}
\end{aligned}$$

Seja p o semiperímetro desse triângulo, ou seja, $p = \frac{a+b+c}{2}$. Então $a+b+c = 2p$ que substituindo na equação anterior, fornece:

$$h^2 = \frac{2p(2p-2c)(2p-2a)(2p-2b)}{4c^2} = \frac{16p(p-c)(p-a)(p-b)}{4c^2} = \frac{4p(p-c)(p-a)(p-b)}{c^2}.$$

Logo, $h^2c^2 = 4p(p-a)(p-b)(p-c)$. Como $S^2 = \frac{h^2c^2}{4}$, temos $S^2 = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{4}$ de onde, finalmente, obtemos

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

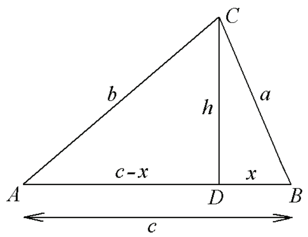


Figura 3.19: Fórmula de Herão

3.6 Exemplos

Exemplo 3.1 Calcule a altura h de um triângulo equilátero em função do lado ℓ. A partir daí, obtenha os valores de sen 60°, cos 60°, tg 60°, sen 30°, cos 30° e tg 30°.

Solução: Seja h a medida da altura relativa ao lado AB do triângulo equilátero ABC. Como os lados do triângulo são iguais, os ângulos internos também são iguais. Como a soma dos ângulos internos é 180°, então cada ângulo interno mede 60°. A altura relativa a AB divide esse lado em duas partes iguais a $\ell/2$ e o ângulo $\hat{C}$ em dois ângulos, $\widehat{ACD}$ e $\widehat{BCD}$, cada um medindo 30°.

Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ACD, obtemos: $\ell^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + h^2$, ou seja, $h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$. Agora, nesse mesmo triângulo ACD, podemos usar as definições de seno e cosseno para obter:

$$\text{sen } 60° = \frac{h}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \cos 60° = \frac{\ell/2}{\ell} = \frac{1}{2}; \qquad \text{tg } 60° = \frac{\text{sen } 60°}{\cos 60°} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3};$$

$$\text{sen } 30° = \frac{\ell/2}{\ell} = \frac{1}{2}; \qquad \cos 30° = \frac{h}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \text{tg } 30° = \frac{\text{sen } 30°}{\cos 30°} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

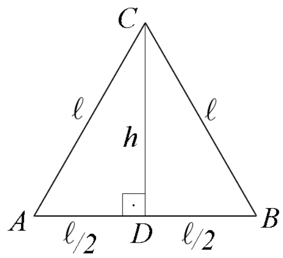


Figura 3.20: Exemplo 1

Exemplo 1.2 Considere a Figura 3.9 onde temos uma circunferência e segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{DP}$ chamados secantes. Mostre que $m(\overline{PA}) \times m(\overline{PB}) = m(\overline{PC}) \times m(\overline{PD})$.

Solução: Na Figura 3.21, os triângulos PCA e PBD são semelhantes porque têm o ângulo $\hat{P}$ em comum e $\hat{A} = \hat{D}$ porque eles estão relacionados com o mesmo arco BC da circunferência. Assim, pelo caso AAA, os triângulos são semelhantes. Logo, os lados correspondentes são proporcionais, ou seja,

$$\frac{m(\overline{PA})}{m(\overline{PD})} = \frac{m(\overline{AC})}{m(\overline{BD})} = \frac{m(\overline{PC})}{m(\overline{PB})},$$

de onde obtemos a igualdade desejada.

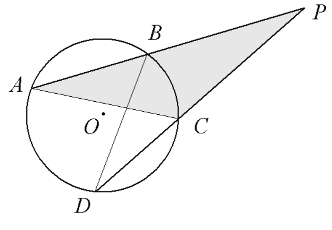


Figura 3.21: Exemplo 2

Exemplo 3.3 Na Figura 3.22 temos um quadrado de lado ℓ e quatro arcos de circunferências de mesmo raio. Calcule a área sombreada.

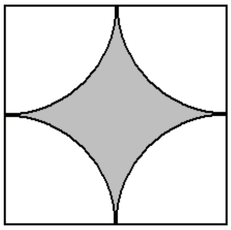


Figura: 3.22: Exemplo 3

Solução: Basta observar que os quatro arcos determinam quatro setores circulares de raios iguais a $\frac{\ell}{2}$. Juntos, eles equivalem a um círculo de raio $\frac{\ell}{2}$ cuja área é $\frac{\pi\ell^2}{4}$. Como a área do quadrado é igual a ℓ^2, temos que a área sombreada é igual a $\ell^2 - \frac{\pi\ell^2}{4} = \ell^2(1-\frac{\pi}{4})$.

Exemplo 3.4 Diversas fórmulas de trigonometria podem ser demonstradas com a ajuda do cálculo de áreas. Neste exemplo, obtemos a fórmula do seno da soma de dois ângulos. Na Figura 3.23, consideremos o triângulo ABC cuja altura com relação ao lado AB mede 1 e divide o ângulo $\hat{C}$ em dois ângulos agudos, a e b. Calcule sen $\hat{C}$ em função de sen α , sen b, cos a e cos b.

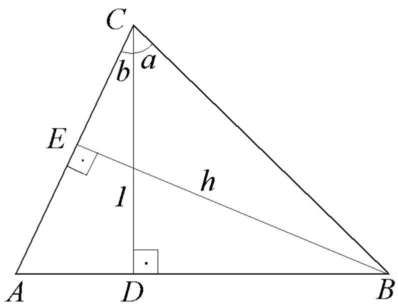


Figura 3.23: Exemplo 3.4

Solução: Vamos calcular a área do triângulo ABC de duas maneiras: usando o lado AB como base e, depois, usando AC como base. Daí, obtemos: $\frac{1}{2}AB\times 1 = \frac{1}{2}AC\times h,$ ou seja,

$$AD + DB = AC \times h. \tag{3.13}$$

Usando as definições de seno, cosseno e tangente, temos:

$$\cos\alpha = \frac{1}{BC} \Rightarrow BC = \frac{1}{\cos\alpha} \tag{3.14}$$

$$\cos b = \frac{1}{AC} \Rightarrow AC = \frac{1}{\cos b} \tag{3.15}$$

$$\text{tg } a = \frac{DB}{1} \Rightarrow DB = \text{tg } a \tag{3.16}$$

$$\text{tg } b = \frac{AD}{1} \Rightarrow AD = \text{tg } b \tag{3.17}$$

$$\text{sen } \hat{C} = \frac{h}{BC} \Rightarrow h = BC \text{ sen } \hat{C} \tag{3.18}$$

Substituindo 3.14 em 3.18, e, depois, em 3.13, obtemos:

$$AD + DB = AC\frac{\text{sen } \hat{C}}{\cos a} \tag{3.19}$$

e, finalmente, substituindo 1.15, 1.16 e 1.17 em 1.19, obtemos:

$$\text{tg } a + \text{tg } b = \frac{\text{sen } \hat{C}}{\cos a \cos b},$$

ou seja,

$$\text{sen } \hat{C} = \cos a \cos b \left(\frac{\text{sen } a}{\cos a} + \frac{\text{sen } b}{\cos b} \right)$$

que é equivalente a

$$\text{sen } (a+b) = \text{sen} a \cos b + \text{sen } b \cos a.$$

Exemplo 3.5 Um triângulo tem lados medindo 5 cm, 7 cm e 8 cm. Calcule a altura relativa ao seu maior lado.

Solução: São dados a = 5, b = 7 e c = 8. O semiperímetro desse triângulo é p = a + b + c $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{20}{2} = 10$. Logo, usando a fórmula de Herão temos que sua área é $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{10(10-5)(10-7)(10-8)} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$.

Por outro lado, considerando a base como sendo o lado que mede 8 cm, a área desse triângulo é igual a $\frac{8h}{2}$, onde h é a altura relativa ao maior lado. Temos então que $4h = 10\sqrt{3}$, ou seja, $h = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Exemplo 3.6 Na Figura 3.24 temos dois arcos de circunferências em um quadrado de lado a. Calcule a área sombreada.

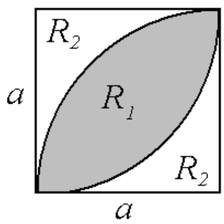


Figura 3.24: Exemplo 3.6

Solução: Sejam S_1 a área da região sombreada R_1 e S_2 a área da região R_2 não sombreada, indicadas na figura. Pela simetria da figura, S_2 aparece tanto acima quanto abaixo de S_1. $S_1 + 2S_2$ é equivalente ao quadrado, logo, $S_1 + 2S_2 = a^2$. Por outro lado, $S_1 + S_2$ é equivalente a um quarto do círculo de raio a, logo, $S_1 + S_2 = \pi a^2 / 4$. Dessa forma, para calcular S_1, basta resolver o sistema linear:

$$\begin{cases} S_1 + 2S_2 = a^2 \\ S_1 + S_2 = \pi a^2 / 4 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por (−2) e somando com a primeira equação, obtemos

$S_1 = a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$.

Exemplo 3.7 Na Figura 3.25 temos um triângulo retângulo de área S_1 com hipotenusa a e catetos b e c e três semicírculos cujos diâmetros são os lados do triângulo, formando as regiões S_2 e S_3, chamadas lúnulas de Hipócrates. Mostre que a soma das áreas das lúnulas é igual à área do triângulo, ou seja, que $S_1 = S_2 + S_3$.

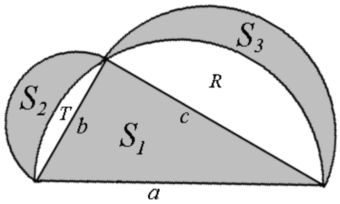


Figura 3.24: Exemplo 3.7

Solução: Sejam R e T as áreas das regiões não sombreadas da figura. Então, $S_2 + T = \pi(b/2)^2$, $S_3 + R = \pi(c/2)^2$ e $S_1 + T + R = \pi(a/2)^2$, o que implica em $S_2 + T + S_3 + R = \frac{\pi}{4}(b^2 + c^2)$,, ou seja, $S_2 + S_3 + (T + R) = \frac{\pi}{4}a^2$. Por outro lado, temos $T + R = \frac{\pi}{4}a^2 - S_1$, que, substituindo na equação anterior, fornece a igualdade procurada.

4. Avaliando o que foi construído

Introduzimos noções básicas tais como ponto, reta, plano, segmentos, ângulos, triângulos, polígonos, circunferência e círculo. E, através da noção de semelhança de triângulos, foi possível deduzir o importante conceito de razões trigonométricas tais como o seno e o cosseno de um ângulo.

A partir da área de um quadrado, pudemos obter a área de outros polígonos como retângulo, paralelogramo, triângulo, trapézio, losango. Tentamos justificar o cálculo da área de um círculo e enunciamos e demonstramos um importante resultado conhecido como Teorema de Pitágoras.

5. Referências

[1] Jurkiewicz, S., Geometria: Congruência e Semelhança, Estágio dos Alunos Bolsistas – OBMEP 2005, vol. 5, Ed. SBM, Rio de Janeiro: 2006.
[2] Wagner, E., Teorema de Pitágoras e Áreas, Estágio dos Alunos Bolsistas – OBMEP 2005, vol. 6, Ed. SBM, Rio de Janeiro: 2006.
[3] Dolce, O., Pompeo, J. N., Geometria Plana, Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 9, Atual Editora, São Paulo: 1978.
[4] Wagner, E., Usando Áreas, Revista do Professor de Matemática N. 21, Ed. SBM, São Paulo: 1992.
[5] Dante, L. R., Matemática: Contexto e Aplicações, Ed. Ática, São Paulo: 2003.
[6] Neto, A. A. e outros, Geometria, Noções de Matemática, vol. 5, Ed. Moderna, São Paulo:1982.

Unidade III Tratamento da Informação

1. Situando a Temática

A coleta, organização, interpretação e representação de dados formam o conjunto de habilidades a serem trabalhadas pelo elemento temático que se convencionou denominar de Tratamento da Informação, conteúdo com abordagem prevista para a matéria Matemática já no Ensino Fundamental, fase em que se faz acompanhar dos tópicos relativos a Números e Operações, Espaço e Forma e Grandezas e Medidas.

"*Dados não são informação. Informação é o que resulta da interpretação de dados*." (Mitroff & Sagasti [4])

A afirmação acima expõe, em síntese, a importância de capacitar o indivíduo, desde os primeiros anos escolares, a interpretar criticamente tudo o que lhe é comunicado através de dados, normalmente apresentados sob a forma de elementos de natureza quantitativa. Daí, orientar o aluno a coletar, organizar, interpretar e, por fim, representar informações ser considerada atividade imprescindível para sua formação, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática.

Devemos, contudo, perceber que a finalidade do estudo do Tratamento da Informação não se restringe ao desenvolvimento da capacidade de capturar, processar e transmitir elementos informativos. Ao abranger e congregar noções fundamentais de tabelas, gráficos, estatística, probabilidade e combinatória, a matéria constitui excelente ferramenta pedagógica para o exercício da interdisciplinaridade, propiciando a abordagem matemática de assuntos e situações reais, conhecidos e experimentados pelos alunos no dia-a-dia. Esse aspecto é de tal forma relevante que dele poder-se-ia deduzir o alcance maior relacionado à ministração dos conteúdos do Tratamento da Informação: preparar o indivíduo para uma participação efetiva na sociedade, fornecendo-lhe condições de compreender e analisar informações para, a partir daí, formar sua opinião e interatuar consciente e construtivamente.

A fim de atingir tal objetivo, o Tratamento da Informação compõe-se de conteúdos que tratam da transmissão de informações através de tabelas e gráficos, evoluindo para a ministração de conhecimentos básicos de estatística, de probabilidade e de combinatória. Em relação aos tópicos tabela, gráfico e estatística, espera-se que o desenvolvimento do estudo capacite o aluno para as ações de coleta, análise, organização e comunicação de dados através de tabelas e gráficos, habilitando-o, em sua fase final, a efetuar cálculos de medidas estatísticas, como média, mediana e moda. No que diz respeito à probabilidade, objetiva-se que a exposição do aluno a experimentações e simulações possa levá-lo a compreender o significado de acontecimento aleatório e capacitá-lo a quantificar ocorrências de resultados incertos para determinados eventos. Por fim, o exercício do raciocínio combinatório deve capacitar o estudante a obter soluções para problemas de contagem, principalmente aqueles envolvendo questões relacionadas ao cálculo de probabilidades.

Em última análise, o Tratamento da Informação compreende o estudo progressivo da análise de dados e probabilidades, objetivando tornar o aluno apto a:

- ler e interpretar dados apresentados por meio de tabelas e gráficos,
- formular questões que envolvam a coleta, organização e apresentação de dados,
- selecionar e utilizar métodos estatísticos adequados,
- desenvolver e avaliar inferências e predições baseadas em dados e
- compreender e aplicar conceitos básicos de probabilidade.

A partir da leitura do ementário das disciplinas que compõem o presente Curso de Licenciatura em Matemática, vê-se que o Tratamento da Informação consta como tópico a ser abordado pelas Matemáticas para o Ensino Básico I e III. Levando-se em consideração o caráter progressivo da aprendizagem dos assuntos a serem abordados, compete à Matemática para o Ensino Básico I apresentar o Tratamento da Informação como tema de estudo que objetiva desenvolver no aluno a capacidade de

- identificar os principais tipos de tabelas e gráficos,
- ler e interpretar dados contidos em tabelas e gráficos simples,

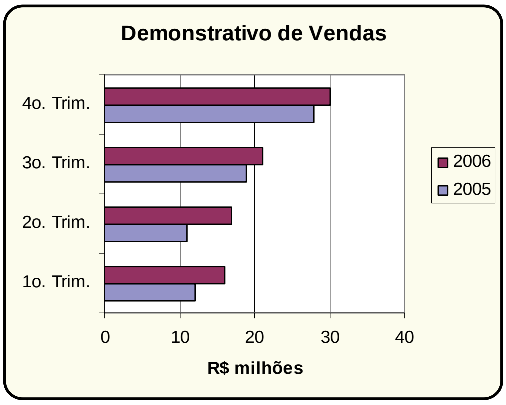
- recolher e organizar dados e informações,
- produzir textos a partir da interpretação de gráficos e tabelas e
- elaborar tabelas e gráficos elementares para apresentação de conjuntos de dados.

Cabe à Matemática para o Ensino Básico III dar continuidade a esse aprendizado, consolidando os conhecimentos adquiridos e introduzindo conceitos ainda não trabalhados, utilizando-se de procedimentos estatísticos e probabilísticos para ampliação da habilidade do aluno em organizar e analisar dados, estabelecer relações, fazer previsões e formular argumentações bem fundamentadas.

2. Problematizando a Temática

Quando assistimos a noticiários pela televisão ou lemos jornais ou revistas, vemos, com freqüência, notícias ou matérias sintetizadas em tabelas ou gráficos. Nessas situações está presente o Tratamento da Informação. Vejamos a situação no exemplo seguinte:

Exemplo: *Paulo encontrou num jornal local uma matéria sobre o desempenho do comércio da sua cidade nos anos de 2005 e 2006, e essa matéria apresentava o gráfico seguinte.*



Mesmo sem ler o texto da matéria, ele concluiu que no ano de 2006 as vendas foram superiores às de 2005. Concluiu também que isso ocorreu nos quatro trimestres do ano.

3. Conhecendo a Temática

3.1 Trabalhando com tabelas e gráficos

3.1.1 Conhecendo conceitos e características

Ao pensarmos em uma tabela, imaginamos um quadro, dividido em linhas e colunas, contendo palavras e/ou números. Esta idéia intuitiva é suficiente para que consigamos estabelecer um conceito. Uma tabela é, na verdade, um quadro organizado onde dados são listados, visando construir um conhecimento fundamentado acerca de algo. A leitura de uma tabela será válida, se acompanhada de análises acerca de relações

e combinações que se possam estabelecer a partir dos dados nela contidos. É a interpretação que transforma palavras e números em instruções ou, equivalentemente, traduz os registros de uma tabela em informações.

Temos, a seguir, uma tabela que lista as dez cidades com maior número de habitantes no mundo, em um determinado tempo.

AS 10 CIDADES MAIS POPULOSAS DO MUNDO

CIDADE	PAÍS	POPULAÇÃO	ANO	O D Q (∗)
Mumbai	Índia	11.914.398	2001	Censo
Shangai	China	10.996.500	2003	Estimativa
São Paulo	Brasil	10.677.019	2003	Estimativa
Seul	Coréia do Sul	10.207.296	2002	Estimativa

Moscou	Rússia	10.101.500	2001	Censo
Deli	Índia	9.817.439	2001	Censo
Carachi	Paquistão	9.339.023	1998	Censo
Istambul	Turquia	8.831.805	2000	Censo
Beijing	China	8.689.000	2001	Estimativa
Cidade do México	México	8.591.309	2000	Censo

(∗) ODQ – Origem dos Dados Quantitativos - Fonte: **TIME Almanac - 2006**

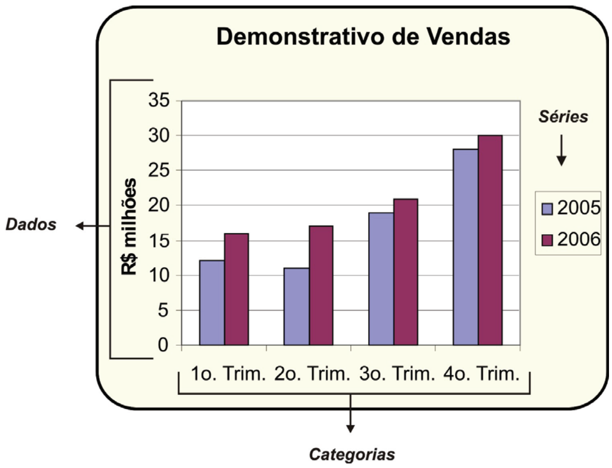
Na tabela anterior, os dados populacionais dizem respeito ao quantitativo de pessoas que habitam a área estrita de cada cidade, estando excluída da contagem a população existente nas áreas urbanas adjacentes.

No caso dos gráficos, a simples leitura também não é suficiente para que se atinja um bom entendimento da situação retratada. É imprescindível examinar, comparar, confrontar para que os dados neles apresentados reduzam a falta de informação sobre determinado assunto. Os gráficos permitem a observação conjunta de correspondências entre cada categoria ou classe pesquisada e os dados a ela relacionados, gerando a percepção qualitativa e quantitativa de muitos fenômenos, transformando-se, assim, em geradores de informações.

Por essa razão, com relação à abordagem prevista para o Tratamento da Informação na Matemática para o Ensino Básico I, não é nosso objetivo estabelecer o conceito de gráfico como o de elemento representativo de uma função mediante uma curva num sistema de coordenadas. Para nós, gráfico é um tipo de linguagem com a qual temos contato cotidianamente, correspondendo a uma forma de comunicação visual descritiva de acontecimentos diversos.

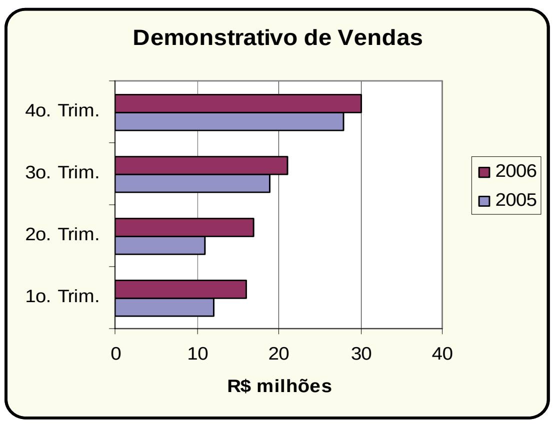
É justamente a necessidade de representar figurativamente tão variado conjunto de fatos, aspectos e ocorrências que produz ampla variedade de espécies de gráficos. Dentre essas, estamos particularmente interessados em trabalhar com:

- **Gráficos de Colunas -** caracterizados pela representação de dados sob a forma de colunas verticais de altura variável e largura constante. São úteis, principalmente, quando a pesquisa objetiva mostrar alterações que ocorrem nos dados, em um período de tempo.

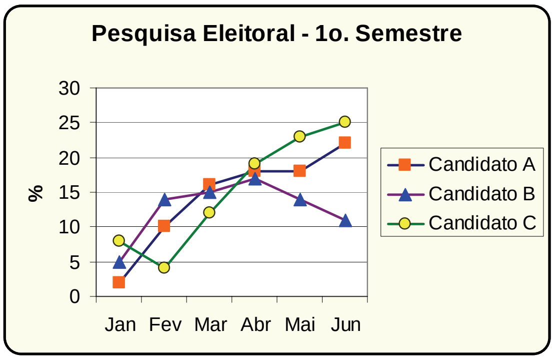


Quando construímos gráficos de colunas, é comum dispormos no eixo vertical os dados obtidos e reservarmos o eixo horizontal para a ordenação das ***categorias*** pesquisadas. O quadro situado normalmente à direita do gráfico contém as ***séries*** que o compõem.

- **Gráficos de Barras -** equivalentes aos de colunas no que se relaciona à utilidade, diferindo daqueles pela representação de dados que passa a ocorrer por meio de barras horizontais com largura variável e altura constante, como também pela ordenação oposta no que se refere à rotulação de eixos.

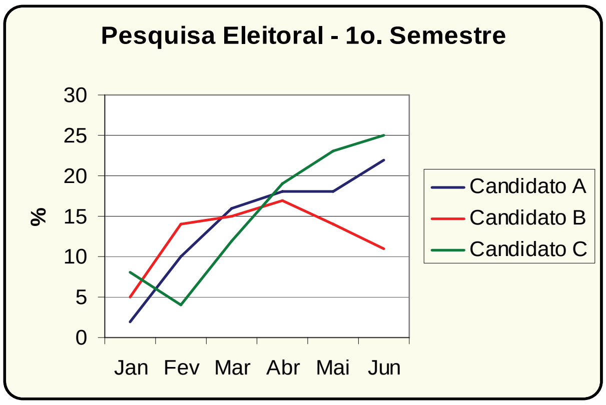


- **Gráficos de Linhas** - utilizados, principalmente, para exibir dados contínuos em função do tempo, salientando visualmente tendências de comportamento a partir dos registros de crescimento e decrescimento dos dados colhidos.



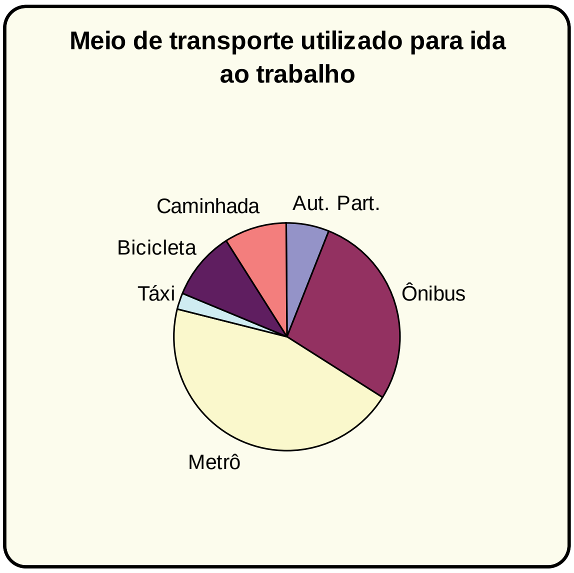
(Gráfico de Linhas com marcadores)

Podem conter, ou não, marcadores sobre as linhas e seguem a mesma ordenação de eixos adotada pelos de colunas, ou seja, categorias ocupando o eixo horizontal com dados dispostos no eixo vertical.



(Gráfico de Linhas sem marcadores)

- Gráficos de Setores - comumente denominados de *pizzas*, utilizados sempre que o objetivo principal da representação for o de exibir a contribuição, ou a participação quantitativa para o total, de cada categoria pesquisada. Em sua elaboração, como veremos em exemplo, importa efetuar o cálculo da proporção do círculo que deve estar associada a cada categoria envolvida para, posteriormente, ser estabelecida a divisão do círculo respeitando-se essas proporções.



Na terceira atividade que integra a seção seguinte, nos dedicaremos à construção de gráficos e, então, nos deteremos na análise dos principais elementos constitutivos dessa importante ferramenta visual de representação. Por enquanto, desenvolveremos nosso estudo a partir da definição de um roteiro de atividades envolvendo os elementos tabela e gráfico.

3.1.2 Desenvolvendo atividades

Estamos interessados em ler, analisar e construir tabelas e gráficos. Primeiramente, focalizaremos nossa atenção em leituras e análises. A identificação e caracterização dos principais elementos utilizados na composição da tabela ou do gráfico seguido do exame da forma através da qual seus dados são apresentados correspondem às etapas iniciais constitutivas do nosso estudo.

Primeira Atividade - Leitura e Análise de Tabelas e Gráficos

Essa atividade objetiva desenvolver habilidades relacionadas ao trabalho com tabelas e gráficos, especialmente aquelas que dizem respeito a

a) classificação, de acordo com as características dos dados exibidos e do tema abordado,

b) determinação de elementos primários utilizados na construção,

c) identificação da forma pela qual os dados encontram-se dispostos, e

d) elaboração de conclusões acerca das informações obtidas.

Exemplo - 1

Vamos considerar a tabela apresentada na seção anterior. Os elementos, aos quais nos referimos como primários, utilizados em sua construção são:

a) Título – AS 10 CIDADES MAIS POPULOSAS DO MUNDO.

b) Assunto – A tabela lista as dez cidades com maior número de habitantes no mundo, observando que de tal quantitativo foi excluída a parte da população que habita áreas urbanas adjacentes à cidade.

c) Categoria Pesquisada – Cidades, sem quaisquer restrições, buscando determinar o quantitativo populacional.

d) Fonte – A tabela encontra-se publicada na edição do ano de 2006, de TIME Almanac (Publicação anual norte-americana da TIME Inc., contendo informações literárias, científicas, estatísticas e culturais em geral).

No que diz respeito à disposição dos dados, a tabela classifica as cidades pelo número de habitantes, de forma decrescente, de cima para baixo. O seu conteúdo, apesar de fundado em aspecto técnico referente à medida de contingente populacional, estimula reflexões e debates de caráter eminentemente social.

Fechando esta primeira atividade, observe que as questões constantes do exemplo acima podem ser igualmente formuladas em relação a gráficos elaborados sob a forma de barras, colunas, linhas ou setores.

Visite a plataforma *Moodle*

Vá ao espaço reservado à disciplina Matemática para o Ensino Básico I na plataforma *Moodle* e localize as tarefas associadas a esta atividade. A execução de cada uma delas é imprescindível para o aprendizado do tema abordado.

Segunda Atividade - Montagem de Tabelas

Concluída a atividade de exame, pratiquemos agora a ação de construção de tabelas. Vamos organizar alguns dados para efetuar a construção de uma tabela que os apresente sintética e ordenadamente, facilitando a captura de informações que os mesmos possam transmitir. Consideremos, para tanto, o exemplo a seguir.

Exemplo - 2

Faça uma leitura atenta do texto abaixo.

UMA PEQUENA HISTÓRIA DAS COPAS DO MUNDO

A Copa do Mundo é um campeonato de futebol idealizado por Jules Rimet, cidadão francês que, no ano de 1928, assumiu a presidência da Fédération Internationale de Football Association (FIFA), e planejou a realização do referido certame a cada quatro anos.

Em 1930, o Uruguai sediou e ganhou a primeira copa, disputada pelas seleções de futebol de 16 países convidados. As duas copas seguintes foram vencidas pela seleção italiana, jogando em seu próprio país, em 1934, e na França, em 1938.

Em razão da Segunda Guerra Mundial (1939-1945), a quarta copa só foi realizada no ano de 1950, no Brasil, sendo vencida, mais uma vez, pelos uruguaios.

A copa volta a ser realizada na Europa quatro anos depois, sendo o país sede a Suíça, e o vencedor a Alemanha Ocidental. À época ainda existia o muro de Berlim, dividindo a Alemanha nas partes Ocidental, a República Federal da Alemanha, e Oriental, a República Democrática Alemã.

Em 1958, na Suécia, o Brasil ergue pela primeira vez a taça de campeão, que até então recebia o nome de Taça Jules Rimet.

Em 1962, a realização do torneio ocorre, pela terceira vez, em um país sul-americano: o Chile. Na oportunidade, o Brasil iguala-se a Uruguai e Itália e passa a ser o terceiro país a ganhar duas copas do mundo.

A Inglaterra sedia e vence a copa de 1966, marcada por uma participação decepcionante da seleção brasileira, desclassificada na primeira fase do torneio.

No México, em 1970, o Brasil torna-se o primeiro país tricampeão mundial de futebol. Normas que regiam o campeonato à época previam que ao país campeão seria concedido o privilégio de posse da Taça Jules Rimet por quatro anos, até a realização da próxima edição do torneio, ficando assegurado o direito de propriedade sobre a mesma, ao país cujo selecionado de futebol a conquistasse por três vezes. Portanto, a partir daquele ano, a Taça Jules Rimet nos pertence, para sempre.

Em 1974, a Alemanha Ocidental, como já haviam feito Uruguai, Itália e Inglaterra, sedia e vence a copa do mundo.

A Argentina é o quarto, e até hoje o último, país sul-americano a sediar uma copa do mundo, a qual conquista em 1978.

A copa volta a ter sede na Europa em 1982. Em campos da Espanha, a Itália sagra-se tricampeã.

O México, em 1986, passa a ser o primeiro país a sediar a copa do mundo mais de uma vez. Na oportunidade, a Argentina conquista seu bicampeonato.

Em 1990, na Itália, a Alemanha, agora unificada após a queda do muro de Berlim ocorrida em 9 de novembro de 1989, sagra-se tricampeã e iguala-se, em número de títulos, ao Brasil e à Itália.

Os Estados Unidos da América sediam a copa de 1994, que tem o Brasil como vencedor.

Em 1998, a seleção de futebol da França, jogando em seu próprio país, conquista sua primeira copa. O Brasil, que por muito pouco não venceu a copa realizada na França, volta a ser o campeão em 2002, ano em que o torneio foi sediado por dois países: Japão e Coréia do Sul.

Em 2006, a copa volta a ser realizada na Alemanha, tendo sido vencedora a seleção italiana que, assim, conquista seu tetracampeonato.

Como poderíamos sintetizar, através de uma tabela, dados relevantes referidos no conteúdo do texto?

Se considerarmos que esses dados devam relacionar os locais onde foram realizadas as copas do mundo, os anos em que essas disputas futebolísticas aconteceram e os respectivos países vencedores, teremos, como produto de nossa síntese, a seguinte tabela:

COPAS DO MUNDO (1930 – 2006)

País Sede	Ano de Realização	Vencedor
Uruguai	1930	Uruguai
Itália	1934	Itália
França	1938	Itália
Brasil	1950	Uruguai
Suíça	1954	Alemanha Ocidental
Suécia	1958	Brasil
Chile	1962	Brasil
Inglaterra	1966	Inglaterra
México	1970	Brasil
Alemanha Ocidental	1974	Alemanha Ocidental
Argentina	1978	Argentina

Espanha	1982	Itália
México	1986	Argentina
Itália	1990	Alemanha
Estados Unidos	1994	Brasil
França	1998	França
Coréia/Japão	2002	Brasil
Alemanha	2006	Itália

Se quisermos evidenciar, quantitativamente, as campanhas vitoriosas das seleções nacionais de futebol em copas do mundo, então poderemos montar uma tabela que liste apenas o nome do país e o número de vezes em que o mesmo sagrou-se campeão do torneio. Portanto, dependendo do objetivo que desejamos alcançar, devemos organizar e relacionar os dados que transmitam mais eficientemente nossa mensagem.

Terceira Atividade - Construção de Gráficos

Na primeira parte do nosso estudo, mantivemos contato com as principais formas de gráficos e as características fundamentais de cada uma delas. Agora, finalizando o tópico referente ao Tratamento da Informação na Matemática para o Ensino Básico I, vamos nos dedicar à tarefa de construção de gráficos a partir de informações apresentadas por tabelas.

De um modo geral, se objetivamos elaborar uma representação gráfica estruturada, compreensível e que revele com fidelidade determinado fenômeno ou situação, devemos refletir, cuidadosamente, sobre:

a) a **natureza descritiva dos dados** (comparam grandezas em uma única classe de variável, assinalam tendências de comportamento em função do tempo, ou exibem a contribuição ou a participação quantitativa de cada categoria pesquisada?) que integram a tabela, para optar pelo tipo de gráfico a ser construído,
b) as **escalas** que relacionem, adequada e proporcionalmente, categorias e dados representativos do fato observado, e
c) as **legendas** a serem utilizadas na designação dos elementos constitutivos do gráfico que mereçam destaque textual.

Os gráficos constantes do próximo exemplo são concebidos levando-se em conta as observações apresentadas sobre o assunto.

Exemplo - 3

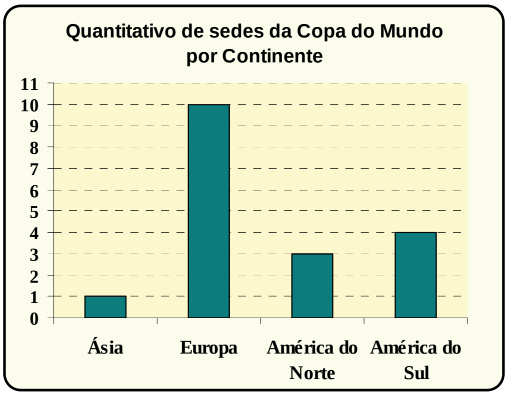
Suponhamos que a partir da tabela anterior, desejemos construir um gráfico de colunas, fazendo corresponder um continente no qual já tenha sido realizada pelo menos uma Copa do Mundo ao número de vezes em que esse fato aconteceu.

Desenvolvendo o trabalho de forma seqüencial, podemos começar criando, com base na original, a tabela abaixo que expõe, exclusivamente, a relação desejada.

Continente	No. de vezes que sediou a Copa do Mundo
Ásia	01
Europa	10

América do Norte	03
América do Sul	04

(*Você sabia que em 2010, a coluna* **Continente** *ganhará um novo elemento*?)



Como consequência, podemos construir o gráfico:

Vejamos agora como construir um gráfico de setores, objetivando evidenciar a participação percentual de cada um dos continentes acima considerados como sede de uma Copa do Mundo.

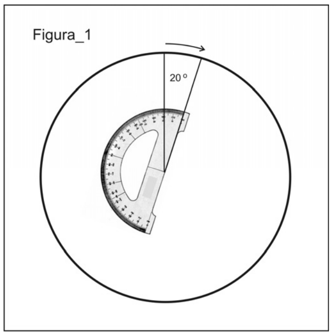
Inicialmente, calculando a participação percentual individual, chegamos à tabela:

Continente	% de vezes que sediou a Copa do Mundo
Ásia	5,6
Europa	55,5
América do Norte	16,7
América do Sul	22,2

Adotando o grau como medida de ângulos e utilizando os valores percentuais constantes da tabela acima, estabelecemos uma proporção que nos fornece o valor do ângulo que define cada setor associado a um continente, ou seja,

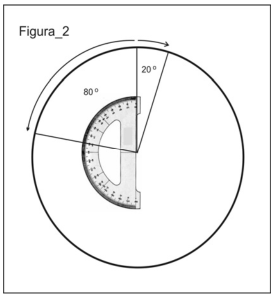
$$\frac{100\ \%\ (\ percentual\ total\ )}{percentual\ individual} = \frac{360^\circ\ (\ \hat{a}ngulo\ que\ define\ a\ circunfer\hat{e}ncia\ )}{\alpha_i\ \ (\ \hat{a}ngulo\ que\ define\ o\ setor\ )}\ ,\ i = 1, 2, 3, 4.$$

Dessa forma, α_1 (ângulo que define o setor associado à Ásia) $\cong 20^\circ$, α_2 (ângulo que define o setor associado à Europa) $\cong 200^\circ$, α_3 (ângulo que define o setor associado à América do Norte) $\cong 60^\circ$, e α_4 (ângulo que define o setor associado à América do Sul) $\cong 80^\circ$. Aqui, em cada caso, o símbolo $\cong$ significa que o resultado obtido corresponde a uma aproximação (Note que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 360^\circ$).



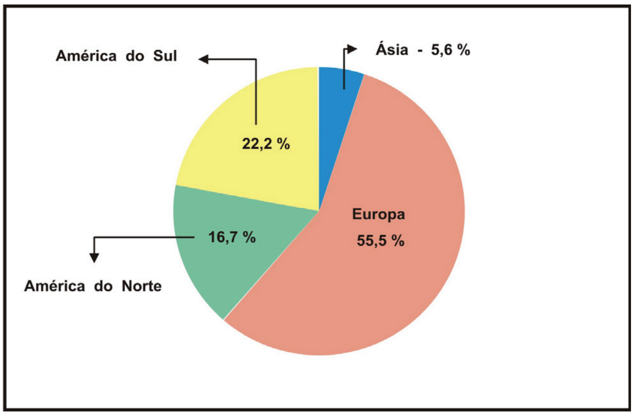
Finalmente, com o auxílio de um transferidor, marcamos em um círculo, a partir do seu centro, em qualquer posição, um ângulo correspondente a 20°, como feito, por exemplo, na Figura - 1.

Na sequência, marcamos, por exemplo, um ângulo de 80°, adjacente ao anterior, como mostra a Figura - 2.



Seguimos procedendo dessa maneira, até que todos os ângulos calculados estejam definindo os setores correspondentes.

O produto final do nosso trabalho apresenta-se sob a forma do gráfico abaixo.



No Moodle...

Chegou a hora de você se dedicar à realização das tarefas relacionadas à construção de gráficos, disponíveis na plataforma *Moodle*. Bons estudos.

4. Referências

[1] **CAMPOS**, Marcilia A., **LIMA**, Paulo F., *Introdução ao Tratamento da Informação nos Ensinos Fundamental e Médio*, em Notas em Matemática Aplicada, Vol. 16, SBMAC, 2005.
[2] **LOPES**, Maria Laura M. L., **OLIVEIRA**, Jaqueline B. P., **PEREIRA**, Pedro Carlos, **PEREIRA**, Suely de Oliveira, *Tratamento da Informação: Atividades para o Ensino Básico*, Projeto Fundão, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2002.
[3] **LOPES**, Maria Laura M. L., **OLIVEIRA**, Jaqueline B. P., **PEREIRA**, Pedro Carlos, **PEREIRA**, Suely de Oliveira, *Tratamento da Informação: Explorando dados estatísticos e noções de probabilidade a partir das séries iniciais*, Projeto Fundão, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2002.
[4] **MITTROF**, I. I., & **SAGASTI**, F. (1973). *Epistemology as general system theory: An approach to the design of complex decision-making experiments*. Philosophy of Social Sciences, 3, 117-134.
[5] **TIME** Almanac 2006, Copyright TIME Inc. Home Entertainment & Pearson Education.
[6] Portal Exame – Editora Abril S.A., disponível em http://app.exame.abril.com.br.
[7] Brasil em síntese – Sítio do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE, disponível em http://www.ibge.gov.br.
[8] Estatísticas das Eleições – Sítio do Tribunal Superior Eleitoral, disponível em http://www.tse.gov.br.