4.3、分部积分法

问题 $\int xe^x dx = ?$

解决思路　利用两个函数乘积的求导法则.

设函数$u = u(x)$和$v = v(x)$具有连续导数,

$$(uv)' = u'v + uv', \qquad uv' = (uv)' - u'v,$$

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx, \Rightarrow \int udv = uv - \int vdu.$$

——分部积分公式

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

分部积分公式的作用：

当左边的积分 $\int u dv$ 不易求得，而右边的积分 $\int v du$ 容易求得，利用分部积分公式——化难为易.

例1：求积分 $\int x\cos x dx$.

解 $\int x\cos x dx = \frac{1}{2}\int \cos x d\left(x^2\right)$

$$= \frac{x^2}{2}\cos x + \frac{1}{2}\int x^2 \sin x dx$$

说明u, v选择不当，积分更难进行.

$$\int x\cos x dx = \int x d(\sin x) = x\sin x - \int \sin x dx$$

$$= x\sin x + \cos x + C.$$

说明：分部积分公式运用的关键是恰当地选择 u,v .

一般来说， u,v 选取的原则是：

把被积函数视为两个函数之积 ,按 “反对幂三指”

的顺序, 位置在前就是 u.

反：反三角函数
对：对数函数
幂：幂函数
三：三角函数
指：指数函数

例2. 求 $\int xe^x \,\mathrm{d}x$.

解：原式 $= \int x de^x = xe^x - \int e^x dx$

$$= xe^x - e^x + C$$

例3. 求 $\int x^2 e^x \,\mathrm{d}x$.

解：原式 $= \int x^2 de^x = x^2 e^x - \int e^x dx^2$

$$= x^2 e^x - 2\int xe^x dx$$

$$= x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C$$

$$= e^x (x^2 - 2x + 2) + C$$

例4. 求 $\int x\ln x\,\mathrm{d}x$.

解: $\int x\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \ln x d\left(x^2\right)$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x^2\,\mathrm{d}(\ln x)$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$$

例5. 求 $\int x \arctan x \, \mathrm{d}x$.

解: $\int x \arctan x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \arctan x \; \mathrm{d}\left(x^2\right)$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\int x^2 \, \mathrm{d}(\arctan x)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}(x - \arctan x) + C$$

例6 求 $\int \arccos x \,\mathrm{d}x$.

解: 原式 $= x\arccos x - \int x d(\arccos x)$

$$= x\arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= x\arccos x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}(1-x^2)$$

$$= x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

例7 求 $\int e^x \sin x \, dx$. ———— 循环法

解: $\int e^x \sin x \, dx = \int \sin x \, d(e^x)$

$$= e^x \sin x - \int e^x \, d(\sin x)$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$= e^x \sin x - \int \cos x \, d(e^x)$$

$$= e^x \sin x - (e^x \cos x - \int e^x \, d\cos x)$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

故原式 $= \dfrac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$

说明:若设 $u = e^x$ 但两次所设类型必须一致 .

例8 求 $\int \sec^3 x dx$.

解 $\int \sec^3 x dx = \int \sec x d(\tan x)$

$$= \sec x \tan x - \int \tan x d(\sec x)$$

$$= \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x dx$$

$$= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \ln|\sec x + \tan x|$$

故 $\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C.$

多种方法的综合使用——换元法和分部积分法

例9 求 $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$.

解：令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$，$dx=2t\,dt$

原式 $=2\int t e^t\,dt=2\int t\,d\left(e^t\right)$

$$=2\left(t e^t-\int e^t\,dt\right)$$

$$=2(t e^t-e^t)+C$$

$$=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$$

例10 求积分 $\int \cos(\ln x)dx$.

解： 令$t=\ln x$, $\Rightarrow x=e^t$, $\Rightarrow dx=e^t dt$

原式$=\int \cos t \cdot e^t dt = \int \cos t \cdot d(e^t)$

$= \cos t \cdot e^t - \int e^t \cdot d(\cos t)$

$\int \cos(\ln x)dx = \int e^t \cdot \cos t dt$ $\quad = \cos t \cdot e^t + \int e^t \cdot \sin t dt$

$= \frac{1}{2} e^t (\sin t + \cos t) + C$ $\quad = \cos t \cdot e^t + \int \sin t d(e^t)$

$= \frac{x}{2}(\sin \ln x + \cos \ln x) + C$. $\quad = \cos t \cdot e^t + \sin t \cdot e^t - \int e^t d(\sin t)$

$= \cos t \cdot e^t + \sin t \cdot e^t - \int e^t \cdot \cos t dt$

例11 已知$f(x)$的一个原函数是$\dfrac{\sin x}{x}$，求$\int xf'(x)dx$?

解：由题意可得: $\int f(x)dx=\dfrac{\sin x}{x}+C$

且$f(x)=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

从而原式$=\int xd[f(x)]=xf(x)-\int f(x)dx$

$$=\frac{x\cos x-2\sin x}{x}+C.$$

内容小结

分部积分公式 $\int u v' \mathrm{d}x = u v - \int u' v \, \mathrm{d}x$

1. 使用原则：v易求出，$\int u'v \, \mathrm{d}x$ 易积分.

2. 使用经验：“反对幂三指”.