第3章
微分中值定理
与导数的应用

第一节 微分中值定理

一、罗尔定理

二、拉格朗日中值定理

三、柯西中值定理

函数的极值

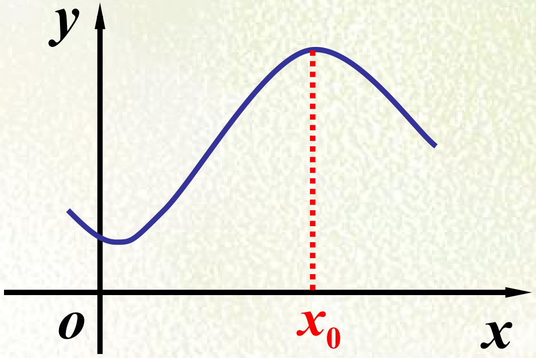
1. 极值的定义 设 $f(x)$在(a,b)内有定义，$x_0\in(a,b)$,

若存在x_0的一个邻域，当 $x\neq x_0$ 时，

(1) $f(x)<f(x_0)$,

则称 x_0 为$f(x)$的**极大值点**，

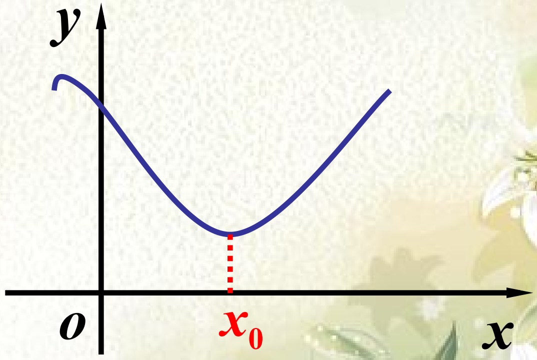
称 $f(x_0)$ 为函数的**极大值**；

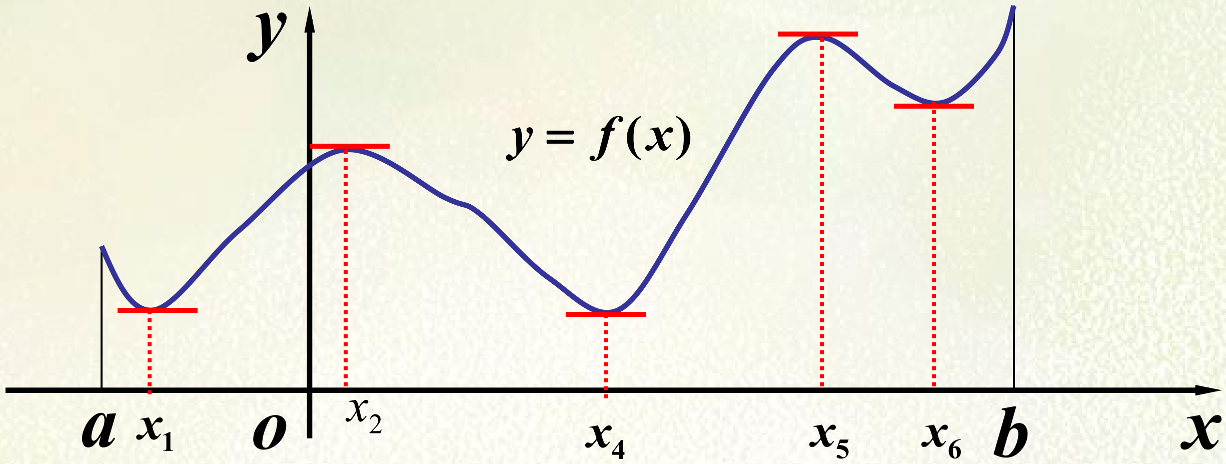


(2) $f(x)>f(x_0)$,

则称x_0 为$f(x)$ 的**极小值点**，

称 $f(x_0)$为函数的**极小值**．





注意: (1)函数的极值是函数的局部性质.

(2)极大值可能小于极小值,

极小值可能大于极大值.

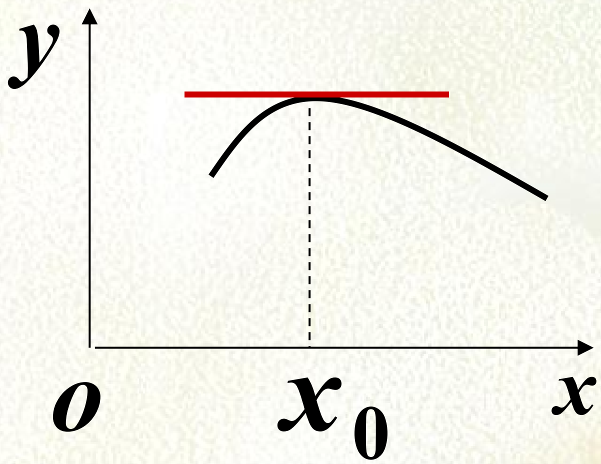
(3)极大值与极小值统称为极值.

1　费马定理

已知x_0是$f(x)$的极值点，若$f(x)$在点x_0处可导，

则$f'(x_0)=0$.

在极值点处的切线是水平的.



定义1　使 $f'(x_0)=0$ 的点称为函数 $f(x)$ 的驻点.

证：不妨设 $x \in U(x_0)$ 时, $f(x) \le f(x_0)$.

$\because \ f'(x_0)$ 存在, $\quad \therefore \ f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0,$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0.$$

故 $\quad f'(x_0) = 0.$

可导的极值点是驻点

2. 罗尔中值定理　导数为零要论证，罗尔定理负重任.

设 $y = f(x)$ 满足:

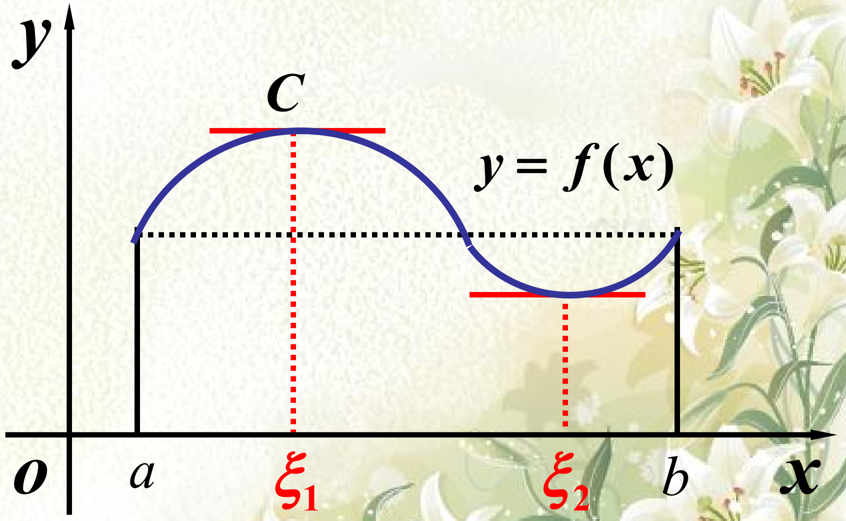
(1) 在区间 $[a, b]$ 上连续; (2) 在区间 (a, b) 内可导;

(3) $f(a) = f(b)$.

则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使 $f'(\xi) = 0$.

在曲线弧 ab 上至少有一点 C,

在该点处的切线是水平 的.



证: 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,

所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大值 M 和最小值 m.

(1) 若 $M=m$, 则$\forall x\in[a,b]$: $f(x)=M$(常函数).

$\Rightarrow\quad f'(x)=0.\quad \therefore\ \forall\xi\in(a,b)$有 $f'(\xi)=0.$

(2) 若$M\neq m$,$f(x)$ 不是常函数. $m<M$.

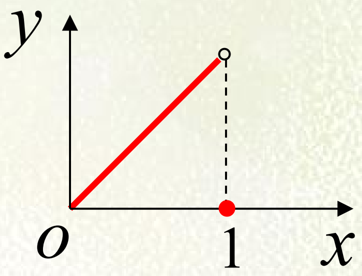
$\because f(a)=f(b)$, $\therefore M$与m至少有一个在 (a,b)内取得.

则假设$\exists\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=M$,即ξ为极大值点.

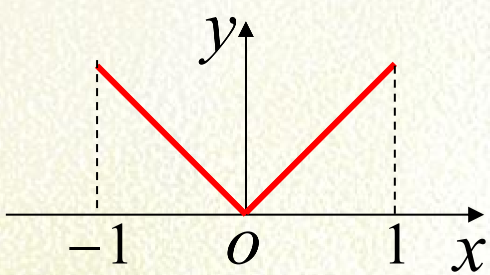
由费马引理得 $f'(\xi)=0.$

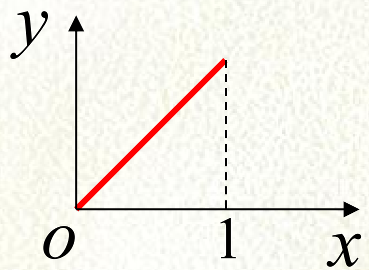
注意: 定理条件条件不全具备, 结论不一定成立.

例如, $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$



$f(x)=|x|,\ \ x\in[-1,1]$　　　$f(x)=x,\ \ x\in[0,1]$





例1. 证明方程 $x^5-5x+1=0$ 在(0,1)内不能有两个不同的实根 .

反证: 令 $f(x)=x^5-5x+1.$

假设 $x_0,x_1\in(0,1)$, $x_0\neq x_1$ (不妨设 $x_0<x_1$),

使 $f(x_0)=0=f(x_1).$

由罗尔定理, $\exists\xi\in(x_0,x_1)$, 使得 $f'(\xi)=0.$

但 $f'(x)=5(x^4-1)\neq 0, (x\in(0,1)).$ 矛盾.

例2 不求函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$的导数，判别方程 $f'(x)=0$ 有几个实根，并指出它们所在的区间.

解 因为$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有连续的导数，且

$$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0,$$

从而$f(x)$在区间 $[1,2]$、$[2,3]$、$[3,4]$ 上均满足罗尔中值定理的三个条件.

因此，存在 $\xi_1\in(1,2)$、$\xi_2\in(2,3)$、$\xi_3\in(3,4)$ 使得

$$f'(\xi_1)=0,\ f'(\xi_2)=0,\ f'(\xi_3)=0.$$

从而$f'(x)=0$至少有三个实根.

又因为$f'(x)=0$为三次方程， 所以$f'(x)=0$至多有三个实根.

于是方程 $f'(x)=0$ 恰有三个实根，分别位于区间 $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$ 内.

二、拉格朗日中值定理

函数之差化导数，拉式定理先成功.

若 $y=f(x)$ 满足:

(1) 在区间 $[a,b]$ 上连续;(2) 在区间 (a,b) 内可导.

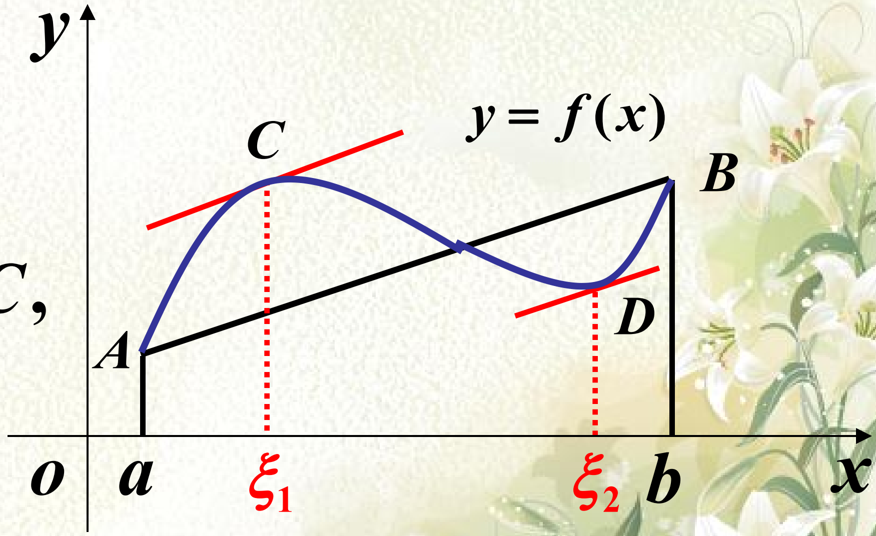
则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

几何解释:

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

在曲线弧 AB 上至少有一点 C,

在该点处的切线平行 AB.



分析：连接 AB 两点的直线方程为

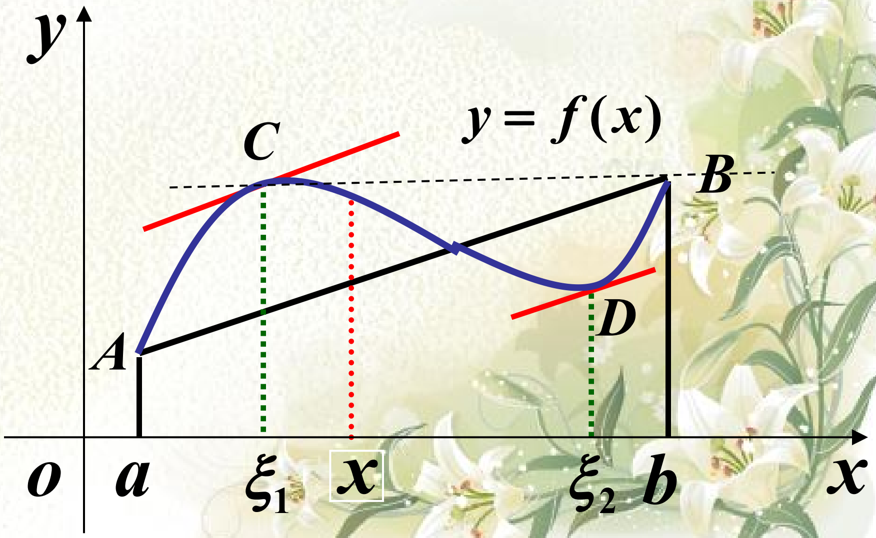
$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a).$$

由于曲线 $y = f(x)$ 和直线 AB 都过点 A 和 B，于是令

$$F(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) \right],$$

显然有 $F(a) = F(b) = 0.$

故 $F(x)$ 是所需的辅助函数.



注意:拉氏公式精确地表达了函数在一个区间上的增量与函数在这区间内某点处的导数之间的关系.

证明: 作辅助函数

$$F(x)=f(x)-[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)],$$

$F(x)$ 满足罗尔定理的条件，

则在(a,b)内至少存在一点 ξ,

使得 $F'(\xi)=0,$

即 $f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$,或 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$

公式可以改写成如下几种常用的形式:

1° 当 a,b 的大小不确定时，（1）式可写成

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),$$ 其中 ξ 介于 a 与 b 之间.（2）

2° 若令 $\xi=a+\theta(b-a)$，其中 $0<\theta<1$，则（2）式又可写成 $$f(b)-f(a)=f'[a+\theta(b-a)](b-a).$$ （3）

3° 若令 $a=x,b=x+\Delta x$，则（3）式可写成

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,$$ （4）

或 $$\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x.$$ （5）

——有限增量公式.

$x_0, x_0+\Delta x \in (a,b)$, 则有

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1).$$

也可写成 $\Delta y = f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1).$

增量Δy的精确表达式.

拉格朗日中值公式又称**有限增量公式**.

微分中值定理

拉格朗日中值定理又称**有限增量定理**.

推论：设 $f(x)$, $g(x)$ 在 (a,b) 内可导：

1. $\forall x \in (a,b): f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \equiv C.$

即 $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0, \xi \in (x_1, x_2).$

2. $\forall x \in (a,b): f'(x) = g'(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) \equiv g(x) + C.$

函数 $y = x^3$ 在 $[-1,2]$ 上满足拉格朗日中值定理的 ξ 为 $\underline{\quad \pm 1 \quad}$

$$3\xi^2 = f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{8+1}{3} = 3$$

例3. 证明 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},\ x \in [-1, 1].$

证: 设 $f(x) = \arcsin x + \arccos x$, 则在 $(-1, 1)$ 上

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \equiv 0$$

由推论可知

$$f(x) = \arcsin x + \arccos x = C \quad \text{（常数）}$$

令 $x = 0$, 得 $C = \frac{\pi}{2}$.

例4. 证明: $|\sin b-\sin a|\le|b-a|$.

证: 设 $f(x)=\sin x$, 不妨设$a<b$, 则 $f(x)$在$[a,b]$上满足拉格朗日定理的条件, 故 $\exists\xi\in(a,b)$,

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\qquad(\exists\xi\in(a,b))$$

$$\Rightarrow\quad \sin b-\sin a=\cos\xi\cdot(b-a)$$

$$\Rightarrow\quad |\sin b-\sin a|=|\cos\xi||b-a|\ \le|b-a|.$$

注: 不等式中含有$f(b)$-$f(a)$或b-a, 用拉格朗日中值定理.

例5.证明当 $0<a<b$ 时, $\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}$.

证: 设 $f(x)=\ln x$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日定理的条件, 所以存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f'(\xi)=\frac{1}{\xi}=\frac{\ln b-\ln a}{b-a}.$$

$\because\ 0<a<\xi<b,\qquad \therefore\ \dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{a},$

$$\therefore\ \frac{1}{b}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{a},\qquad\Rightarrow\qquad \frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}.$$

例6 证明当$x>0$时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$

证 设 $f(x)=\ln(1+x)$,

$f(x)$在$[0,x]$上满足拉氏定理的条件，

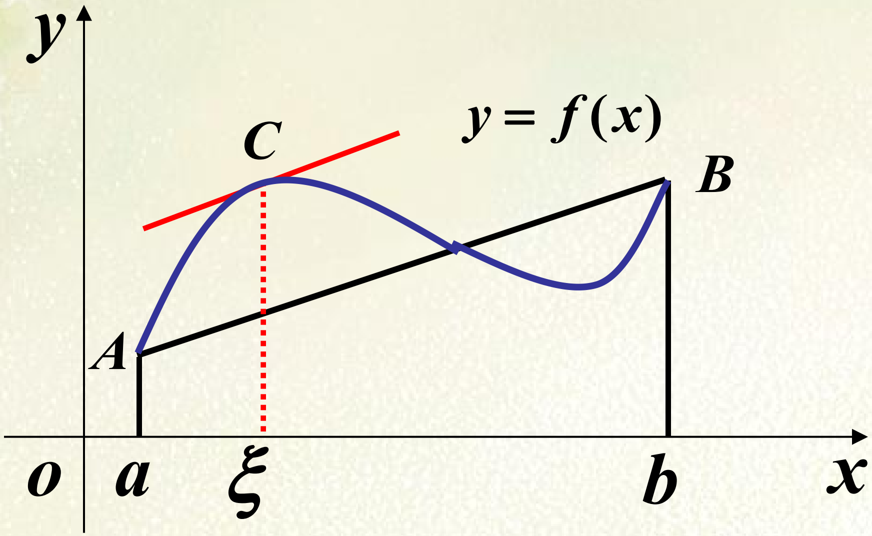
$\therefore f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0),\ (0<\xi<x)$

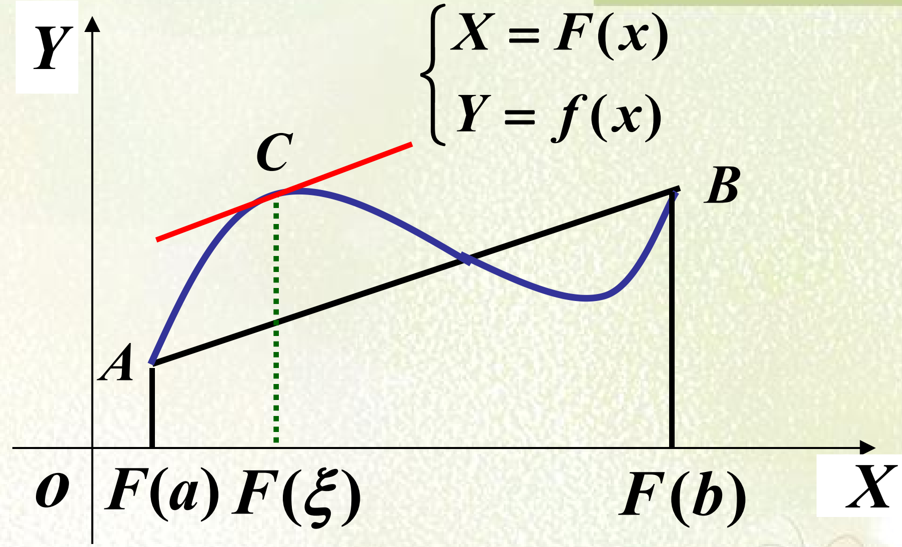
$\because f(0)=0,\ f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$, 由上式得 $\ln(1+x)=\dfrac{x}{1+\xi}$,

又$\because 0<\xi<x \Rightarrow 1<1+\xi<1+x \Rightarrow \dfrac{1}{1+x}<\dfrac{1}{1+\xi}<1$,

$\therefore \dfrac{x}{1+x}<\dfrac{x}{1+\xi}<x$, 即 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$

三、柯西中值定理





拉格朗日中值定理

$$k = \left.\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}\right|_{x=\xi} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

$$= \frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}$$

$$F(x) = x$$

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

柯西中值定理. 设 $f(x)$及$F(x)$满足:

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a, b) 内可导;

(3)在开区间 (a, b) 内 $F'(x) \neq 0$,

则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

证：令 $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}\big(F(x)-F(a)\big)$,

$\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 在 (a,b) 可导, $\varphi(a)=\varphi(b)$,

由罗尔定理, $\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $\varphi'(\xi)=0$.

即 $f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}\cdot F'(\xi)=0$,

$$\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

例7 设$0<a<b$，函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，证明$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$

证明 取$g(x)=\ln x$，则$f(x),g(x)$在$[a,b]$上满足柯西中值定理的三个条件.

从而至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$,

即 $\dfrac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\dfrac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}$. 故 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\dfrac{b}{a}$.

例8. 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,证明:至少存在一点 $\xi\in(0,1)$,使 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

分析: 结论可变形为$\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}=\dfrac{f'(x)}{(x^2)'}\Big|_{x=\xi}$.

证: 设 $F(x)=x^2$,

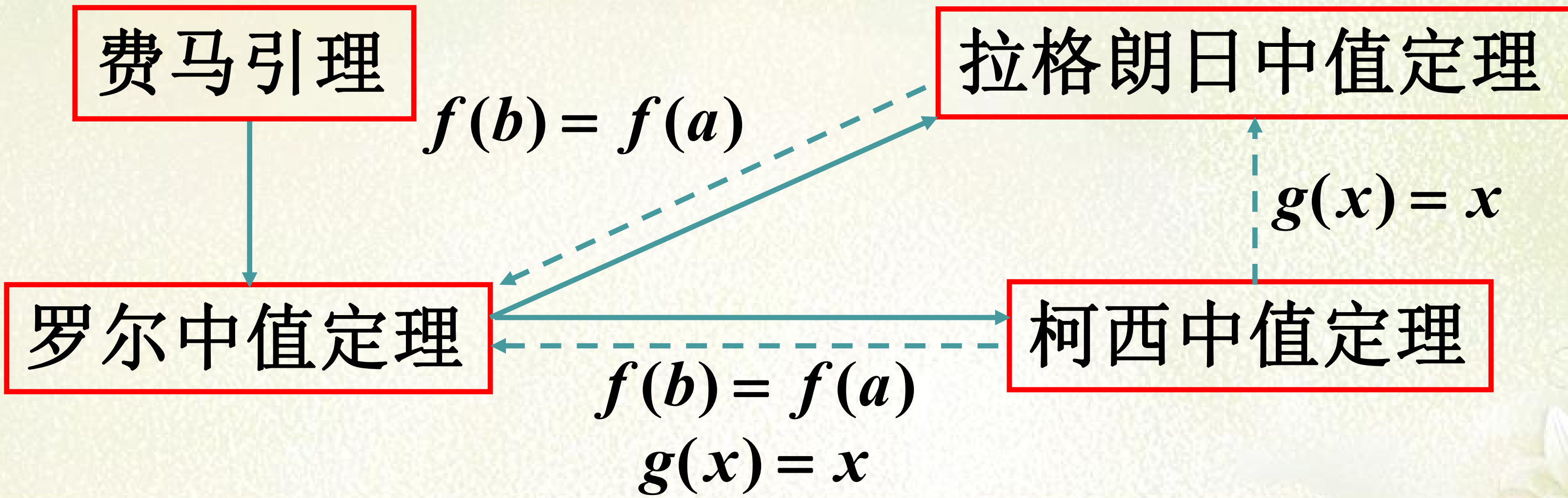
则 $f(x),F(x)$ 在$[0,1]$上满足柯西中值定理的 条件,

$\exists\,\xi\in(0,1)$, 使得 $\dfrac{f(1)-f(0)}{F(1)-F(0)}=\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}$,

即 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

内容小结

1. 微分中值定理的条件、结论及关系



2. 微分中值定理的应用

（1）证明恒等式　（2）证明不等式