Modelowanie rynków finansowych
Zestaw 4

1. Wygenerować n par g_1, g_2 losowych liczb ze standardowego rozkładu normalnego $N(0,1)$, a następnie utworzyć z nich kombinacje liniowe $x = ag_1 + bg_2 + c$, $y = dg_1 + eg_2 + f$, gdzie a, b, c, d, e, f są zadanymi parametrami. Narysować histogramy dla liczb losowych x oraz y i dofitować do nich krzywe Gaussa. Wyliczyć średnią i wariancję dla tych rozkładów i porównać ich wartości z wartościami teoretycznymi wyrażonymi za pomocą parametrów a, b, c, d, e, f. Wyznaczyć również kowariancję $\text{cov}(x, y)$ oraz współczynnik korelacji Pearsona $\rho_{xy} = \frac{\text{cov(x,y)}}{\sigma_x \sigma_y}$, oraz narysować na płaszczyźnie xy punkty odpowiadające wygenerowanym parom. Zaznaczyć na tym wykresie elipsę ze środkiem leżącym w środku ciężkości rozkładu punktów i półosiami ułożonymi w kierunkach własnych macierzy kowariancji o długościach równych wektorom własnym tej macierzy. Dla przykładu przyjąć w obliczeniach: $n = 10^5$, $a = 2$, $b = -1$, $c = -1$, $d = 1$, $e = 0.5$, $f = 2$.

2. Wygenerować n razy po m liczb losowych $g_1, \ldots, g_m$ ze standardowego rozkładu normalnego $N(0,1)$, a następnie utworzyć z nich kombinacje losowe

$$x_j = \sum_{k=1}^{m} A_{jk} g_k + \mu_j,$$

gdzie A jest daną rzeczywistą macierzą o rozmiarach m na m, a μ_j, $j = 1, \ldots, m$ jest danym wektorem m liczb. Na podstawie liczb x_j wyestymować macierz kowariancji:

$$C_{ij} = \text{cov}(x_i, x_j)$$

oraz macierz korlacji Pearsona

$$\rho_{ij} = \frac{C_{ij}}{\sqrt{C_{ii} C_{jj}}}.$$

Rachunki przeprowadzić dla $n = 10^5$ oraz $m = 4$. Znaleźć główne składowe (wektory własne i wartości własne macierzy C). Wyniki na macierz C porównać z wynikami teoretycznymi $C = AA^T$.

3. Napisać program na rozkład Choleskiego $C = LL^T$ i na tej podstawie znaleźć rozkład dla macierzy

$$C = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.4 & -0.6 \\ 0.4 & 1.0 & 0.0 \\ -0.6 & 0.0 & 4.0 \end{pmatrix}$$

Macierzy L użyć w zadaniu poprzednim do wygenerowania n trójek skorelowanych gaussowskich liczb losowych, a następnie z wygenerowanej próbki wyestymować macierz C oraz macierz korelacji Pearsona.