# 第一节 多元函数的基本概念

一、平面点集

二、多元函数的概念

三、多元函数的极限

四、多元函数的连续性

# 一、平面点集

## 1. 平面点集

坐标平面上具有某种性质$P$的点的集合，称为平面点集，记作

$$E=\{(x, y) \mid (x, y)\text{具有性质}P\}.$$

例如，平面上以原点为中心、2为半径的圆内所有点的集合是

$$E=\{(x, y) \mid x^2+y^2<4\}, \quad \text{或} E=\{P \mid |OP|<2\}.$$

## 2. 邻域

点集 $U(P_0,\delta)=\{P \mid |PP_0|<\delta\}$, 称为**点 $P_0$ 的 $\delta$ 邻域.**

例如, 在平面上,

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$ (圆邻域)

在空间中,

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y,z) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta\}$$

(球邻域)

点 $P_0$ 的去心邻域, 记为 $\overset{o}{U}(P_0,\delta)$,

$$\overset{o}{U}(P_0,\delta)=\{P \mid 0<|P_0P|<\delta\}.$$

说明：1. 若不需要强调邻域半径$\delta$,也可写成 $U(P_0)$.

点 $P_0$ 的去心邻域可以记为 $\overset{\circ}{U}(P_0)$.

2. 方邻域

平面上的方邻域为

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\,\big|\,|x-x_0|<\delta\ ,\ |y-y_0|<\delta\}$$

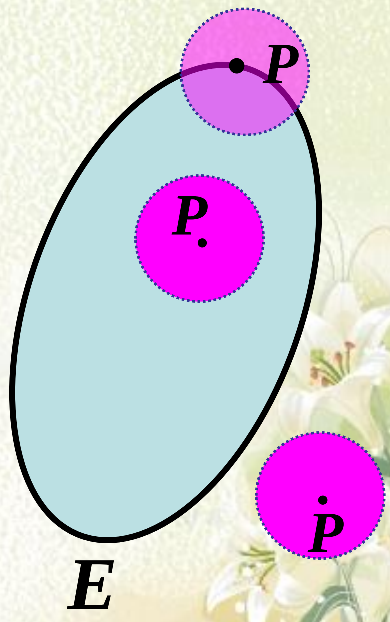
## 3. 内点、外点、边界点

$E$为平面点集，$P$为平面上的一点.

(1) 内点　如果存在点 $P$ 的某一邻域$U(P)$，使得$U(P)\subset E$，则称 $P$ 为 $E$ 的内点.

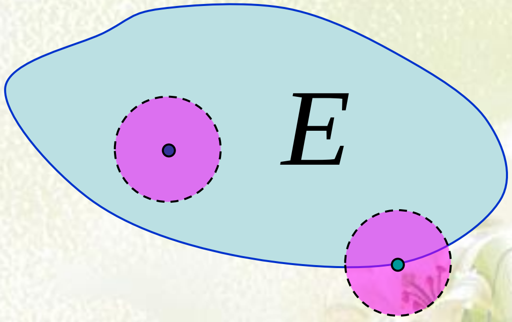
(2) 外点　如果存在点 $P$ 的某一邻域$U(P)$，使得$U(P)\cap E=\varnothing$，则称 $P$ 为$E$的外点.

(3) 边界点　如果点 $P$ 的任一邻域内既有属于 $E$ 的点，也有不属于 $E$ 的点，则称 $P$ 点为 $E$ 的边界点.



**(4) 聚点** $\forall\,\delta>0$，点$P$的去心邻域$\overset{o}{U}(P,\delta)$内总有$E$中的点，则称$P$为$E$的聚点. $\overset{o}{U}(P,\delta)\cap E\neq\varnothing$

**注意：**




1. 聚点可以属于$E$，也可以不属于$E$;

2. 所有聚点所成的点集称为$E$的导集.

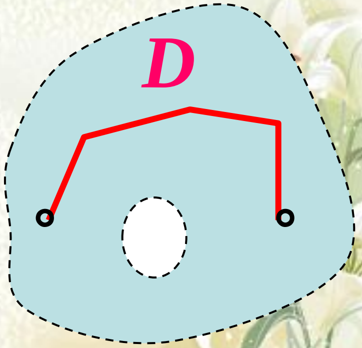
# 4. 开区域及闭区域

开集：若点集 $E$ 的点都是内点，则称 $E$ 为开集.

边界：$E$的边界点的全体称为 $E$ 的边界，记作$\partial E$.

闭集：若点集 $\partial E \subset E$ ，则称 $E$ 为闭集.

连通集：若 $E$ 中任意两点都可用一完全属于$E$的折线相连，则称$E$ 是连通集.



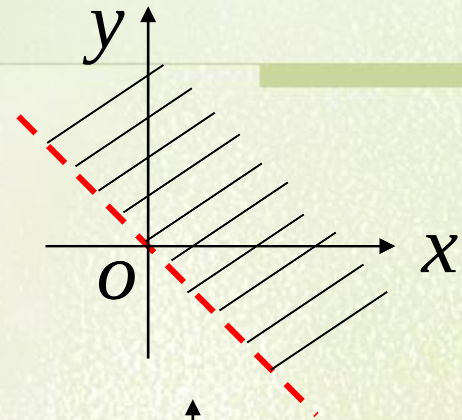

开区域：连通的开集称为开区域, 简称区域.

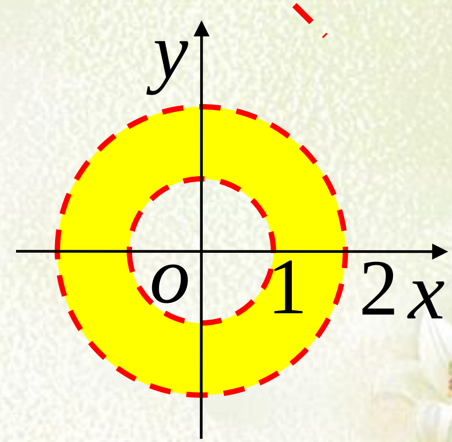
闭区域：开区域连同它的边界一起称为闭区域.

# 例如，在平面上

- $\{(x,y) \mid x+y>0\}$
- $\{(x,y) \mid 1<x^2+y^2<4\}$

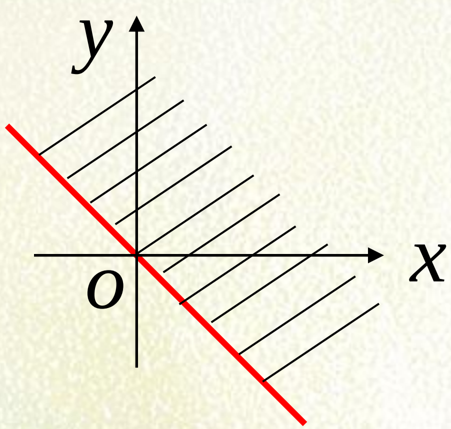
开区域

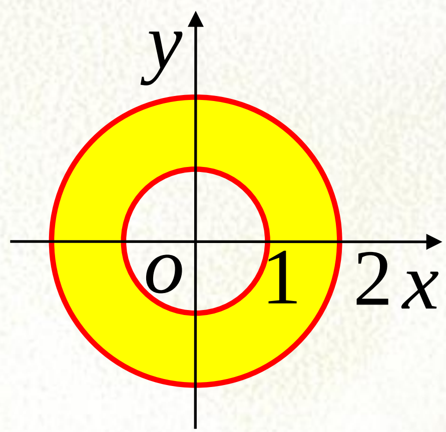



- $\{(x,y) \mid x+y\geq 0\}$
- $\{(x,y) \mid 1\leq x^2+y^2\leq 4\}$

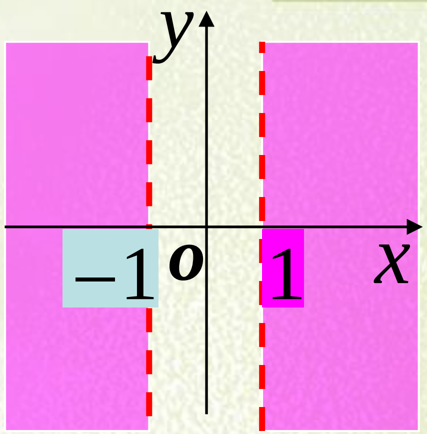
闭区域



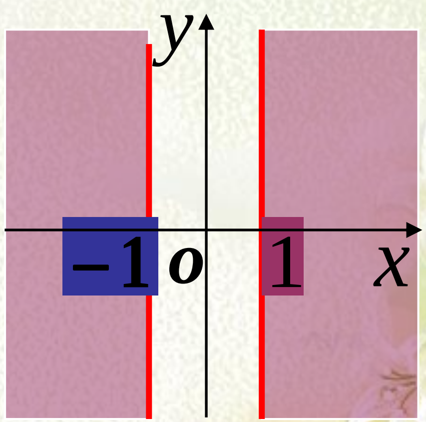
- 点集 $\{(x,y) \mid |x|>1\}$是开集，

  但非区域.




- 点集 $\{(x,y) \mid |x|\ge 1\}$是闭集，

  但非闭区域.




- 整个平面是最大的开域，

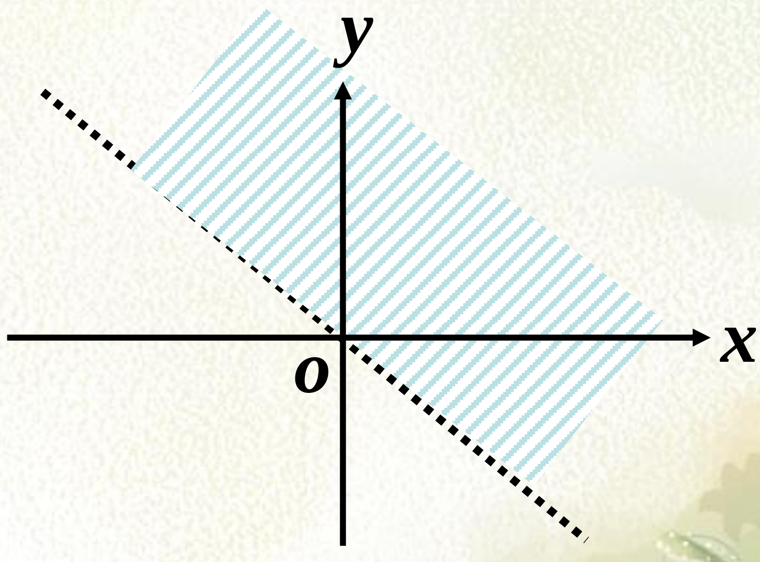
  也是最大的闭域.

**有界集:** 平面点集$E$，若存在某一正数$r$，使得$E\subset U(O,r)$，则称$E$为有界集，否则称$E$为无界集.

**例如，** $\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$ 有界闭区域;

$\{(x,y)\,|\,x+y>0\}$

无界开区域.



# 二、多元函数的概念

## 1. 二元函数

定义. 设非空点集$D \subset \mathrm{R}^2$,对每个$P(x, y) \in D$,变量$z$按一定的法则总有唯一确定的值与之对应,称$z$是$x, y$的二元函数.

记作 $z = f(x, y)$ 或 $z = f(P), P \in D$

定义域: $D$; ——集合形式

值域: $\{z \mid z = f(P), P \in D\}$ ——数集

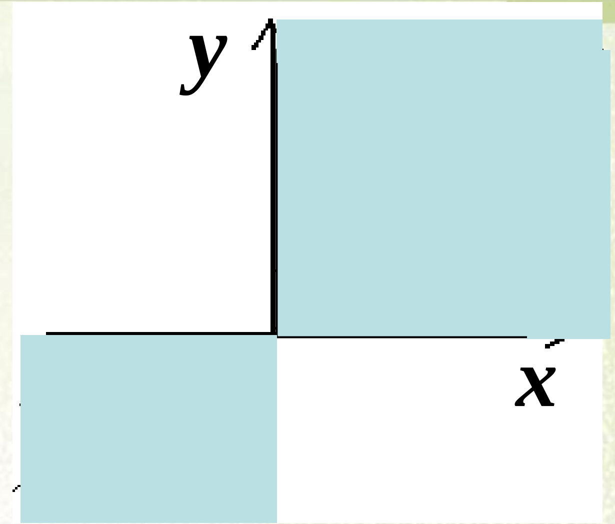
类似地,三元函数

$$z = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D \subset R^3$$

**要求：**会求函数定义域.

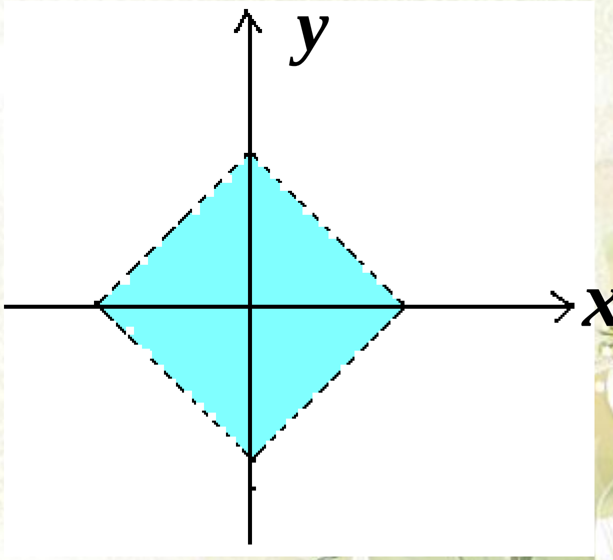
例如：

$$z = \sqrt{xy} \qquad D = \{(x, y) \mid xy \geq 0\}$$



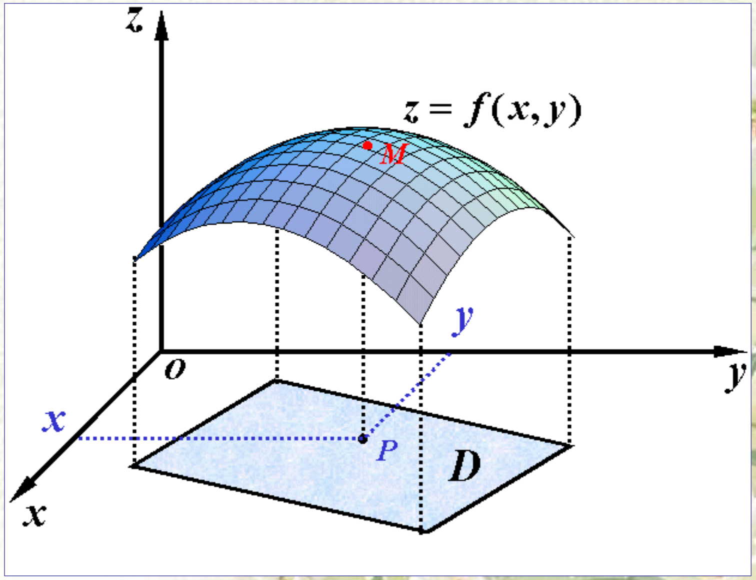

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 - |x| - |y|}}$$

$$D = \{(x, y) \mid |x| + |y| < 1\}$$



## 2.【二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形】

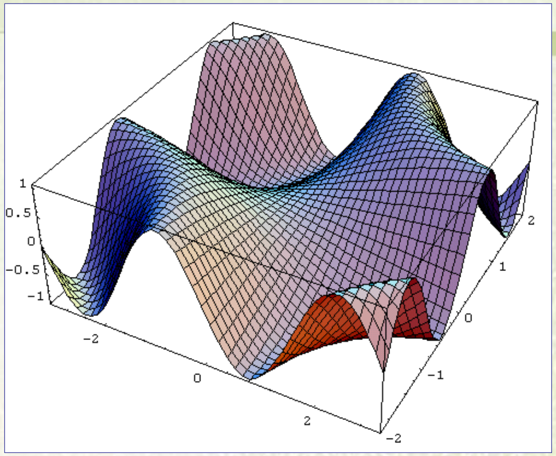
设函数$z=f(x,y)$的定义域为$D$，对于任意取定的$P(x,y)\in D$，对应的函数值为$z=f(x,y)$，这样，以$x$为横坐标、$y$为纵坐标、$z$为竖坐标在空间就确定一点$M(x,y,z)$，当$(x,y)$取遍$D$上一切点时，得一个空间点集$\{(x,y,z)\,|\,z=f(x,y),(x,y)\in D\}$，这个点集称为二元函数的图形.




二元函数的图形通常是一张曲面.

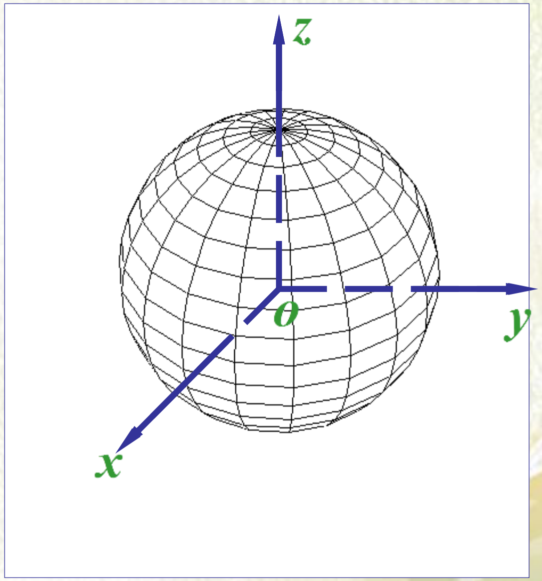
【例如】 $z = \sin xy$

图形如右图.




【例如】 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

右图球面.




$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le a^2\}.$$

单值分支: $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

$$z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

# 三、多元函数的极限

1. 【定义】设 $z=f(x,y)$ 的定义域为 $D$，$P_0(x_0,y_0)$是其聚点. 如果存在常数 $A$，对于$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得当 $P(x,y)\in D\cap\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$ 时，都有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立，称 $A$ 为函数 $f(x,y)$当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$

或 $f(x,y)\to A$ $((x,y)\to(x_0,y_0))$.

(1) 点$P_0$必须是聚点，才能研究其极限存在性.

否则不能无限接近点$P_0$；

(2)定义中 $P\to P_0$ 的方式是任意的；

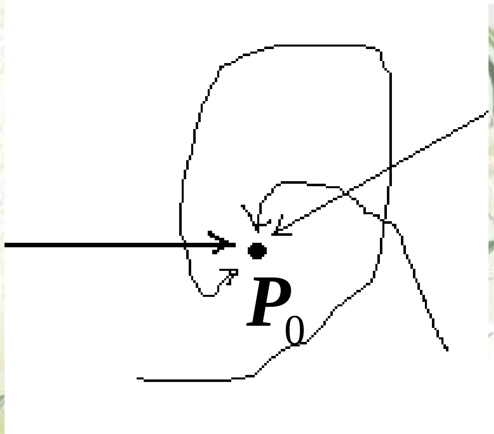
(3) 二元函数的极限运算法则与一元函数类似.

## 说明：

（1）多元函数的极限是自变量各自独立地同时在变，称为二重极限．还有一种自变量分先后次序变，称累次极限. 如 $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ 即先 $x$ 固定，变量 $y$ 趋于 $b$，然后再令变量 $x$ 趋于 $a$．这种极限是两个极限过程；而二重极限是一个极限过程. 两者是不同的.

(2) $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = A$

$\Leftrightarrow$ $P$以任意方式趋于$P_0$时，$f(P)\to A$.



例如两个累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=0$

存在，而二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

又如 $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & xy\neq 0 \\ 0\,, & xy=0 \end{cases}$

则二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ 而两个累次极限均不存在.

【强调】本课程讨论的极限均为重极限.

## 2. 确定极限不存在的方法

(1)如果当 $P$ 以两种不同方式趋于 $P_0$ 时，极限值不同，则函数的极限不存在.

(2)如果当 $P$ 以某种方式趋于 $P_0$ 时，极限不存在，则函数的极限不存在.

例2 讨论函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 的极限.

解 设 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋于点 $(0,0)$，则有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

$k$ 值不同极限不同!

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点极限不存在 .

例3 证明： $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\cos\dfrac{y}{x^2}$ 不存在.

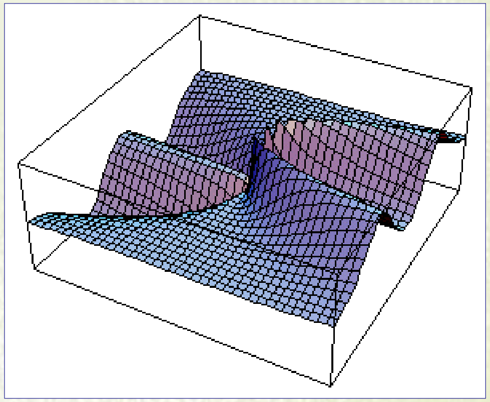
证: 当$(x,y)$沿直线$y=x$趋于点$(0,0)$时，有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\cos\frac{y}{x^2}=\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}\ \text{不存在.}$$

因此，原极限不存在.

练习　证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ 不存在.

【思考题】若点$(x,y)$沿着无数多条平面曲线趋向于点$(x_0,y_0)$时，函数$f(x,y)$都趋向于 $A$，能否断定 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$？



【解答】不能.

【例】 $f(x,y)=\dfrac{x^3y^2}{(x^2+y^4)^2}$，$(x,y)\to(0,0)$

取 $y=kx$，$f(x,kx)=\dfrac{x^3\cdot k^2x^2}{(x^2+k^4x^4)^2}=\dfrac{k^2x^5}{x^4+2k^4x^6+k^8x^8}\xrightarrow{x\to0}0$

但是 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$不存在.

原因为若取 $x=y^2$，$f(y^2,y)=\dfrac{y^6y^2}{(y^4+y^4)^2}\to\dfrac{1}{4}$.

# 3. 二元函数的极限运算法则与一元函数类似

**例4** 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$.

**解** $$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{1-xy}{x^2+y^2} = \frac{1-0}{0+1} = 1.$$

**例5** 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$.

**解** $$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{xy}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,2)} y = 2.$$

**例6** 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2y^2}$.

**解** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2y^2}$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2\left(\sqrt{x^2y^2+1}+1\right)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2y^2+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

# 四、多元函数的连续性

**定义** 设 二元函数 $f(P)$ 定义在 $\boldsymbol{D}$ 上, 聚点 $P_0 \in D$,

如果存在 $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$ 则称 二元函数$f(P)$

在点$\boldsymbol{P_0}$连续.

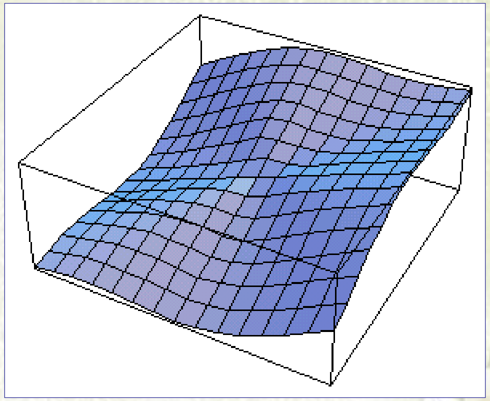
否则称为不连续, 此时 $P_0$ 称为间断点.

如果函数在 $\boldsymbol{D}$ 上各点处都连续, 则称此函数在 $\boldsymbol{D}$ 上

连续.

【例6】讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

在(0,0)处的连续性.



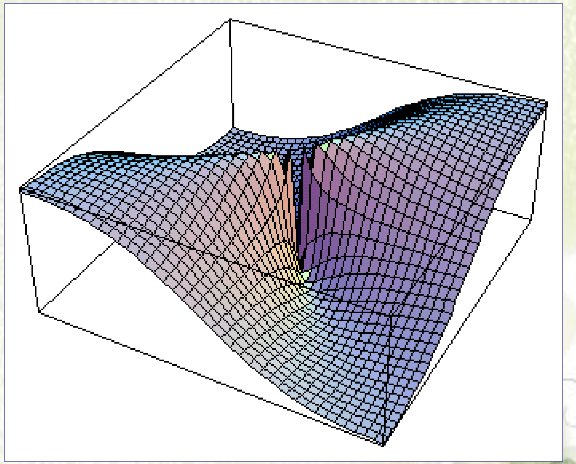
【解】 $0\le\left|\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|\le\dfrac{\left|x^3\right|+\left|y^3\right|}{x^2+y^2}$

$$\le\frac{\left|x^2+y^2\right|\left|x\right|+\left|x^2+y^2\right|\left|y\right|}{x^2+y^2}=\left|x\right|+\left|y\right|\quad\to 0$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$, 故函数在(0,0)处连续.

【教材例8】讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

在(0,0)的连续性.



【解】 取 $y=kx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

其值随 $k$ 的不同而变化，极限不存在.

故函数在(0,0)处不连续.

2.【多元初等函数】由常数及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算所构成的可用一个式子所表示的函数叫多元初等函数.

【结论】一切多元初等函数在其定义区域内是连续的.

由多元初等函数的连续性，如果要求 $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$，而 $P_0$ (内点或者边界点)又在此函数的定义区域内，则

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0).$$

【教材例9】求 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{x+y}{xy}$

【解】 定义域 $D=\{(x,y)\mid x\neq 0, y\neq 0\}$

$P_0(1,2)$为$D$的内点，故$\exists U(P_0)\subset D$

而任何邻域都是区域，则

$U(P_0)$是$f(x,y)$的一个定义区域，因此

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{x+y}{xy}=f(1,2)=\frac{3}{2}$$

## 3. 【有界闭区域上连续函数的性质】

### （1）有界性与最大值最小值定理

在有界闭区域 $D$ 上的多元连续函数，必定在 $D$上有界，且能取得它的最大值和最小值.

### （2）介值定理

在有界闭区域 $D$ 上的多元连续函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值.

【注】 (1) (2)定理中条件的充分性.

# 内容小结

1. 区域　• 邻域 : $U(P_0,\delta)$, $\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$　• 区域---连通开集

2. 多元函数概念

$$\text{常用}\begin{cases}\text{二元函数（图形一般为空间曲面）}\\ \text{三元函数}\end{cases}$$

3. 多元函数的极限　（注意趋近方式的任意性）

4. 多元函数的连续性

1) 函数 $f(P)$ 在 $P_0$ 连续 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$

2) 闭域上的多元连续函数的性质