第三节 定积分的计算

二、定积分的分部积分法

二、分部积分法

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du.}$$

设$u(x), v(x)$在$[a, b]$上可导，则$(uv)' = u'v + uv'$,

故 $\int_a^b (uv)' dx = \int_a^b u'v dx + \int_a^b uv' dx$,

即 $[uv]\Big|_a^b = \int_a^b v du + \int_a^b u dv$,

$$\therefore \boxed{\int_a^b u dv = [uv]\Big|_a^b - \int_a^b v du.}$$

——定积分的分部积分法

例1 求 $\int_0^1 xe^x dx.$

解 $\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 x de^x = (xe^x)\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = 1$

例2 求 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx.$

解 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx = \left[x \arcsin x\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2)$$

$$= \frac{\pi}{12} + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

例3 计算 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$

解 令$\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$， $dx=2tdt$,

当 $x=0$ 时，$t=1$， 当 $x=1$ 时， $t=1$

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx=2\int_0^1 e^t t dt=2\int_0^1 t de^t$$

$$=2[te^t]_0^1-2\int_0^1 e^t dt$$

$$=2e-2[e^t]_0^1=2$$

例4 求 $\int_1^2 x\ln x dx$

解 $\int_1^2 x\ln x dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln x d(x^2)$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x^2 d(\ln x)$$

$$= 2\ln 2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x dx$$

$$= 2\ln 2 - \frac{1}{4}x^2\Big|_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

例5 求 $\int_0^{\pi} x\sin x dx$

解 $\int_0^{\pi} x\sin x dx = -\int_0^{\pi} x d\cos x$

$$= -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x dx$$

$$= \pi + \sin x\Big|_0^{\pi}$$

$$= \pi$$

2、（本题满分 6 分）

设 $f(x)=\int_x^1 e^{t^3}dt$，求 $\int_0^1 xf(x)dx$。

$$f(1)=0 \qquad f'(x)=\left(-\int_1^x e^{t^3}dt\right)'=-e^{x^3}$$

$$\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)d(x^2)=\frac{1}{2}\left[\left(f(x)\cdot x^2\right)\Big|_0^1-\int_0^1 x^2 df(x)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[f(1)-\int_0^1 x^2\cdot f'(x)dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\cdot e^{x^3}dx=\frac{1}{6}\int_0^1 e^{x^3}d(x^3)$$

$$=\frac{1}{6}e^{x^3}\Big|_0^1=\frac{1}{6}(e-1).$$

例6. 计算 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$. $\left(=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x\right)$

解: $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\mathrm{d}(\cos x)$

$$=-(\sin^{n-1}x\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x\mathrm{d}x$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\mathrm{d}x-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$$

$=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$, 则 $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$.

$I_{n-2}=\dfrac{n-3}{n-2}I_{n-4}$, $I_2=\dfrac{1}{2}I_0$; $I_3=\dfrac{2}{3}I_1$;

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

而易求得

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x = 1,$$

则当n为偶数时

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0 = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2},$$

则当n为奇数时

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1 = \frac{(n-1)!!}{n!!},$$

内容小结:

1. 定积分的换元法

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

2. 几个特殊积分、定积分的几个等式

3. 定积分的分部积分公式

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du.$$

（注意与不定积分分部积分法的区别）