Równania różniczkowe zwyczajne*

9 marca 2014

Równanie różniczkowe
$$\frac{du}{dt} = f(t,u) \tag{1}$$
rozwiążemy prostymi schematami różnicowymi:

a) jawnym Eulera $u_n = u_{n-1} + dtf(t_{n-1}, u_{n-1})$,

b) niejawnym Eulera $u_n = u_{n-1} + dtf(t_n, u_n)$,

c) niejawnym trapezów $u_n = u_{n-1} + 0.5dt[f(t_{n-1}, u_{n-1}) + f(t_n, u_n)]$.

Zadanie 1. Błąd globalny. Rozwiążmy równanie różniczkowe
$$\frac{du}{dt} = 32t - 4 \tag{2}$$
każdą z trzech metod dla $t \in [0, 60]$ z warunkiem początkowym $u(t = 0) = 7.5$ oraz krokiem czasowym $dt = 1.5$. Narysować błąd globalny (różnicę rozwiązania dokładnego $u(t) = 16t^2 - 4t + 7.5$ i numerycznego) w funkcji t dla każdej z metod (**1.1: 10 pkt**).

Dla metody a) narysować błąd $e(t = 10)$ w funkcji dt (użyć $dt = 2^{-4}, 2^{-3}, ..., 1$) (**1.2: 5 pkt**).

Zadanie 2. Stabilność bezwzględna. Zajmiemy się równaniem
$$\frac{du}{dt} = -8(u - 16t^2 - 7), \tag{3}$$
z warunkiem początkowym $u(t = 0) = 9.5$. Dokładne rozwiązanie jest równe $u(t) = 2\exp(-8t) + 16t^2 - 4t + 7.5$. Rozwiązać równanie (3) metodą a). Porównać rozwiązanie numeryczne z dokładnym (narysować rozwiązanie numeryczne i dokładne oraz błąd globalny) dla $t \in [0, 10]$ z $dt = 0.01, 0.1, 0.25$, oraz 0.27 (**2: 10 pkt**).

Zadanie 3. Niejawna metoda Eulera. Rozwiążmy teraz równanie (3) metodą b). Jeden krok dany jest przepisem
$$u_n = u_{n-1} + \left[-8(u_n - 16t_n^2 - 7)\right] dt. \tag{4}$$

*Laboratorium z inżynierskich metod numerycznych, Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej AGH 2013/2014. Bartłomiej Szafran (bszafran@agh.edu.pl), Elżbieta Wach (Elzbieta.Wach@fis.agh.edu.pl), Dariusz Żebrowski (Dariusz.Zebrowski@fis.agh.edu.pl)

Przepis (4) to równanie liniowe na u_n, które potrafimy rozwiązać analitycznie (w praktyce rzadko się to udaje, nawet gdy znamy wzór na f):

$$u_n = \frac{u_{n-1} + 128t_n^2 dt + 56dt}{1 + 8dt}. \tag{5}$$

Powtórzyć obliczenia z zadania 2 dla $dt = 0.01, 0.1, 0.25, 0.27, 1.33$ (**3: 10 pkt**).

Zadanie 4. Iteracja funkcjonalna. Pozostajemy przy niejawnej metodzie Eulera [równanie (4)]. Wyobraźmy sobie, że prawa strona równania (3) nie jest dana w postaci wzoru (a jest np. wynikiem bardziej złożonych rachunków lub pomiarów). Nie dojdziemy wtedy do równania (5). Postarajmy się rozwiązać (4) iteracyjnie. Znamy t_n oraz u_{n-1}. Rozwiązanie na u_n zbudujemy w sposób iteracyjny

$$u_n^\mu = u_{n-1} + \left[-8(u_n^{\mu-1} - 16t_n^2 - 7)\right] dt, \tag{6}$$

gdzie μ numeruje iteracje. Przyjmiemy $u_1^0 = u_0 = 9.5$. Wstawmy $dt = 0.01$. Policzmy u_1 wg iteracji (6). Wydrukować kolejne wartości uzyskiwane dla u_1^μ aż do zbieżności - bierzemy pod uwagę 6 cyfr znaczących (**4.1: 5 pkt**). Powtórzyć rachunek dla $dt = 0.125$ oraz $dt = 0.13$ (**4.2: 5 pkt**).

Zadanie 5. Iteracja Newtona dla niejawnego Eulera. Równanie niejawnego schematu Eulera dla pojedynczego kroku najlepiej jest rozwiązać jak równanie nieliniowe – metodą Newtona. Szukamy zera funkcji $F(u_n) = u_n - u_{n-1} - dtf(t_n, u_n)$. Metoda Newtona prowadzi do iteracji

$$u_n^\mu = u_n^{\mu-1} - \frac{u_n^{\mu-1} - u_{n-1} - dtf(t_n, u_n^{\mu-1})}{1 - dtf'_u(t_n, u_n^{\mu-1})}. \tag{7}$$

Zastosować ją dla f z równania (3) dla wyliczenia pierwszej wartości przy $dt = 1.33$ ($u_1^0 = u_0 = 9.5$). Ile kroków potrzeba do zbieżności (**5: 10pkt**)?

Zadanie 6. Równanie nieliniowe. Zmieniamy równanie:

$$f(t, u) = u(u-1)(u-2). \tag{8}$$

Wstawić $u(0) = 1.9$ oraz $dt = 1$. Zbadać zbieżność iteracji Newtona (wzór (7)) dla pierwszego kroku czasowego: podać kolejne wartości u_1^μ (**6: 10pkt**).

Zadanie 7. Iloraz różnicowy zamiast pochodnej po u. Powiedzmy, że nie znamy wzoru na f. Różniczkować musimy numerycznie. We wzorze (7) zastąpić pochodną po u przez iloraz różnicowy

$$f'_u(t, u) = \frac{f(t, u + du) - f(t, u - du)}{2du}, \tag{9}$$

z $du = 0.1$. Po tej modyfikacji powtórzyć zadanie 6 (**7: 10 pkt**). Czy iteracja z ilorazem różnicowym zbiega się do właściwej wartości? Czy iteracja trwa dłużej?

Zadanie 8. Napisać program, który rozwiązuje ogólne równanie różniczkowe zwyczajne posługując się metodą c) z iteracją Newtona wykorzystującą różniczkowanie numeryczne z $du = 0.1$. Rozwiązać przy jego pomocy równanie (3) z

$dt = 0.2$ dla $t \in [0, 30]$. Narysować błąd globalny (**8: 25 pkt**). Iteracja Newtona dla metody trapezów:

$$u_n^{\mu} = u_n^{\mu-1} - \frac{u_n^{\mu-1} - u_{n-1} - \frac{dt}{2}\left(f(t_n, u_n^{\mu-1}) + f(t_{n-1}, u_{n-1})\right)}{1 - \frac{dt}{2} f'_u(t_n, u_n^{\mu-1})}. \tag{10}$$