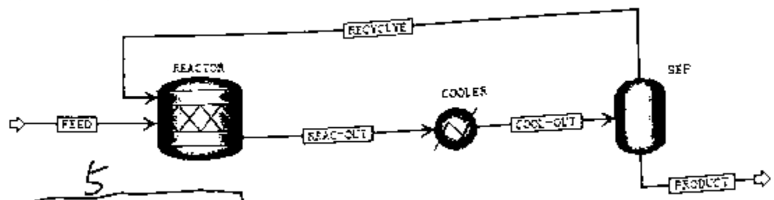
1. 试画出下面化工系统的有向图，建立过程矩阵、关联矩阵、邻接矩阵。



有向图:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "1"] & 2 \arrow[r, "2"] & 3 \arrow[r, "3"] & 4 \arrow[r, "4"] \arrow[ll, bend right, "5"'] & 5 \end{tikzcd}$$

过程矩阵:

$$R_P \quad \begin{array}{c} \text{结构单元号} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{相关物流} \\ \left\{\begin{array}{ccc} -1 & & \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & \\ 3 & -4 & -5 \\ 4 & & \end{array}\right\} \end{array}$$

关联矩阵:

$$R_I \quad \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

~~代入物流变量~~: 不需要写

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & & \end{pmatrix}$$

邻接矩阵:

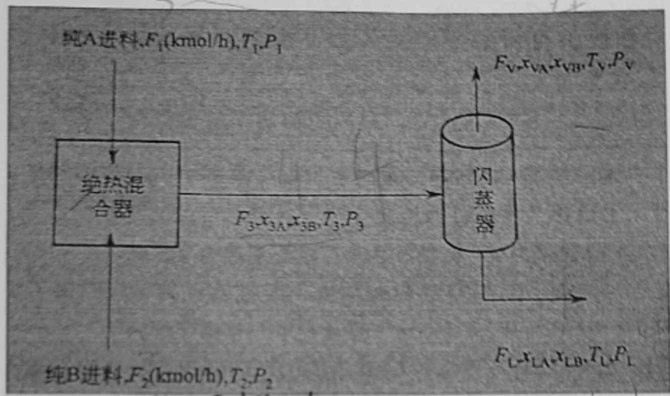
$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6 14+4+4

6+4+4

2. 试列出下面化工系统的数学模型，计算模型自由度，并写出一组可行的决策变量。

10+12 14



物流 25

4+8=12 独3

数学模型：混合器模型、闪蒸器模型

模型自由度：对于绝热混合器：变量数为 $n=3(c+2)$

独立方程数为 $m=c+2$ 组分数 $c=2$

$\therefore$ 自由度 $F_r=n-m=2c+4$，此时自由度 $F_r=2c+4=8$

对于闪蒸器变量数 $n_2=3(c+2)+1$

独立方程数为 $m_2=2c+4$，

自由度 $d=3(c+2)+1-2c-4=c+3$

由 $c=2$，可得 $d=5$

对于输出，~~产品独立变量数为 2×4=8~~，8+5=13

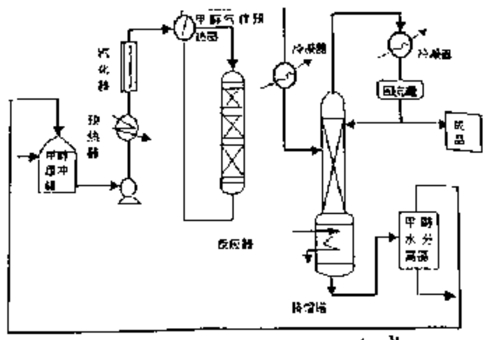
$\therefore$ 对于整个模型自由度为 $8+F_r+\cancel{d=8+8+5=21}$

(可按照 PPT 2.3.8表进行列表计算)

可行决策变量：即选13个变量。

3. 试列出下面化工系统的模型自由度。

（组分数 n=4）



总自由度: 171+24N+-85-11N=96+13N

单元	独立方程数	独立变量数	单元参数	对
系统的输入物流				
甲醇缓冲罐	6	18	0	
泵	6	12	2	
预热器	9	10	1	
汽化器	9	10	1	
甲醇气体预热器	12	13	1	
反应器	6	12	3	
冷凝器	9	10	1	
精馏塔				
冷凝器	5	13	0	
N级绝热平衡级	11N	24N	1	
部分再沸器	11	19	0	
回流罐	6	18	0	
甲醇水分离器	6	18		
系统的输出物流				
产品		6		
废水		6		
冷凝水		3		
冷却水		3		
	85+11N	171+24N	10	

4. 试求下面模型在$x_1=0, x_2=0, x_3=0$ 处的线性模型：

$$Y1=\begin{cases}-\cos x_1+0.05x_2^2+9\sin x_3+3\\ x_1^2-\ln(x_2+1)-2\sin x_2-10e^{x_3}-2\\ x_1+0.1x_2^2+2x_1x_3+1\end{cases}$$

$$Y2=\begin{cases}-\cos x_1+0.05x_2^2+3\\ x_1^2-\ln(x_2+1)-2\sin x_2-2\end{cases}$$

对于Y_1：

$$Y_1=\begin{pmatrix}-\cos x_1+0.05x_2^2+9\sin x_3+3\\ x_1^2-\ln(x_2+1)-2\sin x_2-10e^{x_3}-2\\ x_1+0.1x_2^2+2x_1x_3+1\end{pmatrix}$$

$$J(x)=\begin{pmatrix}\sin x_1 & 0.1x_2 & 9\cos x_3\\ 2x_1 & \frac{-1}{x_2+1}-2\cos x_2 & -10e^{x_3}\\ 1+2x_3 & 0.2x_2 & 2x_1\end{pmatrix}$$

$$J(x_0)=\begin{pmatrix}0&0&9\\0&-3&-10\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$F(x_0)=\begin{pmatrix}2\\-12\\1\end{pmatrix}$$

将以上条件代入 $F(x)=F(x_0)+J(x_0)(x-x_0)^T$

$$Y_1=\begin{pmatrix}2\\-12\\1\end{pmatrix}+\underset{3\times3}{\begin{pmatrix}0&0&9\\0&-3&-10\\1&0&0\end{pmatrix}}\underset{3\times1}{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}}$$

$$=\begin{pmatrix}2\\-12\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9x_3\\-3x_2-10x_3\\x_1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}9x_3+2\\-3x_2-10x_3-12\\x_1+1\end{pmatrix}$$

对于Y_2：

$$Y_2=\begin{pmatrix}-\cos x_1+0.05x_2^2+3\\ x_1^2-\ln(x_2+1)-2\sin x_2-2\end{pmatrix}$$

$$J(x)=\begin{pmatrix}\sin x_1 & 0.1x_2\\ 2x_1 & \frac{-1}{x_2+1}-2\cos x_2\end{pmatrix}$$

$$J(x_0)=\begin{pmatrix}0&0\\0&-3\end{pmatrix}$$

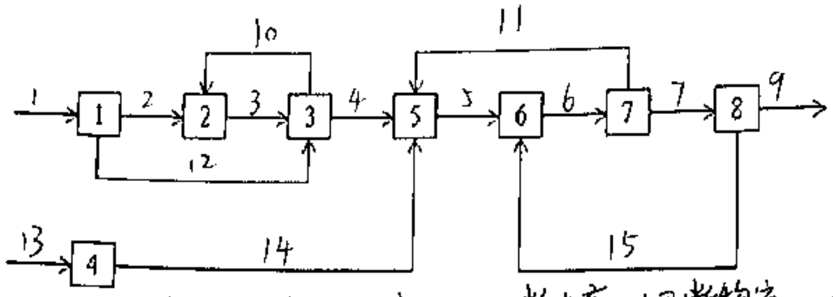
$$F(x_0)=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$$

将以上条件代入 $F(x)=F(x_0)+J(x_0)(x-x_0)^T$

$$Y_2=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\\-2-3x_2\end{pmatrix}$$

[illegible]切断
5. 用~~通路搜索法~~分隔下图系统:



输入物流	节点	输出物流	切断次序	切断物流	计算次序
1	1	2、12			
2、10	2	3			
3、12	3	4、10	4		
13	4	14	3		
4、11、14	5	5			
5、15	6	6			
6	7	7、11			
7	8	9、15			

6. 用牛顿迭代法求解 $e^{-x}+x^2-5=0$ 的解（$x_0=2$，最小误差 0.001）.

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\ ，\ k=0,1,2\ldots$$

$$f(x)=e^{-x}+x^2-5$$

$$f(x)=-e^{-x}+2x$$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{e^{-x}+x^2-5}{-e^{-x}+2x},\quad x_0=2$$

$$k=0\text{时},\ x_1=x_0-\frac{e^{-x_0}+x_0^2-5}{e^{-x_0}+2x_0}$$

$$=2-\frac{e^{-2}-1}{-e^{-2}+4}=2.223736$$

$$k=1\text{时},\ x_2=x_1-\frac{e^{-x_1}+x_1^2-5}{-e^{-x_1}+2x_1}=2.223736-\frac{e^{-2.223736}+2.223736^2-5}{-e^{-2.223736}+2\times2.223736}=2.2114745$$

$$k=2\text{时},\ x_3=x_2-\frac{e^{-x_2}+x_2^2-5}{-e^{-x_2}+2x_2}=2.2114745-\frac{e^{-2.2114745}+2.2114745^2-5}{-e^{-2.2114745}+2\times2.2114745}=2.2114378$$

此时，$x_3-x_2<0.001$，停止迭代

7．用单纯形法求解下列线性规划问题：

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$(s.t)\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 24 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

解：化为标准形式：

$$\max Z = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$s.t. \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24 \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,3,4 \end{cases}$$

于是得到一个基可行解 $X = (0,0,15,24)^T$

此时基变量为 (x_3, x_4)，非基变量为 (x_1, x_2)

非基变量的检验数为 $(2, 1)$，不是最优解，

我们列初始单纯形表如下：

	$c_j \to$		进基 2	1	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	15	3	5	1	0
出基 0	x_4	24	[6]	2	0	1
σ_j			2	1	0	0

$X_1 = (0,0,15,24)^T \quad Z_1 = 0$

x_4 换出，x_1 换入，得一组新基变量 x_3、x_1，

对此表作初等变换，画出新的单纯形表

C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	15	3	5	1	0
2	x_1	4	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$

不要了

C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	3	0	[4]	1	$-\frac{1}{2}$
2	x_1	4	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$
σ_i			0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$

$X_2 = (4, 0, 3, 0)^T \quad Z_2 = 8$

仍非最优解，x_2 换入，x_3 换出，

画出新的单纯形表

C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
1	x_2	$\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$
2	x_1	$\frac{15}{4}$	1	0	$-\frac{1}{12}$	$\frac{5}{24}$
σ_j			0	0	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{24}$

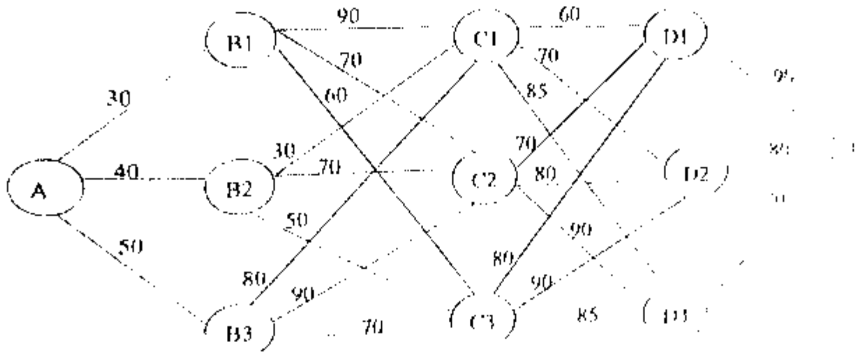
此时全部非基变量检验数均 <0，

于是得最优解为

$$X = \left(\frac{15}{4}, \frac{3}{4}, 0, 0\right)^T$$

$$\text{最优解 } Z = \frac{15}{2} + \frac{3}{4} = \frac{33}{4}$$

8. 某化工厂引进一套设备需从 A 地运到 E 地，每条线路的运费如下图所示，试用动态规划法确定运费最低的线路及运费。



解：整个计算过程分为四个阶段，从最后一个阶段开始。

第四阶段 $D \to E$：D有三条路线到E

有 $f_4(D_1)=90$，$f_4(D_2)=80$，$f_4(D_3)=70$

第三阶段 $(C \to D)$：C到D有9条路线

首先考虑经过 C_1 的三条路线

$$f_3(C_1) = \min\begin{Bmatrix} d(C_1D_1)+f_4(D_1) \\ d(C_1D_2)+f_4(D_2) \\ d(C_1D_3)+f_4(D_3) \end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix} 60+90 \\ 70+80 \\ 85+70 \end{Bmatrix} = 150,$$

有两条 $\begin{cases} C_1 \to D_1 \to E \\ C_1 \to D_2 \to E \end{cases}$

考虑经过 C_2 的三条路线

$$f_3(C_2) = \min\begin{Bmatrix} d(C_2D_1)+f_4(D_1) \\ d(C_2D_2)+f_4(D_2) \\ d(C_2D_3)+f_4(D_3) \end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix} 70+90 \\ 80+80 \\ 90+70 \end{Bmatrix} = 160$$

都相同

考虑经过 C_3 的三条路线

$$f_3(C_3) = \min\begin{Bmatrix} d(C_3D_1)+f_4(D_1) \\ d(C_3D_2)+f_4(D_2) \\ d(C_3D_3)+f_4(D_3) \end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix} 80+90 \\ 90+80 \\ 85+70 \end{Bmatrix} = 155$$

$C_3 \to D_3 \to E$

第二阶段（B→C）：B到C有9条路线，

首先 考虑经过B_1的3条路线

$$f_2(B_1)=\min\begin{cases}d(B_1,C_1)+f_3(C_1)\\d(B_1,C_2)+f_3(C_2)\\d(B_1,C_3)+f_3(C_3)\end{cases}=\min\begin{cases}90+150\\70+160\\60+155\end{cases}=215$$

路线：$B_1\to C_3\to D_3\to E$

考虑经过B_2的3条路线

$$f_2(B_2)=\min\begin{cases}d(B_2,C_1)+f_3(C_1)\\d(B_2,C_2)+f_3(C_2)\\d(B_2,C_3)+f_3(C_3)\end{cases}=\min\begin{cases}30+150\\70+160\\50+155\end{cases}=\cancel{205}\ 180$$

路线：$B_2\to C_1\to D_1\to E$

$B_2\to C_1\to D_2\to E$

考虑经过B_3的3条路线

$$f_2(B_3)=\min\begin{cases}d(B_3,C_1)+f_3(C_1)\\d(B_3,C_2)+f_3(C_2)\\d(B_3,C_3)+f_3(C_3)\end{cases}=\min\begin{cases}80+150\\90+160\\70+155\end{cases}=225$$

$B_3\to C_3\to D_3\to E$

第一阶段（A→B）：A到B有3条路线

$$f_1(A)=\min\begin{cases}d(A,B_1)+f_2(B_1)\\d(A,B_2)+f_2(B_2)\\d(A,B_3)+f_2(B_3)\end{cases}=\min\begin{cases}30+215\\40+180\\50+225\end{cases}=220$$

∴最短路线（运费最低）

$A\to B_2\to C_1\to D_1\to E$

或 $A\to B_2\to C_1\to D_2\to E$

此时运费为220

9. 某公司拟将某种设备 4 台，分配给所属的甲、乙、丙三个工厂，各工厂获得此设备后，预测可创造的利润如下表所示：

设备台数 \ 盈利 \ 工厂	甲厂	乙厂	丙厂
0	0	0	0
1	4	6	5
2	8	11	7
3	10	12	12
4	13	12	13

问这 4 台设备应如何分配给这 3 个工厂，使得所创造的总利润为最大？用动态规划求解。

解：按顺序解法计算：

第一阶段：求 $f_1(x)$，显然有 $f_1(x)=g_1(x)$，得到下表，

甲厂：					
投资	0	1	2	3	4
利润	0	4	8	10	13
最优策略	0	1	2	3	4

第二阶段：求 $f_2(x)$，此时需考虑第甲、第乙个工厂如何进行投资分配

$$f_2(4)=\max_{y=0,1,2,3,4}\{g_2(y)+f_1(4-y)\}$$

$$=\max\begin{cases}g_2(0)+f_1(4)\\g_2(1)+f_1(3)\\g_2(2)+f_1(2)\\g_2(3)+f_1(1)\\g_2(4)+f_1(0)\end{cases}=\max\begin{cases}0+13\\6+10\\11+8\\12+4\\12+0\end{cases}=19$$

最优策略为 (2, 2)

此时最大利润为 19

然后 $f_2(3)=\max_{y=0,1,2,3}\{g_2(y)+f_1(3-y)\}$

$$=\max\begin{cases}g_2(0)+f_1(3)\\g_2(1)+f_1(2)\\g_2(2)+f_1(1)\\g_2(3)+f_1(0)\end{cases}=\max\begin{cases}0+10\\6+8\\11+4\\12+0\end{cases}=15$$

，最优策略为 (1, 2)

最大利润为 15

$$f_2(2)=\max_{y=0,1,2}\{g_2(y)+f_1(2-y)\}$$
$$=\max\begin{Bmatrix} g_2(0)+f_1(2)\\ g_2(1)+f_1(1)\\ g_2(2)+f(0)\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}0 & 8\\ 6 & 4\\ 11 & 0\end{Bmatrix}=11$$，最优(0,2)
利润为11

$$f_2(1)=\max_{y=0,1}\{g_2(y)+f_1(1-y)\}$$
$$=\max\begin{Bmatrix} g_2(0)+f_1(1)\\ g_2(1)+f_1(0)\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}0+4\\ 6+0\end{Bmatrix}=6$$，最优(0,1)
利润为6

$$f_2(0)=0$$

有表：

投资	0	1	2	3	4
$f_2(x)$	0	6	11	15	19
最优策略	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,2)	(2,2)

第三阶段：求$f_3(x)$，此时需考虑甲乙丙三个工厂如何进行投资分配，以取得最大利润。

$$f_3(4)=\max_{y=0,1,2,3,4}\{g_3(y)+f_2(4-y)\}$$
$$=\max\begin{Bmatrix} g_3(0)+f_2(4)\\ g_3(1)+f_2(3)\\ g_3(2)+f_2(2)\\ g_3(3)+f_2(1)\\ g_3(4)+f_1(0)\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}0+19\\ 5+15\\ 7+11\\ 12+6\\ 13+0\end{Bmatrix}=20$$

最优策略为(1,2,1)，最大利润为20万元

∴甲厂1台、乙厂2台，丙厂1台，有最大利润为20万元。

10.用变量轮换法求下面最优化问题的解。

$$\min \quad f(x) = 5x_1^2 + 3x_1x_2^2 + 7x_1x_2 + 4x_2^2 + 8x_1$$

初始点 $x^{(0)}=[1,1]^T$，$\xi=0.1$

①第一次迭代：沿x_1轴方向搜索，

将$x_2=1$代入有，

$f(x) = 5x_1^2+3x_1+7x_1+4+8x_1$

$= 5x_1^2+18x_1+4$

对其求导有，$f'(x) = 10x_1+18=0$

即$x_1=-1.8$时为最值，

得到新点$x^{(1)}=[-1.8,1]^T$

②第二次迭代，沿x_2轴搜索，

将$x_1=-1.8$代入目标函数$f(x)$，

有 $f(x) = 5\times(-1.8)^2+3\times(-1.8)\times x_2^2+7x_1\cdot(-1.8)+4x_2^2+8\cdot(-1.8)$

$=-1.4x_2^2-12.6x_2+1.8$

$f'(x) = -2.8x_2-12.6=0$

即$x_2=[-1.8,-4.5]^T$

③第三次迭代，沿x_1轴方向搜索

将$x_2=-4.5$代入

$f(x_1) = 5x_1^2+3x_1(-4.5)^2+7x_1\times(-4.5)+4\times(-4.5)^2+8x_1$

$=5x_1^2+37.25x_1+81$

$f'(x)=10x_1+37.25$

$\therefore x_1=-\frac{37.35}{10}=-3.725$

有新点 $x^{(3)}[-3.725,-4.5]^T$

11. 一换热系统，包含的工艺流股为两个热物流和两个冷物流，给定的数据列于表中。指定热、冷物流间允许的最小传热温差为 20℃。现在请利用夹点技术设计一个换热网络，其具有最大的热回收。用问题表法确定夹点位置；确定夹点处热、冷物流的温度；确定出所需的最小热、冷公用工程负荷；

流股及类型	热容流率 FC_p/(kW/℃)	$T_入$/℃	$T_出$/℃
1 热	2.5	159	77
2 热	0.5	343	90
3 冷	0.9	16	117
4 冷	2.2	118	265

温区	流股温度：热流股 (1) (2)	T/°C		冷流股 (3) (4)	T_i-T_{i+1}	$\sum C_{pC}-\sum C_{pH}$	1 D_i	2 I_i	3 Q_i	4 最大允许热流量/kW 输入	5 输出
			323								
		285	265		58	-0.5	-29	0	29	185.2	214.2
		159	139		126	1.7	214.2	29	-185.2	214.2	0
		138	118		21	-0.8	-16.8	-185.2	-168.4	~~16~~.0	16.8
		137	117		1	-3	-3	-168.4	-165.4	16.8	19.8
		90	70		47	-2.1	-98.7	-165.4	-66.7	19.8	118.5
		77	57		13	-1.6	-20.8	-66.7	-45.9	118.5	139.3
		36	16		41	0.9	36.9	-45.9	-9	139.3	102.4
Fcp	2.5 0.5			0.9 2.2							

由问题表可知，夹点处热物流温度为159°C，冷物流为139°C

最小热公用工程负荷为185.2 KW，最小冷公用工程负荷为102.4kW

12. 试用有序直观推断法推断下面体系的最有可能分离序列，要求分离出 5 个纯产品

序号	组成（摩尔分率）	相邻组分相对挥发度	标准沸点（°C）
A	0.07		-42.1
B	0.10	2.45	-6.3
C	0.50	1.18	-0.5
D	0.28	2.89	15.0
E	0.05	2.50	36.1

~~(1)根据经验规则 1、2，分离~~

根据经验规则 M_1，采用常规精馏

根据经验规则 M_2，精馏塔低温操作

根据经验规则 S_2，组分B、C间最难分离 因为C组分相对挥发度接近1，故放最后分

根据经验规则 C_1，C组分含量含量最大(50,50)应先分离出去，但由于 S_2 优于 C_1，

故C组分不宜先分离出去。

求取CES，(以A为例)

$$f=\frac{0.07}{1-0.07}=\frac{7}{93}$$

$$\Delta=(2.45-1)\times100=145$$

$$CES=f\cdot\Delta=\frac{7}{93}\times145=10.91$$

根据经验 C_2 倾向于50/50分离，加上考虑CES值，则分离ABC/DE