第二节 数列的极限

一、数列的概念及性质

二、数列极限的定义

三、收敛数列的性质

一、数列的概念及性质

1. 形如 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 的一列数称为数列，记为 $\{x_n\}$

数列中的每一个数叫做数列的项，

第 n 项 x_n叫做数列的一般项或通项.

例如: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$; $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ $x_n = \frac{1}{2^n}$

数列 $\{x_n\}$ $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$

数列的通项 $x_n = f(n)$. 定义域为正整数

整标函数

2. 单调数列

数列$\{x_n\}$若满足$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots,$

称数列$\{x_n\}$为单调增数列。

若满足$x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots,$

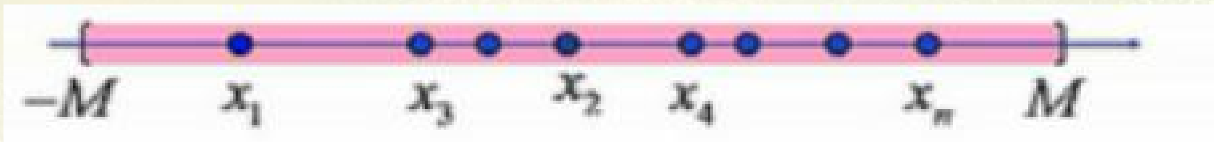
称数列$\{x_n\}$为单调减数列。

单调增数列与单调减数列统称为单调数列。

$\{n\}$	$\left\{\frac{1}{n}\right\}$	$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$	$\left\{(-1)^{n+1}\right\}$
递增	递减	递增	无单调性

3. 有界数列、无界数列

数列 $\{x_n\}$ 有界：$\exists M > 0, \forall n \in N,$ 有 $|x_n| \le M.$



数列$\{x_n\}$无界：

$$\forall M > 0, \exists n_0 \in N, 有 |x_{n_0}| > M.$$

如果存在实数A，对所有的n都满足 $x_n \ge A,$

$x_n \le A$

则称 $\{x_n\}$为有下界，A是 $\{x_n\}$的一个下界。

有上界

上界

判断下列数列的有界性

$\{a\}$ 有界：$M=|a|$

$\{n\}$ 无界

$\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 有界:$\left|\frac{1}{n}\right|\le 1$

$\left\{(-1)^{n+1}\right\}$ 有界：$M=1$

4. 子列

数列 $\{x_n\}$ 在保持原有顺序的情况下，任取其中无穷多项所构成的新数列称为数列 $\{x_n\}$ 的子数列，简称子列。

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \cdots, x_{2n-1}, x_{2n}, \cdots$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{取其中偶数项} & x_2, x_4, x_6, \cdots, x_{2n}, \cdots \\ \text{取其中奇数项} & x_1, x_3, x_5, \cdots, x_{2n-1}, \cdots \end{array}\right\} \text{子列}$$

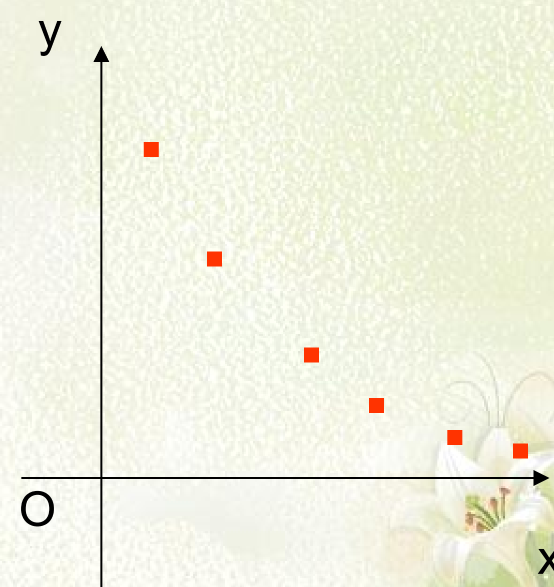
二、数列极限的定义

观察数列

$$x_n = \left\{ \frac{1}{2^n} \right\},$$

随着n增大，数列值x_n有什么变化?

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots;$$

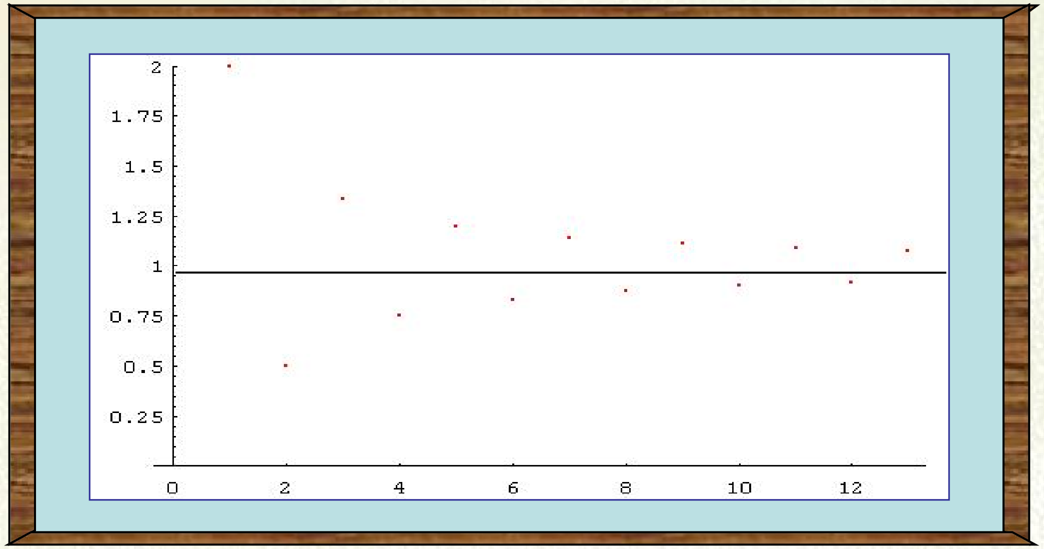


结论：

当 n 无限增大时，$x_n = \dfrac{1}{2^n}$ 无限接近于 0.

一个确定的常数

观察数列$\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$当$n\to\infty$时的变化趋势.



当n无限增大时, $x_n = 1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$无限接近于1.

一个确定的常数

1. 极限定义

对于数列 $\{x_n\}$,当 n 无限增大时，x_n无限逼近于唯一确定的常数 a ,则称 a 是数列 $\{x_n\}$的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \qquad 或\ x_n \to a(n \to \infty)$$

并称数列 $\{x_n\}$ 收敛于a.

性质:

1)若极限存在,则极限必唯一.

2)若 $\{x_n\}$ 没有极限，则称数列 $\{x_n\}$ 是发散的.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a或b$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

例1　常数列 $\{x_n\}=\{a\}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = ?$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

例2　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

$\therefore$ 数列$\{x_n\}=\left\{\frac{1}{n^k}\right\}(k>0$为常数$)$的极限为 0

例3　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$　$\lim\limits_{n\to\infty}(-\frac{1}{2})^n = 0$

数列$\{x_n\}=\{q^n\}(|q|<1$,为常数$)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

例4 考察数列$\{x_n\} = \{(-1)^{n+1}\}$的敛散性.

$\because$ 数列各项为$1, -1, 1, -1, 1, -1, \cdots$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n$不是无限趋近于一个确 定的常数，极限

不存在，数列是发散的 .

例5 数列 $\{x_n\} = \{2n-1\}$. 发散

极限定义

数列 $\{x_n\}$,当 n 无限增大时，x_n无限逼近于唯一确定的常数 a ,则称 a 是数列 $\{x_n\}$的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \qquad \text{或}\ x_n \to a(n\to\infty)$$

几何解释

n无限增大时,对应的动点x_n与定点a的距离无限的小,

即$|x_n - a| < \varepsilon \to 0.$

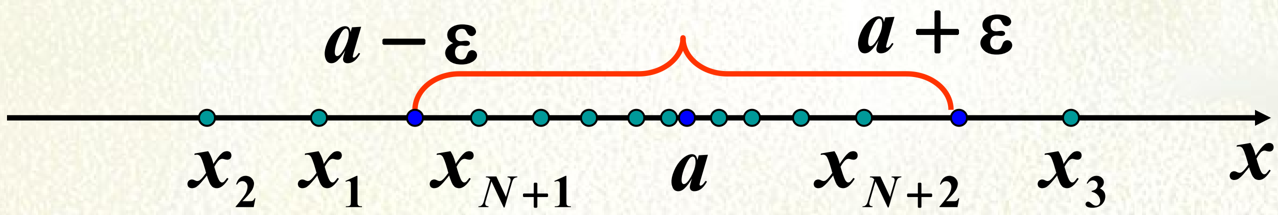
2. 几何解释

n无限增大时，对应的动点x_n与定点a的距离无限的小，

即$|x_n - a| < \varepsilon \to 0$.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 使$n > N$时, 恒有$|x_n - a| < \varepsilon$.

从 $N+1$ 项开始，有$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$.



当$n > N$时, 所有的点 x_n都落在 $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$内, 只有

有限个 (至多只有 N个) 落在其外 .

三、数列极限的性质

1. 唯一性　收敛的数列极限唯一.

2. 收敛数列一定有界.

证：设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，取 $\varepsilon = 1$，则 $\exists N$，当 $n > N$ 时，有

$|x_n - a| < 1$，从而有

$$a - 1 < x_n < a + 1$$

取 $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, |a-1|, |a+1|\}$

则有 $|x_n| \le M \ (n = 1, 2, \cdots)$.

由此证明收敛数列必有界.

推论（逆否命题）无界数列必发散.

例如：数列$\{n\}$无界，故其发散.

$\lim\limits_{n\to\infty} n$不存在.

收敛数列一定有界.

思考：（逆命题）“有界数列必收敛”成立吗？

例如：$\left\{(-1)^{n+1}\right\}$ 有界但发散

3. 收敛数列具有保号性.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 且 $a > 0$ (< 0), 则 $\exists N \in \mathrm{N}^+$, 当 $n > N$ 时, 有 $x_n > 0$ (< 0)

推论: 若数列从某项起 $x_n \geq 0$ (≤ 0), 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $a \geq 0$ (≤ 0).

4. 收敛数列与其子数列间的关系：

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是a .

说明

1、若数列有一个子数列发散，则原数列一定发散

2、若数列有两个子数列收敛于不同的极限，则原数列一定发散 .

例如，

$$x_n = (-1)^{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots) \qquad \text{发散！}$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = 1; \qquad \lim_{k\to\infty} x_{2k} = -1$$

内容小结

1. 数列极限的定义及应用

2. 收敛数列的性质:

唯一性；有界性；保号性;

任一子数列收敛于同一极限