第七章

微分方程

已知 $y' = f(x)$, 求 y — 积分问题

推广

已知类似于 $\boldsymbol{y' + y = f(x)}$, 求 $\boldsymbol{y}$

— 微分方程问题

第一节 微分方程的基本概念

一、问题的提出

引例 $\left\{\begin{array}{l}\text{几何问题}\\ \text{物理问题}\end{array}\right.$ $\longrightarrow$ 微分方程的基本概念

二、微分方程的定义

三、小结

一、问题的提出

【教材例1】一曲线通过点(1,2)，在该曲线上任意点处的切线斜率为 $2x$，求该曲线的方程．

【解】 设所求曲线方程为 $y=y(x)$，则有如下关系式：

$$\begin{cases} y' = 2x & ① \\ y\big|_{x=1} = 2 & ② \end{cases}$$

由 ① 得 $y = \int 2x\,dx = x^2 + C$ （C为任意常数）

由 ② 得 $C = 1$，因此所求曲线方程为 $y = x^2 + 1$．

【教材例2】 列车在平直路上以 $20\,\mathrm{m/s}$ 的速度行驶, 制动时获得加速度 $-0.4\,\mathrm{m/s^2}$, 求制动后列车的运动规律.

【解】 设列车在制动后 t 秒行驶了 s 米， 即求 $s=s(t)$.

已知
$$\begin{cases} \dfrac{d^2 s}{dt^2} = -0.4 \\ s\big|_{t=0} = 0,\quad \dfrac{ds}{dt}\Big|_{t=0} = 20 \end{cases}$$

由前一式两次积分, 可得 $s = -0.2t^2 + C_1 t + C_2$

利用后两式可得 $C_1 = 20,\ C_2 = 0$

因此所求运动规律为 $s = -0.2t^2 + 20t$

[说明] 利用这一规律可求出制动后多少时间列车才能停住， 以及制动后行驶了多少路程 .

二、微分方程的定义

含有自变量、未知函数及其导数(或微分)的方程叫做微分方程.

【例】 $y' = xy,\qquad y'' + 2y' - 3y = e^x,$

$$(t^2 + x)dt + xdx = 0,$$

方程中所含未知函数导数的最高阶数叫做微分方程的阶.

一般地, n 阶微分方程的形式是 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$

或

$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ (n 阶显式微分方程)

【分类1】

一阶微分方程： $F(x,y,y')=0,\quad y'=f(x,y);$

高阶(n)微分方程：

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0,\quad y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}).$$

【分类2】

线性微分方程： $y'+P(x)y=Q(x),$

非线性微分方程: $x(y')^2-2yy'+x=0.$

【分类3】

常微分方程：未知函数是一元函数的微分方程.

偏微分方程：未知函数是多元函数的微分方程.

微分方程的解 ---使方程成为恒等式的函数.

通解 --- 解中所含独立的任意常数的个数与方程的阶数相等.

特解 --- 不含任意常数的解，其图形称为积分曲线.

初值条件 --- 确定通解中任意常数的条件.

n阶方程的初值条件主要有

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,\cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

微分方程的初值问题：求微分方程满足初始条件的解（即求特解），叫做微分方程的初值问题.

引例1
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2x \\ y\big|_{x=1} = 2 \end{cases}$$

引例2
$$\begin{cases} \dfrac{d^2 s}{dt^2} = -0.4 \\ s\big|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{ds}{dt}\Big|_{t=0} = 20 \end{cases}$$

通解: $y = x^2 + C$ $\qquad s = -0.2t^2 + C_1 t + C_2$

特解: $y = x^2 + 1$ $\qquad s = -0.2t^2 + 20t$

【教材例3】验证函数 $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$(C_1,C_2为常数)是微分方程 $\dfrac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0$ 的解，并求满足初始条件

$$x\big|_{t=0}=A,\quad \frac{dx}{dt}\bigg|_{t=0}=0$$ 的特解．

【解】 $$\frac{d^2x}{dt^2}=-C_1k^2\cos kt-C_2k^2\sin kt$$

$$=-k^2(C_2\sin kt+C_1\cos kt)\qquad =-k^2x$$

这说明 $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$ 是方程的解．

C_1,C_2 是两个独立的任意常数，故它是方程的通解.

利用初始条件易得：$C_1=A$, $C_2=0$，故所求特解为

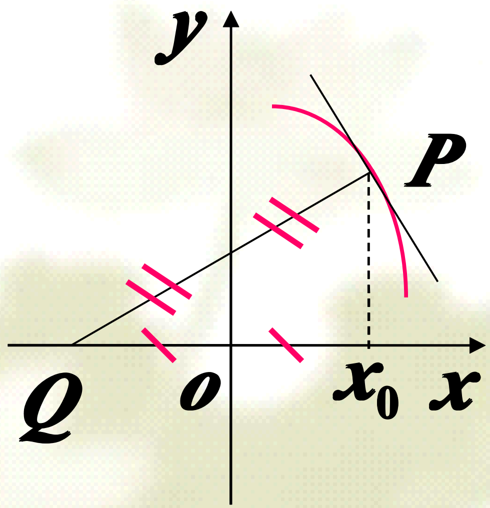
$$x=A\cos kt$$

【例4】已知曲线上点 $P(x_0, y_0)$处的法线与 x 轴交点为 Q 且线段 PQ 被 y 轴平分， 求曲线所满足的微分方程 .

【解】设曲线方程为$y=f(x)$, 则点$P(x_0, y_0)$ 处的切线斜率为 $y'\big|_{x=x_0} = y_0'$

如图所示，点 $P(x_0, y_0)$ 处的法线方程为

$$Y - y_0 = -\frac{1}{y_0'}(X - x_0)$$



令 $Y=0$, 得 Q 点的横坐标

$$X = x_0 + y_0 y_0'$$

$\therefore$ $x_0 + y_0 y_0' = -x_0$, 即 $yy' + 2x = 0$

三、小结

本节基本概念：

微分方程；

微分方程的阶；　微分方程的解；

通解；　初值条件；　特解；

初值问题；　　积分曲线.

【思考题】

函数 是微分方程

的什么解?

【思考题解答】

$$\because\ y' = 6e^{2x}, \qquad y'' = 12e^{2x},$$

$$y'' - 4y = 12e^{2x} - 4\cdot 3e^{2x} = 0,$$

$\because\ y = 3e^{2x}$ 中不含任意常数,

故为微分方程的特解.

[注意] 通解不一定是方程的全部解.

例如, 方程 $(x+y)y'=0$ 有解

$y=-x$ 及 $y=C$

后者是通解, 但不包含前一个解.