日期:　　/

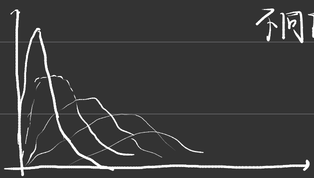
χ^2分布

定义6.2.1，设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且服从标准正态分布 $N(0,1)$，称 $\chi^2=\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 服从自由度为n的 χ^2分布

$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$

概率密度 $f_{\chi^2}(x)=\begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$



不同自由度下 $f_{\chi^2}(x)$ 概率密度曲线

χ^2分布性质:

1) 对于 $\chi^2=\sum_{i=1}^{n} X_i^2$，$X_i \sim N(0,1)$ $i=1,2,\cdots,n$ 有 $E(\chi^2)=n$，$D(\chi^2)=2n$

2) 若 $X_1 \sim \chi^2(n_1)$，$X_2 \sim \chi^2(n_2)$ 且两者相互独立，则 $X_1+X_2 \sim \chi^2(n_1+n_2)$

3) 当n很大，$\chi^2=\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 近似服从正态分布 $N(n,2n)$

日期:　　/

6.2.3 t分布

定义 6.2.2 设 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$ 且 X、Y 相互独立，称

$$T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$ 服从自由度为 n 的 t 分布

记为 $T\sim t(n)$

概率密度 $$f(t)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\quad -\infty<t<\infty$$

t分布性质：

1) $f(t)$ 为偶函数，当 $n\to+\infty$ 时

$$f(t)\to\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$$ 当n充分大，t分布近似服从标准正态分布.

2) t分布的上侧α分位数 $t_\alpha(n)$ $(P\{T>t_\alpha(n)\}=\alpha)$

$$t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)$$

6.2.4 F分布：

定义 6.2.3 设 $U\sim\chi^2(m)$，$V\sim\chi^2(n)$，且 U 与 V 相互独立，则称

$$F=\frac{U/m}{V/n}$$

→ 第一自由度为 m 第二自由度为 n 的 F 分布

日期:　　/

$F \sim F(m, n)$

$$f_F(t) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\dfrac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} t^{\frac{m}{2}-1} \left(1+\dfrac{m}{n}t\right)^{-\frac{m+n}{2}} & t>0 \\ 0 & t\le 0 \end{cases}$$

F分布性质:

1) 若 $F \sim F(m,n)$，则 $\frac{1}{F} \sim F(n,m)$

2) $F(m,n)$ 上侧 α 分位数 $F_\alpha(m,n)$ ($P(F > F_\alpha(m,n)) = \alpha$)

$$F_{1-\alpha}(m,n) = \frac{1}{F_\alpha(n,m)}$$