1.8 函数的连续性与间断点

一、函数连续的概念

二、函数的间断点

一、函数连续的概念

1. 函数的增量

定义1 在某过程中, 变量 u 由初值 u_1 变为终值 u_2,则

称差 $u_2 - u_1$ 称为变量 u 的增量,

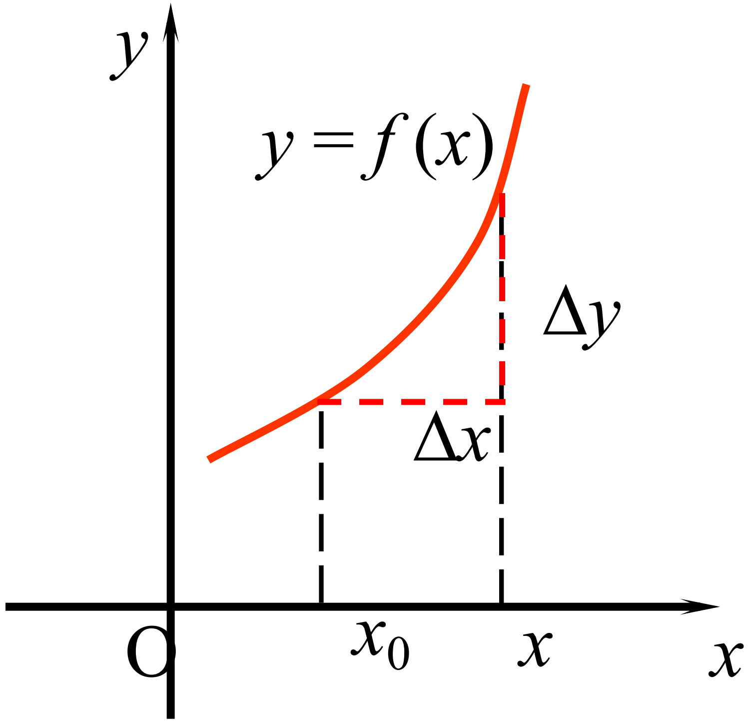
记为 $\Delta u = u_2 - u_1.$

注: Δu 是一个整体记号, 它可以取正值、负值或零.

当初值大于终值时，增量就是负的.

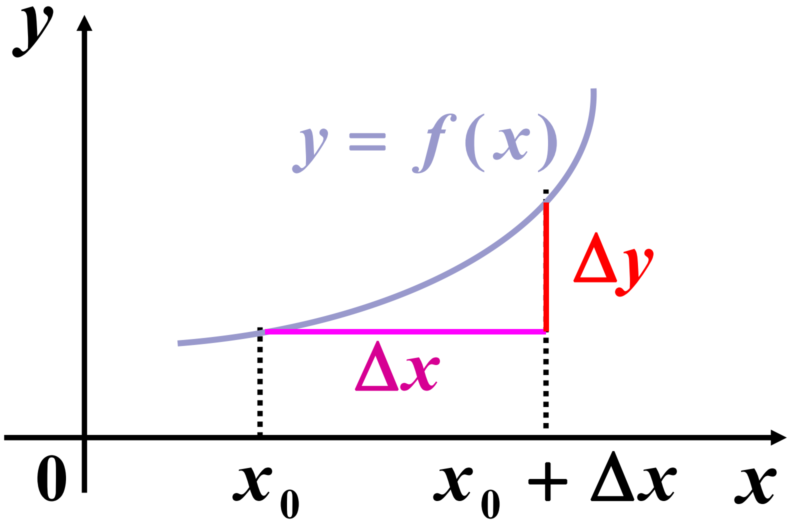
定义2 自变量由 x_0 变化到 x,

则称 $\Delta x = x - x_0$ 为自变量 x 在 x_0 点处的增量.

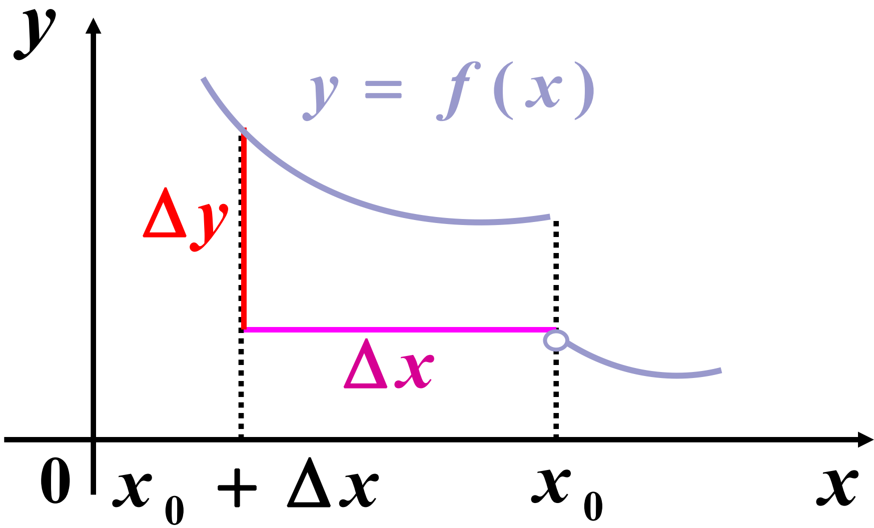


$f(x)$ 在点 x_0 点处有函数增量 Δy:

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$



y
y = f(x)
Δy
Δx
0
x0
x0 + Δx
x

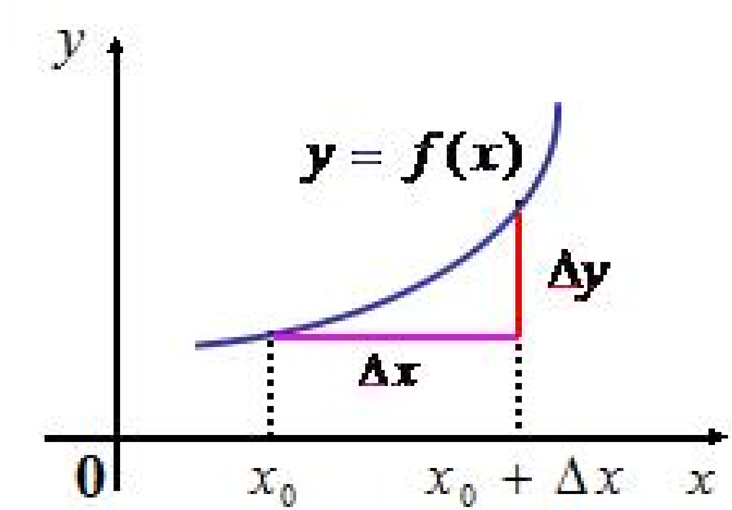


y
y = f(x)
Δy
Δx
0
x0 + Δx
x0
x

2. 函数连续的概念

设$y=f(x)$在x_0的某一邻域内有定义，当自变量 x在这邻域内由x_0变到$x_0+\Delta x$时,

函数的增量



$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

设x_0不动, 当Δx无限变小时,

Δy也无限变小, 函数 $y=f(x)$ 在x_0处连续， 即

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0}$$

增量的极限形式

定义3 设$y=f(x)$在x_0的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0,$$

则称函数$f(x)$在x_0处**连续**，称x_0为函数$f(x)$的**连续点**.

设 $x=x_0+\Delta x,\ \Delta y=f(x)-f(x_0),$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta x\to 0 \quad \text{即为} \ x\to x_0, \\ \Delta y\to 0 \quad \text{即为} \ f(x)\to f(x_0).\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

定义4 设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义, 若

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

则称函数$f(x)$在x_0处连续.

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 应该满足以下三点:

(1) $f(x)$ 在 x_0 处有定义;

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在; 即 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$;

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

例1 试证函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x+1}, & x\neq -1,\\ -2, & x=-1,\end{cases}$ 在$x=-1$处连续.

证 $\because f(x)$在$U(-1)$有定义，且

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x-1)= \quad -2$$

$$\therefore \lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)$$

$\therefore$函数$f(x)$在$x=-1$处连续.

例2 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 在$x=0$ 处连续.

解 $\because \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$

又 $f(0)=0$, 所以$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$,

由连续性的定义知,

函数 $f(x)$在 $x=0$处连续.

3. 左、右连续

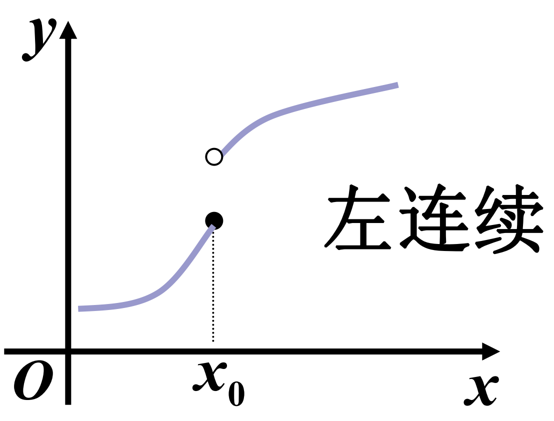
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

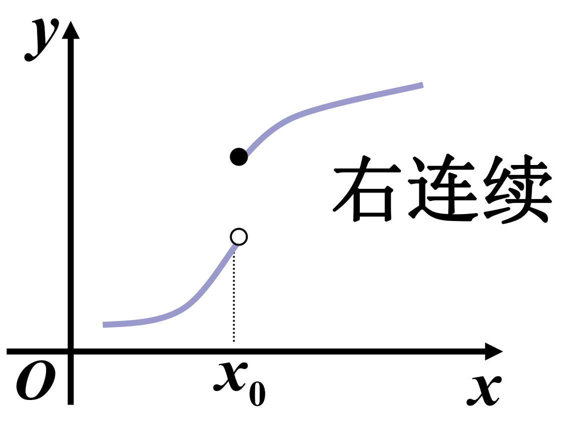
左连续： 若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ $\left(f(x_0^-) = f(x_0)\right)$,

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处 左连续；

右连续： 若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ $\left(f(x_0^+) = f(x_0)\right)$,

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处 右连续.





函数$y=f(x)$在x_0处连续，必有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

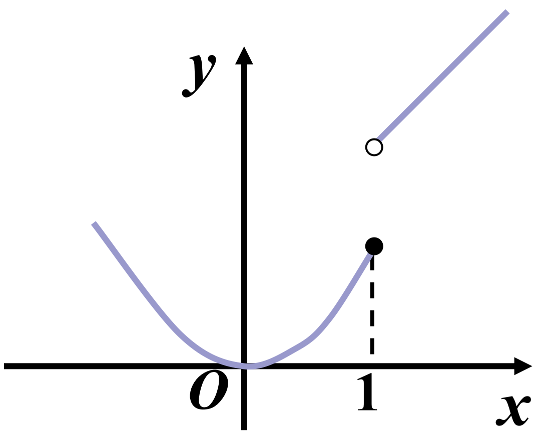
即 $$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0).$$

定理1 函数在点 x_0 连续的**充要条件**是它在点 x_0 处既左连续又右连续.

——判定分段函数在分段点处的连续性.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0).$$

例3 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x \le 1, \\ x+1, & x>1, \end{cases}$



在 $x=1$ 处的连续性.

解 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1 = f(1),$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x+1) = 2 \ne f(1),$

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 左连续, 在 $x=1$ 不右连续.

故函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处不连续.

例4 当a取何值时,

函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ a+x, & x\geq 0,\end{cases}$ 在$x=0$处连续.

解 $\because f(0)=a,$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\cos x=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(a+x)=a,$$

要使 $f(0^+)=f(0^-)=f(0),\qquad \Rightarrow a=1,$

故当且仅当 $a=1$时，函数 $f(x)$在$x=0$处连续.

4. 函数在区间上的连续性

定义5 设函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内有定义.

(1) 若 $\forall x_0 \in (a, b)$, $f(x)$ 在点 x_0 处连续,则称 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续, 记为 $f(x) \in C(a, b)$.

(2) 若 $f(x) \in C(a, b)$, 且 $f(x)$ 在左端点 $x = a$ 处右连续,

在右端点 $x = b$ 处左连续,

则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 记为 $f(x) \in C[a, b]$.

例5 证明函数 $y=\sin x$在区间$(-\infty,+\infty)$内连续.

证明 任取 $x_0 \in (-\infty,+\infty)$,

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0\right)$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos(x_0+\frac{\Delta x}{2})\right) = 0$$

即函数 $y=\sin x$在x_0处连续,

由x_0的任意性知 ,

函数 $y=\sin x$对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都是连续的.

类似地，可以验证 $y=\cos x$ 在定义区间内是连续的.

结论：

若$f(x)$是基本初等函数，设其定义域为D，而$x_0 \in D$，

则有 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

基本初等函数在其定义域内每点处均连续.

也就是说，基本初等函数在其定义域内是连续的.

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，两个等价定义：

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

判断函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，三个步骤：

(1) $f(x)$ 在 x_0 处有定义；

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在,即 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$;

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

二、函数的间断点

定义6 函数的不连续点叫做函数的间断点.

$f(x)$ 在点 x_0 处出现如下三种情形之一:

(1) $f(x)$在点x_0处无定义;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断.

例

(1) $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处无定义, 因此 $x=0$ 是 $y=\dfrac{1}{x}$ 的间断点.

(2) $f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, x<0\\ 0, x=0\\ 1, x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处,

由于 $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(-1)=-1$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}1=1$,

故 $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ 不存在， 因此 $x=0$ 是此函数的间断点.

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 5x}{x}, x\neq0\\ 0, \quad x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处，由于

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{x}=5,$$

而 $f(0)=0$, 故 $\lim\limits_{x\to0} f(x)\neq f(0)$， $x=0$ 是此函数的间断点.

函数间断点的分类

- 第一类间断点
  - 跳跃
  - 可去
- 第二类间断点
  - 无穷
  - 振荡
  - 其它

函数间断点的分类:

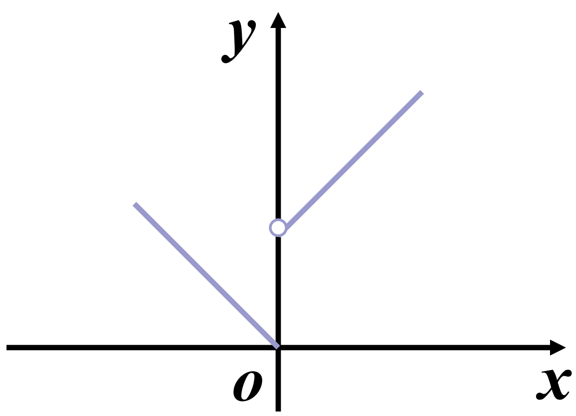
1.跳跃间断点 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处左，右极限都存在，但 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

例6 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & x\leq 0,\\ 1+x, & x>0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 $f(0-0)=0,\quad f(0+0)=1,$

$\because f(0-0)\neq f(0+0),$

$\therefore x=0$ 为函数的跳跃间断点.

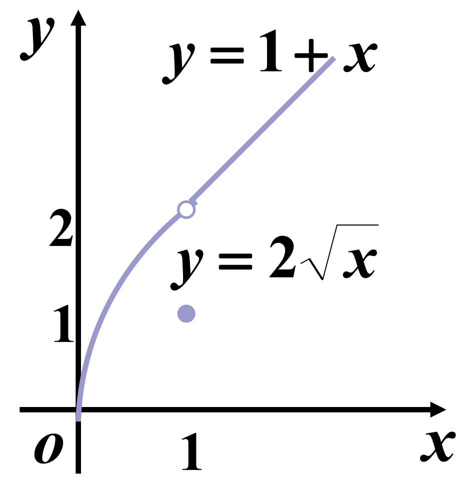


2.可去间断点 如果 $f(x)$在点 x_0处的极限存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\neq f(x_0)$, 或 $f(x)$在点 x_0处无定义则称点 x_0为函数 $f(x)$的可去间断点．

例7 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0\le x<1, \\ 1, & x=1 \\ 1+x, & x>1, \end{cases}$$

在$x=1$处的连续性．



解 $\because f(1)=1,\quad f(1-0)=2,\quad f(1+0)=2,$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x)=2\neq f(1),$

$\therefore x=0$为函数的可去间断点．

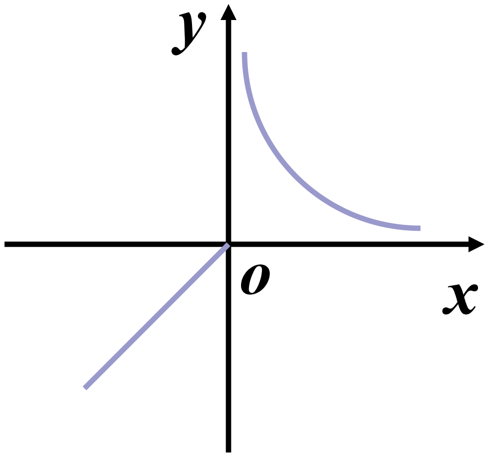
3.第二类间断点 如果$f(x)$在点x_0处的左、右极限至少有一个不存在, 则称点x_0为函数$f(x)$的第二类间断点.

例8 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ x, & x\le 0,\end{cases}$ 在$x=0$处的连续性.

解 $f(0-0)=0,\quad f(0+0)=+\infty,$

$\therefore x=1$为函数的第二类间断点.

无穷间断点.

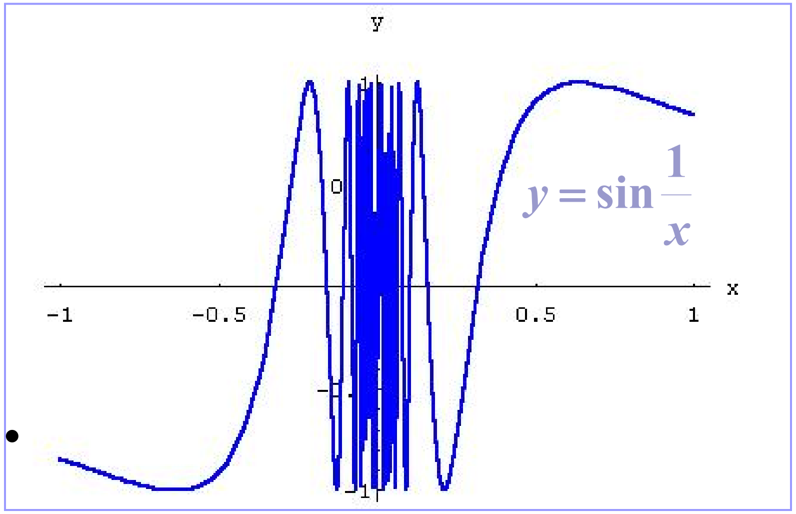


例9 讨论函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 $\because$ 在 $x=0$ 处没有定义,

且 $\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

$\therefore x=0$ 为第二类间断点.



这种情况称为的振荡间 断点.

函数间断点的分类:

第一类间断点: $f(x_0^-)$ 及 $f(x_0^+)$ 均存在,

若 $f(x_0^-) = f(x_0^+)$ 称 x_0 为可去间断点.

若 $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$ 称 x_0 为跳跃间断点.

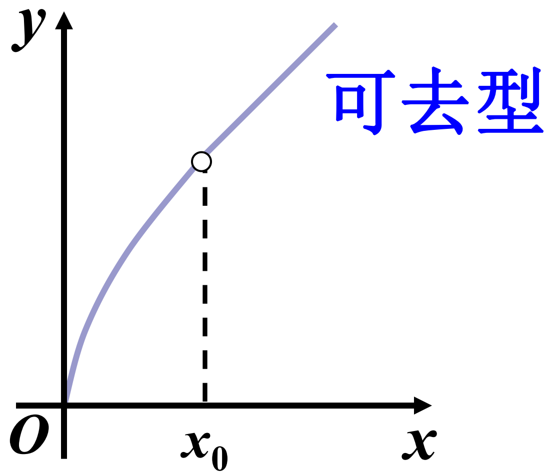
第二类间断点:

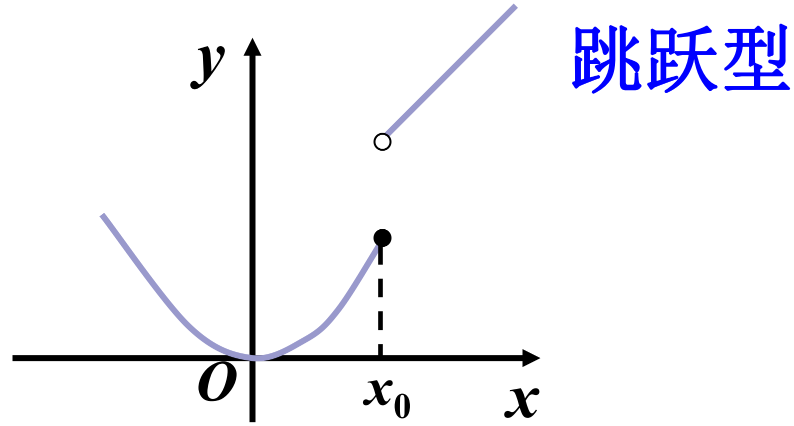
$f(x_0^-)$ 与 $f(x_0^+)$ 至少有一个不存在,

若其中有一个为 ∞, 称 x_0 为无穷间断点.

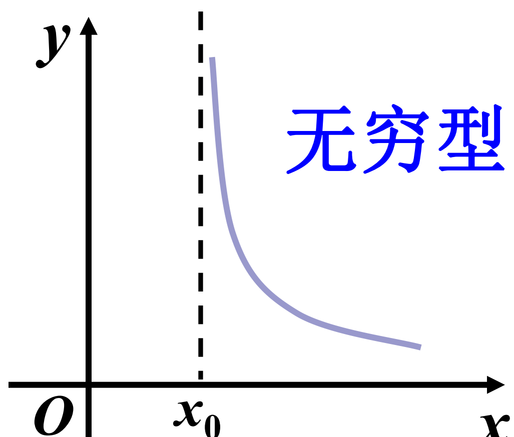
若其中有一个为振荡, 称 x_0 为振荡间断点.

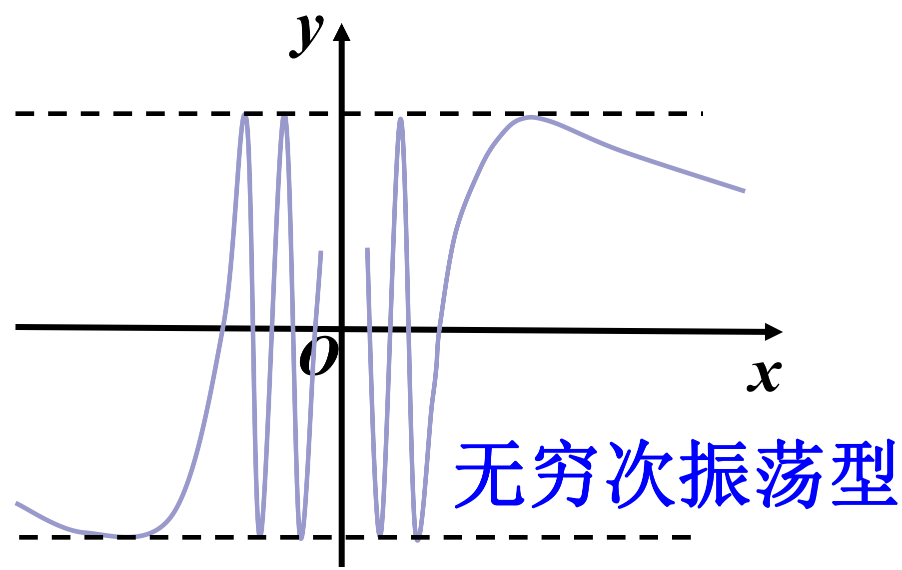
第一类间断点



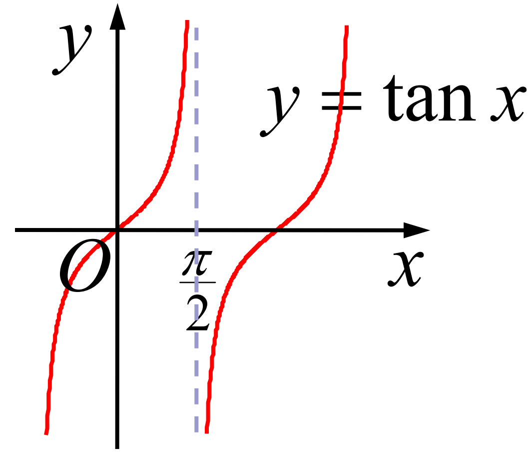


第二类间断点



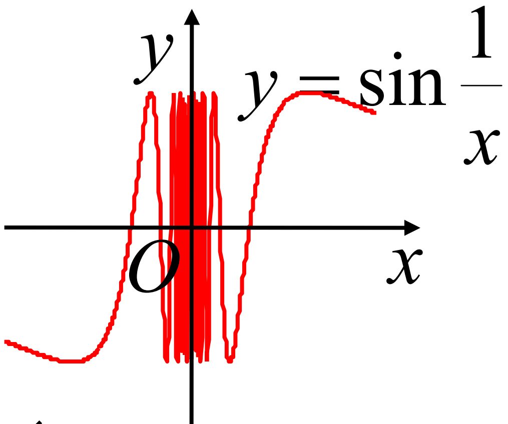


例如: (1) $y = \tan x$



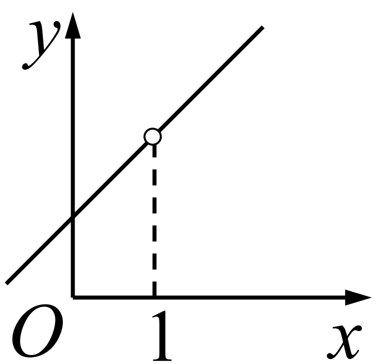
$x = \frac{\pi}{2}$ 为其无穷间断点 .

(2) $y = \sin \frac{1}{x}$



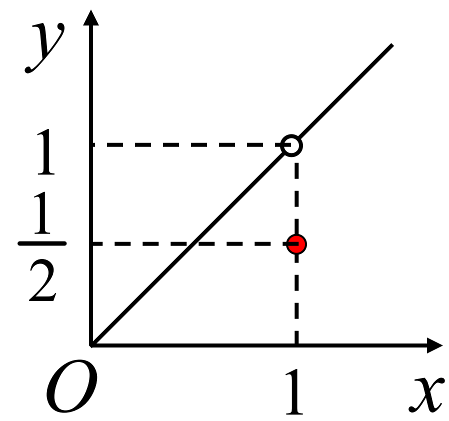
$x = 0$ 为其振荡间断点 .

(3) $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$



$x = 1$ 为可去间断点 .

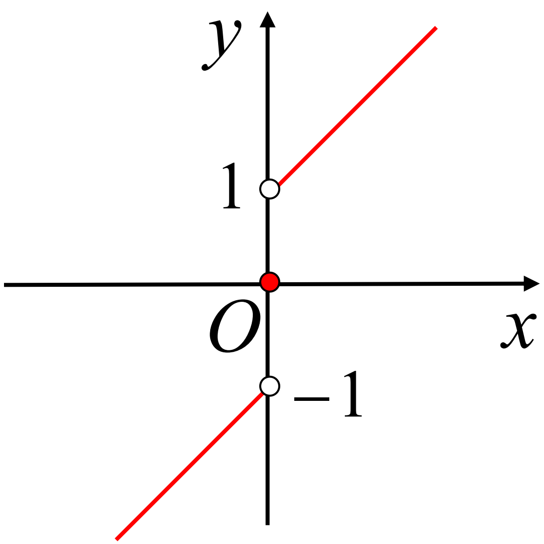
(4) $y=f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 1 \\ \frac{1}{2}, & x=1 \end{cases}$



显然 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1\neq f(1)$

$x=1$ 为其可去间断点 .

(5) $y=f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$



$f(0^-)=-1,\qquad f(0^+)=1$

$x=0$ 为其跳跃间断点 .

1.指出 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的间断点，说明是哪一类间断点，

如果是可去间断点，补充或者改变函数的定义使之连续

2.讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x\,(n\in N_+)$

的连续性，若有间断点，判别类型。

讨论绝对值函数的连续性

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x\ ,x\geq 0 \\ -x,x<0 \end{cases}$$

解：$x>0, f(x)=x$ 在x处连续

$x<0, f(x)=-x$ 在x处连续

$x=0, f(0)=|0|=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=0$$

$\lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$ 在0处连续,从而函数处处连续

内容小结

1. $f(x)$ 在点 x_0 连续的等价形式

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{f(x_0^-)=\overbrace{f(x_0)}^{}}_{\text{左连续}}\ldots$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{f(x_0^-)=f(x_0)}^{\text{左连续}}=f(x_0^+)$$

左连续　　右连续

2. $f(x)$ 在点 x_0 间断的类型

第一类间断点 $\begin{cases}\text{可去间断点}\\ \text{跳跃间断点}\end{cases}$ 左右极限都存在

第二类间断点 $\begin{cases}\text{无穷间断点}\\ \text{振荡间断点}\end{cases}$ 左右极限至少有一个不存在