第一节 向量及其线性运算

一、向量的概念及线性运算

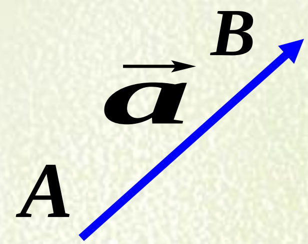
二、空间直角坐标系

三、利用坐标作向量的线性运算

四、向量的模、方向角、投影

一、向量的概念及线性运算

1. 向量的概念



向量（矢量）: 有向线段 $\overrightarrow{AB}$， 或 $\vec{a}$.

向量的模: $|\overrightarrow{AB}|$, 或 $|\vec{a}|$,

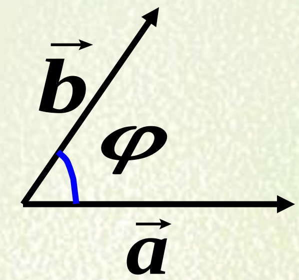
向径 (矢径): 起点为原点的向量.

自由向量: 与起点无关的向量.

单位向量: 模为 1 的向量. $\vec{e}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

零向量: 模为 0 的向量, 记作 $\vec{0}$.

相等向量：$\vec{a}=\vec{b}$；



向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角：两非零向量 $\vec{a},\vec{b}$，

记作 $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ 或 $(\widehat{\vec{b},\vec{a}})$， $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})\in[0,\pi]$

若$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=0$(或$\pi$)，即向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同或相反，

则称 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行（共线），记作 $\vec{a}/\!/\vec{b}$；

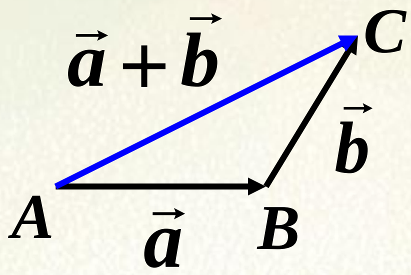
若$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\pi}{2}$，则称$\vec{a}$ 与$\vec{b}$ 垂直 记作 $\vec{a}\perp\vec{b}$.

规定：零向量与任何向量既平行又垂直.

2. 向量的线性运算

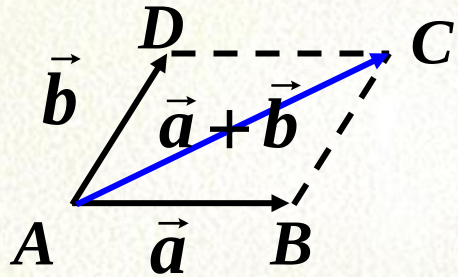
向量的加法：

三角形法则:



首尾相连，始点指向终点

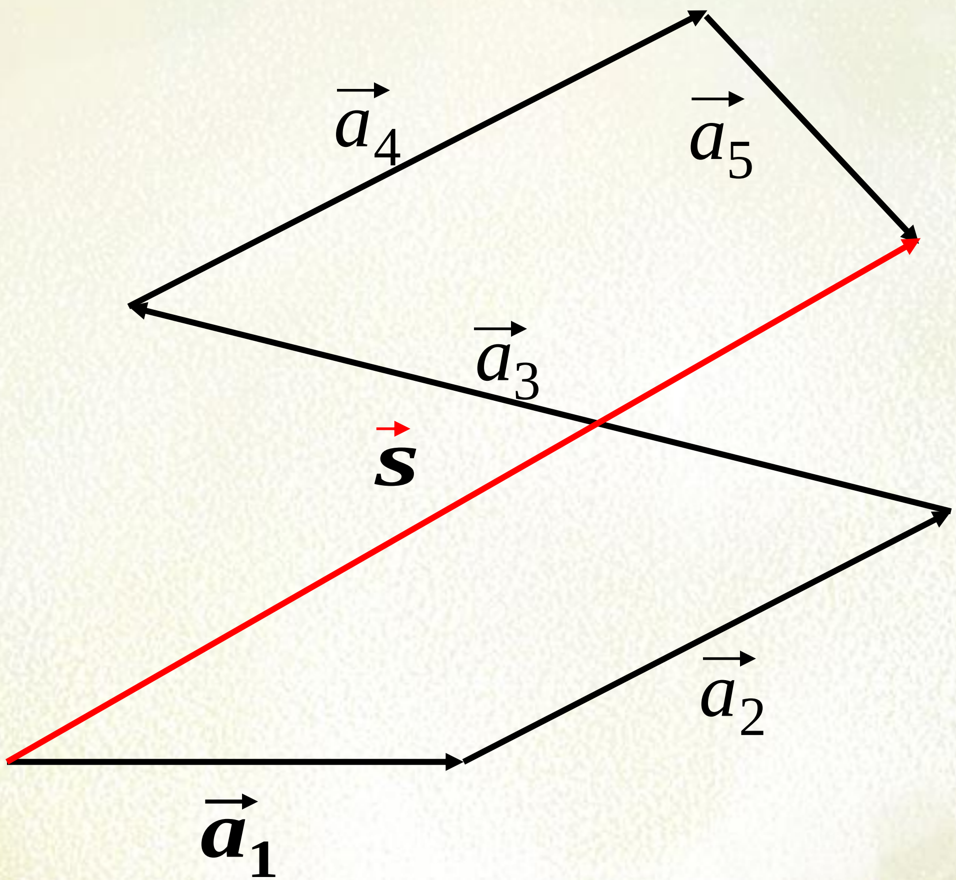
平行四边形法则
:



运算规律：交换律 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

结合律 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

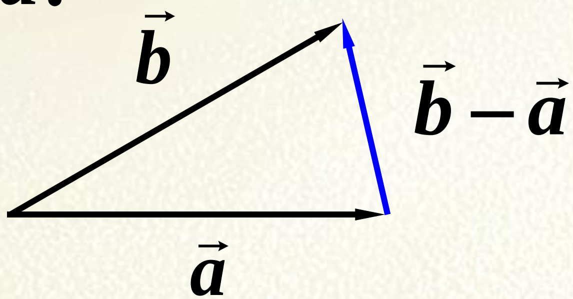
三角形法则可推广：$\vec{s}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3+\vec{a}_4+\vec{a}_5$



向量的减法：

负向量：与 $\vec{a}$ 的模相同，但方向相反的向量，记作 $-\vec{a}$；

差 $\vec{b}-\vec{a}$：



差：减向量指向被减向量

三角不等式：

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|, \quad \left|\vec{a}-\vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|.$$

其中等号在 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向或反向时成立

向量与数的乘法: $\lambda\vec{a}$.

规定: $\lambda>0$时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$同向，$|\lambda\vec{a}|=\lambda|\vec{a}|$;

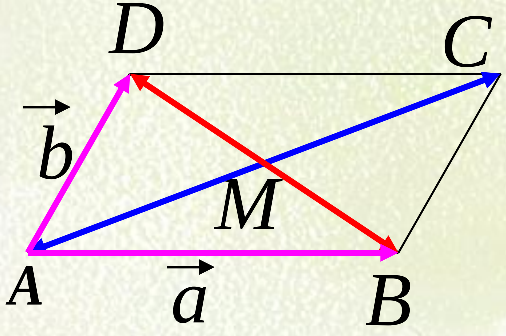
$\lambda<0$时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$反向，$|\lambda\vec{a}|=-\lambda|\vec{a}|$;

$\lambda=0$时，$\lambda\vec{a}=\vec{0}$.

若$\vec{a}\neq\vec{0}$, 则有单位向量$\vec{e}_{\vec{a}}=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$. 因此

$$\vec{a}=|\vec{a}|\vec{e}_{\vec{a}}.$$ -----同向

例1. 设 M 为▱$ABCD$ 对角线的交点，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，试用$\vec{a}$与$\vec{b}$表示$\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD}$.



解 $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ $\quad\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{BD}$

$$\therefore\ \overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}),\qquad \overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$$

$$\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a}),\qquad \overrightarrow{MB}=-\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$$

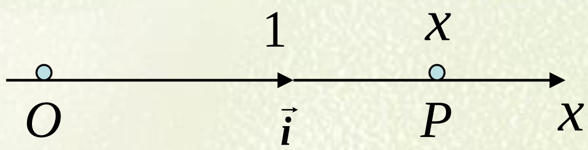
定理1. 设 $\vec{a}$ 为非零向量，则

$$\vec{a} \,/\!/\, \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a} \quad (\lambda\ \text{为唯一实数})$$

注： 建立数轴的理论依据.

数轴: 一个点、一个方向、单位长度.

一个单位向量既确定了方向，又确定了单位长度，因此，只需给定一个点及一个单位向量，确定一条数轴.



向量$\overrightarrow{OP}$

由于$\overrightarrow{OP} // \vec{i}$，故必存在唯一的实数$x$, 使得$\overrightarrow{OP} = x\vec{i}$

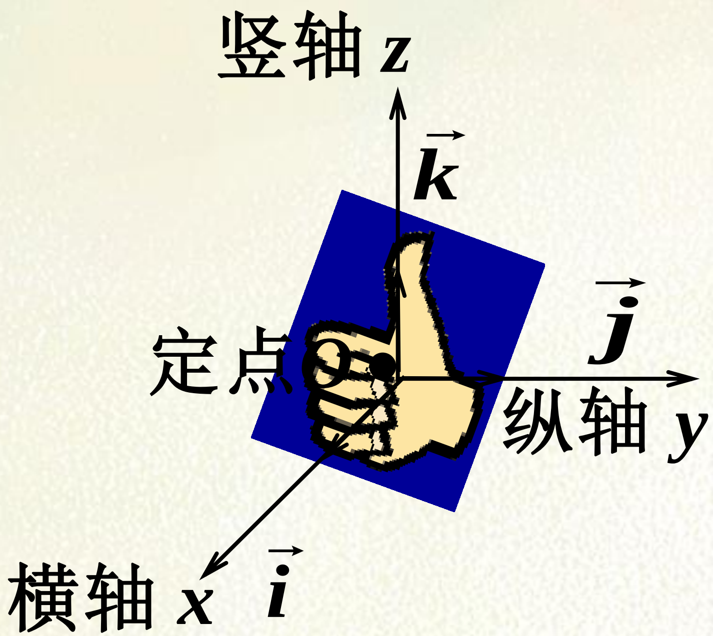
x称为**数轴上有向线段$\overrightarrow{OP}$的值.**

$$\text{点}P \leftrightarrow \text{向量}\overrightarrow{OP} = x\vec{i} \leftrightarrow \text{实数}x$$

说明： 数轴上的点P与实数x一一对应，称 x 为数轴上点**P的坐标**.

二、空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系

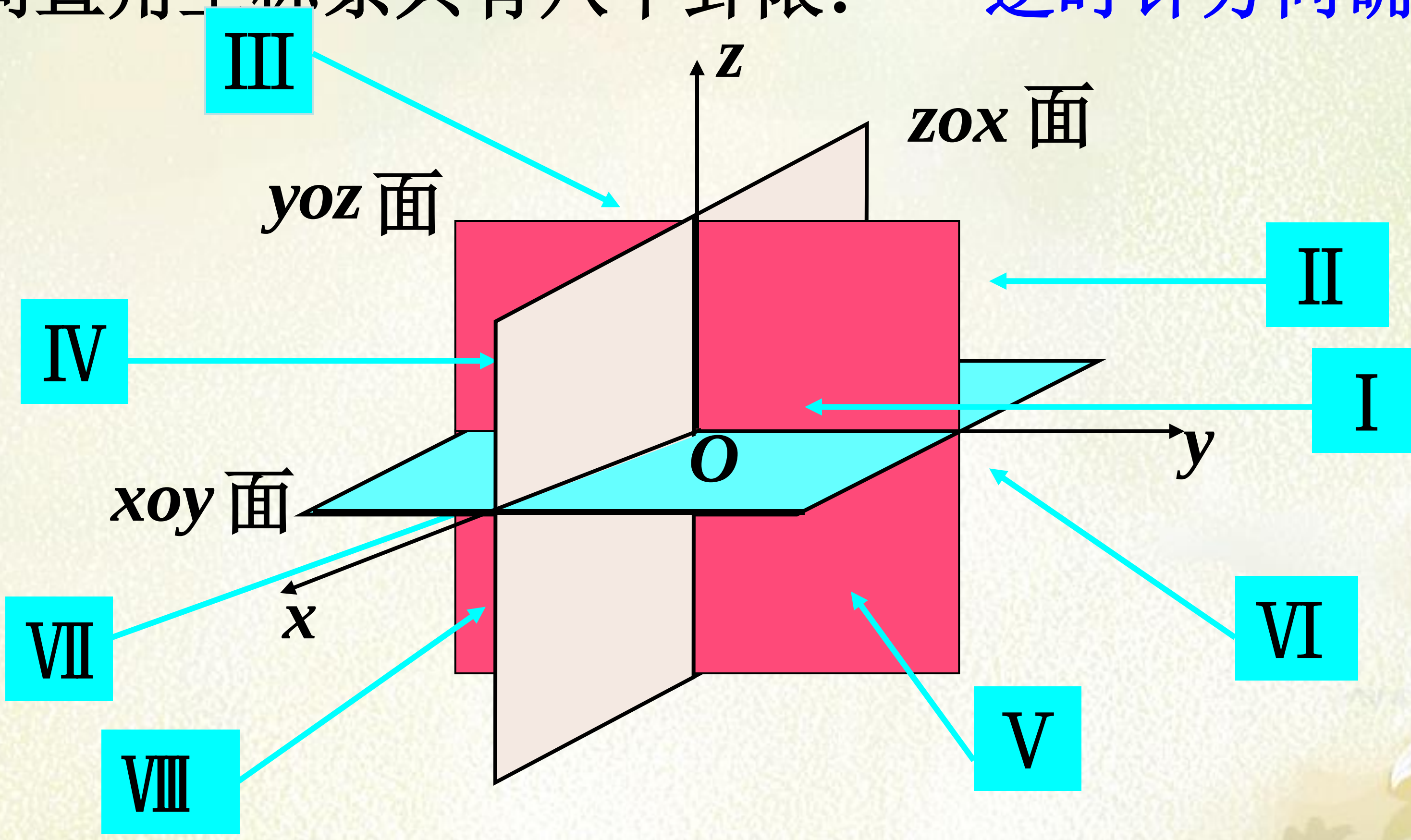


三个坐标轴的正方向符合右手法则.

其中$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$分别表示x,y,z轴上的单位向量

空间直角坐标系称$Oxyz$坐标系或$[O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}]$坐标系

空间直角坐标系共有八个卦限: -----逆时针方向确定



2. 向量的坐标表示

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM}$$

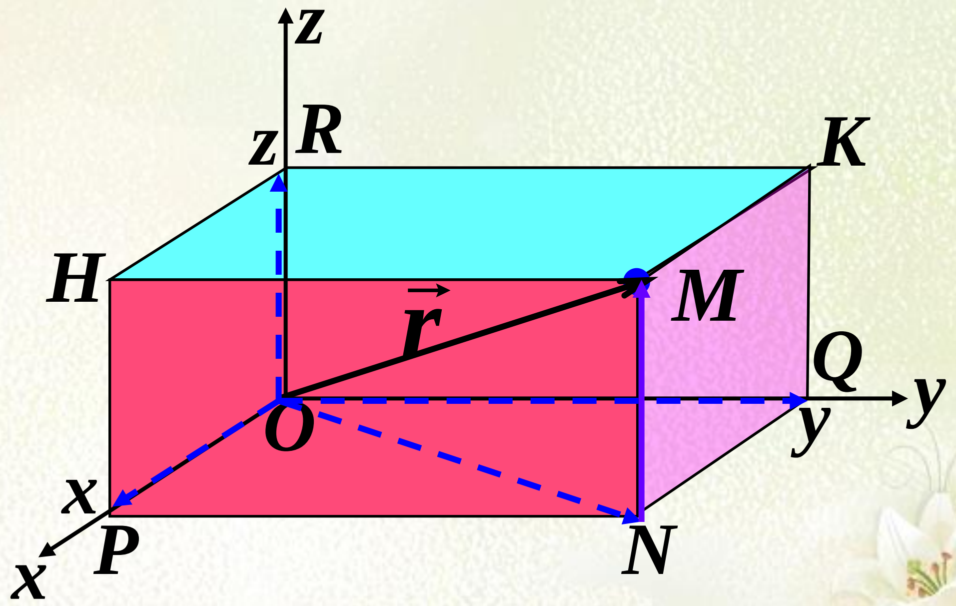
$$= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$$

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i},$$

$$\overrightarrow{OQ} = y\vec{j},$$

$$\overrightarrow{OR} = z\vec{k}$$

$$= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$



向量$\vec{r}$的坐标分解式$x\vec{i}$、$y\vec{j}$、$z\vec{k}$称为向量沿三个坐标轴方向的分向量.

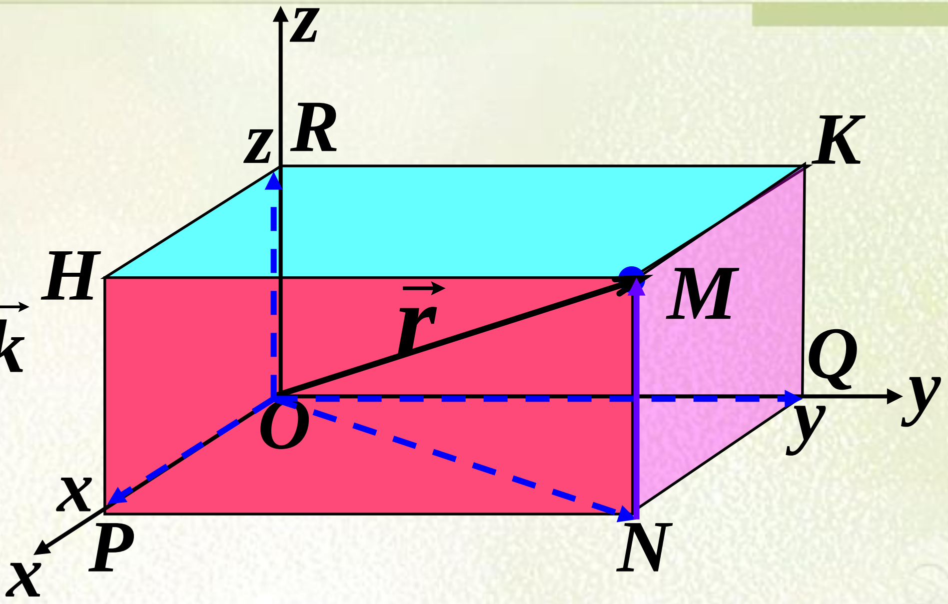
点M

$\Updownarrow$

$$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

$\Updownarrow$

(x, y, z).



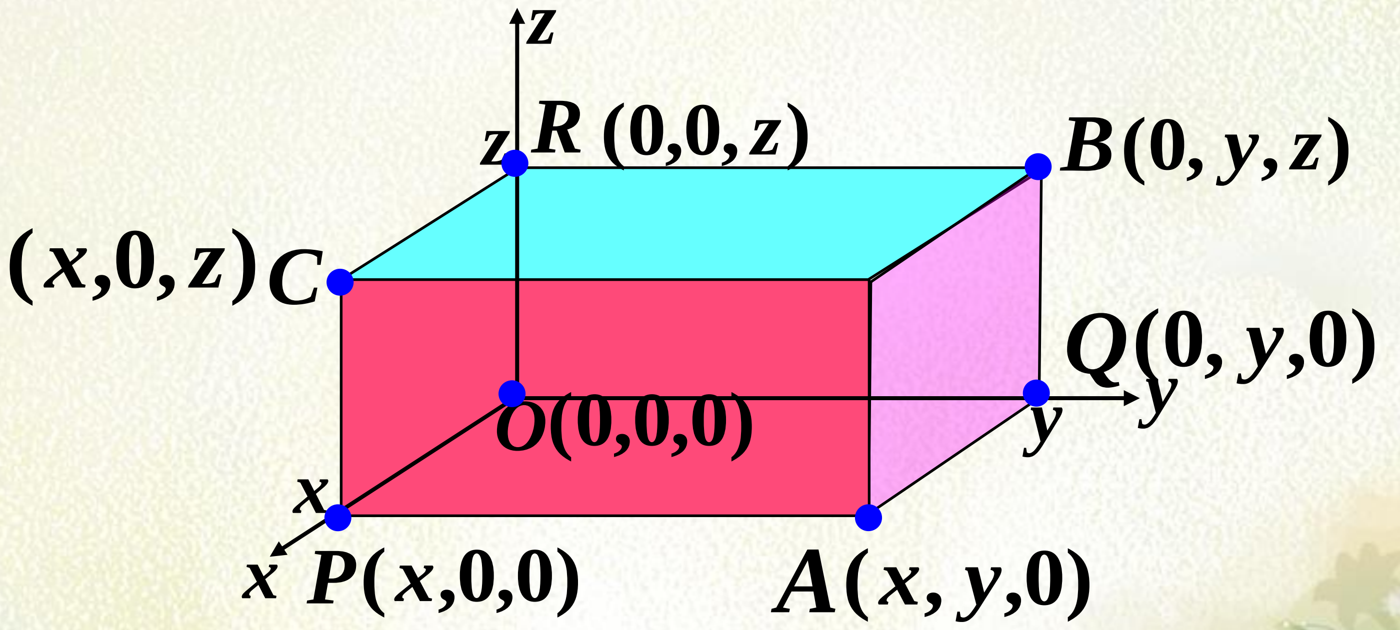
点M的坐标记作$M(x, y, z)$.

数 x, y, z 也称为向量$\vec{r}$ 的坐标,记为$\vec{r}=(x, y, z)$.

特殊点的坐标:

坐标轴上的点 P,Q,R; 坐标面上的点 A,B,C;

坐标原点 $O(0,0,0)$.



总结： 坐标轴：

$$x\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad y\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad z\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

坐标面:

$$xoy\text{面} \leftrightarrow z = 0 \qquad yoz\text{面} \leftrightarrow x = 0$$

$$zox\text{面} \leftrightarrow y = 0$$

三、利用坐标作向量的线性运算

设 $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$, λ 为实数, 则

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

平行向量对应坐标成比例: 当 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 时,

$$\vec{b}\,/\!/\,\vec{a} \Leftrightarrow \vec{b}=\lambda\vec{a} \Leftrightarrow b_x=\lambda a_x,\ b_y=\lambda a_y, b_z=\lambda a_z$$

$$\Leftrightarrow \frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$$

例2. 求解线性方程组

$$\begin{cases} 5\vec{x}-3\vec{y}=\vec{a} \\ 3\vec{x}-2\vec{y}=\vec{b} \end{cases}$$

其中$\vec{a}=(2,1,2),\vec{b}=(-1,1,-2)$.

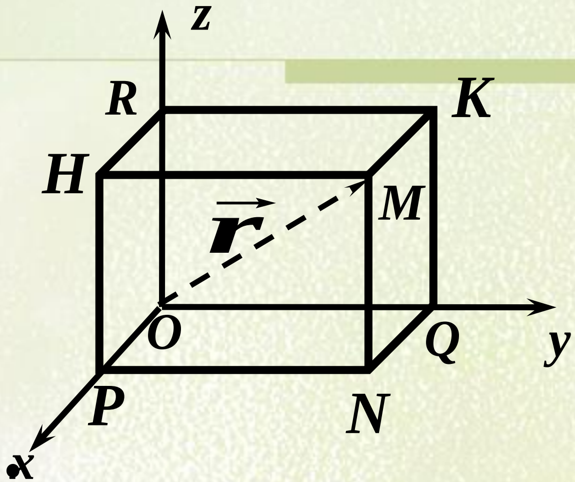
解 $\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}=2\cdot(2,1,2)-3\cdot(-1,1,-2)=(7,-1,10)$

$$\vec{y}=\frac{1}{2}(3\vec{x}-\vec{b})=\frac{1}{2}\big(3\cdot(7,-1,10)-(-1,1,-2)\big)$$

$$=(11,-2,16)$$

四、向量的模、方向角、投影

1. 向量的模



设 $\vec{r}=(x,y,z)$, 则

模的坐标表示 $|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

对两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ $B(x_2,y_2,z_2)$,

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

两点间的距离公式:

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

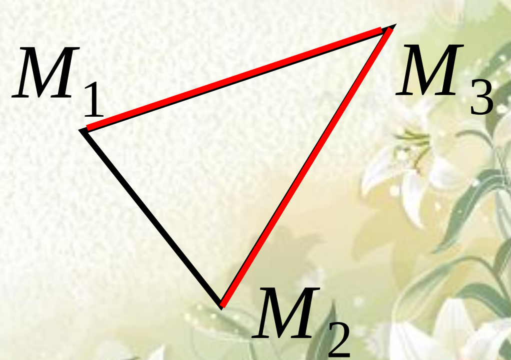
例4. 证明以 $M_1(4,3,1)$, $M_2(7,1,2)$, $M_3(5,2,3)$ 为顶点的三角形是一个等腰三角形.

证 $|M_1M_2|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14,$

$$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$$

$$|M_3M_1|^2=(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2=6,$$

因为 $|M_2M_3|=|M_3M_1|,$



所以 $\Delta M_1M_2M_3$ 是等腰三角形.

例5. 已知两点$A(4,0,5)$和$B(7,1,3)$，求与$\overrightarrow{AB}$方向相同的单位向量$\vec{e}$.

解 因为 $\overrightarrow{AB}=(7,1,3)-(4,0,5)=(3,1,-2)$.

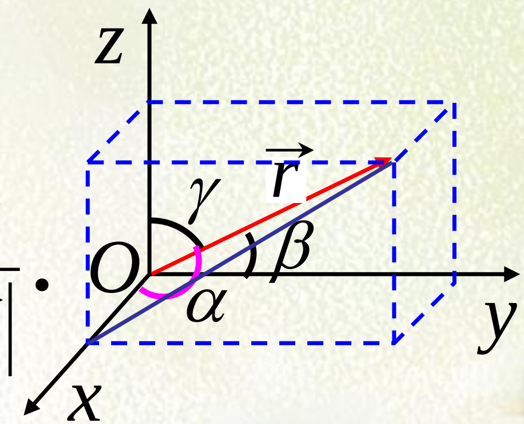
所以 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$.

于是 $\vec{e}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2)$.

2.方向角与方向余弦

非零向量$\vec{r}$与三条坐标轴的夹角α、β、γ称为向量$\vec{r}$的方向角.

设$\vec{r}=(x,y,z)$,



$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{r}|},\quad \cos\beta=\frac{y}{|\vec{r}|},\quad \cos\gamma=\frac{z}{|\vec{r}|}.$$

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{x}{|\vec{r}|},\frac{y}{|\vec{r}|},\frac{z}{|\vec{r}|}\right)=\frac{1}{|\vec{r}|}(x,y,z)=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=\vec{e}_{\vec{r}}.$$

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$称为向量$\vec{r}$的方向余弦

说明:

(1)以向量$\vec{r}$的方向余弦为坐标的向量就是与$\vec{r}$同方向的单位向量$e_{\vec{r}}$.

(2) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$

例6. 已知两点$M_1(2,2,\sqrt{2})$和$M_2(1,3,0)$，计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模，方向余弦和方向角

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(1-2,3-2,0-\sqrt{2})=(-1,1,-\sqrt{2});$

模：$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2;$

方向余弦：$\cos\alpha=-\dfrac{1}{2},\quad \cos\beta=\dfrac{1}{2},\quad \cos\gamma=-\dfrac{\sqrt{2}}{2};$

所以 $\alpha=\dfrac{2\pi}{3},\beta=\dfrac{\pi}{3},\gamma=\dfrac{3\pi}{4}.$

例7. 设点A位于第I卦限，向径$\overrightarrow{OA}$与x轴，y轴的夹角依次为$\frac{\pi}{3}$和$\frac{\pi}{4}$，且$|\overrightarrow{OA}|=6$，求点A的坐标.

解 因为$\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{\pi}{4}$. 由$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，

$$\cos^2\gamma=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{4},$$

因点A在第I卦限，知$\cos\gamma>0$，$\cos\gamma=\frac{1}{2}$.

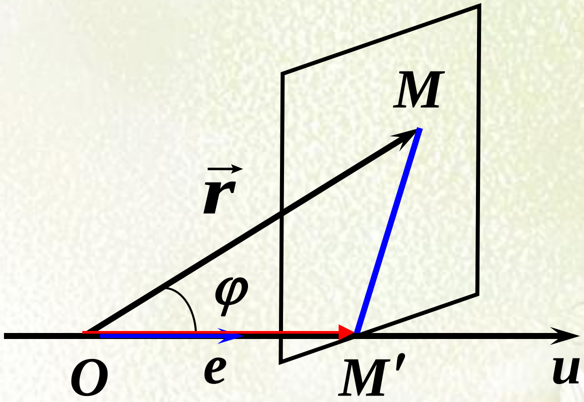
于是$\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OA}|(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=6\cdot\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$

$=(3,3\sqrt{2},3)$，这就是点A的坐标.

3. 向量在坐标轴上的投影

设点O及由单位向量$\vec{e}$确定的u轴.

任给向量$\vec{r}$,作 $\overrightarrow{OM}=r$,再过点M作与u轴垂直的平面交u轴于点M'(点M'叫做点M在u轴上的投影).

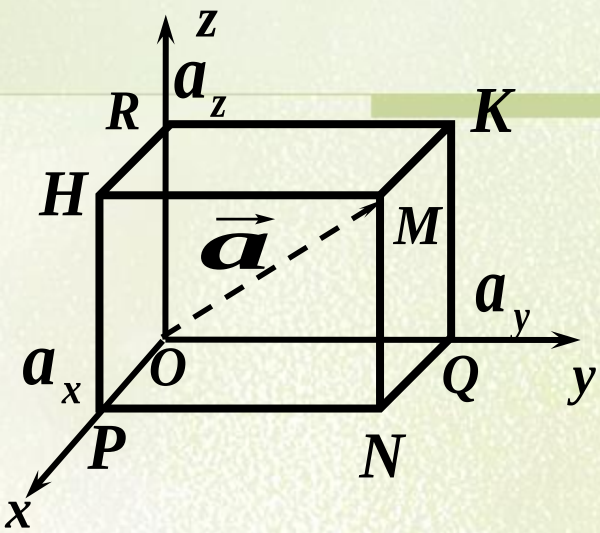


向量$\overrightarrow{OM'}$称为向量$\vec{r}$在u轴上的分向量

设$\overrightarrow{OM'}=\lambda\vec{e}$,数$\lambda$称为向量$\vec{r}$在$u$轴上的投影

记作$\mathrm{Prj}_u\vec{r}$或$(\vec{r})_u$.

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$



则由投影定义知$\vec{a}$的坐标 a_x、a_y、a_z就是$\vec{a}$在三条坐标轴上的投影,即

$$a_x=\mathrm{Prj}_x\vec{a},\quad a_y=\mathrm{Prj}_y\vec{a},\quad a_z=\mathrm{Prj}_z\vec{a}.$$

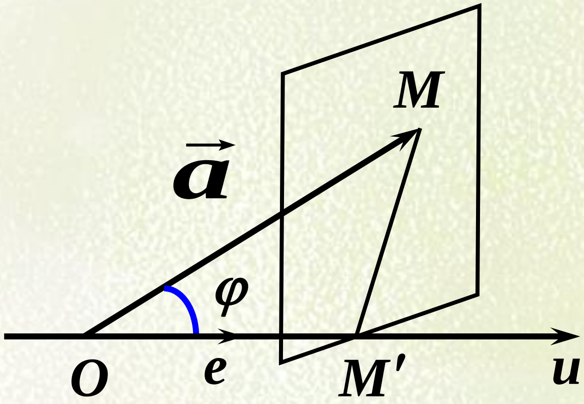
也可记作

$$a_x=(\vec{a})_x,\quad a_y=(\vec{a})_y,\quad a_z=(\vec{a})_z.$$

向量的投影的性质

性质1 $\mathrm{Prj}_u\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi,$

其中φ为向量$\vec{a}$与u轴的夹角.

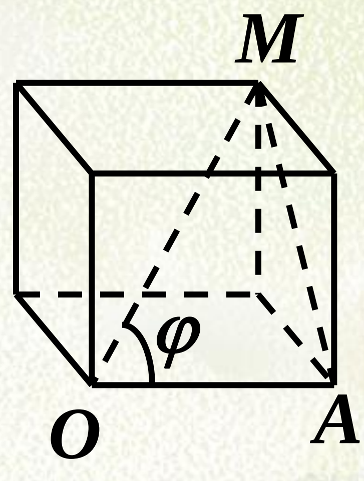


性质2 $\mathrm{Prj}_u(\vec{a}+\vec{b})=\mathrm{Prj}_u\vec{a}+\mathrm{Prj}_u\vec{b}.$

性质3 $\mathrm{Prj}_u(\lambda\vec{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\vec{a}.$

例8 设立方体的一条对角线为OM，一条棱为OA，且$|OA| = a$，求$\overrightarrow{OA}$在$\overrightarrow{OM}$方向上的投影$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OM}}\overrightarrow{OA}$.

解 如图所示，记$\angle MOA = \varphi$，有



$$\cos\varphi = \frac{|OA|}{|OM|} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

于是 $$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OM}}\overrightarrow{OA} = \left|\overrightarrow{OA}\right|\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$