第四节　可降阶的高阶微分方程

一、可降阶的二阶微分方程

1. $y'' = f(x)$型的微分方程

2. $y'' = f(x, y')$型的微分方程

3. $y'' = f(y, y')$型的微分方程

二、小结

一、可降阶的高阶微分方程

1.【定义】 二阶及二阶以上的微分方程统称为高阶微分方程.

2.【求解思路】

降阶——通过变量代换等其它形式，化为已知其求解方法的较低阶的微分方程求解 .

1. $y^{(n)} = f(x)$型的微分方程

【特点】方程右端仅含有自变量 x.

【解法】连续积分 n 次就可得到方程的通解

【例1】 求方程 $y^{(3)} = \cos x$ 的通解.

【解】 因为$y^{(3)} = \cos x$, 所以,

$$y'' = \int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$y' = \int (\sin x + C)\mathrm{d}x = -\cos x + Cx + C_2$$

$$y = \int (-\cos x + Cx + C_2)dx = -\sin x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

2. $y'' = f(x, y')$型的微分方程

【方程特点】方程右端不显含未知函数 y

【解法】令 $y' = p(x)$，则 $y'' = p'(x)$ 代入方程

得 $p'(x) = f(x, p(x))$

这是一个关于自变量 x 和未知函数 $p(x)$

的一阶微分方程,

若可以求出其通解 $p(x) = \varphi(x, C_1)$, 则$y' = \varphi(x, C_1)$

再积分一次就能得原方程的通解.

【例2】 求方程 $2xy'y''=1+(y')^2$ 的通解.

【解】 因 $2xy'y''=1+(y')^2$ 不显含未知函数 y,

则令 $y'=p(x)=p$, 故 $y''(x)=p'(x)=p'$,

将其代入所给方程, 得

$$2xpp'=1+p^2$$

分离变量得 $$\frac{2p\,\mathrm{d}p}{1+p^2}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两边积分 $\ln(1+p^2)=\ln|x|+\ln C$, 得

$$1+p^2=C_1x.$$

即 $p = \pm\sqrt{C_1 x - 1}$

也即 $y' = \pm\sqrt{C_1 x - 1}$

则 $y = \pm\int (C_1 x - 1)^{\frac{1}{2}} dx$

$$= \pm\frac{2}{3C_1}(C_1 x - 1)^{\frac{3}{2}} + C_2$$

为所求方程的通解.

3. $y''=f(y,y')$ 型的微分方程

【方程特点】右端不显含自变量 x

【解法】求解这类方程可令 $y'=p(y)$ 则

$$y''=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p(y)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p(y)}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p(y)}{\mathrm{d}y}p(y)$$

于是, 方程 $y''=f(y,y')$可化为 $p(y)\dfrac{\mathrm{d}p(y)}{\mathrm{d}y}=f(y,p(y))$

这是关于 y 和 p 的一阶微分方程, 如能求出其解

$p(y)=\varphi(y,C_1)$, 则可由 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(y,C_1)$ 再用分离变量

法即可求出原方程的通解. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2$

$$y''=f(x,y')$$

右端不显含 y

令$y'=p(x)$

$$y''=p'(x)$$

得 $p'(x)=f(x,p(x))$

$$\frac{dy}{dx}=p(x)=\varphi(x,C_1)$$

$$y=\int\varphi(x,C_1)dx$$

$$y''=f(y,y')$$

右端不显含 x 令$y'=p(y)$

$$y''=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p(y)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p(y)}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$=\frac{\mathrm{d}p(y)}{\mathrm{d}y}p(y)$$

$$p(y)\frac{\mathrm{d}p(y)}{\mathrm{d}y}=f(y,p(y))$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(y)=\varphi(y,C_1)$$

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2$$

【教材例3】求微分方程 $yy''-y'^2=0$ 的通解

【解】 方程不显含自变量 x

设 $y'=p(y)$， 则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

代入方程得 $yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p^2=0$，即 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=\dfrac{\mathrm{d}y}{y}$

两端积分得 $\ln|p|=\ln|y|+\ln|C_1|$， 即 $p=C_1y$，

$\therefore \quad y'=C_1y \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{y}=C_1\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \ln|y|=C_1x+C_2'$

故所求通解为 $y=C_2e^{C_1x} \quad (C_2=\pm e^{C_2'})$

【例4】求微分方程 $yy'' + y'^2 = 0$ 的通解

【解】 原方程等价于 $(yy')' = 0$

即得 $yy' = C_1$ 分离变量、两端积分即可.

【另解】 $yy'' - y'^2 = 0$

原方程变形为 $\dfrac{yy'' - y'^2}{y^2} = 0$ 或 $\left(\dfrac{y'}{y}\right)' = 0$

$\therefore \dfrac{y'}{y} = C_1$ 下同.

三、小结

可降阶微分方程的解法 —— 降阶法

1. $y^{(n)} = f(x)$ 逐次积分

2. $y'' = f(x, y')$

令 $y' = p(x)$， 则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$

3. $y'' = f(y, y')$

令 $y' = p(y)$， 则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

【思考与练习】

方程 $y'' = f(y')$ 如何代换求解 ?

[答] 令 $y' = p(x)$ 或 $y' = p(y)$ 均可.

一般说, 用前者方便些.

有时用后者方便 .

例如, $y'' = (y')^3 + y'$