第八节 多元函数的极值及其求法

一、问题的提出

二、多元函数的极值和最值

三、条件极值 拉格朗日乘数法

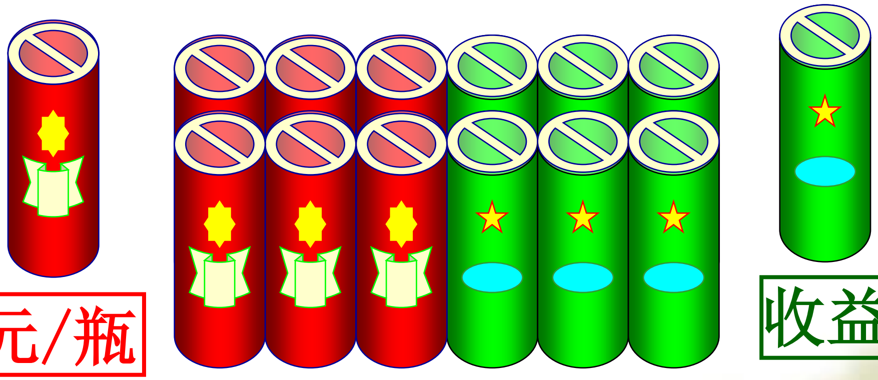
四、小结 思考题

一、问题的提出

【实例】某商店卖两种牌子的果汁，本地牌子每瓶进价1元，外地牌子每瓶进价1.2元，店主估计，如果本地牌子的每瓶卖x元，外地牌子的每瓶卖y元，则每天可卖出$70-5x+4y$瓶本地牌子的果汁，$80+6x-7y$瓶外地牌子的果汁，问：店主每天以什么价格卖两种牌子的果汁可取得最大收益？

进价：1元

售价：x元



进价：1.2元

售价：y 元

收益：$x-1$元/瓶

收益：$y-1.2$元/瓶

每天的收益为

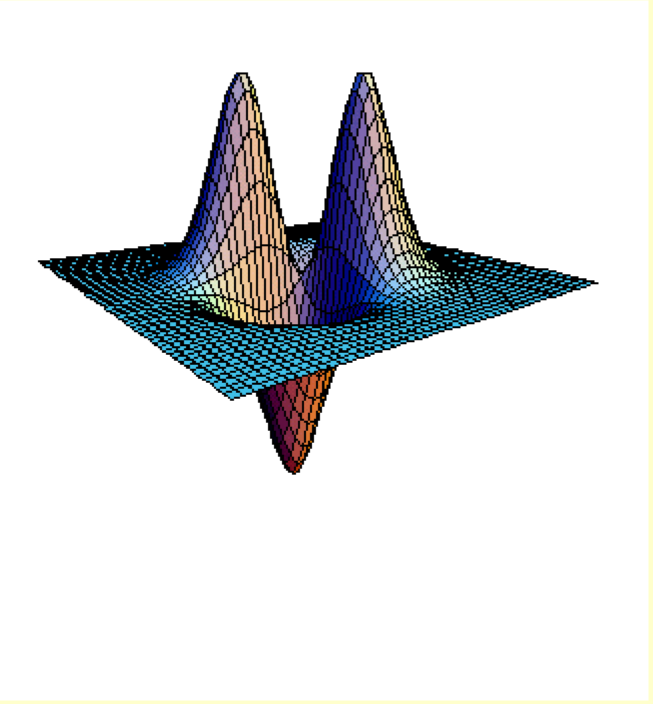
$$f(x,y)=(x-1)(70-5x+4y)+(y-1.2)(80+6x-7y)$$

求最大收益即为求二元函数的最大值.

二、多元函数的极值和最值

1、【二元函数极值的定义】

(1)【实例】观察二元函数 $z=-\dfrac{xy}{e^{x^2+y^2}}$ 的图形



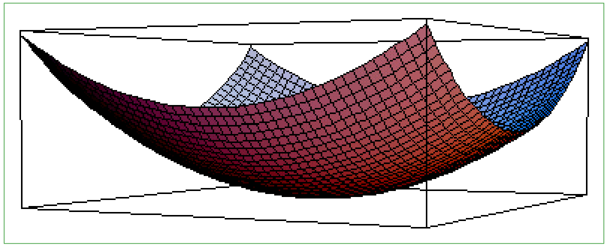
播放

(2)【二元函数极值的定义】

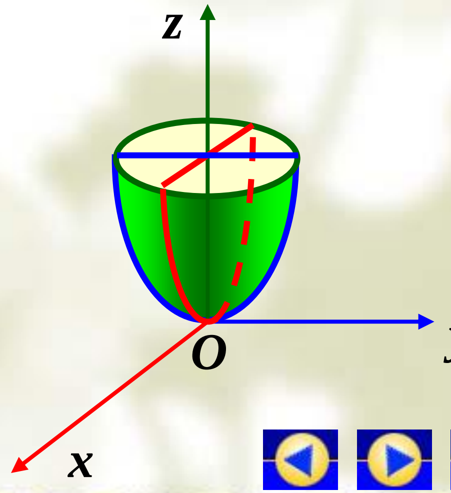
设函数 $z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)的某邻域内有定义，对于该邻域内异于(x_0,y_0) 的点(x,y)：若满足不等式 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$，则称函数在 (x_0,y_0) 有极大值；若 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$ 满足，则称函数在 (x_0,y_0)有极小值.

极大值、极小值统称为**极值**

【教材例1】函数 $z=3x^2+4y^2$在 $(0,0)$ 处有极小值.

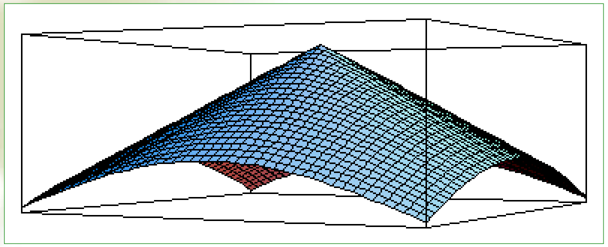


(1)

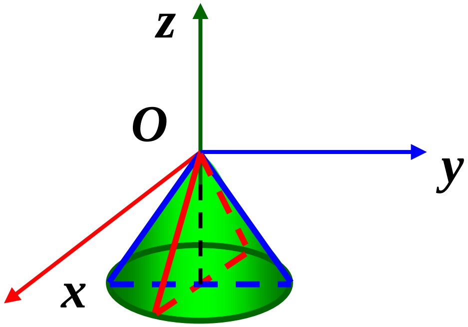


椭圆抛物面

【教材例2】函数 $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 处有极大值.

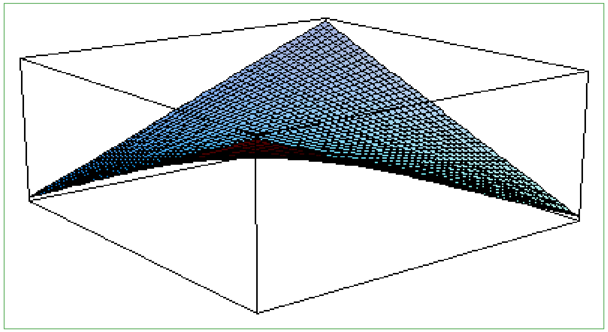


(2)

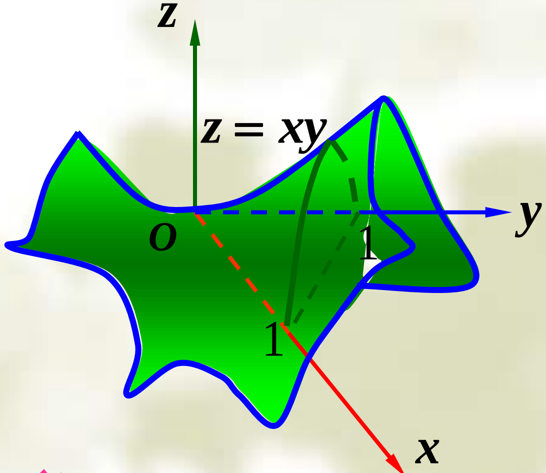


圆锥面

【教材例3】函数 $z=xy$ 在 $(0,0)$ 处无极值.



(3)



双曲抛物面（马鞍面）

2、【多元函数取得极值的条件】

【定理1】（必要条件）设函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)具有偏导数，且在点(x_0,y_0)处有极值，则它在该点的偏导数必然为零：$f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$.

【证】 不妨设$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处有极大值,

则对于(x_0,y_0)的某邻域内任意 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$

都有 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$,

故当$y=y_0$， $x\neq x_0$时，有 $f(x,y_0)<f(x_0,y_0)$,

说明一元函数$f(x,y_0)$在$x=x_0$处有极大值,

必有 $f_x(x_0,y_0)=0$;

类似地可证 $f_y(x_0,y_0)=0$.

【推广】如果三元函数$u = f(x,y,z)$在点$P(x_0,y_0,z_0)$具有偏导数，则它在$P(x_0,y_0,z_0)$有极值的必要条件为

$$f_x(x_0,y_0,z_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0,z_0)=0,\quad f_z(x_0,y_0,z_0)=0.$$

仿照一元函数，凡能使一阶偏导数同时为零的点，均称为函数的驻点.

【注意】 驻点 $\overset{\not\Leftarrow}{\not\Rightarrow}$ 极值点

举例

驻点 $\overset{\Leftarrow}{\not\Rightarrow}$ 可偏导函数极值点

说明: 1. 但驻点不一定是极值点.

例如, $z = xy$ 有驻点(0, 0), 但在该点不取极值.

2. 偏导数不存在的点可能是极值点.

例如 函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 在(0, 0)处取得极小值

但函数在(0, 0)处偏导数不存在

3. 可导函数的极值点一定是驻点.

【问题】如何判定一个驻点是否为极值点?

【定理 2】（充分条件） 二元函数极值的判定定理

设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内连续，有一阶及二阶连续偏导数，

又 $f_x(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)=0$

令 $f_{xx}(x_0,y_0)=A,\quad f_{xy}(x_0,y_0)=B,\quad f_{yy}(x_0,y_0)=C,$

则$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处是否取得极值的条件如下：

（1）$AC-B^2>0$时具有极值，

当$A<0$时有极大值， 当$A>0$时有极小值；

（2）$AC-B^2<0$时没有极值；

（3）$AC-B^2=0$时可能有极值，也可能没有极值，还需另作讨论.

【总结】求可导函数$z = f(x,y)$极值的一般步骤：

第一步　解方程组　$f_x(x,y)=0,\quad f_y(x,y)=0$

求出实数解，得驻点.

第二步　对于每一个驻点(x_0,y_0)，

求出二阶偏导数的值 A、B、C.

第三步　定出$AC-B^2$的符号，再判定是否有极值.

【教材例4】求$f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$的极值.

解:求驻点.

解方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases}$

得驻点: (1, 0) , (1, 2) , (–3, 0) , (–3, 2) .

判别. 求二阶偏导数

$$f_{xx}(x,y)=6x+6,\ f_{xy}(x,y)=0, f_{yy}(x,y)=-6y+6$$

在点(1,0) 处 $A=12, B=0,\ C=6, AC-B^2=72>0,$

$$A>0,\ \therefore f(1,0)=-5\text{为极小值};$$

$$f_{xx}(x,y)=6x+6,\ f_{xy}(x,y)=0, f_{yy}(x,y)=-6y+6$$

在点(1,2) 处 $A=12, B=0, C=-6$

$$AC-B^2=12\times(-6)<0,\ \therefore f(1,2)\text{不是极值};$$

在点(–3,0) 处 $A=-12,\ B=0,\ C=6,$

$$AC-B^2=-12\times 6<0, \therefore f(-3,0)\text{不是极值};$$

在点(–3,2) 处 $A=-12,\ B=0,\ C=-6$

$$AC-B^2=-12\times(-6)>0,\ A<0,$$

$$\therefore f(-3,2)=31\text{为极大值}.$$

例5. 讨论函数$z=x^3+y^3$及$z=(x^2+y^2)^2$在点(0,0)是否取得极值.

解: 显然(0,0)都是它们的驻点，在(0,0)都有

$$AC-B^2=0$$

$z=x^3+y^3$在(0,0)点邻域内的取值可能为$\begin{cases}\text{正}\\\text{负}\\0\end{cases}$

因此 $z(0,0)$ 不是极值.

当 $x^2+y^2\neq 0$时, $z=(x^2+y^2)^2>z\big|_{(0,0)}=0$

因此 $z(0,0)=(x^2+y^2)^2\big|_{(0,0)}=0$为极小值.

3、【二元函数的最值】

分为 $\begin{cases} \text{(1) 有界闭区域上的连续函数求最值} \\ \text{(2) 实际问题求最值} \end{cases}$

与一元函数相类似，我们可以利用函数的极值来求函数的最大值和最小值.

(1) 有界闭区域上的连续函数求最值的一般方法

将函数在D内的所有驻点处的函数值及在D的边界上的最大值和最小值相互比较，其中最大者即为最大值，最小者即为最小值.

(2) 实际问题求最值

实际问题中，若据问题的性质，知道最值一定在D的内部取得，而在D内只有一个驻点，则可断定该驻点处的函数值就是实际所求的最值.

【教材例7】某厂要用铁板做成一个体积为 2 m^3 的有盖长方体水箱。问长、宽、高各取怎样的尺寸，才能用料最省.

【解】 设水箱的长、宽分为x米、y米；则高为 $\frac{2}{xy}$ 米

水箱用材料面积为 $A = 2(xy + y\cdot\frac{2}{xy} + x\cdot\frac{2}{xy})$

即 $A = 2(xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y})\quad (x>0, y>0)$ —— 目标函数

令 $A_x = 2\left(y - \frac{2}{x^2}\right) = 0,\ A_y = 2\left(x - \frac{2}{y^2}\right) = 0$

得驻点 $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$

根据实际问题可知最小值在定义域内应存在,

因此可断定此唯一驻点就是最小值点.

即当长、宽均为 $\sqrt[3]{2}$ 高为 $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{2}$

水箱所用材料最省.

三、条件极值拉格朗日乘数法

1、【无条件极值与条件极值】

(1)【无条件极值】对自变量除了限制在定义域内外，并无其他条件.

［实例］小王有2000元钱，他决定用来购买两种急需的物品：计算机优盘和硬盘，设他购买x个优盘，y个硬盘达到最佳效果，效果函数 $U(x,y)=\ln x+\ln y$，每个优盘30元，每个硬盘500元，问他如何分配这2000元以达到最佳效果.

［问题的实质］

求 $U(x,y)=\ln x+\ln y$ 在条件 $30x+500y=2000$ 下的极值.

(2)【条件极值】对自变量有附加条件的极值.

[条件极值的求法]

$\begin{cases}\text{法 I :化为无条件极值} \\ \text{法 II :拉格朗日乘数法}\end{cases}$

对三元以上的函数特别有用

法 I : 在条件$\varphi(x, y)=0$下, 求函数$z = f(x, y)$的极值

从条件$\varphi(x, y)=0$中解出$y=\psi(x)$

求一元函数 $z = f\big(x,\psi(x)\big)$ 的无条件极值问题

法II:拉格朗日乘数法

在条件$\varphi(x,y)=0$下,求函数$z=f(x,y)$的极值.

分析: 设 $\varphi(x,y)=0$ 可确定隐函数 $y=\psi(x)$,

则问题等价于一元函数 $z=f(x,\psi(x))$ 的极值问题,

故极值点必满足 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f_x+f_y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$

因 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}$,故有 $f_x-f_y\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}=0$

记 $\dfrac{f_x}{\varphi_x}=\dfrac{f_y}{\varphi_y}=-\lambda$, 满足 $\begin{cases} f_x+\lambda\varphi_x=0 \\ f_y+\lambda\varphi_y=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$

2、【拉格朗日乘数法】

要找函数$z=f(x,y)$在条件$\varphi(x,y)=0$下的可能极值点，步骤：

（1）先构造函数$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，

称为拉格朗日函数

其中λ为某一常数，

（2）列出 $\begin{cases} f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0, \\ f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0. \end{cases}$

（3）解出x,y,λ，其中x,y就是可能的极值点的坐标

（4）判断该点是否为极值点（实际问题唯一、必是）

——拉格朗日乘数法

3.【乘数法的推广】(条件与自变量均多于一个的情况)

推广: 求函数 $u = f(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z)=0$,

$\psi(x,y,z)=0$ 下的极值.

设 $L(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda_1\varphi(x,y,z)+\lambda_2\psi(x,y,z)$

解方程组
$$\begin{cases} L_x = f_x + \lambda_1\varphi_x + \lambda_2\psi_x = 0 \\ L_y = f_y + \lambda_1\varphi_y + \lambda_2\psi_y = 0 \\ L_z = f_z + \lambda_1\varphi_z + \lambda_2\psi_z = 0 \\ \varphi(x,y,z)=0 \\ \psi(x,y,z)=0 \end{cases}$$

【例 8】将正数 12 分成三个正数 x,y,z 之和 使得 $u=x^3y^2z$ 为最大.

【解】 令 $L(x,y,z)=x^3y^2z+\lambda(x+y+z-12)$

则
$$\begin{cases} L_x=3x^2y^2z+\lambda=0 \\ L_y=2x^3yz+\lambda=0 \\ L_z=x^3y^2+\lambda=0 \\ x+y+z=12 \end{cases}$$

解得唯一驻点 $(6,4,2)$,

故最大值为 $u_{\max}=6^3\cdot 4^2\cdot 2=6912.$

教材例7 求表面积为 a^2 而体积为最大的长方体的体积.

解 设长方体的长、宽、高为 x，y，z. 体积为 V.

则问题就是条件 $2xy+2yz+2xz-a^2=0$ 下，

求函数 $v=xyz$, $(x>0,y>0,z>0)$ 的最大值.

令 $L(x,y,z)=xyz+\lambda(2xy+2yz+2xz-a^2)$,

则
$$\begin{cases} L_x = yz+\lambda(2y+2z)=0, \\ L_y = xz+\lambda(2x+2z)=0, \\ L_z = xy+\lambda(2y+2x)=0, \\ 2xy+2yz+2xz-a^2=0 \end{cases}$$

即 $\begin{cases} yz = -2\lambda(y+z) & (1) \\ xz = -2\lambda(x+z) & (2) \\ xy = -2\lambda(x+y) & (3) \\ 2xy + 2yz + 2xz - a^2 = 0 & (4) \end{cases}$

因 $x > 0,\ y > 0,\ z > 0,$

$$\frac{x}{y} = \frac{x+z}{y+z}, \qquad \frac{z}{y} = \frac{x+z}{x+y},$$

于是 $x=y=z$，代入条件，得 $6x^2 = a^2$，

解得 $x = \dfrac{\sqrt{6}}{6}a,\ y = \dfrac{\sqrt{6}}{6}a,\ z = \dfrac{\sqrt{6}}{6}a,$

这是唯一可能的极值点. 最大值就在此点处取得.

故最大值

$$V_{\max} = \frac{\sqrt{6}}{6}a \cdot \frac{\sqrt{6}}{6}a \cdot \frac{\sqrt{6}}{6}a = \frac{\sqrt{6}}{36}a^3.$$

四、小结

多元函数的极值

（取得极值的必要条件、充分条件（二元））

多元函数的最值

拉格朗日乘数法—条件极值

［条件极值的求法］$\begin{cases}\text{法 I :化为无条件极值} \\ \text{法 II :拉格朗日乘数法}\end{cases}$

【思考题】若 $f(x_0,y)$ 及 $f(x,y_0)$ 在 (x_0,y_0) 点均取得极值，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 是否也取得极值?

【思考题解答】不是. 例如 $f(x,y)=x^2-y^2$,

当 $y=0$ 时， $f(x,0)=x^2$ 在 $(0,0)$ 取极小值;

当 $x=0$ 时， $f(0,y)=-y^2$ 在 $(0,0)$ 取极大值;

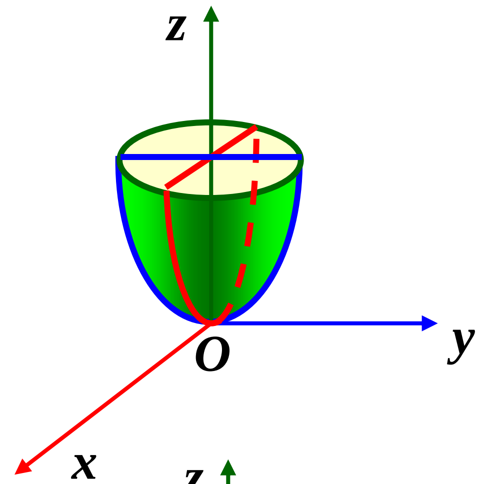
但 $f(x,y)=x^2-y^2$ 在 $(0,0)$ 不取极值.

返回

[例1] 函数 $z = 3x^2 + 4y^2$

在 $(0,0)$ 处有极小值.

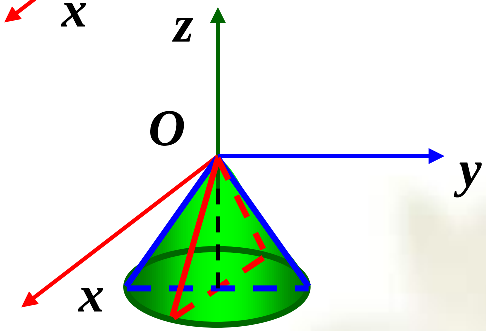
驻点且是极值点



[例2] 函数 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

在 $(0,0)$ 处有极大值.

极值点但非驻点



[例3] 函数 $z = xy$

在 $(0,0)$ 处无极值.

驻点但非极值点