Child-Langmuir 模型

模型概述

Child-Langmuir 模型是研究阴极上空间电荷限电流（Space-Charge Limited Current, SCLC）的模型。

物理背景

C. Child 于 1911 年提出 Child 定律，该定律是说在平行两极板间的电压 V 固定的情况下，其极板间电流密度存在最大值 J，并且 J 与 V 成 3/2 次方关系，因此又被称为 3/2 次方定律。1911 年发表的情况针对的是离子流，I. Langmuir 在 1913 年将 Child 的方法应用于电子流，因此该定律又被称为 Child-Langmuir 定律。

物理图像

阴极上空间电荷限的本质是：在两极板间的电流产生的空间电荷场会减小发射极的引出电场，当电流大到一定程度时，发射极表面的总引出电场降到 0，逸出的电子无法获得加速，发射电流无法进一步增加，因此电压固定时发射电流存在饱和值。

Child-Langmuir 模型
稳态情形

Child-Langmuir 模型的假定如下：

- 不考虑相对论效应
- 忽略极板间运动的粒子间的散射
- 极板间的粒子是同一的（同质量，同电荷量）
- 阴极上的初始发射速度为 0

那么当两极板间电流处于稳态时，我们可以直接利用 Poisson 方程导出空间电荷限电流公式：

推导

我们考虑两极板间电流中的一点，那么有 Poisson 方程成立：

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

其中 V 为该点电势，ρ 为该点电荷密度。

Child-Langmuir 模型

稳态情形

推导

由于阴极上（$V=0$）粒子的初始动能为 0，根据能量守恒，电势 V 处粒子的能量满足：

$$\frac{1}{2}mv^2 + qV = 0$$

考虑到电荷守恒及稳态条件，有：

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

而电流密度 $\vec{J}$ 满足：

$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

Child-Langmuir 模型
稳态情形

推导

我们仅考虑一维情形（束流沿 z 轴运动），可知 J 是个常量，联立以上各式可得关于电势 V 的方程：

$$\frac{d^2V}{dz^2} + AV^{-\frac{1}{2}} = 0$$

其中 $A = -\frac{J}{\varepsilon_0}\sqrt{-m/2q}$。解上面方程并代入边界条件：

$$V|_{z=0} = 0$$
$$V|_{z=d} = V_d$$

可得电压 V_d 与最大电流密度 J 之间的关系为：

$$J = \frac{4\varepsilon_0}{9}\sqrt{-2q/m} \cdot \frac{V_d^{\frac{3}{2}}}{d^2}$$

Child-Langmuir 模型

稳态情形

对于电子而言，我们就得到阴极上的空间电荷限电流密度为 $(V_d \to V)$：

阴极的空间电荷限电流密度

$$J = \frac{4\varepsilon_0}{9}\sqrt{2e/m}\cdot\frac{V^{\frac{3}{2}}}{d^2}$$

注意上式我们是在平行电极板情形下推导得到的，但是该公式对于圆柱电极板情形也成立，大家可以自己推导一下作为练习。

在带有电子枪的电子器件中，人们定义导流系数 $P = I/V^{3/2}$来衡量电子枪的发射能力，P 的单位为朴。一般微波器件的电子枪，导流系数在$0.1\ \mu\mathrm{P}$–$1\ \mu\mathrm{P}$的范围。导流系数反映了阴极发射电流 I 与阴阳极间电压 V 之间的关系，它仅取决于枪的几何尺寸。

Child-Langmuir 模型

非稳态情形