第三节　平面及其方程

一、曲面方程与空间曲线方程的概念

二、平面的点法式方程

三、平面的一般方程

四、两平面的夹角

五、小结　思考题

一、曲面方程与空间曲线方程的概念

曲面的实例： 水桶的表面、台灯的罩子面等.

曲面在空间解析几何中被看成是点的几何轨迹.

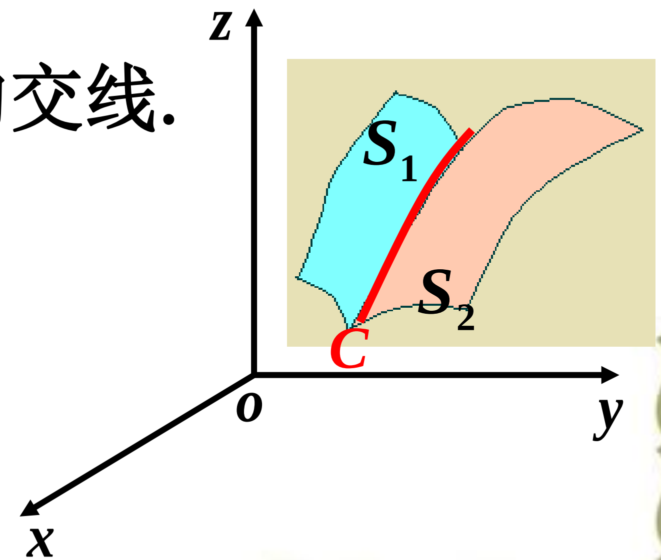
曲面方程的定义：

如果曲面S与三元方程$F(x,y,z)=0$有下述关系：

(1) 曲面 S上任一点的坐标都满足方程；
(2) 不在曲面 S上的点的坐标都不满足方程；

那么，方程$F(x,y,z)=0$就叫做曲面S的**方程**，
而曲面S就叫做方程的**图形**.

空间曲线C 可看作空间两曲面的交线.



$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

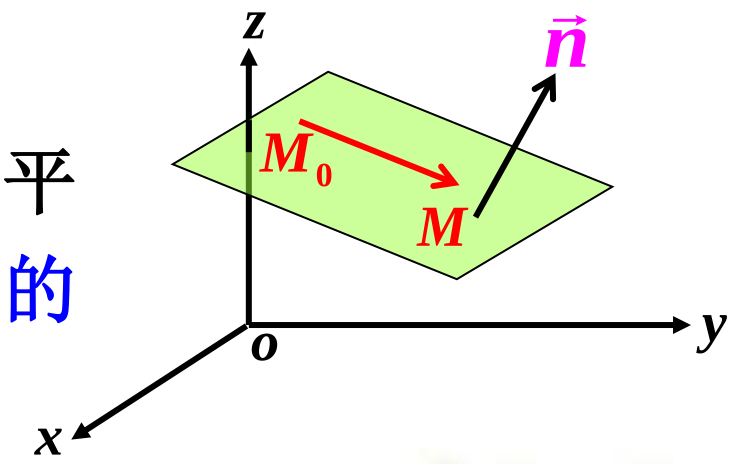
空间曲线的一般方程

特点：曲线上的点都满足方程组，满足方程组的点都在曲线上，不在曲线上的点不能同时满足这两个方程.

【注】空间曲线用一般方程表示, 表达式形式不唯一.

二、平面的点法式方程

1、平面的法线向量



如果一非零向量垂直于一平面，这向量就叫做该平面的法线向量（法向量）.

法向量的特征：垂直于平面内的任一向量.

2、平面的点法式方程

已知 $\vec{n}=(A,B,C)$, $M_0(x_0,y_0,z_0)$,

设平面上的任一点为 $M(x,y,z)$

必有 $\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0$

$$\because \quad \overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

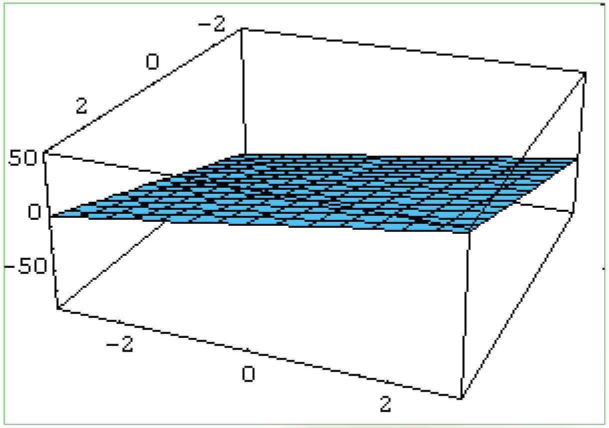
$$\therefore \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

平面的点法式方程

其中法向量 $\vec{n} = (A, B, C)$， 已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$

平面上的点都满足方程，不在平面上的点都不满足方程，方程称为平面的方程，平面称为方程的图形.

【教材例 1】求过三点$A(2,-1,4)$、$B(-1,3,-2)$和$C(0,2,3)$的平面方程.



【解】 $\overrightarrow{AB}=(-3,4,-6)$

$\overrightarrow{AC}=(-2,3,-1)$

取 $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 4 & -6\\ -2 & 3 & -1\end{vmatrix}=(14,9,-1)$,

所求平面方程为

$$14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0,$$

化简得 $14x+9y-z-15=0.$

三、平面的一般方程

1、平面的一般方程

由平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow Ax+By+Cz\underbrace{\boxed{-(Ax_0+By_0+Cz_0)}}_{=D}=0$$

$$Ax+By+Cz+D=0$$

平面的一般方程

法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$.

2、一般方程的特例

(1) $D=0,\ Ax+By+Cz=0$ 平面通过坐标原点；

(2) $A=0,\quad By+Cz+D=0\ \begin{cases} D\neq 0, & \text{平面平行于 } x \text{ 轴；} \\ D=0, & \text{平面通过 } x \text{ 轴；} \end{cases}$

$B=0,\ Ax+Cz+D=0\ \begin{cases} D\neq 0, & \text{平面平行于 } y \text{ 轴；} \\ D=0, & \text{平面通过 } y \text{ 轴；} \end{cases}$

$C=0,\ Ax+By+D=0\ \begin{cases} D\neq 0, & \text{平面平行于 } z \text{ 轴；} \\ D=0, & \text{平面通过 } z \text{ 轴；} \end{cases}$

(3) $A=B=0, Cz+D=0$　　平行于 xoy 坐标面

$A=C=0,\ By+D=0$　　平行于 xoz 坐标面

$B=C=0,\ Ax+D=0$ 平行于 yoz 坐标面

例2 求过点(4,–3,–1)和 x 轴的平面方程

解 $\because$ 平面过 x 轴, 则 $A=D=0$,

$\therefore$ 可设方程为 $By+Cz=0$, 将点(4,–3,–1)代入

$\therefore -3B-C=0 \Rightarrow C=-3B$

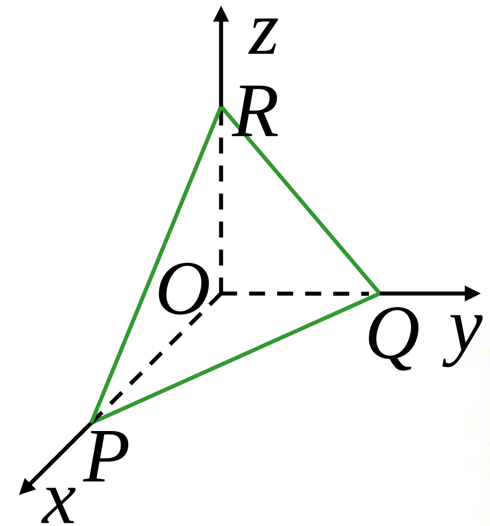
即　$By-3Bz=0$　　$\therefore$　$y-3z=0$

【教材例3】设一平面与x, y, z轴的交点依次为$P(a,0,0)$，$Q(0,b,0)$，$R(0,0,c)$三点，求这平面的方程(其中 $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$).

【解】 设平面为 $Ax + By + Cz + D = 0$,

将三点坐标代入得 $\begin{cases} aA + D = 0, \\ bB + D = 0, \\ cC + D = 0, \end{cases}$

$$\Rightarrow\ A = -\frac{D}{a},\quad B = -\frac{D}{b},\quad C = -\frac{D}{c}.$$



将 $A=-\dfrac{D}{a},\quad B=-\dfrac{D}{b},\quad C=-\dfrac{D}{c},$

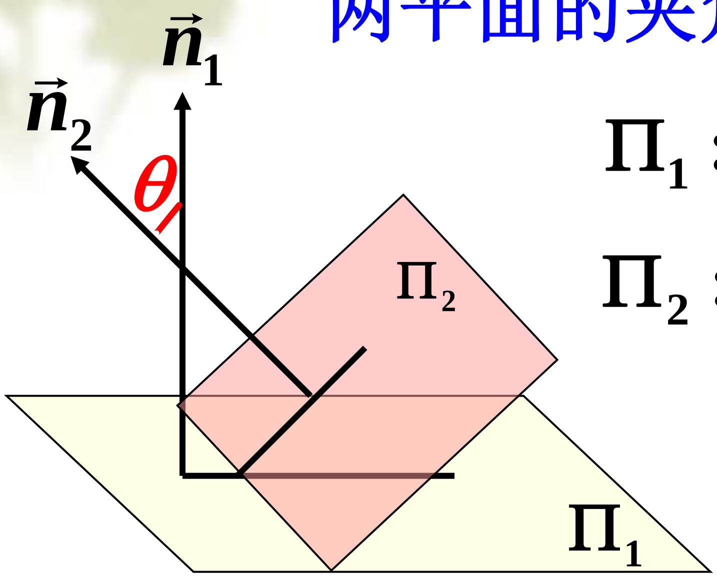
代入所设方程得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$ 平面的截距式方程

x轴上截距　　y轴上截距　　z轴上截距

四、两平面的夹角

1、定义：两平面法线向量之间的夹角称为**两平面的夹角**.（通常指锐角或直角）



$$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1),$$

$$\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2),$$

按照两向量夹角余弦公式有 两平面夹角余弦公式

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

2、两平面位置特征：

(1) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \quad \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0;$

(2) $\Pi_1 // \Pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}.$

【例3】 研究以下各组里两平面的位置关系：

(1) $-x + 2y - z + 1 = 0, \qquad y + 3z - 1 = 0$

【解】(1) $$\cos\theta = \frac{|(-1)\times 0 + 2\times 1 - 1\times 3|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2}\cdot\sqrt{1^2 + 3^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{60}}$$

两平面相交，夹角 $\theta = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{60}}.$

(2) $2x-y+z-1=0,\qquad -4x+2y-2z-1=0$

$\vec{n}_1=(2,-1,1),\qquad \vec{n}_2=(-4,2,-2)$

$\Rightarrow \dfrac{2}{-4}=\dfrac{-1}{2}=\dfrac{1}{-2}\neq\dfrac{-1}{-1}$ 两平面平行

$\because M(1,1,0)\in\Pi_1\quad M(1,1,0)\notin\Pi_2$

两平面平行但不重合.

(3) $2x-y-z+1=0,\qquad -4x+2y+2z-2=0$

$\because \dfrac{2}{-4}=\dfrac{-1}{2}=\dfrac{-1}{2}=\dfrac{1}{-2},$

$\therefore$ 两平面重合.

【例 4】 求过点$(1,1,1)$，且垂直于平面$x-y+z=7$和$3x+2y-12z+5=0$的平面方程.

【解】 $\vec{n}_1=(1,-1,1)$, $\vec{n}_2=(3,2,-12)$

取法向量 $\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(10,15,5)=5(2,3,1)$,

所求平面方程为

$$2(x-1)+3(y-1)+(z-1)=0,$$

化简得 $2x+3y+z-6=0.$

【例5】设平面过原点及点$(6,-3,2)$，且与平面$4x-y+2z=8$垂直，求此平面方程.

【解】设平面为 $Ax+By+Cz+D=0$,

由平面过原点知 $D=0$,

由平面过点$(6,-3,2)$ $\boxed{6A-3B+2C=0}$

$\because \vec{n}\perp(4,-1,2)$, $\therefore$ $\boxed{4A-B+2C=0}$

$$\Rightarrow A=B=-\frac{2}{3}C,$$

所求平面方程为 $2x+2y-3z=0$.

例6 一平面通过两点 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(0,1,-1)$，

且垂直于平面 $\prod: x+y+z=0$，求其方程．

解 设所求平面 $Ax+By+Cz+D=0$

过 M_1, M_2 两点，得 $A+B+C+D=0$，$B-C+D=0$

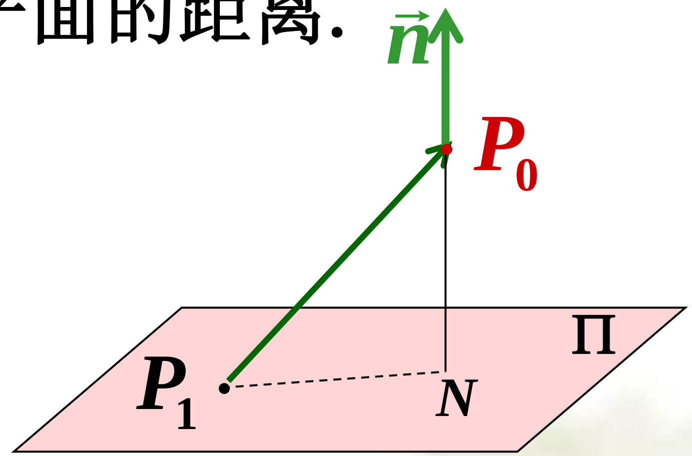
$\vec{n} \perp \Pi$ 的法向量 $\Longrightarrow A+B+C=0$，得 $D=0$，

由 $B-C+D=0 \Rightarrow B=C$，

由 $A+B+C=0 \Rightarrow A=-2C$，

平面方程为 $-2Cx+Cy+Cz=0 \Rightarrow -2x+y+z=0$

【教材例7】求平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面的距离.



【解】 $\forall P_1(x_1, y_1, z_1) \in \Pi$

$$d = \left|\mathrm{Prj}_n \overrightarrow{P_1P_0}\right|$$

$$\mathrm{Prj}_n \overrightarrow{P_1P_0} = \overrightarrow{P_1P_0}\cos\theta = \overrightarrow{P_1P_0} \cdot \overrightarrow{e_n}$$

$$\overrightarrow{P_1P_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$$

$$\overrightarrow{e_n} = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)$$

$$\therefore \operatorname{Prj}_n \overrightarrow{P_1P_0} = \overrightarrow{P_1P_0} \cdot \overrightarrow{e_n}$$

$$= \frac{A(x_0 - x_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{B(y_0 - y_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{C(z_0 - z_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$= \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\because Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \qquad (P_1 \in \Pi)$$

$$\therefore \operatorname{Prj}_n \overrightarrow{P_1P_0} = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\therefore \quad d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

点到平面距离公式

四、小结

平面的方程
- 点法式方程
- 一般方程
- 截距式方程

两平面的夹角

点到平面的距离公式

【思考题】

若平面 $x+ky-2z=0$ 与平面 $2x-3y+z=0$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，求 k.

【思考题解答】

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{|1\times 2+k\times(-3)-2\times 1|}{\sqrt{1^2+k^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}},$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|3k|}{\sqrt{5+k^2}\cdot\sqrt{14}},\quad \Rightarrow k=\pm\frac{\sqrt{70}}{2}.$$