Problemy sztywne*

24 marca 2014

Zadanie 1. Zajmujemy się układem równań różniczkowych:

$$\frac{du}{dt} = 98u + 198v \tag{1}$$

$$\frac{dv}{dt} = -99u - 199v \tag{2}$$

z warunkiem początkowym $u(0) = 1$, $u(0) = 0$. Analityczne rozwiązanie układu to:

$$u(t) = 2\exp(-t) - \exp(-100t), \tag{3}$$

$$v(t) = \exp(-100t) - \exp(-t). \tag{4}$$

Używamy metod RK2 i RK4 z krokiem czasowym dobieranym automatycznie zgodnie z algorytmem z poprzednich zajęć. Całkujemy równanie do $t = 100$. Przyjąć tolerancję błędu lokalnego $tol = 0.00001$. Narysować $u(t)$ oraz $v(t)$ dla obydwu metod w skali logarytmiczno-liniowej (logarytmiczna na osi poziomej - czasu t) wraz z analitycznym rozwiązaniem (**po 10 punktów od metody**).

Narysować przyjęty przez metodę krok czasowy w funkcji czasu [to znaczy: akceptowane dt(t)] w skali liniowej (**po 10 punktów od metody**). Przekonamy się, że krok czasowy metod będzie oscylował wokół kroków krytycznych dla bezwzględnej stabilności metod: $2/100 = 0.02$ dla RK2 i $2.78/100 = 0.0278$ dla RK4. Są to bardzo małe kroki w porównaniu z wyjątkowo gładkim - od pewnej chwili czasowej prawie stałym - przebiegiem rozwiązania. Dla metody RK2 spróbować zafiksować krok do $\Delta t = 0.021$ (rezygnujemy przy tym z automatycznego doboru kroku). Metoda okaże się niestabilna (**10 punktów za ilustrację**).

Zadanie 2. Nasz problem jest *sztywny*. W problemach sztywnych jawne schematy różnicowe wymagają bardzo małego kroku czasowego. Problem zazwyczaj wynika z obecności bardzo różnych skal czasowych opisywanego zjawiska.

*Laboratorium z inżynierskich metod numerycznych, Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej AGH 2013/2014. Bartłomiej Szafran (bszafran@agh.edu.pl), Elżbieta Wach (wach@fatcat.ftj.agh.edu.pl), Dariusz Żebrowski (zebrowski@fatcat.ftj.agh.edu.pl).

Problemy sztywne rozwiązuje się przy pomocy metod niejawnych. Najlepiej sprawdzają się metody A-stabilne. Najdokładniejszą liniową metodą wielokrokową, która jest A-stabilna, jest schemat trapezów. Jego zastosowanie do równania $du/dt = f(t, y)$ zapisuje się jako

$$u^m = u^{m-1} + \frac{\Delta t}{2} \left(f(t^{m-1}, u^{m-1}) + f(t^m, u^m) \right), \tag{5}$$

gdzie indeks górny m oznacza chwilę czasową t_m. Rząd dokładności metody jest równy 2 [tak jak w RK2] – błąd lokalny $= O(\Delta t^3)$, czyli $\mathbf{n} = \mathbf{3}$ - do wstawienia w algorytmie doboru kroku czasowego. Dla naszego (liniowego) problemu z (3) i (4) można wyprowadzić (jawny) przepis analityczny:

$$u^m = -\frac{u^{m-1}(50dt^2 - 297dt - 2) - 396v^{m-1}dt}{50dt^2 + 101dt + 2} \tag{6}$$

$$v^m = -\frac{198u^{m-1}dt + v^{m-1}(50dt^2 + 297dt - 2)}{50dt^2 + 101dt + 2}. \tag{7}$$

Rozwiązać układ równań metodą trapezów z automatycznym doborem kroku czasowego przy tolerancji $tol = 0.00001$. Narysować rozwiązanie w logarytmicznej skali czasowej wraz z analitycznymi u, v (**10 pkt** za rysunek). Narysować $\Delta t(t)$ w skali liniowej (**10 pkt**).

Zadanie 3. Problem sztywności spotykamy również w równaniu

$$\frac{du}{dt} = -150\,(u + \cos(t)) + \sin(t). \tag{8}$$

Rozwiązanie tego równania w stanie ustalonym to $u(t) = -\cos(t)$. Odchylenie $u(t)$ od tej funkcji wprowadzone w warunku początkowym zostanie szybko stłumione do zera przez pierwszy człon po prawej stronie równania. Rozwiązać równanie z warunkiem początkowym $u(0) = 0$ dla $t \in (0, \frac{3}{2}\pi)$ metodą Eulera z kontrolowanym krokiem czasowym i tolerancją $tol = 0.01, 0.001, 0.0001$. Narysować rozwiązanie (wraz z $-\cos(t)$) i krok czasowy w funkcji czasu (**15 pkt**) - skala liniowa.

Zastosować wsteczną metodę Eulera (A-stabilną jak wzór trapezów). Aby wykonać krok czasowy należy rozwiązać równanie na $u(t + \Delta t)$ dane przez wsteczny schemat Eulera ($\mathbf{n} = \mathbf{3}$):

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta t \left[-150\,(u(t + \Delta t) + \cos(t + \Delta t)) + \sin(t + \Delta t)\right], \tag{9}$$

co daje

$$u(t + \Delta t) = \frac{u(t) - \Delta t\,[150\cos(t + \Delta t) - \sin(t + \Delta t)]}{1 + 150\Delta t}. \tag{10}$$

Narysować rozwiązanie (wraz z $-\cos(t)$) i przyjęty krok czasowy w funkcji czasu przy tolerancji $tol = 0.01, 0.001, 0.0001$ (**15 pkt**).