第三节 全微分

一、全微分的定义

二、可微的条件

三、小结 思考题

一、全微分的定义

1.【偏增量与偏微分】

由一元函数微分学中增量与微分的关系

$$f(x+\Delta x)-f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

类似可得

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x+\Delta x, y)-f(x,y) \\ f(x, y+\Delta y)-f(x,y) \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{l} \approx f_x(x,y)\Delta x \\ \approx f_y(x,y)\Delta y \end{array}}$$

二元函数
对x 和对y 的偏增量

二元函数
对x 和对y 的偏微分

2.【全增量的概念】

若 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的某邻域内有定义，并设 $P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 为这邻域内的任意一点，则称这两点的函数值之差 $f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)$ 为函数在点 P 对应于自变量增量 $\Delta x, \Delta y$ 的全增量，记为 Δz，

即 $$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)$$

3.【全微分定义】

【定义】 如果函数$z = f(x, y)$在点(x, y)的全增量

$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$可以表示为

$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$，其中$A, B$不依赖于$\Delta x, \Delta y$

而仅与x, y有关，$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，则称函数

$z = f(x, y)$在点(x, y)可微分，$A\Delta x + B\Delta y$称为函数

$z = f(x, y)$在点(x, y)的全微分，记为dz，即

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

函数若在区域 D 内各点处处可微分，则称函数在 D 内可微分.

【结论】 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，则函数在该点必连续.

即： 可微 $\Longrightarrow$ 连续

反之, 连续是可微的一个必要条件.

事实上 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$, $\lim\limits_{\rho\to 0}\Delta z = 0$,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x+\Delta x, y+\Delta y) = \lim_{\rho\to 0}[f(x,y)+\Delta z]$$

$$= f(x,y)$$

故函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续.

二、可微的条件

1.【必要条件】

(1)【定理 1】若$z = f(x,y)$在点(x,y)可微分，则函数在点(x,y)的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$必存在，且函数在点$(x,y)$的全微分为$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$.

【证】若$z = f(x,y)$在点$P(x,y)$可微分

$P'(x+\Delta x, y+\Delta y) \in U(P)$ $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$总成立,

当$\Delta y = 0$时，上式仍成立，此时$\rho = |\Delta x|$,

$$f(x+\Delta x, y) - f(x,y) = A \cdot \Delta x + o(|\Delta x|),$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = A = \frac{\partial z}{\partial x},$$ 同理可得 $B = \frac{\partial z}{\partial y}$.

(2)可导与可微的关系：

①一元函数：在某点的导数存在$\Longleftrightarrow$微分存在.

②多元函数：各偏导数存在 $\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ 全微分存在.

【例如】

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0,0)处有偏导数，但在点(0,0)处不可微.

$$\text{易得 } f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0=f_y(0,0)$$

由 $[f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)]-[f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y]$

$$=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}},\ \text{则}\ \frac{\dfrac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\rho}=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\ \xrightarrow{y=x}\ \frac{1}{2},$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

说明它不能随着$\rho\to 0$而趋于0, 从而当$\rho\to 0$时,

$$\Delta z-[f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y]\neq o(\rho),$$

故函数在点 (0,0) 处不可微.

2.【充要条件】 $f(x,y)$可微 $\Leftrightarrow \Delta z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y+o(\rho)$

$$\Leftrightarrow \lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-[f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y]}{\rho}=0$$

【结论】多元函数的各偏导数存在并不能保证

全微分存在.

故偏导数存在是可微分的必要条件而不是充分条件.

即　可微 $\overset{\nLeftarrow}{\Rightarrow}$ 可偏导

【警惕】若偏导数存在，虽能从形式上写出

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$ 但它不一定是函数的全微分.

但如果再假定多元函数的各个偏导数连续，则可以证明函数是可微分的. 即有下面的定理.

3.【充分条件】

【定理 2 】（充分条件）如果函数$z = f(x,y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$在点$(x,y)$连续，则该函数在点$(x,y)$可微分.

即 偏导数连续 $\Rightarrow$ 可微

【注】

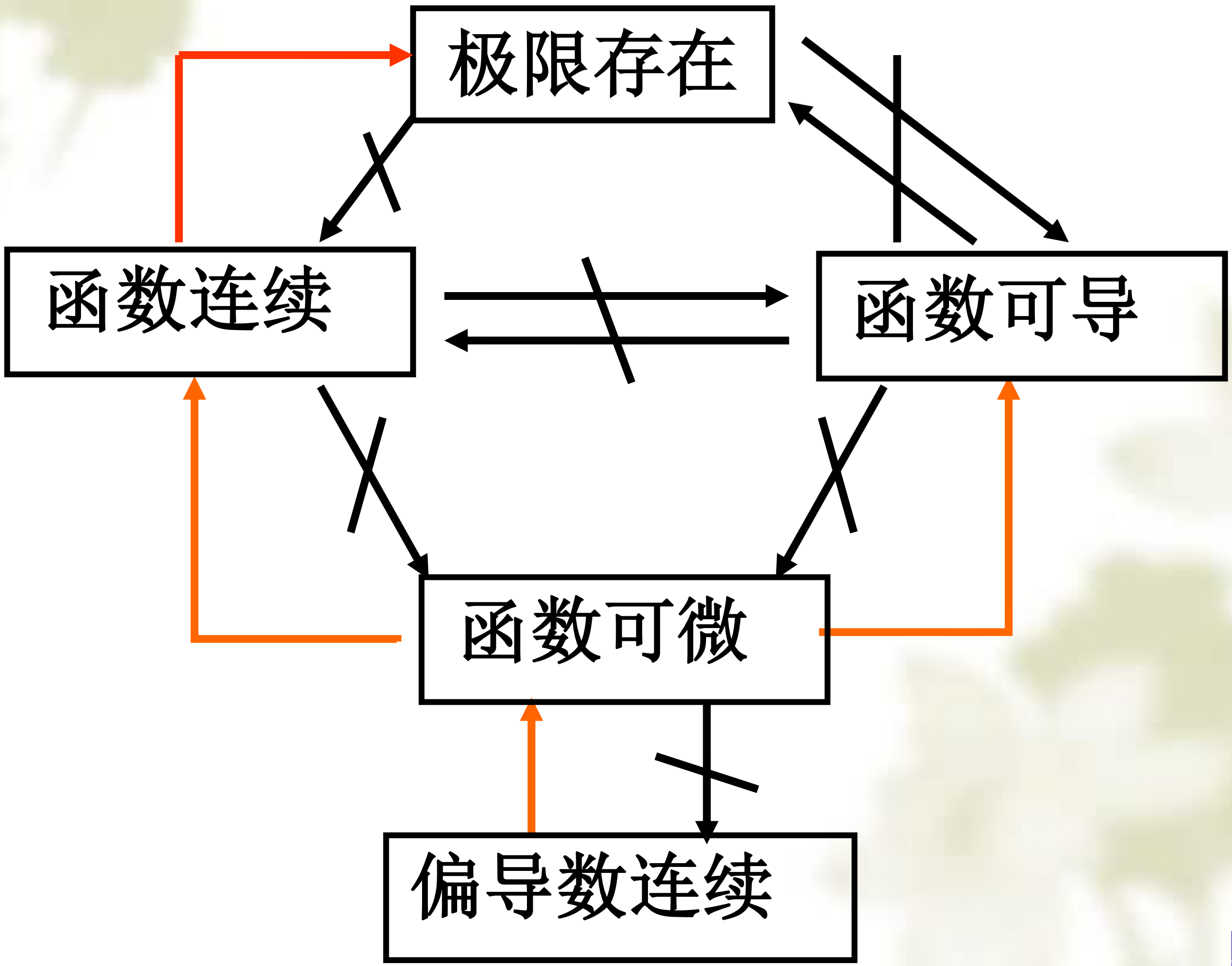
(1)习惯上，记全微分为 $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$

(2)全微分符合叠加原理．即：全微分=各偏微分之和

(3)全微分的定义(或叠加原理)可推广到三元及三元以上函数

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

多元函数的极限存在、连续、可偏导、可微、偏导数连续之间的关系



【教材例 1】计算函数$z=e^{xy}$在点(2,1)处的全微分.

【解】 $\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}$,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)}=e^2,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)}=2e^2,$$

所求全微分 $dz=e^2dx+2e^2dy.$

【教材例 2】计算函数$u=x+\sin\frac{y}{2}+e^{yz}$的全微分.

【解】 $\frac{\partial u}{\partial x}=1$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2}+ze^{yz}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=ye^{yz}$,

故所求全微分为 $du=dx+(\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2}+ze^{yz})dy+ye^{yz}dz.$

三、小结

1. 多元函数全微分的概念；

2. 多元函数全微分的求法；

3. 多元函数极限、连续、可导、可微的关系.

（注意：与一元函数有很大区别）

4. 可微的条件
- 必要条件（定理1）
- 充分条件（定理2）
- 充要条件（定义）

【思考题】

函数$z = f(x,y)$在点(x_0, y_0)处可微的充分条件是：

(1) $f(x,y)$在点(x_0, y_0)处连续；

(2) $f_x'(x,y)$、$f_y'(x,y)$在点(x_0, y_0)的某邻域存在；

(3) $\Delta z - f_x'(x,y)\Delta x - f_y'(x,y)\Delta y$，

当$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$时是无穷小量；

(4) $\dfrac{\Delta z - f_x'(x,y)\Delta x - f_y'(x,y)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$，

当$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$时是无穷小量.

【例 3】求函数$z = y\cos(x-2y)$，当$x=\frac{\pi}{4}$，$y=\pi$，$dx=\frac{\pi}{4}$，$dy=\pi$时的全微分.

【解】 $$\frac{\partial z}{\partial x} = -y\sin(x-2y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos(x-2y) + 2y\sin(x-2y),$$

$$dz\Big|_{(\frac{\pi}{4},\pi)} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(\frac{\pi}{4},\pi)} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(\frac{\pi}{4},\pi)} \cdot dy$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\pi(4-7\pi).$$

【例 4】试证函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

在点(0,0)连续且偏导数存在，但偏导数在点(0,0)不连续，

而 f 在点(0,0)可微.

【思路】按有关定义讨论；对于偏导数需分

$(x,y)\neq(0,0)$，$(x,y)=(0,0)$讨论.

【证】先证$f(x,y)$在原点连续　（法1）利用无穷小的性质

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0),$$ 故函数在点(0,0)连续,

（法2）利用夹逼准则 $$\left|xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq|x|\cdot|y|\to 0=f(0,0)$$

故f 在(0,0)连续.

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0,$$

同理 $f_y(0,0)=0.$

当$(x,y)\neq(0,0)$时，

$$f_x(x,y)=y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

当点$P(x,y)$沿直线$y=x$趋于$(0,0)$时，

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} f_x(x,y)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{\sqrt{2}\,|x|}-\frac{x^3}{2\sqrt{2}\,|x|^3}\cos\frac{1}{\sqrt{2}\,|x|}\right),\quad \text{不存在.}$$

所以 $f_x(x,y)$在$(0,0)$不连续.

同理可证 $f_y(x,y)$在$(0,0)$不连续.

$$\Delta z-(f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y)$$

$$=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-0=\Delta x\cdot\Delta y\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$$ （夹逼准则可证）

故 $f(x,y)$在点$(0,0)$可微 $\quad df\big|_{(0,0)}=0.$

【注意】此题说明偏导数存在且连续仅是可微的充分条件.

用全微分定义判定一个可导函数在某点的可微性只需

验证 $$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-f_x(x_0,y_0)\Delta x-f_y(x_0,y_0)\Delta y}{\rho}\overset{?}{=}0$$