第二节 偏导数

一、偏导数的定义及其计算法

二、高阶偏导数

三、小结 思考题

一、偏导数的定义及其计算法

1.【偏导数的定义】

(1)【二元函数在一点处的偏导数】

【定义】设$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内有定义，当y固定在y_0而x在x_0处有增量Δx时，相应地函数有增量

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$

若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，

则称之为$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对x的偏导数，记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad \left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\ \text{或}\ f_x(x_0,y_0).$$

同理可定义$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对y的偏导数为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},$$

记为 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$， $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$， $\left.z_y\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$ 或 $f_y(x_0,y_0)$.

(2)【二元函数在区域内的偏导数】

如果函数$z=f(x,y)$在区域D内任一点(x,y)处对x的偏导数都存在，那么这个偏导数就是x、y的函数，它就称为函数$z=f(x,y)$对自变量x的偏导数，

记作$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$z_x$或$f_x(x,y)$.

同理可以定义函数$z=f(x,y)$对自变量y的偏导数，记作$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$，$z_y$或$f_y(x,y)$.

(3)【多元函数的偏导数】

偏导数的概念可以推广到二元以上函数

如$u = f(x, y, z)$ 在(x, y, z) 处

$$f_x(x,y,z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x},$$

$$f_y(x,y,z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y, z) - f(x,y,z)}{\Delta y},$$

$$f_z(x,y,z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z+\Delta z) - f(x,y,z)}{\Delta z}.$$

【教材例 1】 求 $z=x^2+3xy+y^2$在点(1,2)处的偏导数.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x+3y,\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=3x+2y$

$$\therefore\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=2\cdot 1+3\cdot 2=8,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=3\cdot 1+2\cdot 2=7$$

另解 $z\big|_{y=2}=x^2+6x+4,\ \therefore\ \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=(2x+6)\Big|_{x=1}=8$

$$z\big|_{x=1}=1+3y+y^2,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=(3+2y)\Big|_{y=2}=7$$

【教材例 2】设$z = x^y \, (x > 0, x \neq 1)$，

求证 $$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$$

【证】 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$,

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y} yx^{y-1} + \frac{1}{\ln x} x^y \ln x$$

$$= x^y + x^y = 2z.$$ 原结论成立. 【证完】

例3 求 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的偏导数.

解 $$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\qquad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$$ ——对称性

注：若对调函数中某两个自变量后仍为原函数表达式，则称函数关于这两个自变量具有对称性.

1. 求分界点和不连续点处的偏导数用定义计算

例4 设 $z = f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, 求 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$.

解

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{|\Delta x \cdot 0|} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

同理, 得

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0(\text{对称性}).$$

2.【有关偏导数的几点说明】

(1) **偏导数$\dfrac{\partial u}{\partial x}$是一个整体记号，不能拆分;**

(2) 求$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$的方法:

① 先求出偏导函数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，再代值;

② 求分界点、不连续点(?)处的偏导数要用定义求;

③ 先求$z=f(x,y_0)$对x的导数$\dfrac{df(x,y_0)}{dx}$，再代入$x=x_0$.

(3).【偏导数存在与连续的关系】

一元函数中在某点可导 $\longrightarrow$ 连续，

多元函数中在某点偏导数存在 $\overset{?}{\longrightarrow}$ 连续，

【教材例4】设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

求 $f(x,y)$的偏导数.

【解】 当$(x,y)\neq(0,0)$时，

$$f_x(x,y)=\frac{y(x^2+y^2)-xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y)=\frac{x(}{}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

当$(x,y)=(0,0)$时，按定义可知：

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0,$$

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases},$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

但函数在原点处并不连续(由上节知极限不存在,故不连续).

偏导数存在 $\not\rightarrow$ 连续.

【思考题】连续 $\xrightarrow{?}$ 偏导数存在.

举例说明（见小结之后思考题）

【结论】 偏导存在 $\not\rightleftarrows$ 连续

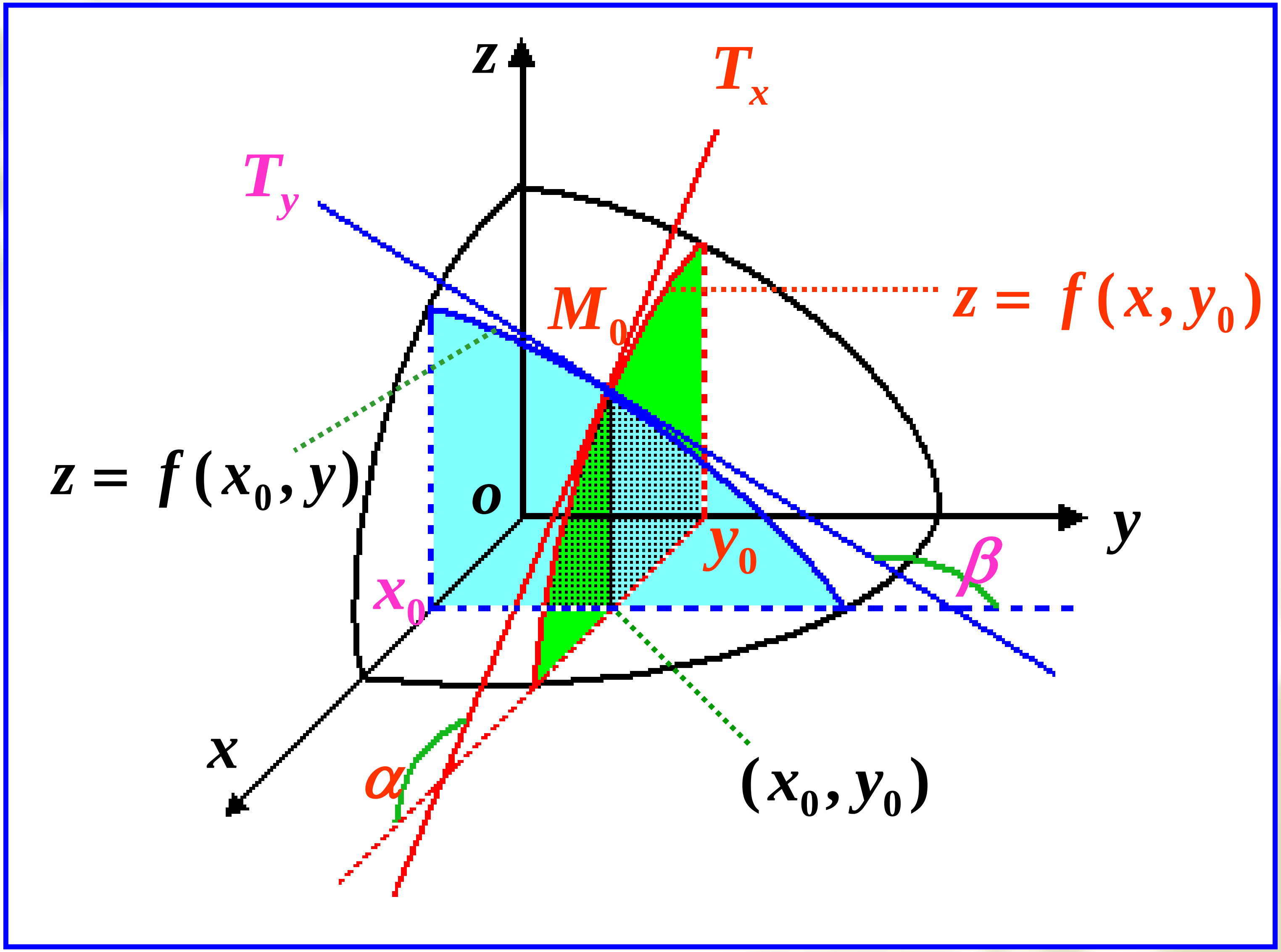
(4). 【偏导数的几何意义】

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y_0)\right|_{x=x_0} \quad \text{是曲线} \quad \begin{cases} z = f(x,y) \\ y = y_0 \end{cases}$$

在点 M_0 处的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x_0, y)\right|_{y=y_0} \quad \text{是曲线} \quad \begin{cases} z = f(x,y) \\ x = x_0 \end{cases}$$

在点M_0处的切线 M_0T_y 对 y 轴的斜率.



z
T_x
T_y
M_0
$z = f(x, y_0)$
$z = f(x_0, y)$
o
y
y_0
x_0
β
x
α
(x_0, y_0)

【几何意义】

偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 就是曲面被平面 $y=y_0$ 所截的曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率 $\tan\alpha$.

偏导数 $f_y(x_0,y_0)$ 就是曲面被平面 $x=x_0$ 所截得的曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_y 对 y 轴的斜率 $\tan\beta$.

【练习1】课本P_{71}，　习题9-2　第5题

5. 曲线$\begin{cases} z = \dfrac{x^2+y^2}{4} \\ y = 4 \end{cases}$在点(2,4,5)处的切线对于 x 轴的倾角是多少?　　$z'_x\big|_{(2,4,5)} = \tan\alpha$

【练习2】

曲面$z = x^2+xy$与平面 $y=1$ 的交线在(−1, 1, 0)处的切线与 x 轴正向所成的角度为______.

$$z'_x\big|_{(-1,1,0)} = \tan\alpha$$

二、高阶偏导数

1.【高阶偏导数的定义】

(1)若$z=f(x,y)$的一阶偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)$的偏导数仍存在，则称它们是函数$z=f(x,y)$的二阶偏导数.

函数$z=f(x,y)$的二阶偏导数按变量的不同分为以下两类:

① [二阶纯偏导数]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$$

② [二阶混合偏导数]

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y)$$

【定义式】

$$f_{xx}(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_x(x+\Delta x,y)-f_x(x,y)}{\Delta x}$$

$$f_{xy}(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(x,y+\Delta y)-f_x(x,y)}{\Delta y}$$

其余类推

(2) 同样可得：三阶、四阶、…、以及n 阶偏导数.

(3) 【定义】二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数.

【教材例 5】 验证函数$u(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$满足拉普拉斯方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

【解】 $\because \ln\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2),$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=0.$$ 【证完】

【教材例 6】设$z = x^3y^2 - 3xy^3 - xy + 1$，求二阶偏导数及$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}$.

【解】 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 - 3y^3 - y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y - 9xy^2 - x$;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^2$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 6y^2$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3 - 18xy$;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2y - 9y^2 - 1$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x^2y - 9y^2 - 1$.

【例 7】设$u = e^{ax}\cos by$，求二阶偏导数.

【解】

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ae^{ax}\cos by, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -be^{ax}\sin by;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2e^{ax}\cos by, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -b^2e^{ax}\cos by,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -abe^{ax}\sin by, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -abe^{ax}\sin by.$$

2. 【混合偏导数相等的条件】

(1)【问题】混合偏导数都相等吗？

【例8】 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

求 $f(x,y)$在点$(0,0)$的二阶混合偏导数.

【解】 当$(x,y)\neq(0,0)$时,

$$f_x(x,y)=\frac{3x^2y(x^2+y^2)-x^3y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{3x^2y}{x^2+y^2}-\frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y)=\frac{x^3}{x^2+y^2}-\frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

当$(x,y)=(0,0)$时，$f_x(x,y)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0,$$

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(0,\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y}=0,$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_y(\Delta x,0)-f_y(0,0)}{\Delta x}=1.$$

$$f_{xy}(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(x,y+\Delta y)-f_x(x,y)}{\Delta y}$$

显然 $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$.

(2)【问题】具备怎样的条件才能使混合偏导数相等？

即混合偏导数与求导次序无关.

【定理】若$z = f(x, y)$的两个二阶混合偏导数

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \text{及} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

在区域 D 内连续，则在 D 内这两个二阶混合偏导数必相等．

三、小结

偏导数的定义：（偏增量比的极限）

偏导数的计算、偏导数的几何意义

可偏导与连续的关系：可偏导 $\rightleftarrows$（不互推）连续

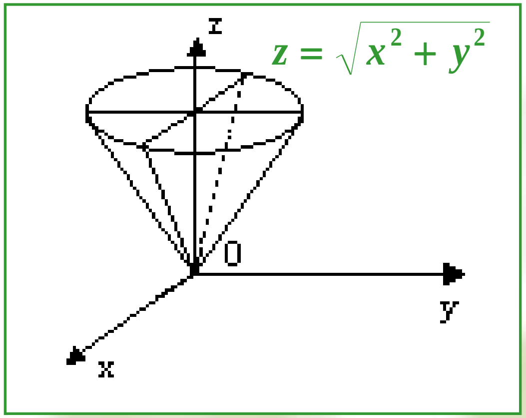
高阶偏导数
- 纯偏导
- 混合偏导（相等的条件）

【思考题】

若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续，能否断定 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的偏导数必定存在？

【思考题解答】 不能.

如图 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$,



在(0,0)处显然连续,

但 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ 不存在.

（可用偏导数定义判断）

返回