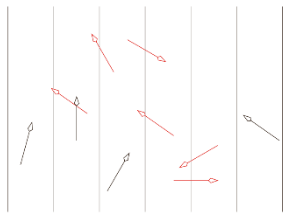
Problema de la Aguja de Buffon



Un problema planteado en el s. XVIII por George Louis Leclerc, conde de Buffon, fue el siguiente:

Se tiene rectas paralelas equidistantes entre sí, y se arroja una aguja de longitud mayor o igual a la distancia entre dos rectas.

¿Cuál es la probabilidad de que una aguja corte a una de las rectas?

Fijando algunas constantes y variables, para la resolución del problema

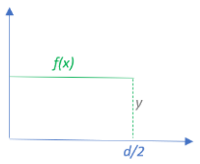
- d la distancia entre las rectas.
- l la longitud de la aguja.
- θ la medida del ángulo agudo entre la aguja (o su prolongación) y una de las rectas.
- x la distancia entre el punto medio de la aguja y la recta más cercana

x y θ son v.a con distribución uniforme

$$0 \leq x \leq d/2$$

$$0 \leq \theta \leq \pi/2$$

Procediendo a hallar la función densidad f(x) y g(θ) de ambas variables



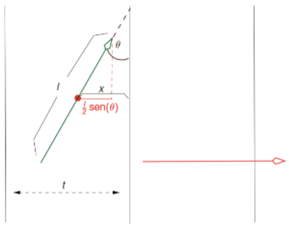
Para $f(x)$, ya que $\int f(x)dx$=1, entonces $\frac{d}{2}.y = 1$

Donde se obtiene: $f(x) = \frac{2}{d}$

Similarmente, se obtiene para g(θ): $g(\theta) = \frac{2}{\pi}$

Luego, la función densidad conjunta, de ambas v.a.i es $f(x).g(\theta) = \frac{2}{d}.\frac{2}{\pi} = \frac{4}{d\pi}$

Además, se observa de la gráfica, que una aguja cortará la recta si y solo si la distancia de su centro a una de las rectas es menor que $\frac{l}{2}.sen(\theta)$, es decir $x < \frac{l}{2}sen(\theta)$



Posteriormente se calculara la P(la aguja corte la recta) como la integral de la función densidad conjunta.

$$P = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\frac{l}{2}sen(\theta)} \frac{4}{d\pi} dxd\theta$$

$$P = \frac{4}{d\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\frac{l}{2}sen(\theta)} dxd\theta = \frac{4}{d\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{l.sen\theta}{2}d\theta = \frac{4l}{2d\pi}[-cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2l}{\pi d}$$

Tomando $l = d$, obtenemos $2/\pi$