§4.3 分枝定界法

一、整数线性规划（*IP*）的特征

1、可行域不是凸集；

2、可行解的个数是有限的；

3、当可行解个数不多时，可以用穷举法求解。

二、分枝定界法

用来求解整数线性规划的方法。

三、原理

在求解某问题时，先放宽或取消其中某些约束，求解一个较简单的替代问题，而且总是保证原问题的可行域包含在替代问题的可行域中。

四、步骤

以纯整数规划为例，已知

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$(IP) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \cdots m) \\ x_j \geq 0, (j = 1, 2, \cdots n) \text{且为整数} \end{cases}$$

其松弛问题为：

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$(L_0) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \cdots m) \\ x_j \geq 0, (j = 1, 2, \cdots n) \end{cases}$$

第一步 求解松弛问题（L_0）

先不考虑整数约束，解（ IP ）的松弛问题（ L_0 ），可能得到以下情况之一：

①若（ L_0 ）无可行解，则（ IP ）也无可行解，结束。

②若（ L_0 ）有最优解，并符合（ IP ）的取整条件，则（ L_0 ）的最优解即为（ IP ）的最优解，结束。

③若（ L_0 ）有最优解，但不符合（ IP ）的整数条件，转入下一步。

为讨论方便，设（ L_0 ）的最优解为：

$$x^{(0)}=(b_1',b_2',\cdots,b_r',\cdots,b_m',0,\cdots,0)^T$$

其中 $b_i'(i=1,2,\cdots,m)$ 不全为整数

第二步 分枝与定界

记（ IP ）的目标函数最优值为Z^*。

以松弛问题（L_0）的最优解$X^{(0)}$对应的目标函数值Z_0作为Z^*的上界。

在(L_0)的最优解 $X^{(0)}$中，任选一个不符合整数条件的变量，例如$x_r = b_r'$（不为整数），以$[b_r']$表示不超过b_r'的最大整数。构造两个约束条件

$$x_r \le [b_r'] \quad \text{和} \quad x_r \ge [b_r'] + 1$$

将这两个约束条件分别加入问题（ L_0 ），形成两个子问题（ L_1 ）和（ L_2 ）。

注意：（L_1）和（L_2）的可行域之并集包含（IP ）的全部可行解。

依次求解两个子问题（L_1）和（L_2），将出现两种情况：

①某个子问题的最优解满足变量取整的要求，即为原（IP）的整数可行解，进入第三步；

②两个子问题的最优解均非整数可行解，则选目标函数值较大的子问题继续分枝求解，直至出现某个子问题的最优解满足变量取整要求，即为原（IP）的整数可行解，进入第三步。

第三步 比较与剪枝

若出现两个或更多整数可行解，则仅保留目标函数值较大的一个。

将各分枝的目标函数值与保留的整数可行解进行比较，并把目标函数值小于整数可行解的目标函数值的分枝剪去，将出现两种情况：

①仅保留整数可行解，其他分枝均被剪去，则该整数可行解即为原（IP）的最优解，结束；

②除保留整数可行解外，还有其他未被剪去的分枝，则取目标函数值最大的继续分枝，直至出现新的整数可行解，重复第三步。

例　用分枝定界法求解下列IP问题

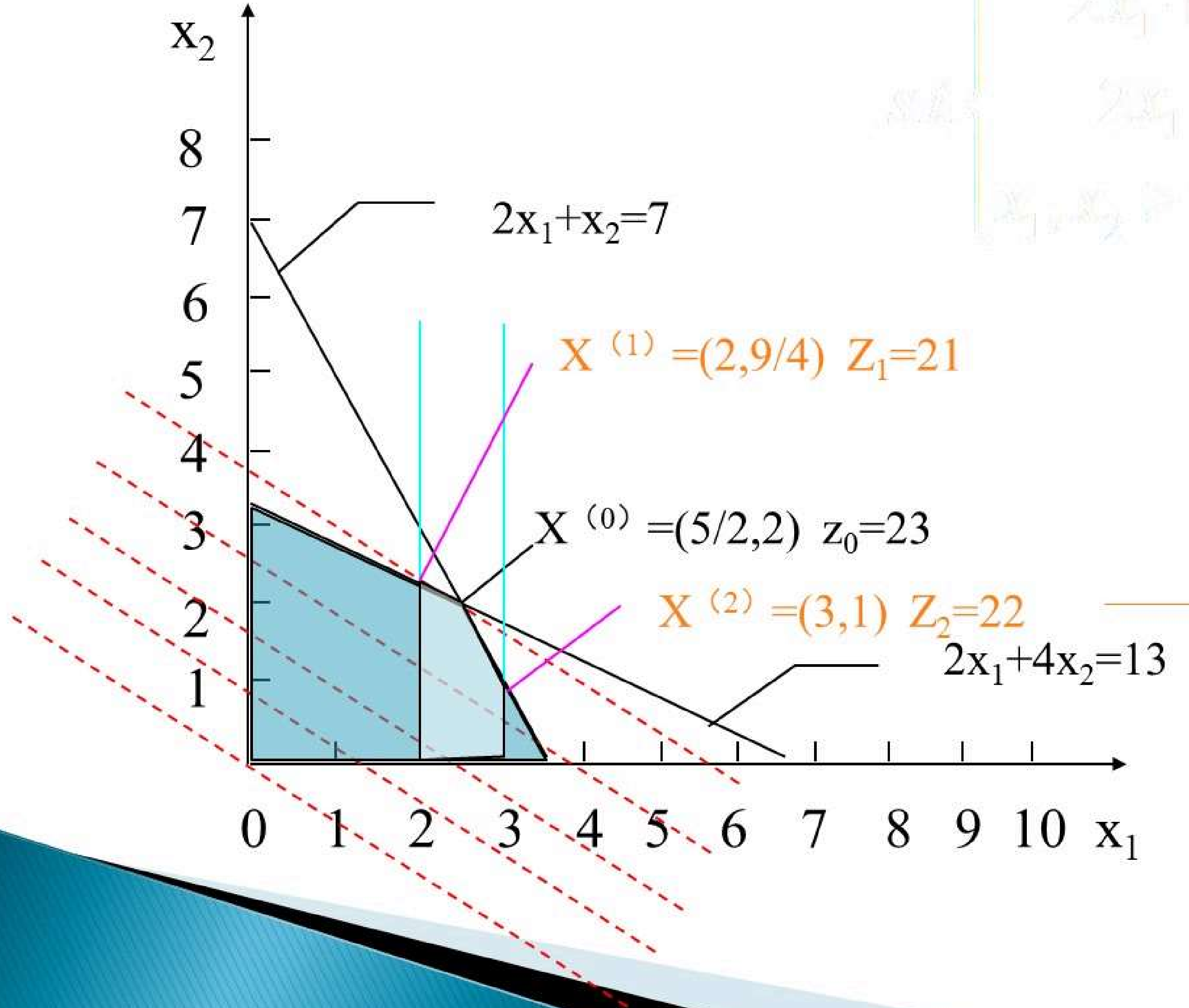
$$\max z = 6x_1 + 4x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 13 \\ 2x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{ 均为整数} \end{cases}$$

图解法

$$\max Z = 6x_1 + 4x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 13 \\ 2x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且为整数} \end{cases}$$



→ **原IP的最优解**

原IP的松弛问题L_0：

$$\max z = 6x_1 + 4x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 13 \\ 2x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

松弛问题的最优解为：

$x^{(0)} = (5/2, 2)^T$, $Z_0 = 23$

$x_1 \le 2$

$$MaxZ = 6x_1 + 4x_2$$

$$ST:\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 13 \\ 2x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$X^{(1)} = (2, \frac{9}{4})^T$$

$$Z_1 = 21$$

$x_1 \ge 3$

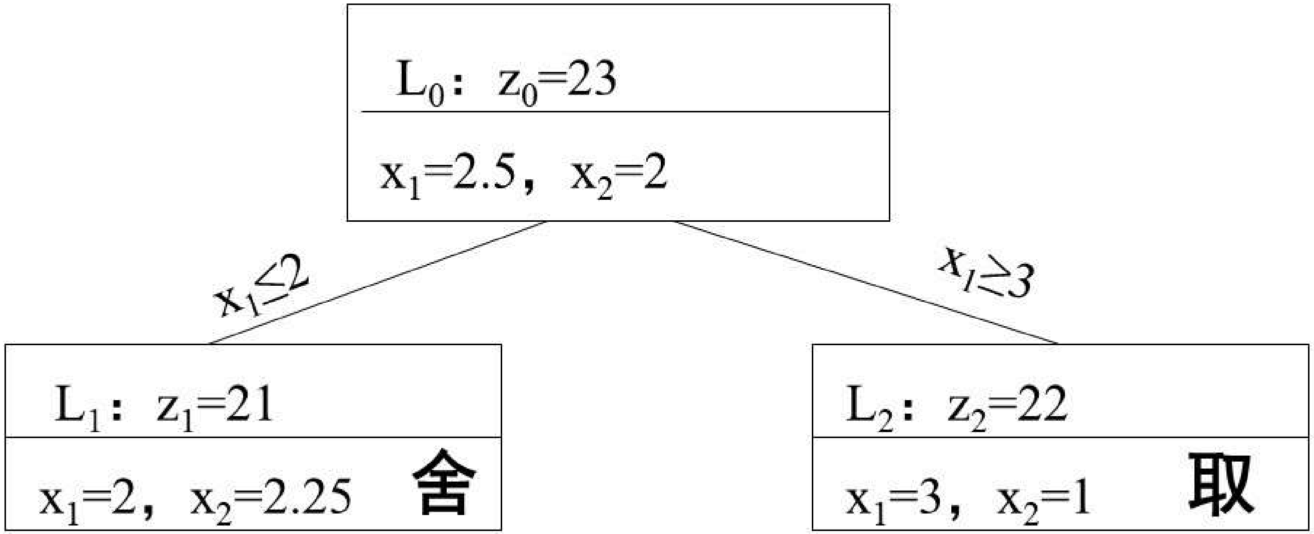
$$MaxZ = 6x_1 + 4x_2$$

$$ST:\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 13 \\ 2x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1 \ge 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$X^{(2)} = (3, 1)^T$$

$$Z_2 = 22$$

松弛问题：



原IP的最优解为 当$X=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$时，$z_{\max}=22.$

注意：

当存在若干变量有取整约束时，分枝既广且深，在最坏的情况下相当于组合所有可能的整数解。

一般整数规划问题属于一类未解决的难题，称为NP-complete，只有少数特殊问题有好的算法，例如分配问题。

例　求解下列整数线性规划。

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ 2x_1 + \ \ x_2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0，\text{且均为整数} \end{cases}$$

解：其松弛问题为

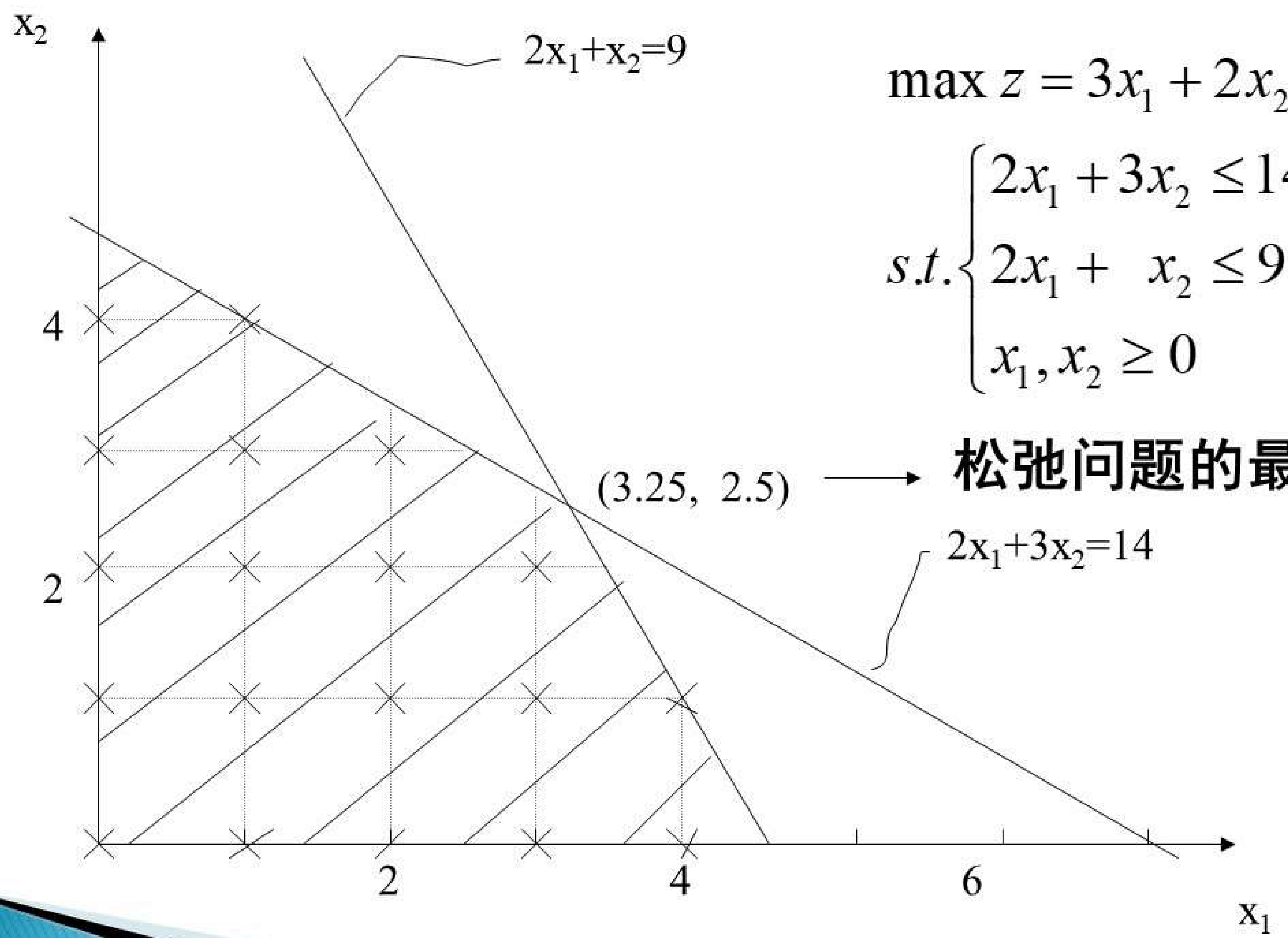
$$L_0{:}\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ 2x_1 + \ \ x_2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

松弛问题：

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ 2x_1 + \ \ x_2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

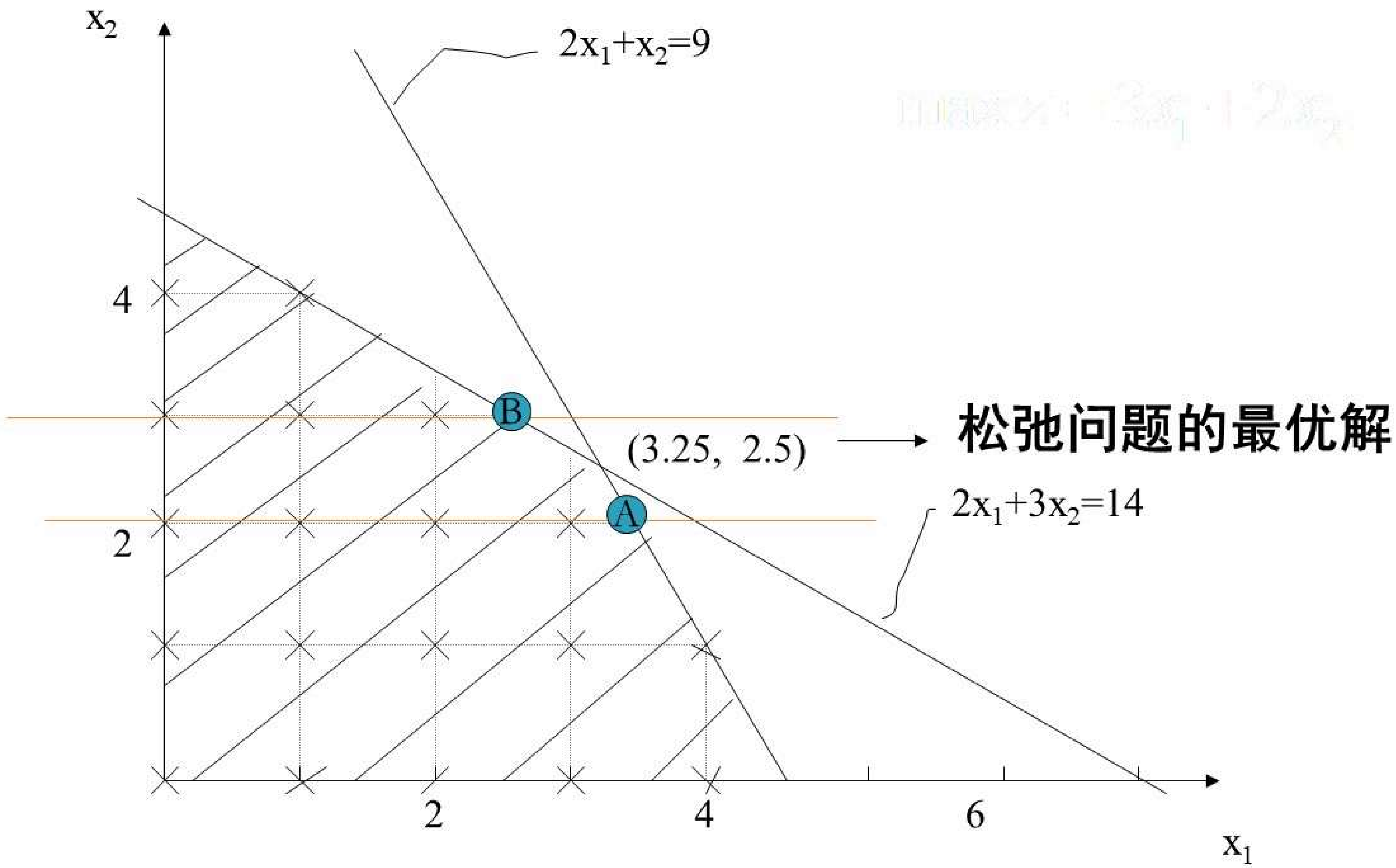


→ **松弛问题的最优解**

选x_2=2.5分枝，引入条件$x_2 \leqslant 2$, $x_2 \geqslant 3$, 得到两个子问题：

$$L_1: \max z = 3x_1 + 2x_2 \qquad s.t.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ 2x_1 + x_2 \le 9 \\ x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$L_2: \max z = 3x_1 + 2x_2 \qquad s.t.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ 2x_1 + x_2 \le 9 \\ x_2 \ge 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



点A（3.5,2）为L_1的最优解，此时z=14.5

点B（2.5,3）为L_2的最优解，此时z=13.5

都不是原IP的可行解，

取边界值较大的z=14.5，对x_1=3.5继续分枝。

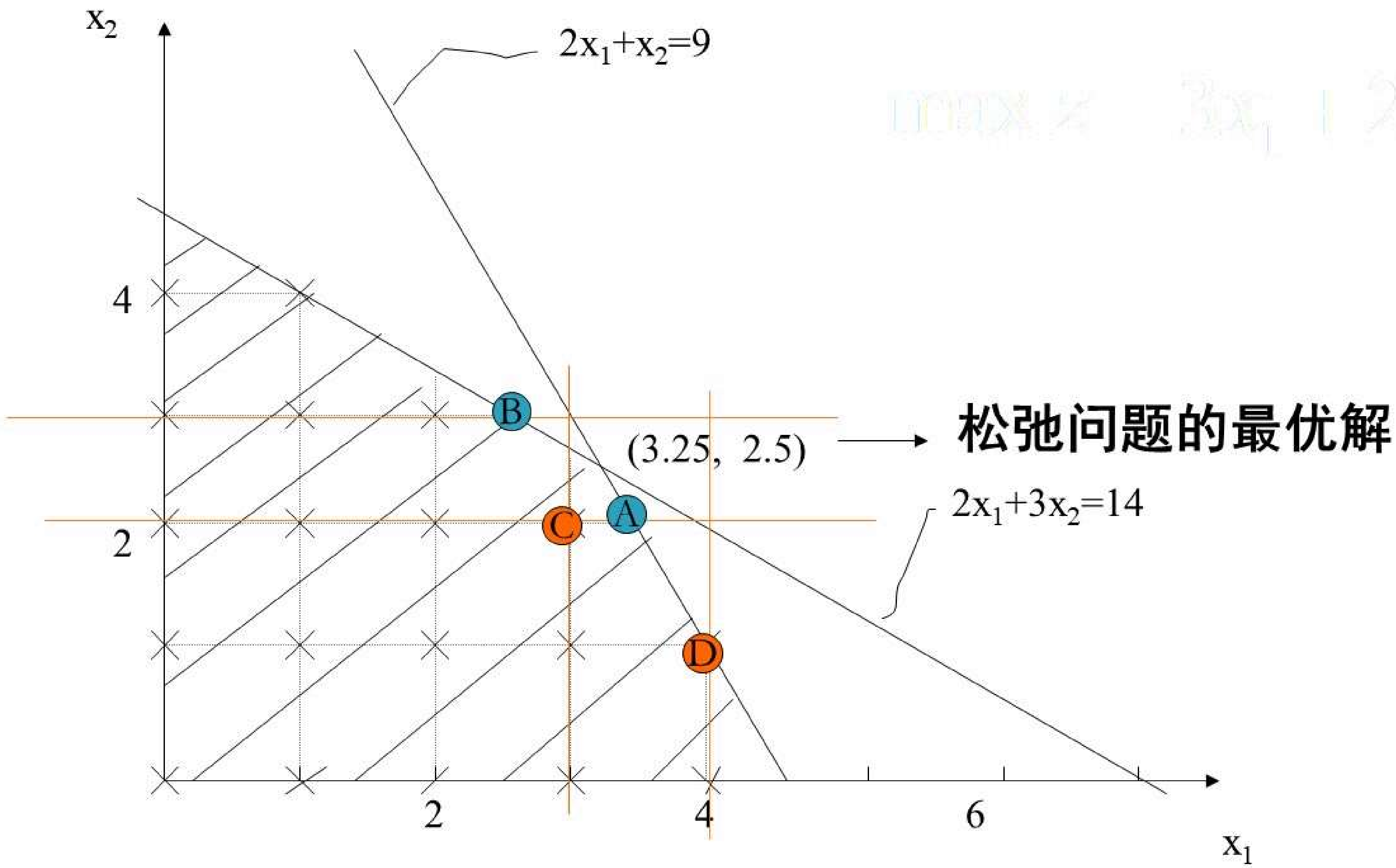
选x_1分枝，引入条件$x_1 \leqslant 3, x_1 \geqslant 4$，得到两个子问题：

$$L_{11}: \max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ 2x_1 + \ \ x_2 \le 9 \\ \qquad\quad\ x_2 \le 2 \\ \ x_1 \qquad\quad \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$L_{12}: \max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ 2x_1 + \ \ x_2 \le 9 \\ \qquad\quad\ x_2 \le 2 \\ \ x_1 \qquad\quad \ge 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

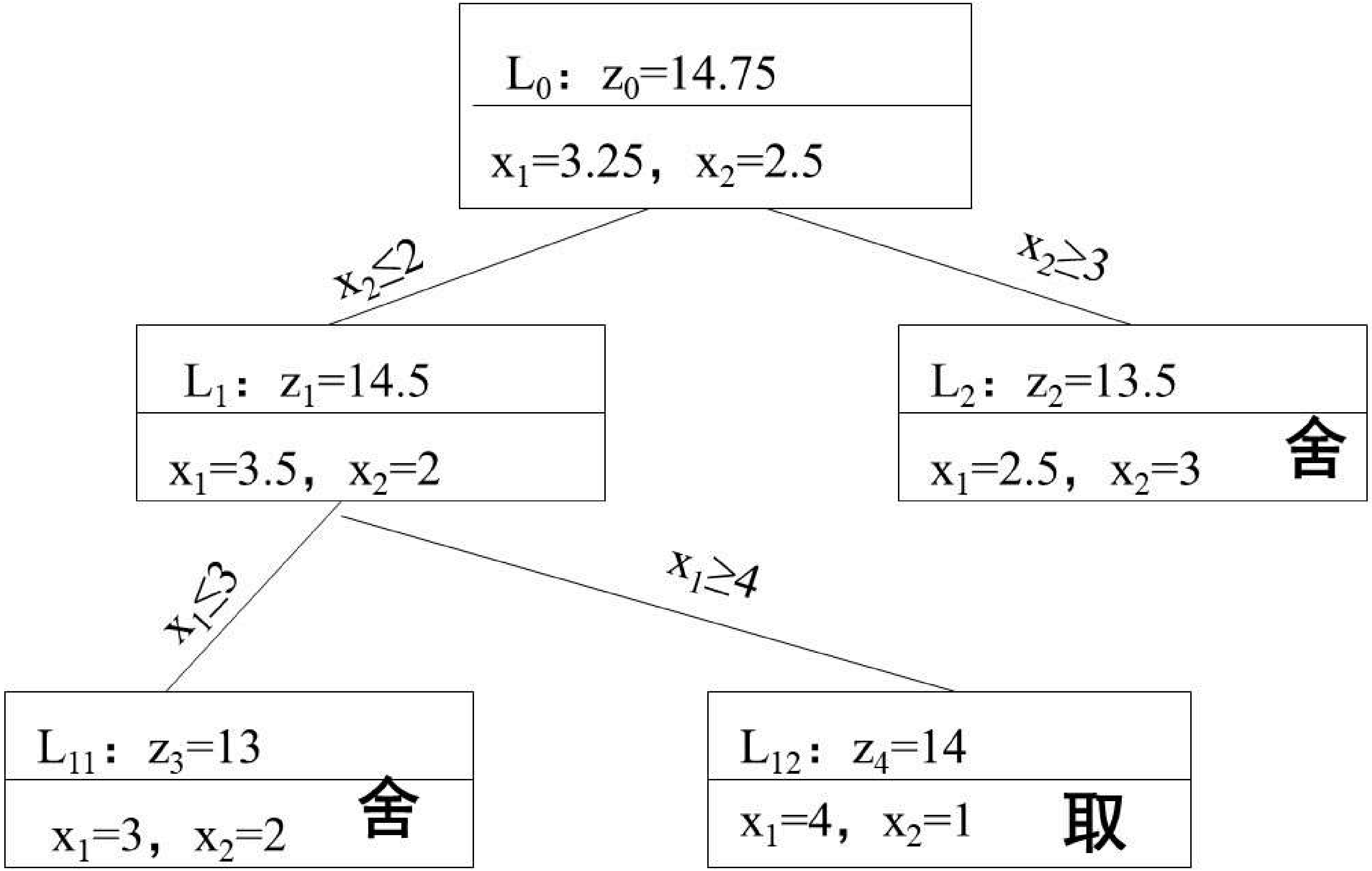


点C（3,2）为L_{11}的最优解，此时$z=13$

点D（4,1）为L_{12}的最优解，此时$z=14$

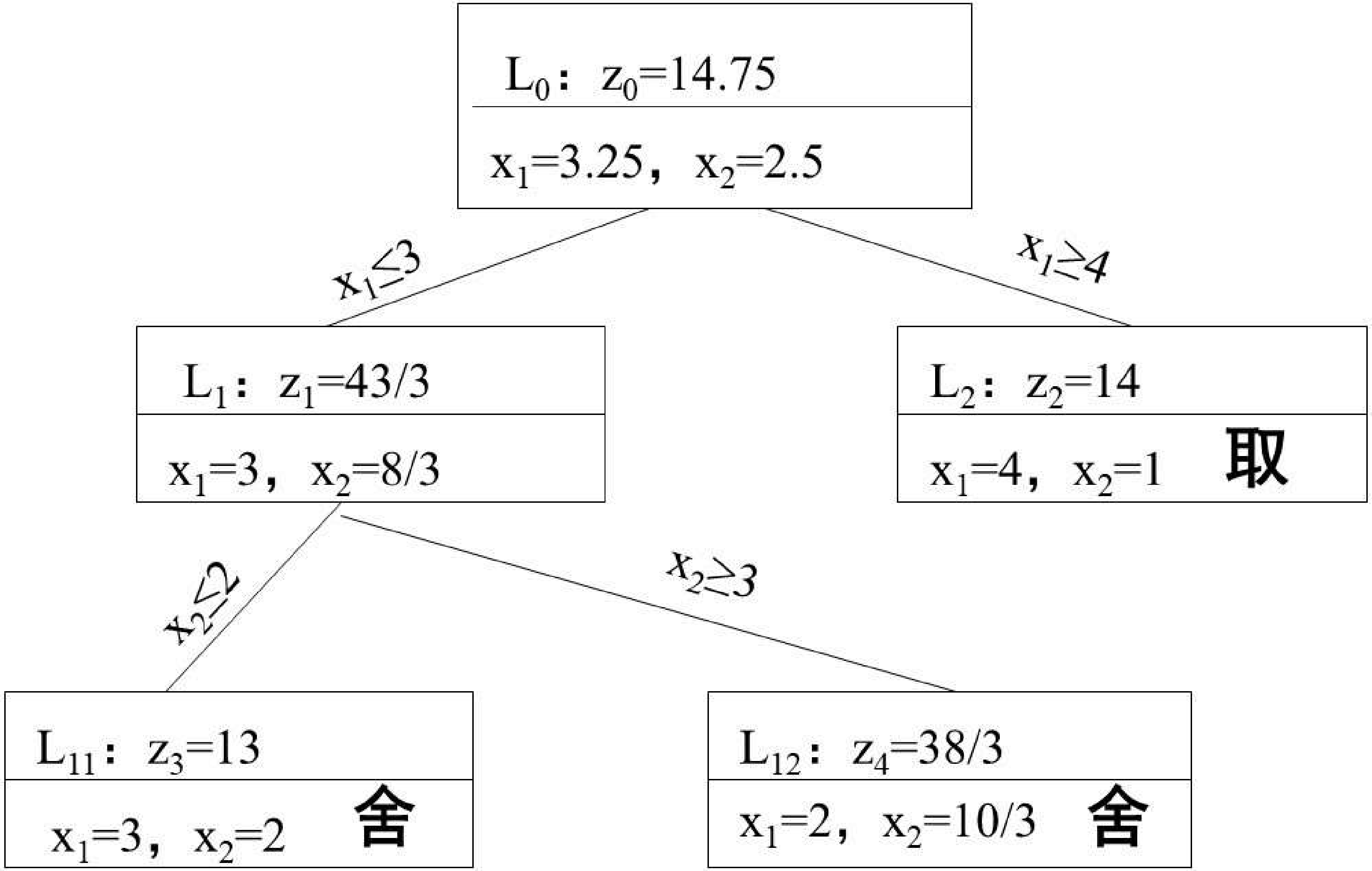
都是原IP的可行解，

取边界值较大的$z=14$，开始剪枝。


L0： z0=14.75
x1=3.25， x2=2.5
x2≤2
x2≥3
L1： z1=14.5
x1=3.5， x2=2
L2： z2=13.5
x1=2.5， x2=3
舍
x1≤3
x1≥4
L11： z3=13
x1=3， x2=2
舍
L12： z4=14
x1=4， x2=1
取

综上，原IP的最优解为

本例也可以先对x_1=3.25分枝：



综上，原IP的最优解为

例　用分枝定界法求解整数规划问题（用图解法计算）

$$
\begin{cases}
x_1 - x_2 \geq -2 \\
5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\
x_1 \leq 4 \\
x_1, x_2 \geq 0 \text{且全为整数}
\end{cases}
$$

记为（*IP*）

解：首先去掉整数约束，变成一般线性规划问题

$$
\min Z = -x_1 - 5x_2
$$

$$
\begin{cases}
x_1 - x_2 \geq -2 \\
5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\
x_1 \leq 4 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{cases}
$$

记为（*LP*）

§4.5 应用举例

例1　东方大学计算机实验室聘用4名大学生（代号1-4）和2名研究生（代号5、6）值班答疑。已知每人从周一至周五每天最多可安排的值班时间及每人每h值班的报酬如下表：

学生代号	报酬（元/h）	每天最多可安排的值班时间				
		周一	周二	周三	周四	周五
1	10.0	6	0	6	0	7
2	10.0	0	6	0	6	0
3	9.9	4	8	3	0	5
4	9.8	5	5	6	0	4
5	10.8	3	0	4	8	0
6	11.3	0	6	0	6	3

该实验室每天开放时间为上午8：00至晚上10：00，开放时间内须有且仅须有一名学生值班。规定大学生每周值班不少于8h，研究生每周不少于7h，每名学生每周值班不超过3次，每次值班不少于2h，每天安排值班的学生不超过3人，且其中必须有一名研究生。

试为该实验室安排一张人员值班表，使支付的总报酬最少。

解：用i表示学生代号，即i=1-6；j表示星期j，即j=1-5；

a_{ij}表示学生i在周j最多可安排的值班时间；

c_i为学生i每小时值班的报酬。

设决策变量为：

$$y_{ij}=\begin{cases}1, \text{安排学生i在周j值班} \\ 0, \text{否则}\end{cases}$$

x_{ij}为学生i在周j值班的时间

其中$i=1,2,3,4,5,6;\ j=1,2,3,4,5$

$$s.t.\begin{cases}2y_{ij}\le x_{ij}\le a_{ij}x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{5}x_{ij}\ge 8(i=1,2,3,4) \\ \sum_{j=1}^{5}x_{ij}\ge 7(i=5,6) \\ \sum_{i=1}^{6}x_{ij}=14(j=1,2,3,4,5) \\ \sum_{j=1}^{5}y_{ij}\le 3(i=1,2,3,4,5,6) \\ \sum_{i=1}^{6}y_{ij}\le 3(j=1,2,3,4,5) \\ y_{5j}+y_{6j}\ge 1(j=1,2,3,4,5) \\ x_{ij}\ge 0, y_{ij}=0\text{或}1(i=1,2,3,4,5,6;\ \ j=1,2,3,4,5)\end{cases}$$

例2 红星日用化工厂为发运产品，下一年度需要6种不同容积的包装箱。每周包装箱的需求量及生产一个的可变费用如下表：

包装箱代号	1	2	3	4	5	6
容积（m^3）	0.08	0.1	0.12	0.15	0.20	0.25
需求量（个）	500	550	700	900	450	400
可变费用（元/个）	5.0	8.0	10.0	12.1	16.3	18.2

由于生产不同容积包装箱时需要进行专门准备、下料等，生产某一容积包装箱的固定费用均为1200元。又若某一容积包装箱数量不够时，可用比它 容积大的代替。

试问该化工厂应订做哪几种代号的包装箱各多少个，才能使费用最节省。

解：用j表示包装箱的代号，即j=1-6

目标函数为 $\min z = 1200\sum_{j=1}^{6} y_j + 5x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 12.1x_4 + 16.3x_5 + 18.2x_6$

$$
s.t.\begin{cases}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3500 \\
x_6 \ge 400 \\
x_5 + x_6 \ge 850 \\
x_4 + x_5 + x_6 \ge 1750 \\
x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \ge 2450 \\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \ge 3000 \\
x_j \le M y_j (j = 1,2,3,4,5,6) \\
x_j \ge 0, y_j = 0 或 1 (j = 1,2,3,4,5,6)
\end{cases}
$$