

4. METODOLOGIA

Habiendo abordado ya las cuestiones técnicas referentes a la justificación de los teoremas de convergencia se proceden a ilustrar con un ejemplo el proceso de cálculo de integrales a través de números aleatorios.

Supongamos que se requiere calcular el valor de $\int_0^1 x^3 dx$, es evidente que esta integral da como resultado $\frac{1}{4}$ pero sirve como ejemplo.

El proceso entonces es el siguiente:

- Generar una gran cantidad de números aleatorios entre 0 y 1 (para nuestro ejemplo $n=1000$).
- Evaluar $f(U_i)$ (en el ejemplo U_i^3)
- Sumar y dividir entre n ,

$$\frac{\sum f(U_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{1000} U_i^3}{1000}$$

- Aproximar la integral al resultado

$$\hat{\theta}'' = \frac{\sum f(U_i)}{n} \rightarrow \int_0^1 f(x) dx$$

En el ejemplo de integrar x^3 entre 0 y 1 se utilizó una serie de números aleatorios uniformes generados en Excel con una aproximación de 0.254 con un error del 1.6% con respecto al verdadero valor de la Integral.

La cuestión radica ahora en encontrar alguna transformación apropiada para calcular cualquier integral definida.

$$\text{Con } dz = -\frac{1}{(x+1)^2} dx = -z^2 dx$$

Y obteniendo

$$\theta = \int_0^1 1/z^2 f\left(\frac{1}{z} - 1\right) dz$$

Este método de evaluar integrales puede ser mejorado con algunas técnicas de reducción de varianza, como lo son de las variables antitéticas, variables de control, entre otros.

$$\theta = \int_0^1 f(x) dx$$

Si se hace la sustitución:

$$z = \frac{x-a}{b-a} \quad dz = \frac{dx}{b-a}$$

Se tiene que

$$\theta = \int_0^1 f(a + (b-a)z)(b-a) dz$$

O en otros términos

$$\theta = \int_0^1 g(z) dz$$

Con $g(z) = (b - a)f(a + (b - a)z)$

Y queda solucionando el problema de la integral con límites $[a, b]$ de integración.

Así sustituciones análogas permiten resolver las integrales impropias tipo

$$\theta = \int_0^{\infty} f(x) dx$$

Haciendo simplemente la sustitución

$$z = \frac{1}{x + 1}$$

Artículos relacionados

- Valuación de opciones por Monte-Carlo
(Aplicación de integrales por Montecarlo en las finanzas)
- **Integración por el método de Monte Carlo. Resolución de la ecuación de Laplace**

Considere la ecuación de Laplace en un dominio suave $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y) = g(x, y) & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (*)$$

donde $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ es el Laplaciano de u .

Esta ecuación modela por ejemplo el potencial eléctrico dentro de Ω cuyo contorno se encuentra a potencial g , o el estado estacionario de la temperatura en cuando el borde se mantiene a temperatura g .

El algoritmo de Monte Carlo para aproximar u consiste en lo siguiente. Al introducir una discretización por diferencias finitas de (*), sobre una malla suficientemente fina, también introducimos probabilidades de transición entre los nodos de esta malla. Esto se debe a que la misma manera de discretizar está asignándole un peso a cada nodo vecino en el cálculo del valor de la solución de la ecuación en un nodo dado. La idea del método es que para conocer el valor de la solución u en un nodo (x_i, y_i) de la malla, se larga una partícula desde ese nodo y se la hace evolucionar de acuerdo a las probabilidades de transición calculadas, hasta que choca con el borde, almacenándose el valor del dato de contorno en ese punto. Se repite este procedimiento con una grande cantidad M de partículas, y se estima el valor de $u(x_i, y_i)$ como el promedio de esos valores.

En primer lugar puede aplicar este método en el dominio rectangular $\Omega = [0; 1] \times [0; 1]$ con $u(x, y) = \sin(\pi x)e^{\pi y}$ (i.e. $g(0, \cdot) = g(1, \cdot) = 0$, $g(x, 0) = \sin(\pi x)$, $g(x, 1) = e^{\pi} \sin(\pi x)$):

1. Defina una malla rectangular: $x_i = \frac{i}{N}, y_i = \frac{i}{N}$, $0 \leq i \leq N$, con N un valor adecuado (podría comenzar con $N \sim 10$, por ejemplo).

2. La discretización habitual del Laplaciano conduce a la siguiente ecuación:

$$\Delta u(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}}{h^2} = 0,$$

donde $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$ lo que da las siguientes probabilidades de transición: *una partícula en el nodo (x_i, y_j) tiene probabilidad $1/4$ de pasar a cualquiera de los cuatro nodos adyacentes.*

3. Utilice estas probabilidades de transición y el procedimiento descrito anteriormente para calcular la solución en el punto $(x, y) = (1/2, 1/2)$ por ejemplo. Compare con la solución exacta $u(1/2, 1/2) \simeq 4,8$. Repita este cálculo para varios valores de N , y para varios números diferentes de partículas (valores de $M \sim 1000$ o mayores, podrían ser adecuados). Haga gráficos del error en función de N y de M .

En segundo lugar, puede aplicar el método para hallar la solución en la corona circular $\Omega = \{1 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ con dato de contorno $g(1, \theta) = 4, g(3, \theta) = 6$ (donde $(r; \theta)$ son las coordenadas polares).