第二节 二重积分的计算法(一)

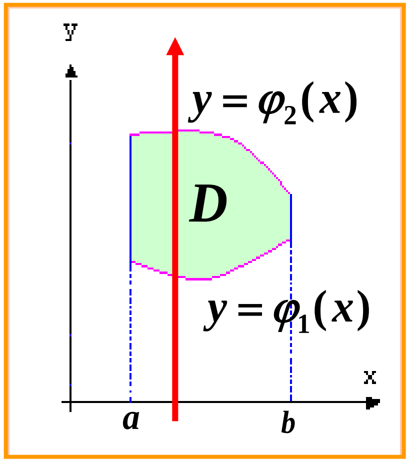
一 利用直角坐标计算二重积分

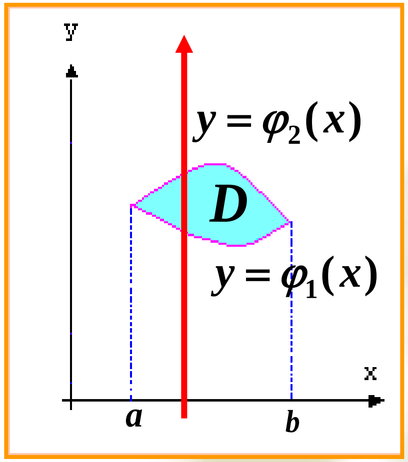
二 小结 思考题

一、利用直角坐标系计算二重积分

1.【预备知识】

(1)［X－型区域］$a \le x \le b, \quad \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$.

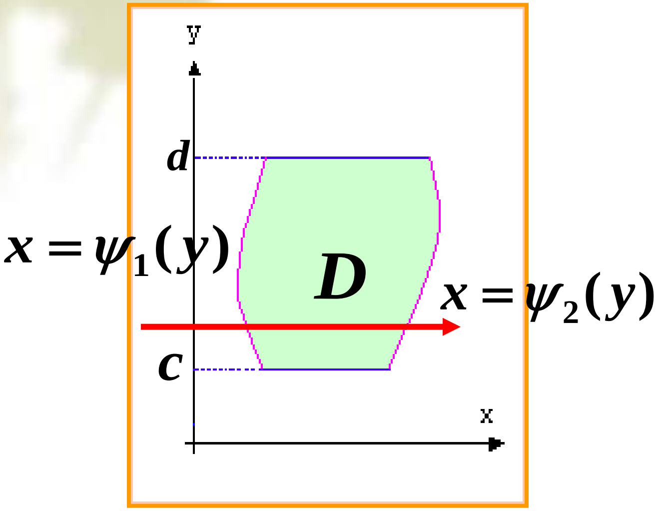


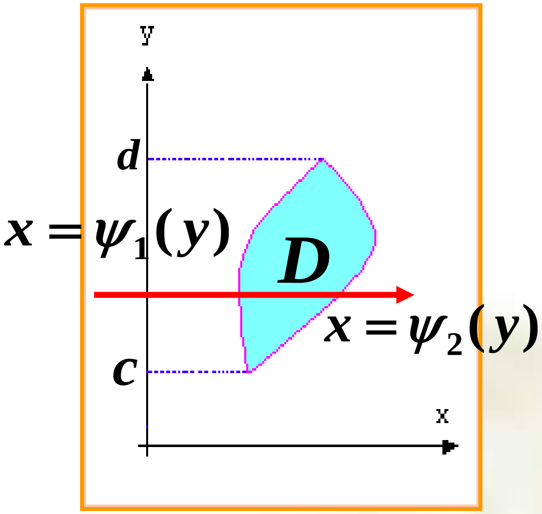


其中函数$\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$在区间$[a,b]$上连续.

【X－型区域的特点】 穿过区域且平行于 y 轴的直线与区域边界相交不多于两个交点.

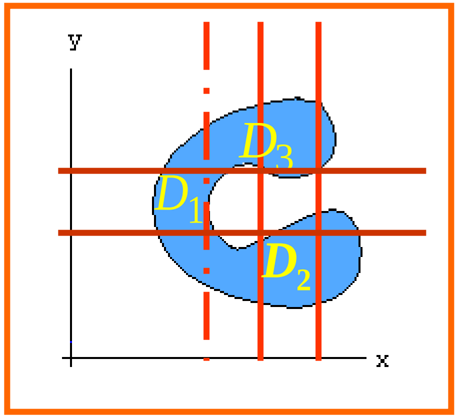
(2)［Y—型区域］$c \le y \le d, \quad \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y).$





【Y—型区域的特点】穿过区域且平行于 x 轴的直线与区域边界相交不多于两个交点.

(3)［既非X－型区域也非Y－型区域］



如图 ， 则必须分割.

分割后的三个区域分别都是

X －型区域(或Y －型区域)

由二重积分积分区域的可加性得

$$\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3} .$$

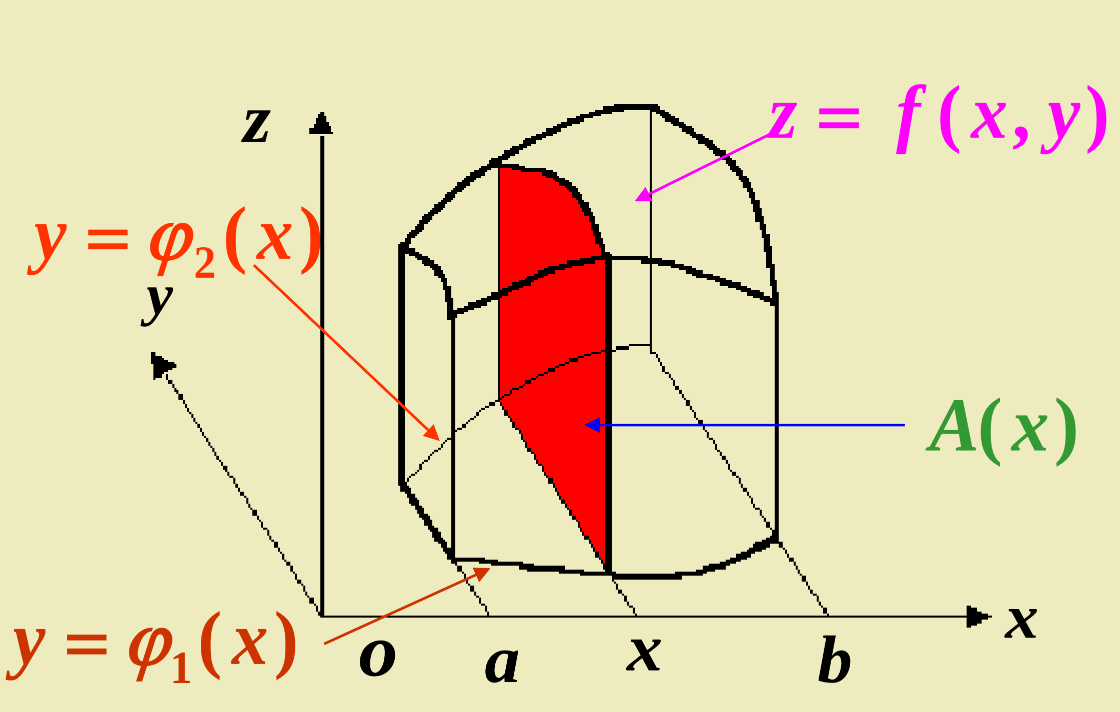
2. 【二重积分公式推导】

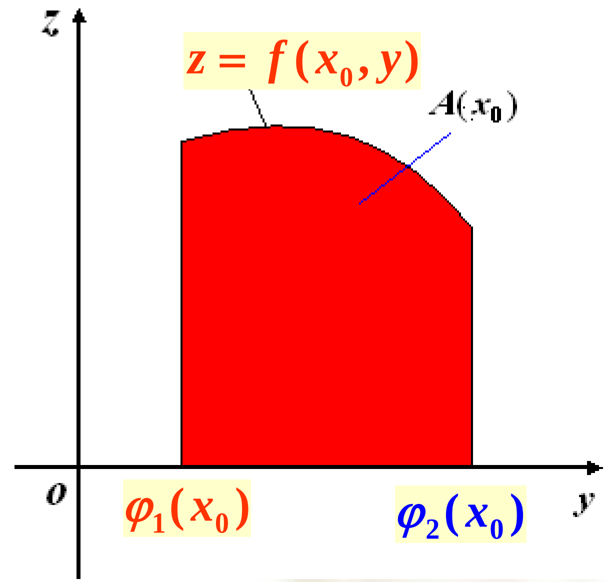
(1)若积分区域为X一型区域:$a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$.

且设 $f(x,y) \ge 0$

则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 的值等于以 D 为底，以曲面 $z=f(x,y)$ 为曲顶的柱体体积.

【方法】根据二重积分的几何意义以及计算“平行截面面积为已知的立体求体积”的方法来求.





$\therefore \quad V = \int_a^b A(x)dx \qquad \forall x_0 \in [a,b]$ 作平面 $x = x_0$

$$A(x_0) = \int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y)dy \quad A(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

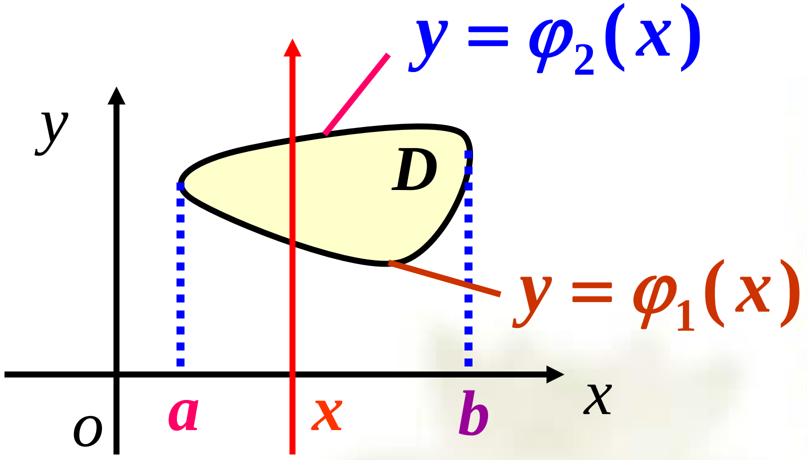
即得 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$ 　**公式1**

【几点小结】

(1)二重积分的计算关键是定限：投影穿线法

D_X :　　$a \le x \le b,$

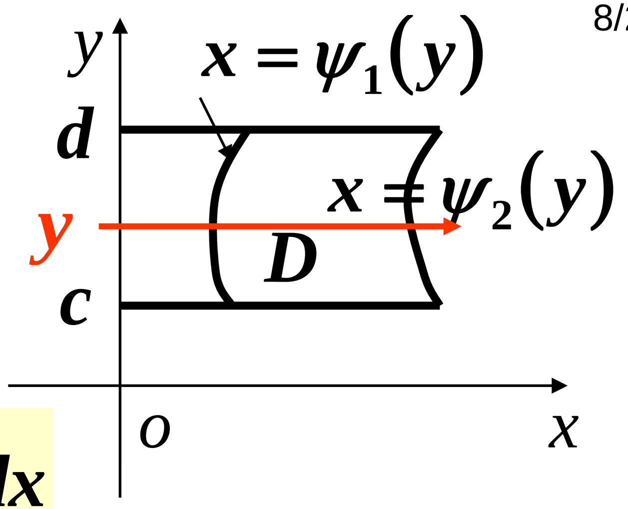
$\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x).$



$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

(2)通过体积作为过渡，实现了二重积分的一种计算方法，通过计算两次定积分来求解，上式称为先对y后对x的二次积分.

(2)若积分区域为Y—型域：



$c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y).$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$

公式2

即化二重积分为先对x后对y的二次积分.

3.【二重积分的计算步骤可归结为】

①画出积分域的图形，标出边界线方程；

②根据积分域特征，确定积分次序；

③根据上述结果，化二重积分为二次积分并计算.

【说明】

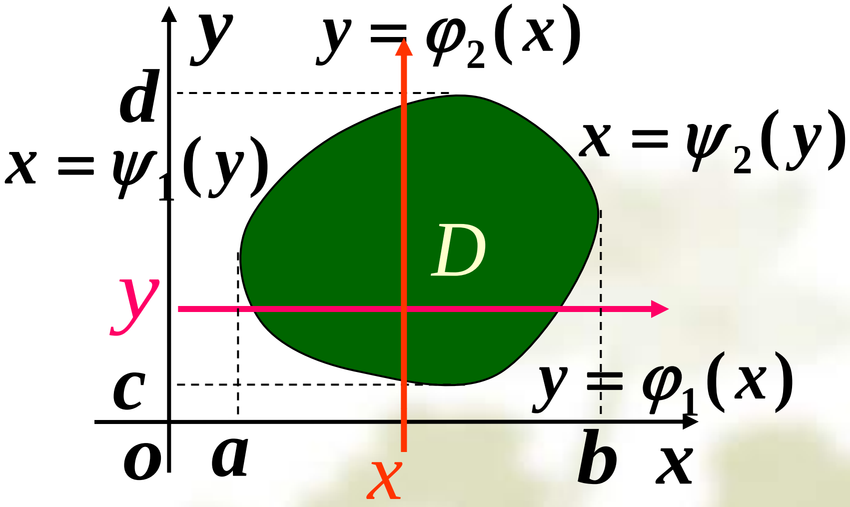
(1) 使用公式1必须是X一型域，公式2必须是Y一型域.

(2) 若积分区域既是X一型区域又是Y一型区域，

则有 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$= \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

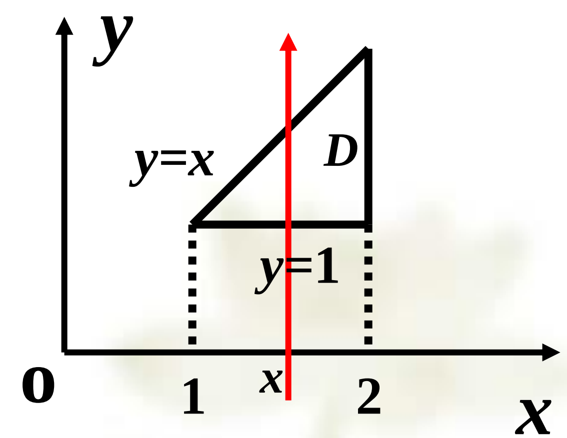


为计算方便, 可选择合适的积分次序，必要时还可交换积分次序.

4.【例题部分】

【教材例1】计算$\iint\limits_D xyd\sigma$,其中D：由$y=1, x=2$及$y=x$所围闭区域.

D既是X—型域又是Y—型域



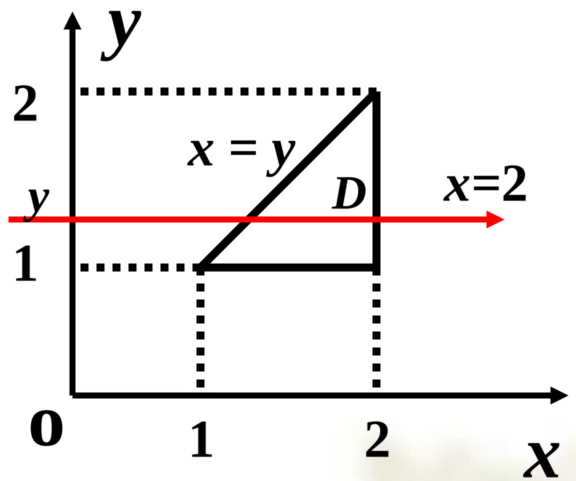
【解Ⅰ】

看作X—型域 $D_X:\begin{cases}1\le x\le 2\\ 1\le y\le x\end{cases}$

$$\iint\limits_D xyd\sigma=\int_1^2 dx\int_1^x xydy=\int_1^2[x\cdot\frac{y^2}{2}]_1^x dx=\int_1^2(\frac{x^3}{2}-\frac{x}{2})dx=\frac{9}{8}$$

【解 II】 看作Y一型域

$$D_Y:\begin{cases}1\le y\le 2\\ y\le x\le 2\end{cases}$$

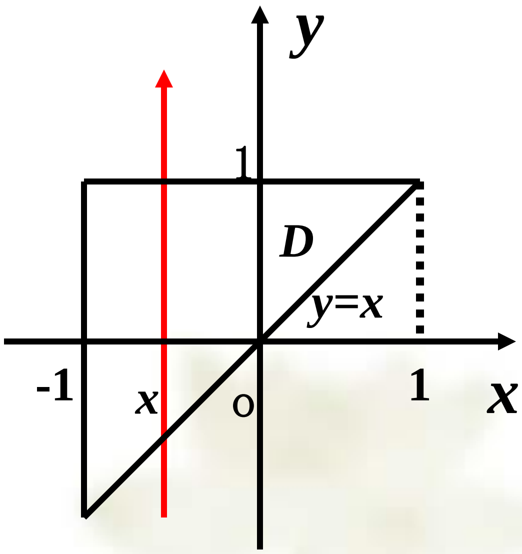


$$\iint_D xyd\sigma=\int_1^2 dy\int_y^2 xydx=\int_1^2[y\cdot\frac{x^2}{2}]_y^2 dy$$

$$=\int_1^2(2y-\frac{y^3}{2})dy=\frac{9}{8}$$

【教材例2】计算$\iint\limits_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\,d\sigma$, D:由$y=x, x=-1$,和$y=1$所围闭区域.

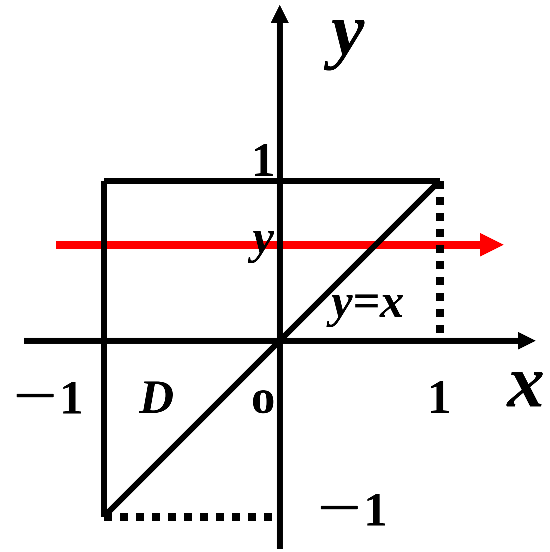
【解】 D既是X—型域又是Y—型域



［法1］ $D_X:\begin{cases}-1\le x\le 1\\ x\le y\le 1\end{cases}$

$$\text{上式}=\int_{-1}^{1}dx\int_{x}^{1}y\sqrt{1+x^2-y^2}\,dy=\cdots=\frac{1}{2}$$

［法2］ $D_Y:\begin{cases}-1\le y\le 1\\ -1\le x\le y\end{cases}$

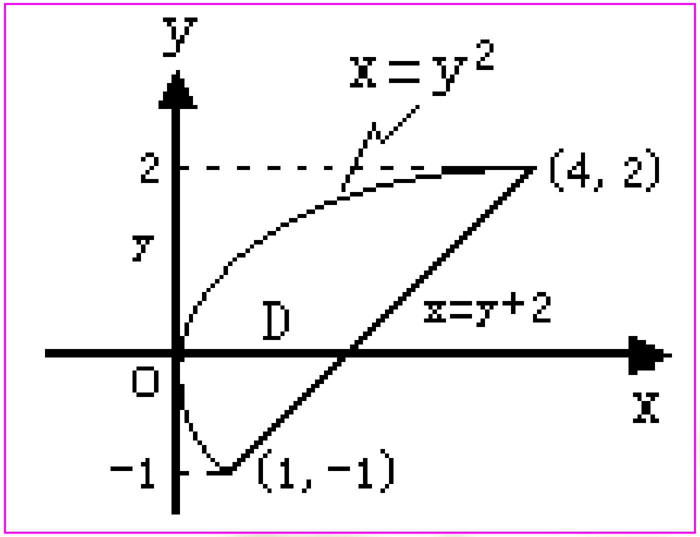


$$\text{原式}=\int_{-1}^{1}y\,dy\int_{-1}^{y}\sqrt{1+x^2-y^2}\,dx$$

注意到先对x 的积分较繁，故应用法1较方便

注意两种积分次序的计算效果！

【教材例3】 计算$\iint\limits_D xy\,d\sigma$,其中$D$：由$y^2 = x$及$y = x - 2$所围闭区域



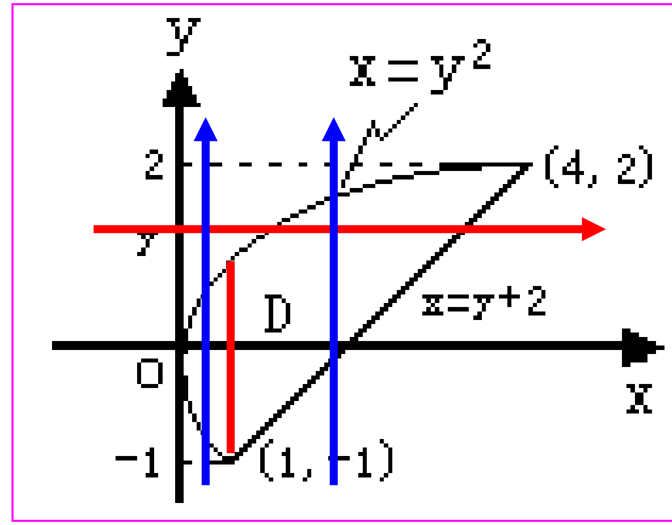
【解】 D不是X—型域

是Y—型域

先求交点

由 $\begin{cases} y^2 = x \\ y = x - 2 \end{cases} \Rightarrow (1,-1)$ 和 $(4,2)$

[法1] $D_Y:\begin{cases}-1\le y\le 2\\ y^2\le x\le y+2\end{cases}$



$$\iint_D xyd\sigma=\int_{-1}^{2}dy\int_{y^2}^{y+2}xydx=$$

$$=\int_{-1}^{2}y\left(\frac{1}{2}x^2\Big|_{y^2}^{y+2}\right)dy=\cdots=\frac{45}{8}$$

[法2]　视为X一型域　　则必须分割 $D=D_1+D_2$

$D_1:\begin{cases}0\le x\le 1\\ -\sqrt{x}\le y\le\sqrt{x}\end{cases}$　　$D_2:\begin{cases}1\le x\le 4\\ x-2\le y\le\sqrt{x}\end{cases}$

$$\iint_D xyd\sigma=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}=\int_0^1dx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}xydy+\int_1^4dx\int_{x-2}^{\sqrt{x}}xydy$$

$=\cdots$　计算较繁

本题进一步说明两种积分次序的不同计算效果!

【小结】

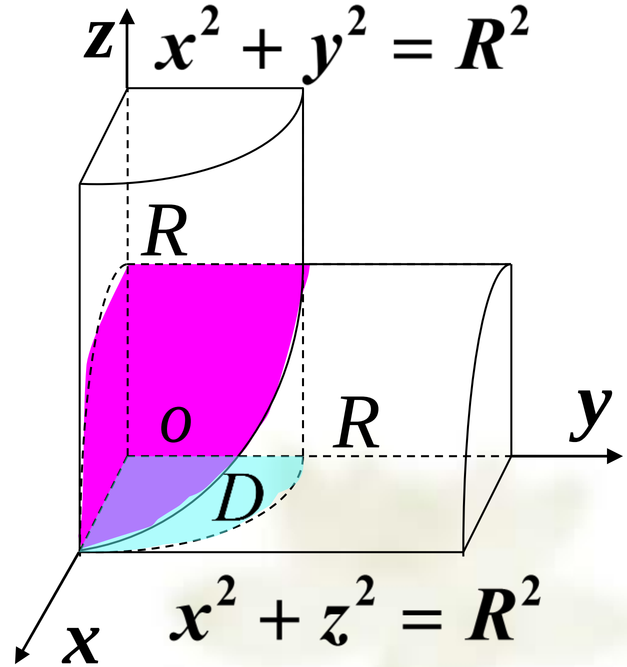
以上三例说明:

1、在化二重积分为二次积分时，为简便需恰当选择积分次序;

2、既要考虑积分区域 D 的形状，又要考虑被积函数的特性(易积).

5.【简单应用】

【教材例4】 求两个底圆半径都等于R 的直交圆柱面所围成的立体的体积V.



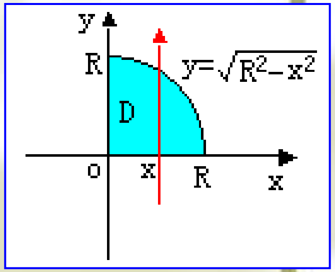
【解】 设两个直圆柱方程为

$$x^2+y^2=R^2,\quad x^2+z^2=R^2$$

利用对称性，考虑第一卦限部分，

其曲顶柱体的顶为 $z=\sqrt{R^2-x^2}$

$$(x,y)\in D_X:\begin{cases}0\le x\le R\\0\le y\le\sqrt{R^2-x^2}\end{cases}$$



则所求体积为

$$V=8\iint_D\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=8\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y$$

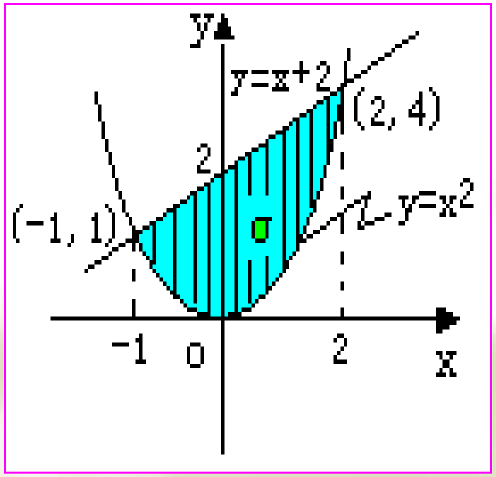
$$=8\int_0^R(R^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{16}{3}R^3$$

【例5】应用二重积分求由曲线 $y=x^2, y=x+2$ 所围区域 D 的面积 σ.

【解】据二重积分的性质3（几何意义） $\sigma=\iint_D dxdy$

交点 $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x+2 \end{cases} \Rightarrow (-1,1),(2,4)$

$D:\begin{cases} -1\le x\le 2 \\ x^2\le y\le x+2 \end{cases}$



$$\therefore\ \sigma=\int_{-1}^{2}dx\int_{x^2}^{x+2}dy=\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)dx$$

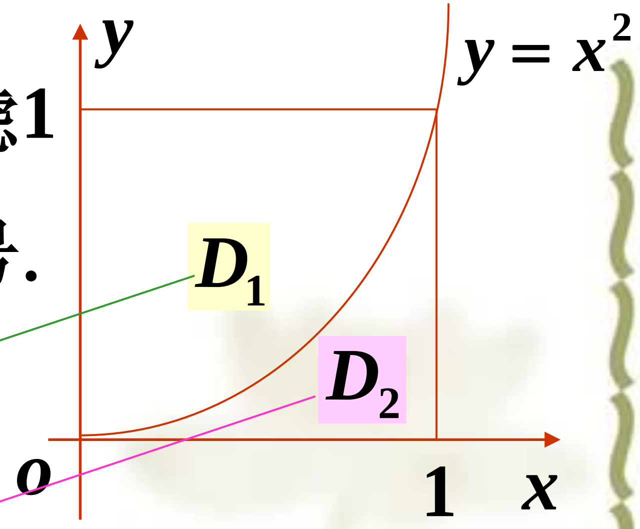
$$=\frac{9}{2}$$

【随堂练习】计算积分 $I=\iint\limits_D |y-x^2|d\sigma$,其中$D$为:

$$0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1.$$

[分析]

当被积函数中有绝对值时，要考虑积分域中不同范围脱去绝对值符号.



$y=x^2$将D分为两部分D_1和D_2:

【解】 $I=\iint\limits_{D_1}(y-x^2)d\sigma+\iint\limits_{D_2}(x^2-y)d\sigma$

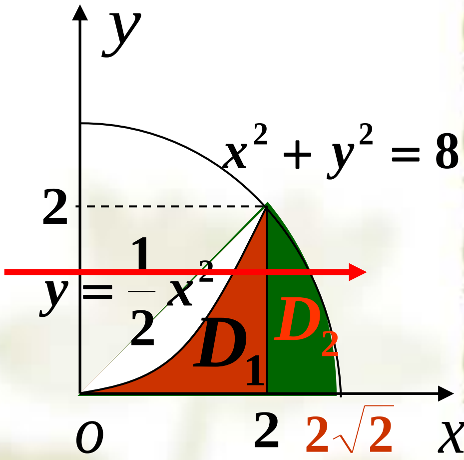
$$=\frac{4}{15}+\frac{1}{10}=\frac{11}{30}$$

6. 改变二次积分的积分次序例题

【例6】交换下列积分顺序

$$I=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{x^2}{2}} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^{2\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$$

【解】 积分域由两部分组成:



$$D_1:\begin{cases}0\le x\le 2\\ 0\le y\le \frac{1}{2}x^2\end{cases},\quad D_2:\begin{cases}2\le x\le 2\sqrt{2}\\ 0\le y\le \sqrt{8-x^2}\end{cases}$$

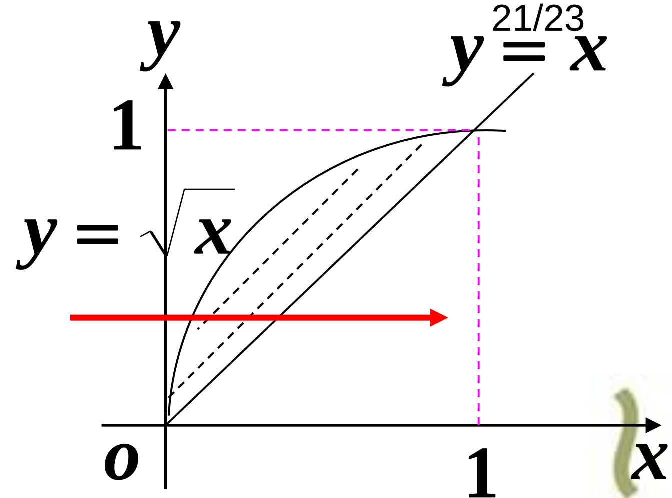
将 $D=D_1+D_2$ 视为Y–型区域，则

$$D:\begin{cases}0\le y\le 2\\ \sqrt{2y}\le x\le \sqrt{8-y^2}\end{cases}$$

$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$$

【例7】 $\displaystyle\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}\,dxdy$

其中 D 是由直线 $y=x$ 及抛物线 $y^2=x$ 所围成.



【解】(按先y后x积分次序计算)

$$I=\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin y}{y}dy$$ ——积不出的积分，无法计算。

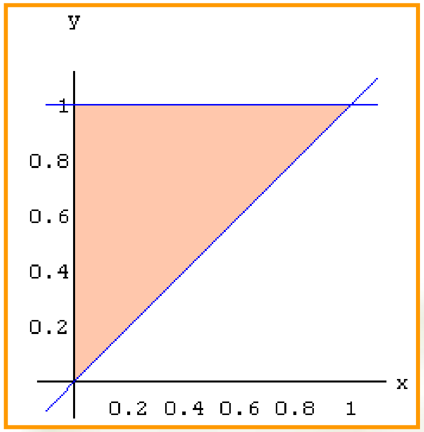
(改变积分次序,按先x后y积分次序计算)

$$I=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}dx=\int_0^1\frac{\sin y}{y}(y-y^2)dy$$

$$=\int_0^1 \sin y\,dy-\int_0^1 y\sin y\,dy=1-\sin 1.$$

【练习】 $\displaystyle\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}}\frac{\sin x}{x}dx$

【例 8】 求 $\iint_D x^2 e^{-y^2} dxdy$，其中 D 是以 $(0,0),(1,1),(0,1)$ 为顶点的三角形.



【解】 $\because \int e^{-y^2} dy$ 无法用初等函数表示

$\therefore$ 积分时必须考虑次序

$$\iint_D x^2 e^{-y^2} dxdy = \int_0^1 dy \int_0^y x^2 e^{-y^2} dx$$

$$= \int_0^1 e^{-y^2} \cdot \frac{y^3}{3} dy = \int_0^1 e^{-y^2} \cdot \frac{y^2}{6} dy^2 = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{2}{e}\right).$$

【练习】 $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2} \mathrm{d}y$

二、小结

二重积分在直角坐标下的计算公式

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \quad [X-型]$$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \quad [Y-型]$$

（在积分中要正确选择积分次序）