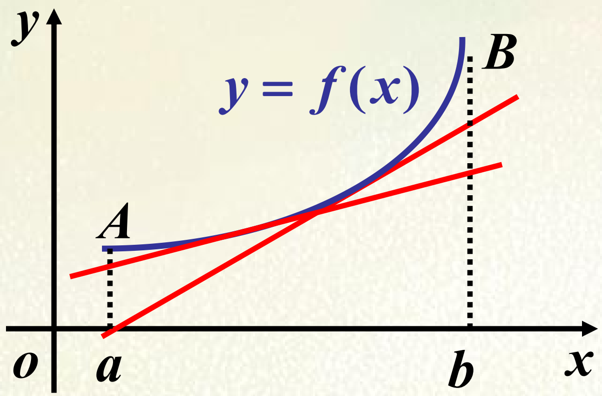
第四节　函数的单调性与凹凸性

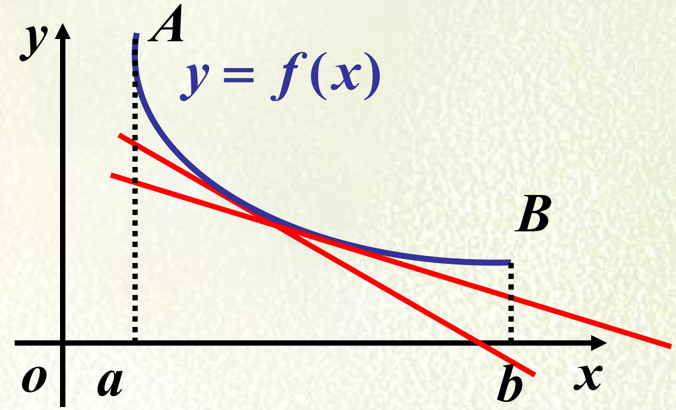
一、函数单调性、极值的判别

二、函数的凹凸性与拐点

三、函数的最大值与最小值

一、函数单调性及其判别法





各点处切线的斜率为正　　各点处切线的斜率为负

若$y=f(x)$在区间(a,b)上单调递增 $\Rightarrow f'(x)>0$

若$y=f(x)$在区间(a,b)上单调递减 $\Rightarrow f'(x)<0$

1. 函数单调性的判定方法

定理1 设 $y=f(x)$ 在区间$[a, b]$上连续, 在区间(a, b)内可导，则对 $\forall x\in(a,b)$,

(1)若 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在区间$[a, b]$内单调增加;

(2)若 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在区间$[a, b]$内单调减少.

注意:函数的单调性是一个区间上的性质，要用导数在这一区间上的符号来判定，而不能用一点处的导数符号来判别一个区间上的单调性.

2. 单调区间.

若函数在其定义区间的某个子区间上是单调的, 则该子区间称为函数的单调区间.

例1 讨论函数 $y = e^x - x - 1$ 的单调性.

解 函数定义域 $(-\infty, +\infty)$.

$$\because\ y' = e^x - 1.$$

在 $(-\infty, 0)$ 内, $y' < 0$, $\therefore$ 函数单调减少;

在 $(0, +\infty)$ 内, $y' > 0$, $\therefore$ 函数单调增加 .

故 $(-\infty, 0)$ 是 $f(x)$ 的递减区间. $(0, +\infty)$ 是递增区间.

$(-\infty, 0]$ $[0, +\infty)$

说明： 可疑的极值点：驻点.

例2 讨论函数 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 的单调性

解 函数定义域 $(-\infty,+\infty)$.

$$\because y'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

在$(-\infty,0)$内, $y'<0$, $\therefore$ 函数单调减少 .

在$(0,+\infty)$内, $y'<0$, $\therefore$函数单调增加.

$(-\infty,0]$ $[0,+\infty)$

故 $(-\infty,0)$是$f(x)$的递减区间. $(0,+\infty)$是递增区间.

单调区间的分界点: $f'(x_0)=0$或$f'(x_0)$不存在.

说明: 可疑的极值点: 驻点和不可导点.

3. 函数极值的判定定理

定理2（极值第一充分条件）

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内连续，且在空心邻域内有导数，当 x 由小到大通过 x_0 时，

(1) $f'(x)$ "左正右负"，则 $f(x)$ 在 x_0 处取极大值.

(2) $f'(x)$ "左负右正"，则 $f(x)$ 在 x_0 处取极小值；

(3) $f'(x)$ "不变号"，则 $f(x)$ 在 x_0 处无极值.

确定函数 $y = f(x)$ 的单调性的一般步骤是:

(1) 确定函数定义域;

(2) 确定 $f'(x) = 0$ 及 $f'(x)$ 不存在 的点, 以这些点为分界点划分定义域为多个子区间;

(3)确定 $f'(x)$在各子区间内的符号，从而定出$f(x)$在各子区间的单调性.

例3 求函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的单调区间.

解 函数 $f(x)$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$

$$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$$

由 $f'(x)=0$ 解得 $x_1=1,\quad x_2=2$

将 $(-\infty,+\infty)$ 分成 $(-\infty,1),(1,2),(2,+\infty)$

列表:

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

故 $(-\infty,1],[2,+\infty)$ 是 $f(x)$ 的递增区间. $[1,2]$ 是递减区间. (端点可包括也可不包括)

求极值的步骤:

确定函数定义域;

(1) 求出导数 $f'(x)$;

(2) 求出 $f(x)$的全部驻点和不可导点 ;

(3) 考察 $f'(x)$ 在驻点和不可导点两侧 的正负号,

判断极值点；并求出各极值点处的函 数值.

例4 求出函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 的极值.

解 函数定义域 $(-\infty,+\infty)$.

$$f'(x)=3x^2-6x-9 \ =3(x+1)(x-3)$$

令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x_1=-1, x_2=3$. 列表讨论

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

极大值 $f(-1)=10$, 极小值 $f(3)=-22$.

例5. 求函数 $f(x)=(x-1)\cdot\sqrt[3]{x^2}$ 的极值.

解: 函数定义域 $(-\infty,+\infty)$.

1) 求导数 $f'(x)=x^{\frac{2}{3}}+(x-1)\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$

2) 令 $f'(x)=0$，得 $x_1=\dfrac{2}{5}$， $x_2=0$(不可导点)

3) 列表判别

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	不存在	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值 0	↘	极小值 -0.33	↗

$f(0)$　　　　$f(\frac{2}{5})$

定理3（极值第二充分条件）

设 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数,且 $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$

(1)当 $f''(x_0)<0$ 时, 函数 $f(x)$ 在x_0处取得极大值;

(2)当 $f''(x_0)>0$ 时, 函数 $f(x)$ 在x_0处取得极小值;

分析：

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$$ （利用保号性）

注意：$f''(x_0)=0$,判别方法失效，需要改用定理2的方法.

例6 求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值 .

解: $f'(x)=6x(x^2-1)^2$, $f''(x)=6(x^2-1)^2+24x^2(x^2-1)$

令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x_1=-1, x_2=0, x_3=1$

因 $f''(0)=6>0$, 故 $f(0)=0$ 为极小值;

又 $f''(-1)=f''(1)=0$, 故需用第一判别法判别.

当$x\in(-\infty,-1),(-1,0)$时, $f'(x)<0$不变号 , $x=-1$无极值 .

当$x\in(0,1),(1,+\infty)$时, $f'(x)>0$不变号, $x=1$无极值 .

7. a为何值时，函数$f(x)=a\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$在$x=\dfrac{\pi}{3}$处取得极值？它是极大值还是极小值？并求此极值.

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=(a\cos x+\cos 3x)\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}=0 \qquad \frac{a}{2}-1=0$$

$$\Rightarrow a=2.$$

$$f'(x)=2\cos x+\cos 3x \qquad f''(x)=-2\sin x-3\sin 3x$$

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}<0$$

$\therefore f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$为极大值.

4. 函数单调性的应用

——证明不等式和判断方程根的个数.

例8 证明不等式 $e^x \geq x+1 \quad (x \geq 0)$;

证 令 $f(x)=e^x-x-1$

因为 $f(0)=0$, 而 $f'(x)=e^x-1 \geq 0 \quad (x \geq 0)$

则 $f(x)$ 单增. 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq f(0)$.

故 $e^x \geq x+1$.

例 9 证明方程 $x^5+x+1=0$ 在区间 $(-1,0)$ 内有且只有一个实根.

证 令 $f(x)=x^5+x+1$,

因 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,0]$ 上连续,且 $f(-1)\cdot f(0)<0$,

由零点定理知 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内至少有一个零点.

另一方面,对于任意实数 x,有 $f'(x)=5x^4+1>0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加,因此曲线

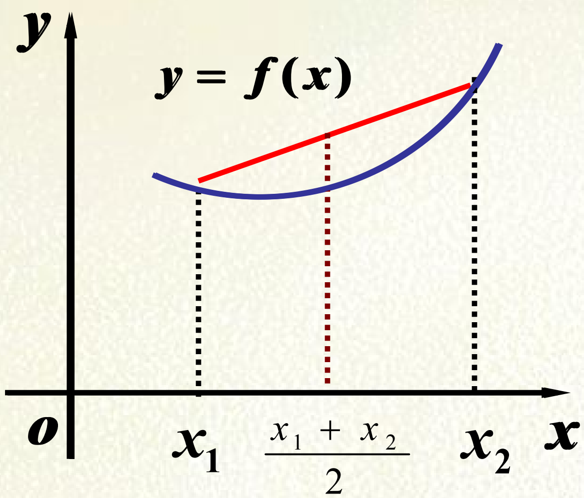
$y=f(x)$ 与 x 轴至多只有一个交点.

综上所述,方程 $x^5+x+1=0$ 在区间 $(-1,0)$ 内有且只有一个实根.

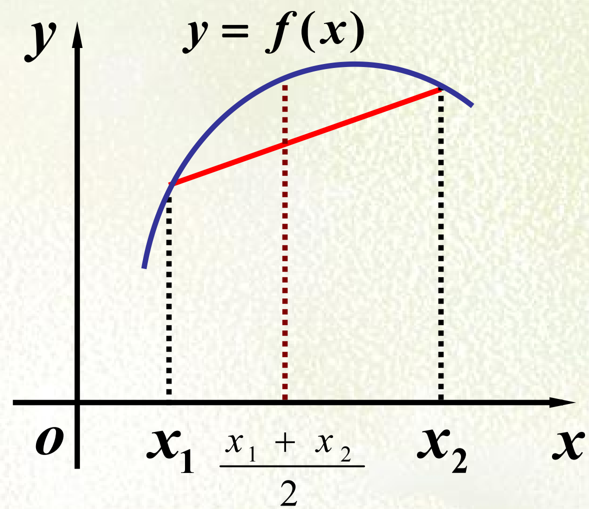
二、函数的凹凸性与拐点

1. 曲线的凹凸性

如何研究曲线的弯曲方向?



图形上任意弧段位于所张弦的下方



图形上任意弧段位于所张弦的上方

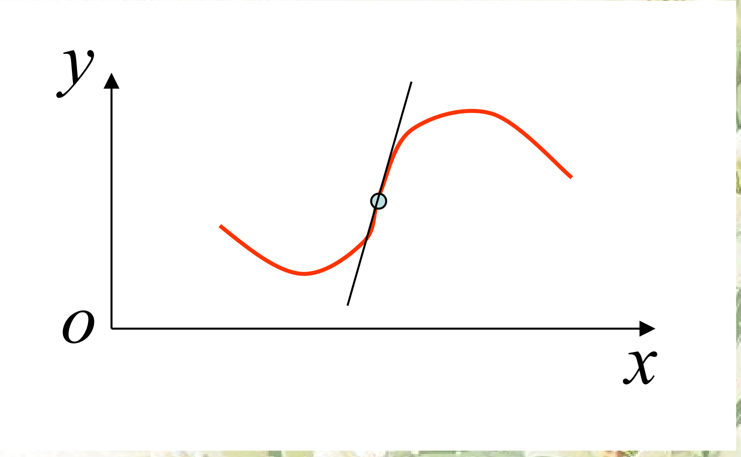
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},\quad f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

定义. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，$\forall x_1, x_2 \in I$,

(1) 若恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称 $f(x)$ 的图形是凹的;

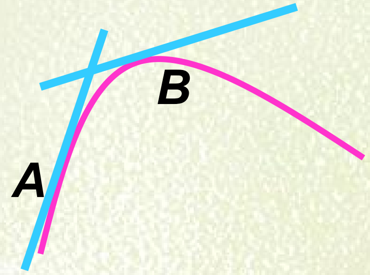
(2) 若恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称 $f(x)$ 的图形是凸的.

连续曲线上凹凸分界点称为拐点 .



2. 曲线凸性的判定

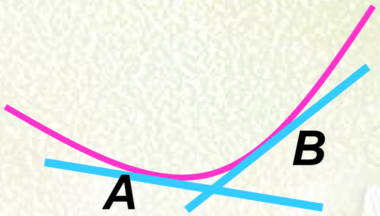
(1)向上凸曲线从点A移到点B 时,



对应的切线斜率$f'(x)$单调减少的.

$$f''(x) < 0$$

(2)向下凹曲线从点A移到点B时,



对应的切线斜率$f'(x)$单调增加的.

$$f''(x) > 0$$

定理4 设函数 $y=f(x)$在 I 内有二阶导数，则

(1) $\forall x\in(a,b)$,均有 $f''(x)>0$, $y=f(x)$在(a,b)上是向下凹的；

(2) $\forall x\in(a,b)$,均有 $f''(x)<0$, $y=f(x)$ 在(a,b)上是向上凸的.

例10判断曲线 $y=x^3$ 的凹凸性.

解 $\because y'=3x^2$, $y''=6x$, 令$y''=0$,得$x=0$.

当$x<0$时, $y''<0$, $\therefore$曲线 在$(-\infty,0]$为向上凸的;

当$x>0$时, $y''>0$, $\therefore$曲线 在$[0,+\infty)$为向下凹的;

注 点$(0,0)$是曲线由向上凸变向下凹的分界点.

注: 凹凸性的分界点 $f''(x_0)=0$或$f''(x_0)$不存在的点.

定理5(拐点判别定理) 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内二阶可导，且 $f''(x_0)=0$ 或 $f''(x_0)$ 不存在，

(1) 若在点 x_0 的两侧, $f''(x)$ 异号, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(2)若在点 x_0 两侧, 二阶导数同号，则点 $(x_0, f(x_0))$ 不为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

判别曲线的凹凸性及拐点的方法步骤：

（1） 确定函数定义域;

（2）求出$f'(x)$ 、$f''(x)$

（3）求出使$f''(x)=0$的点及$f''(x)$不存在的点；

（4）检查在这些点左右两边的符号, 从而决定曲线的凹凸区间及拐点。

例11 求曲线 $y=3x^4-4x^3+1$ 的拐点及凹、凸的区间.

解 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, $y'=12x^3-12x^2$,

$y''=36x\left(x-\frac{2}{3}\right)$. 令 $y''=0$, 得 $x_1=0$, $x_2=\frac{2}{3}$.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2/3)$	$2/3$	$(2/3,+\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	凹	拐点 $(0,1)$	凸	拐点 $(2/3,11/27)$	凹

曲线的凹间为 $(-\infty,0]$, $[2/3,+\infty)$, 凸区间为 $[0,2/3]$,

拐点为 $(0,1)$和 $(2/3,11/27)$.

例12证明不等式

$$\frac{1}{2}(x^n+y^n)>(\frac{x+y}{2})^n \quad (x>0,y>0,x\neq y,n>1)$$

证明 设 $f(t)=t^n$，则 $f''(t)=n(n-1)t^{n-2}$

当$n>1$时，在$(0,+\infty)$，$f''(t)>0$,

所以在$(0,+\infty)$内，$f(t)$是凹函数,

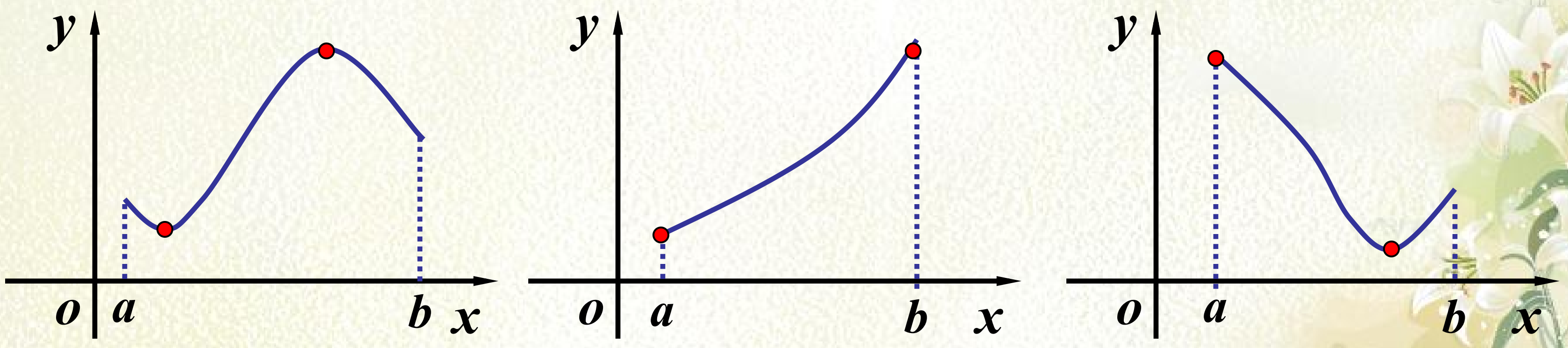
对$\forall x,y>0,x\neq y$，满足 $f\left(\frac{x+y}{2}\right)<\frac{f(x)+f(y)}{2}$,

即 $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n<\frac{1}{2}(x^n+y^n)$，所以$\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n$.

三、最值的求法

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$上的最大值与最小值存在 .

区域内部的最值点一定 是极值点。



步骤:

1.求驻点和不可导点;

2.求区间端点及驻点和不可导点的函数值,比较大小,最大的就是最大值,最小的就是最小值.

例12　求函数$y=2x^3+3x^2$在$[-2,1]$上的最大最小值。

解　$y'=6x^2+6x=6x(x+1)$

$y'=0, x_1=0, x_2=-1.$

$f(0)=0, f(-1)=1, f(-2)=-4, f(1)=5.$

比较得函数的最大值为$f(1)=5$

最小值为　$f(-2)=-4$

例13求函数 $y=\left|x^2-3x+2\right|$ 的在 $[-3,4]$ 上的最大值与最小值．

解
$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & x\in[-3,1]\cup[2,4] \\ -x^2+3x-2 & x\in(1,2) \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & x\in(-3,1)\cup(2,4) \\ -2x+3 & x\in(1,2) \end{cases}$$

解方程 $f'(x)=0$, 得 $x_1=\dfrac{3}{2}$

不可导点为 $x_2=1, x_3=2.$

计算 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$; $f(1)=0$; $f(2)=0$ $f(-3)=20$ $f(4)=6$;

比较得 最大值 $f(-3)=20,$ 最小值 $f(1)=f(2)=0.$

2. 实际问题的最值

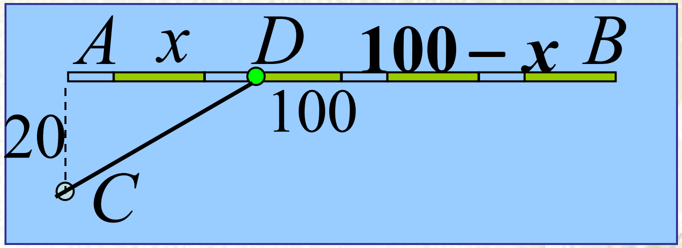
(1)建立目标函数;

(2)求最值;

若目标函数只有唯一驻点，则该点的函数值，

即为所求的最 (或最小)值.

例14 铁路上 AB 段的距离为100 km，工厂 C 距 A 处20 km，$AC \perp AB$，要在 AB 线上选定一点 D 向工厂修一条公路，已知铁路与公路每公里货运价之比为 3:5，为使货物从 B 运到工厂 C 的运费最省，问 D 点应如何选取?



解: 设 $AD = x$ (km)，则 $CD = \sqrt{20^2 + x^2}$，总运费

$$y = 5k\sqrt{400 + x^2} + 3k(100 - x) \quad (0 \le x \le 100)$$

$(k>0)$

$$y=5k\sqrt{400+x^2}+3k(100-x)$$

$$y'=k\left(\frac{5x}{\sqrt{400+x^2}}-3\right),$$

所以 $x=15$ 为唯一的 极小点 ,从而为最小值点,

故 $AD=15\ km$ 时运费最省 .

内容小结

1. 可导函数单调性判别

$f'(x)>0, x\in I \Longrightarrow f(x)$ 在 I 上单调递增

$f'(x)<0, x\in I \Longrightarrow f(x)$ 在 I 上单调递减

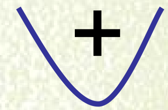
2. 驻点和不可导点统称为临界点.

函数的极值必在临界点取得.

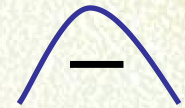
3.判别法 $\begin{cases} \text{第一充分条件;} \\ \text{第二充分条件;} \end{cases}$ (注意使用条件)

4. 曲线凹凸与拐点的判别

$f''(x) > 0, x \in I \Longrightarrow$ 曲线 $y = f(x)$ 在 I 上向下凹



$f''(x) < 0, x \in I \Longrightarrow$ **曲线 $y = f(x)$ 在 I 上向上凸**



拐点 — 连续曲线上有切线的凹凸分界点

5. 实际问题求最值的步骤.