思考题

试问函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ 10, & x=0 \\ 5+x^2, & x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处

的左、右极限是否存在？当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限是否存在？

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(5+x^2)=5,$ 左极限存在,

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x\sin\dfrac{1}{x}=0,$ 右极限存在,

$\because \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ $\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

第五节 极限运算法则

一、极限的四则运算法则

二、几种特殊形式的极限

三、 复合函数的极限运算法则

一、 极限的四则运算法则

定理1 . 若 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$, 则有

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm \lim g(x)=A\pm B$$

证: 因 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$, 则有

$$f(x)=A+\alpha \ , \ g(x)=B+\beta$$

(其中 α,β 为无穷小)

于是 $f(x)\pm g(x)=(A+\alpha)\pm(B+\beta)=(A\pm B)+(\alpha\pm\beta)$

由于$\alpha\pm\beta$ 也是无穷小, 再利用极限与无穷小的关系

得 $\lim(f(x)\pm g(x))=A\pm B=\lim f(x)\pm \lim g(x).$

说明: 定理1 可推广到有限个函数相加、减的情形 .

定理 2 . 若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 则有

$$\lim[f(x)g(x)] = \lim f(x) \lim g(x) = AB$$

说明: 定理 2 可推广到有限个函数相乘的情形 .

推论 1 . $\lim[C f(x)] = C \lim f(x)$ （ C 为常数 ）

推论 2 . $\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$ （ n 为正整数 ）

结论: $\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_0{}^n$.

例1. 设 n 次多项式 $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$,

试证： $\lim\limits_{x \to x_0} P_n(x) = P_n(x_0)$.

证: $\lim\limits_{x \to x_0} P_n(x) = a_0 + a_1 \lim\limits_{x \to x_0} x + \cdots + a_n \lim\limits_{x \to x_0} x^n$

$$= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0{}^2 + \cdots + a_n x_0{}^n$$

$$= P_n(x_0)$$

定理3. 若$\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$, 且 $B\neq0$, 则有

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}$$

例2. 设 $Q(x)=\dfrac{P_n(x)}{P_m(x)}$, 其中$P_n(x)$, $P_m(x)$分别表示

x的n次、x的m次多项式, $P_m(x_0)\neq 0$,

证明: $\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)=Q(x_0)$.

证:
$$\lim_{x\to x_0} Q(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} P_n(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} P_m(x)}=\frac{P_n(x_0)}{P_m(x_0)}=Q(x_0).$$

定理4: 若 $\lim \varphi(x)=a, \lim \psi(x)=b,$ 且 $\varphi(x)\geq\psi(x),$

则 $a\geq b$.

提示: 令 $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)\geq 0$

$$\lim f(x)=\lim \varphi(x)-\lim \psi(x)=a-b=c\geq 0$$

利用保号性定理证明 .

•总结 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0.$ $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0{}^n.$

多项式函数 $\lim\limits_{x\to x_0} P_n(x) = P_n(x_0).$

有理函数的极限:

当$Q(x_0)\neq 0$时, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$

例3 求 $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=\lim\limits_{x\to 1}2x-\lim\limits_{x\to 1}1=2\lim\limits_{x\to 1}x-1=2\cdot 1-1=1$.

例4 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-5x+3}$.

$\boxed{\dfrac{A}{A}(A\neq 0)\text{型}}$

解 $$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-5x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3-1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-5x+3)}=\frac{2^3-1}{2^2-10+3}=-\frac{7}{3}.$$

练习： $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x+3}{x-2}$. $=\dfrac{1+2+3}{1-2}=-6$

二、几种特殊形式的极限

例5 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}$.

$\dfrac{A}{0}(A\neq 0)$型 $\rightarrow \infty$

解 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{2x-3}=\dfrac{1^2-5\cdot 1+4}{2\cdot 1-3}=0$,

根据无穷大与无穷小的关系得

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-3}{x^2-5x+4}=\infty.$$

例如 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$

例6 求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$. $\boxed{\dfrac{0}{0}\text{型}}$（分子、分母极限同时为零）

方法：分解因式，消去 公因子.

解
$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}$$
$$=\frac{\lim\limits_{x\to 3}1}{\lim\limits_{x\to 3}(x+3)}=\frac{1}{6}.$$

练习：$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-1}{x+3}=\dfrac{1}{3}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}.$$

总结：在求有理函数除法$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$：

(1)当$Q(x_0)\neq 0$时，应用极限四则运算法则，

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)};$$

(2)当$Q(x_0)=0, P(x_0)\neq 0$时，由无穷小的性质，

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\infty;$$

(3)当$Q(x_0)=0, P(x_0)=0$时，约去使分子、分母同为零的公因子$(x-x_0)$，再使用四则运算求极限.

极限的反问题

设 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+bx+c}{x^2-1}=2$, 求 b,c 的值.

解: $\because \lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=0$, 且极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+bx+c}{x^2-1}$ 存在,

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}(3x^2+bx+c)=0, \Rightarrow 3+b+c=0 \Rightarrow c=-3-b.$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+bx+c}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+bx-3-b}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x^2-1)+b(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=3+\lim_{x\to 1}\frac{b}{x+1}=3+\frac{b}{2}=2 \Rightarrow b=-2 \Rightarrow c=-1$$

结论: 如果 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在，且 $\lim g(x)=0$, 则有 $\lim f(x)=0$.

例7．求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3x+9}{5x^2+2x-1}$．

$\dfrac{\infty}{\infty}$型

方法：找分子分母最高　次幂，同除以最高次幂

解：分子分母同除以 x^2，则

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{4-3\frac{1}{x}+9\frac{1}{x^2}}{5+2\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{4}{5}$$

练习：求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}$．求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}$．

总结：求 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的函数极限的一般规律：“抓大头”

当 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m$、$n$ 为正整数,则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, n = m \\ 0, n < m \\ \infty, n > m \end{cases}$$

∞

练习：(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{5x^2+2x+7}$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+3}{3x^2-x-1}$. 0

$a=0, b=-3, c\in R$

设 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+bx+c}{3x+2} = -1$, 求 a, b, c.

例8 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$

$\infty-\infty$型

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}=\infty,\ \lim_{x\to 1}\frac{2}{x^2-1}=\infty$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x(x+1)-2}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x+1}$$

$$=\frac{3}{2}.$$

方法：先通分，后计算

例9 求$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$.

$\infty-\infty$型

方法：先通分，后计算

解 $$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

$$=-\lim_{x\to1}\frac{x+2}{1+x+x^2}=-1.$$

例10 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right).$

解 这是$\infty-\infty$无理式, 可以先进行有理化，再计算.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$$

练习: (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x).$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

三、复合函数的极限运算法则

定理5 设函数 $u=\varphi(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$.

函数 $y=f(u)$ 在点$u=a$处有定义且 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=f(a)$,

那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 有极限

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f(a).$$

也可写成 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f\left[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\right].$

在定理的条件下求复合函数极限时，函数符号可与极限符号交换次序。

例11. 求 $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}$.

解: 令 $u=\dfrac{x-3}{x^2-9}$ $\quad \lim\limits_{x\to 3}u=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{6}$

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{u\to \frac{1}{6}}\sqrt{u}=\sqrt{\dfrac{1}{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

例12． 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$．

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)$$

$$=2$$

总结：求极限的方法

1、分段函数在分界点处极限

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A$$

2、有界函数和无穷小的乘积是无穷小.

3、极限的四则运算

$\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$，且 $B\neq 0$，则有

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}$$

4、$\dfrac{A}{0}\to\infty, (A\neq 0)$　5、$\dfrac{0}{0}$型 因式分解，消去公因子.