

实验设计

Design of Experiments

DOE

1



第七章 均匀设计

- 7.1 均匀设计和正交设计的比较
- 7.2 均匀设计表及构造
- 7.3 用均匀设计表安排实验
- 7.4 均匀设计的实验结果分析
- 7.5 均匀设计的灵活应用

沐浴在改革开放的阳光下，神州大地生机盎然，新生事物层出不穷。在科教兴国建设四化的过程中，人们熟悉的那些传统的试验设计方法，已不能充分满足快节奏高效率的要求。新时期呼唤新思维,新方法。

中国科学家巧妙的将“数论方法”和“统计试验设计”相结合，发明了一种全新的试验设计方法，这就是均匀设计法。

均匀设计法诞生於1978年。由中国著名数学家方开泰教授和王元院士合作共同发明。

3

3



华罗庚

王元

4



5

均匀设计是一种试验设计方法。它可以用较少的试验次数，安排多因素、多水平的析因试验，是在均匀性的度量下最好的析因试验设计方法。均匀设计也是仿真试验设计和稳健设计的重要方法。

均匀设计与正交实验设计的异同？

同： 1) 都适用于多因素多水平的实验设计。2) 两者均保证均匀分散性。

不同： 1) 正交设计适用于因素数目较多而因素的水平数不多的实验，其实验次数最少是因素水平数的平方。而均匀实验可适用于因素水平数较多的实验。2) 正交实验保证数据整齐可比性，均匀设计不保证。3) 正交实验分析方法有直观分析和方差分析，而均匀设计只能采用统计分析。

均匀设计表的构造

$U_n(q^s)$ 的构造

- 1) 确定第一行，实验数 n ，与 n 互素的整数构成；
- 2) 其余行。记第一行 r 个数为 h_1, h_2, \dots, h_r ，表第 k 行第 j 列的数字是 $k \times h_j$ 除以 n 的余数，第 n 行的数据就是 n 。

| B7 | | fx =MOD(\$A7*B\$2, 9) | | | | | | |
|----|--------|-----------------------|---|---|---|---|---|--|
| | A | B | C | D | E | F | G | |
| 1 | 实验号\列号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 4 | 5 | 7 | 8 | |
| 3 | 2 | 2 | 4 | 8 | 1 | 5 | 7 | |
| 4 | 3 | 3 | 6 | 3 | 6 | 3 | 6 | |
| 5 | 4 | 4 | 8 | 7 | 2 | 1 | 5 | |
| 6 | 5 | 5 | 1 | 2 | 7 | 8 | 4 | |
| 7 | 6 | 6 | 3 | 6 | 3 | 6 | 3 | |
| 8 | 7 | 7 | 5 | 1 | 8 | 4 | 2 | |
| 9 | 8 | 8 | 7 | 5 | 4 | 2 | 1 | |
| 10 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | |
| 11 | | | | | | | | |

均匀设计表的构造

$U_n^*(q^s)$ 的构造

- 1) 确定第一行，实验数 $n+1$ ，与 $n+1$ 互素的整数构成；
- 2) 其余行。记第一行 r 个数为 h_1, h_2, \dots, h_r ，表第 k 行第 j 列的数字是 $k \times h_j$ 除以 $n+1$ 的余数，第 $n+1$ 行的数据去除。

均匀表

等水平均匀表的实验次数与该表的水平数相等。
水平数为奇数的表与水平数为偶数的表之间存在确定的关系。将前者去掉最后一行就得到了后者，且使用表不变。

各项的因素水平不能象正交表那样可以任意改变次序，只能按照原有的顺序平滑，即最后一个水平与第一个水平衔接起来组成封闭圈，

均匀设计表及其使用表

均匀设计表 $U_7(7^4)$

| | A | B | C | D | E |
|---|-----|---|---|---|---|
| 1 | 实验号 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 6 |
| 3 | 2 | 2 | 4 | 6 | 5 |
| 4 | 3 | 3 | 6 | 2 | 4 |
| 5 | 4 | 4 | 1 | 5 | 3 |
| 6 | 5 | 5 | 3 | 1 | 2 |
| 7 | 6 | 6 | 5 | 4 | 1 |
| 8 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 9 | | | | | |

均匀设计表 $U_7(7^4)$ 使用表

| 14 | S | 列号 | | | | D |
|----|---|----|---|---|---|--------|
| 15 | 2 | 1 | 3 | | | 0.2398 |
| 16 | 3 | 1 | 2 | 3 | | 0.3721 |
| 17 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 0.476 |

12

均匀设计表 $U_7^*(7^4)$ 及使用表

| | A | B | C | D | E | F |
|----|-----|----|---|---|---|--------|
| 1 | 实验号 | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| 2 | 1 | 1 | 3 | 5 | 7 | |
| 3 | 2 | 2 | 6 | 2 | 6 | |
| 4 | 3 | 3 | 1 | 7 | 5 | |
| 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | |
| 6 | 5 | 5 | 7 | 1 | 3 | |
| 7 | 6 | 6 | 2 | 6 | 2 | |
| 8 | 7 | 7 | 5 | 3 | 1 | |
| 9 | | | | | | |
| 10 | S | 列号 | | | | D |
| 11 | 2 | 1 | 3 | | | 0.1582 |
| 12 | 3 | 1 | 2 | 3 | | 0.2132 |
| 13 | | | | | | |
| 14 | | | | | | |

D偏差值，越小越均匀。

13

均匀设计基本步骤

- 1、明确试验目的,确定试验指标。若考察的指标有多个则一般需要对指标进行综合分析;
- 2、选择试验因素。根据专业知识和实际经验进行试验因素的选择,一般选择对试验指标影响较大的因素进行试验;
- 3、确定因素水平。根据试验条件和以往的实践经验,首先确定各因素的取值范围,然后在此范围内设置适当的水平;
- 4、选择均匀设计表,排布因素水平。根据因素数、水平数来选择合适的均匀设计表进行因素水平数据排布;
- 5、明确试验方案,进行试验操作;
- 6、试验结果分析。建议采用回归分析方法对试验结果进行分析进而发现优化的试验条件。依试验目的和支持条件的不同也可采用直接观察法取得最好的试验条件(不再进行数据的分析处理);
- 7、优化条件的试验验证。通过回归分析方法计算得出的优化试验条件一般需要进行优化试验条件的实际试验验证(可进一步修正回归模型);
- 8、缩小试验范围进行更精确的试验,寻找更好的试验条件,直至达到试验目的为止。

14

用均匀设计表安排实验

例7.1:树脂吸盐水的能力

在淀粉接枝丙烯制备高吸水性树脂的试验中，为提高树脂吸盐水的能力，考察了丙烯酸用量 (x_1)、引发剂用量 (x_2)、丙烯酸中和度 (x_3) 和甲醛用量 (x_4) 四个因素，每个因素取9个水平

第1步：将试验因素的水平列成下表：

表7.1 淀粉接枝丙烯制备高吸水性树脂试验的因素水平表

| 水平 | 丙烯酸用量 x_1 , mL | 引发剂用量 x_2 , % | 丙烯酸中和 度 x_3 , mL | 甲醛用量 x_4 , mL |
|----|---------------------|--------------------|-----------------------|--------------------|
| 1 | 12.0 | 0.3 | 48.0 | 0.20 |
| 2 | 14.5 | 0.4 | 53.5 | 0.35 |
| 3 | 17.0 | 0.5 | 59.0 | 0.50 |
| 4 | 19.5 | 0.6 | 64.5 | 0.65 |
| 5 | 22.0 | 0.7 | 70.0 | 0.80 |
| 6 | 24.5 | 0.8 | 75.5 | 0.95 |
| 7 | 27.0 | 0.9 | 81.0 | 1.10 |
| 8 | 29.5 | 1.0 | 86.5 | 1.25 |
| 9 | 32.0 | 1.1 | 92.0 | 1.40 |

第2步：选择相应的均匀设计表.

根据因素和水平，可以选取均匀设计表 $U_9^*(9^4)$ 或者 $U_9(9^5)$ 。由它们的使用表可以发现，均匀表 $U_9^*(9^4)$ 最多只能安排3个因素，因此选 $U_9(9^5)$ 安排试验。根据 $U_9(9^5)$ 使用表，将x1、x2、x3和x4分别放在1、2、3、5列

| $U_9^*(9^4)$ 的使用表 | | | | |
|-------------------|----|---|---|--------|
| s | 列号 | | | D |
| 2 | 1 | 2 | | 0.1574 |
| 3 | 2 | 3 | 4 | 0.1980 |

| $U_9(9^5)$ 的使用表 | | | | | |
|-----------------|----|---|---|---|--------|
| s | 列号 | | | | D |
| 2 | 1 | 3 | | | 0.1944 |
| 3 | 1 | 3 | 4 | | 0.3102 |
| 4 | 1 | 2 | 3 | 5 | 0.4066 |

第2步：选择相应的均匀设计表.

$U_9(9^5)$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 4 | 7 | 8 |
| 2 | 2 | 4 | 8 | 5 | 7 |
| 3 | 3 | 6 | 3 | 3 | 6 |
| 4 | 4 | 8 | 7 | 1 | 5 |
| 5 | 5 | 1 | 2 | 8 | 4 |
| 6 | 6 | 3 | 6 | 6 | 3 |
| 7 | 7 | 5 | 1 | 4 | 2 |
| 8 | 8 | 7 | 5 | 2 | 1 |
| 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |

思考：如何能够快速地把因素水平放置到表中？

使用排序。第一列是实验序号，第三列开始没有规律，将其排序后输值再第一列排序。

第3步：应用选择的 UD-表, 做出试验安排。

表7-11 淀粉接枝丙烯制备高吸水性树脂试验的因素水平表

| 水平 | x_1 , mL | x_2 , % | x_3 , mL | x_4 , mL | 吸盐水倍率 y , % |
|----|------------|-----------|------------|------------|---------------|
| 1 | 12.0 | 0.4 | 64.5 | 1.25 | 34 |
| 2 | 14.5 | 0.6 | 86.5 | 1.10 | 42 |
| 3 | 17.0 | 0.8 | 59.0 | 0.95 | 40 |
| 4 | 19.5 | 1.0 | 81.0 | 0.80 | 45 |
| 5 | 22.0 | 0.3 | 53.5 | 0.65 | 55 |
| 6 | 24.5 | 0.5 | 75.5 | 0.50 | 59 |
| 7 | 27.0 | 0.7 | 48.0 | 0.35 | 60 |
| 8 | 29.5 | 0.9 | 70.0 | 0.20 | 61 |
| 9 | 32.0 | 1.1 | 92.0 | 1.40 | 63 |

第4步：用回归模型匹配数据

首先，考虑线性回归模型：

$$Y=18.585+1.644x_1-11.667x_2+0.101x_3-3.333x_4$$

| 观测值 | 预测 Y | 残差 |
|-----|------|----------|
| 1 | 36 | -2 |
| 2 | 40.5 | 1.5 |
| 3 | 40 | -7.1E-15 |
| 4 | 44.5 | 0.5 |
| 5 | 54.5 | 0.5 |
| 6 | 59 | 0 |
| 7 | 58.5 | 1.5 |
| 8 | 63 | -2 |
| 9 | 63 | 7.11E-15 |

| SUMMARY OUTPUT | | | | | | | | |
|-------------------|--------------|----------|----------|----------|----------------|-----------|----------|----------|
| 回归统计 | | | | | | | | |
| Multiple R | 0.993001 | | | | | | | |
| R Square | 0.986052 | | | | | | | |
| Adjusted R Square | 0.972103 | | | | | | | |
| Standard Error | 1.802776 | | | | | | | |
| Observations | 9 | | | | | | | |
| 方差分析 | | | | | | | | |
| | df | SS | MS | F | Significance F | | | |
| 回归分析 | 4 | 919 | 229.75 | 70.69231 | 0.000578 | | | |
| 残差 | 4 | 13 | 3.25 | | | | | |
| 总计 | 8 | 932 | | | | | | |
| | Coefficients | 标准误差 | t Stat | P-value | Lower 95% | Upper 95% | 下限 95.0% | 上限 95.0% |
| Intercept | 18.58485 | 3.704123 | 5.017342 | 0.007399 | 8.300556 | 28.86914 | 8.300556 | 28.86914 |
| X Variable 1 | 1.644444 | 0.126686 | 12.98046 | 0.000203 | 1.292707 | 1.996182 | 1.292707 | 1.996182 |
| X Variable 2 | -11.6667 | 3.167154 | -3.68364 | 0.021136 | -20.4601 | -2.87324 | -20.4601 | -2.87324 |
| X Variable 3 | 0.10101 | 0.057585 | 1.754116 | 0.154273 | -0.05887 | 0.260891 | -0.05887 | 0.260891 |
| X Variable 4 | -3.333333 | 2.111436 | -1.5787 | 0.189547 | -9.19562 | 2.528953 | -9.19562 | 2.528953 |

第5步：优化 -- 寻找最佳的因素水平组合

$$Y=18.585+1.644x_1-11.667x_2+0.101x_3-3.333x_4$$

$$Y_{\max}=???$$

这里求取max的区域为：

$$\{12 \leq x_1 \leq 32, 0.3 \leq x_2 \leq 1.1, 48 \leq x_3 \leq 92, 0.2 \leq x_4 \leq 1.4\}$$

均匀设计的灵活应用

水平数较少的均匀设计：选择实验次数大于因素水平数目，2倍。（等水平均匀表的实验次数与该表的水平数相等）

混合水平的均匀设计：混合水平表，或者拟水平。

含定性因素的均匀设计：用伪变量的方式。

例：冰片制备过程产生热量，黏附难粉碎。影响因素及范围如下：

滴加水量 X_1 ：20ml-90mL；滴水速度 X_2 ：7mL-9mL/min；
乙醇用量 X_3 ：10ml-25mL；真空干燥温度 X_4 ：25-50℃。
其中 X_1 取8个水平，其余取4个，并采用拟水平法。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|----|----|----|----|----|-----|-----|----|----|
| 1 | 因素 | 水平 | | | | | | | |
| 2 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | X1 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |
| 4 | X2 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8.5 | 8.5 | 9 | 9 |
| 5 | X3 | 10 | 10 | 15 | 15 | 20 | 20 | 25 | 25 |
| 6 | X4 | 25 | 25 | 30 | 30 | 40 | 40 | 50 | 50 |
| 7 | | | | | | | | | |

25

| NO. | 滴加水量X1, mL | 滴水速度 X2,mL/min | 乙醇用量X3, mL | 真空干燥温度 X4,°C | 冰片生产率, % |
|-----|---------------|-------------------|---------------|-----------------|----------|
| 1 | 20 | 7 | 15 | 40 | 41.8 |
| 2 | 30 | 8 | 25 | 40 | 45.3 |
| 3 | 40 | 8.5 | 15 | 35 | 57.7 |
| 4 | 50 | 9 | 25 | 35 | 61.3 |
| 5 | 60 | 7 | 10 | 30 | 77.4 |
| 6 | 70 | 8 | 20 | 30 | 81.1 |
| 7 | 80 | 8.5 | 10 | 25 | 91.3 |
| 8 | 90 | 9 | 20 | 25 | 94.8 |

- 选择 $U_8^*(8^5)$
- 根据使用表，放置1、2、3、5列
- 对均匀设计结果深入分析方法是采用回归分析。
- 一般先用多元线性回归，如效果差，再用多项式回归。存在交互影响时常用含交叉项的多项式回归，常为二次多项式回归。

| | A | B | C | D | E | F |
|----|-------------------|-------------|----------|----------|-------------|----------------|
| 7 | 5 | 60 | 7 | 10 | 30 | 77.4 |
| 8 | 6 | 70 | 8 | 20 | 30 | 81.2 |
| 9 | 7 | 80 | 8.5 | 10 | 25 | 91.3 |
| 10 | 8 | 90 | 9 | 20 | 25 | 94.8 |
| 11 | | | | | | |
| 12 | SUMMARY OUTPUT | | | | | |
| 13 | | | | | | |
| 14 | 回归统计 | | | | | |
| 15 | Multiple R | 0.999959 | | | | |
| 16 | R Square | 0.999919 | | | | |
| 17 | Adjusted R Square | 0.99981 | | | | |
| 18 | 标准误差 | 0.278841 | | | | |
| 19 | 观测值 | 8 | | | | |
| 20 | | | | | | |
| 21 | 方差分析 | | | | | |
| 22 | | df | SS | MS | F | Significance F |
| 23 | 回归分析 | 4 | 2870.427 | 717.6067 | 9229.418091 | 1.83103E-06 |
| 24 | 残差 | 3 | 0.233256 | 0.077752 | | |
| 25 | 总计 | 7 | 2870.66 | | | |
| 26 | | | | | | |
| 27 | | Coefficient | 标准误差 | t Stat | P-value | |
| 28 | Intercept | 61.58794 | 4.070011 | 15.13213 | 0.000626591 | |
| 29 | X Variable 1 | 0.645499 | 0.031342 | 20.59534 | 0.000250317 | |
| 30 | X Variable 2 | -1.04954 | 0.197716 | -5.30831 | 0.013053408 | |
| 31 | X Variable 3 | -0.20839 | 0.037517 | -5.5545 | 0.011509228 | |
| 32 | X Variable 4 | -0.4432 | 0.078844 | -5.6213 | 0.011131933 | |

$$y = 61.5879 + 0.645499X_1 - 1.04954X_2 - 0.20839X_3 - 0.4432X_4$$

$$X_1 = 90\text{ml}$$

$$X_2 = 7.0\text{ml/min}$$

$$X_3 = 10\text{ml}$$

$$X_4 = 25^\circ\text{C}$$

$$y = 98.8\%$$

按照均匀设计方法完成实验方案的制订

表1 轧制过程中热处理对材料抗拉强度的影响

| 预热温度, °C | 预热时间, h | 退火温度, °C |
|----------|---------|----------|
| 50 | 0.1 | 400 |
| 75 | 0.2 | 450 |
| 100 | 0.3 | 500 |
| 125 | 0.4 | 550 |
| 150 | 0.5 | 600 |
| 175 | 0.6 | 650 |
| 200 | 0.7 | 700 |
| 225 | 0.8 | 750 |
| 250 | 0.9 | 800 |