4.2(3) 第 二 类 换 元 法

-------变量代换法

对象：被积函数含有根号或分母阶数高的不定积分.

主要思路：用换元法去掉根号.

例如：1、根式代换　2、三角代换　3、倒数代换

$$\int \frac{dx}{2+\sqrt{x-1}}, \quad \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad \int \frac{1}{x(x^7+2)}dx$$

一、根式代换

例1. 求$\int \frac{1}{2+\sqrt{x-1}}dx$

解 令$\sqrt{x-1}=t$，则 $x=t^2+1$，$dx=2tdt$，

$$原式=\int \frac{2t}{2+t}dt=2\int \frac{t+2-2}{t+2}dt=2\int\left(1-\frac{2}{t+2}\right)dt$$

$$=2\left(t-2\ln(t+2)\right)+c$$

$$\overset{回代}{=\!=\!=\!=\!=}2\left(\sqrt{x-1}-2\ln(\sqrt{x-1}+2)\right)+C$$

定理2 设 $x=\psi(t)$ 是单调可导函数，且$\psi'(t)\neq 0$，

$f[\psi(t)]\psi'(t)$ 具有原函数，则有换元公式

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t$$

$$=F(t)+C=F\left(\psi^{-1}(x)\right)+C$$

其中 $t=\psi^{-1}(x)$是$x=\psi(t)$的反函数.

——第二换元积分法

即 $\int f(x)dx \overset{\psi(t)=x\text{换元}}{=\!=\!=} \int f[\psi(t)]\psi'(t)dt \overset{\text{积分}}{=\!=}$

$\Phi(t)+C \overset{t=\psi^{-1}(x)\text{回代}}{=\!=\!=} \Phi[\psi^{-1}(x)]+C$

【第一换元法】

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx \xlongequal{令u=\varphi(x)} \int f(u)du \quad 积分$$

【第二换元法】

$$\int f(x)dx \xlongequal{选择\psi(t)=x} \int f[\psi(t)]\psi'(t)dt \quad 积分$$

【变量代换主要类型】

(1)根式代换：$t=\sqrt[n]{ax+b}$

例2　求 $\int \frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}dx$.

解　令 $\sqrt{1+x}=t \Rightarrow x=t^2-1, dx=2tdt$

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}dx=\int \frac{t}{1+t}2tdt=2\int \frac{t^2-1+1}{1+t}dt=2\int (t-1+\frac{1}{1+t})dt$$

$$=t^2-2t+2\ln|1+t|+C$$

$$=(1+x)-2\sqrt{1+x}+2\ln(1+\sqrt{1+x})+C$$

例3 求 $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$.

解 令 $t=\sqrt{1+e^x} \Rightarrow e^x=t^2-1,\ x=\ln\left(t^2-1\right),$

$$dx=\frac{2t}{t^2-1}dt,$$

$$原式=\int\frac{2t}{t(t^2-1)}dt=\int\frac{2}{t^2-1}dt=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+C$$

$$=2\ln\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)-x+C.$$

例4 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ ——根次的最小公倍数

解 令 $\sqrt[6]{x}=t$，则 $x=t^6, dx=6t^5dt$

$$原式=\int \frac{6t^5}{t^3+t^2}dt=6\int \frac{t^3}{t+1}dt=6\int \frac{t^3+1-1}{t+1}dt$$

$$=6\int (t^2-t+1-\frac{1}{t+1})dt$$

练习：（40）

$$=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+c$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln|\sqrt[6]{x}+1|+c$$

说明

当被积函数含有两种或两种以上的根式 $\sqrt[k]{x},\cdots,\sqrt[l]{x}$ 时，可采用令 $x=t^n$，(其中n为各根指数的最小公倍数).

(2)三角代换

假定 $a>0$,

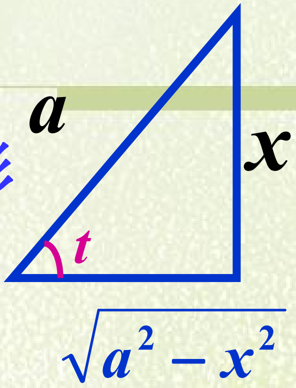
(1) $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$, 可令 $x=a\sin t, t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

(2) $\sqrt{a^2+x^2}=a\sec t$, 可令 $x=a\tan t$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

(3) $\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t$, 可令 $x=a\sec t$, $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

例5 求 $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0)$

辅助三角形



解 令 $x=a\sin t \ (-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$ 则 $dx=a\cos t\,dt$,

$$\text{原式}=a^2\int\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}a^2\int(1+\cos 2t)dt$$

$$=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\int\cos 2t\,d(2t)=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C,$$

由于 $\sin t=\frac{x}{a}$, $t=\arcsin\frac{x}{a}$, $\cos t=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$,

$$\text{原式}=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

例6 求 $\int x^3\sqrt{4-x^2}dx.$

解 令 $x=2\sin t$ $\quad dx=2\cos t dt$ $\quad t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

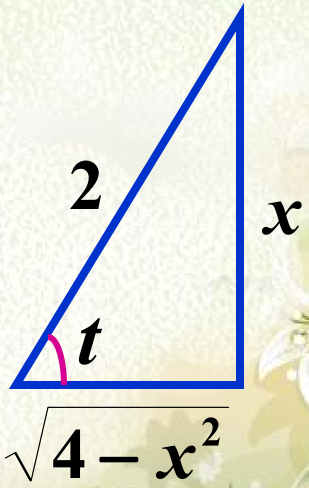
$$\int x^3\sqrt{4-x^2}dx=\int(2\sin t)^3\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt$$

$$=32\int\sin^3 t\cos^2 t dt=32\int\sin t(1-\cos^2 t)\cos^2 t dt$$

$$=-32\int(\cos^2 t-\cos^4 t)d\cos t$$

$$=-32\left(\frac{1}{3}\cos^3 t-\frac{1}{5}\cos^5 t\right)+C$$

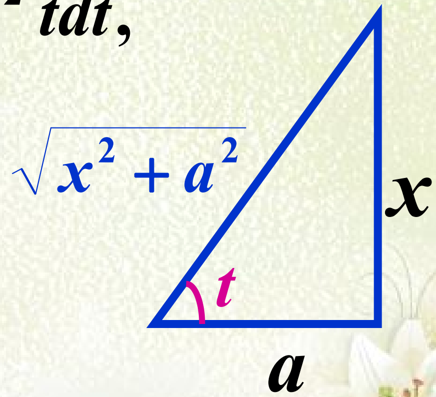
$$=-\frac{4}{3}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^5+C.$$



$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C$$ 公式

例7 求 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx \quad (a>0).$

解 令 $x = a\tan t,\quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 则 $dx = a\sec^2 t\,dt,$



原式 $= \int \frac{1}{a\sec t}\cdot a\sec^2 t\,dt = \int \sec t\,dt$

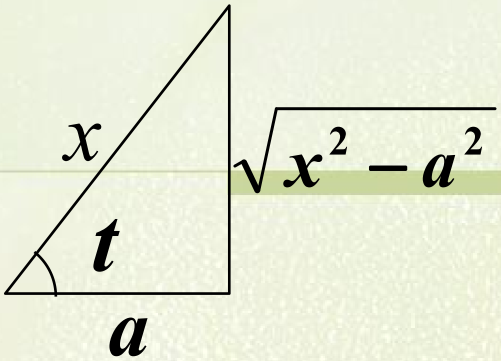
$= \ln\left|\sec t + \tan t\right| + C_1$

由于 $\tan t = \frac{x}{a},\quad \sec t = \frac{1}{\cos t} = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a},$

原式 $= \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right| + C_1 = \ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C$

$(C = C_1 - \ln a)$

例8 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$.



解: $x > a$, 令 $x = a\sec t$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $dx = a\sec t\tan t\,\mathrm{d}\,t$

$$\therefore \text{原式} = \int \frac{a\sec t\cdot\tan t}{a\tan t}dt = \int \sec t\,\mathrm{d}\,t$$

$$= \ln\left|\sec t + \tan t\right| + C_1$$

由于 $\sec t = \frac{x}{a}, \cos t = \frac{a}{x}, \quad \tan t = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a},$

$$\text{原式} = \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C_1 = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

$$(C = C_1 - \ln a)$$

$x < -a$, 令 $x = -a\sec t, t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$,

$$原式 = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$$ 公式

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| + C$$ 公式

$x < -a$,　设$x = -u$,则$u > 0$.

利用上段结果

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = -\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = -\ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C_2$$

$$= -\ln|-x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C_2$$

$$= \ln\frac{|-x - \sqrt{x^2 - a^2}|}{a^2} + C_2 = \ln|-x - \sqrt{x^2 - a^2}| + C_2 - \ln a^2$$

$$= \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$ 公式

【基本积分表②】P_{205}

(16) $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C; = \ln|\sec x| + C$

(17) $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C; \quad = -\ln|\csc x| + C$

(18) $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C;$

(19) $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C;$

(20) $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C;$

(21) $$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$$

(22) $$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C;$$

(23) $$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

(24) $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

例9 求$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}$.

解 原式$=\int \frac{dx}{\sqrt{(2x)^2+3^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{\sqrt{(2x)^2+3^2}}$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2+9}\right|+C.$$

$$\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{(2x)^2+3^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\arctan\frac{2x}{3}+C.$$

例10 求$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$.

解　原式$=\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$

$$=\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}=\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C.$$

(3) 倒数代换

当分母的阶较高时，可采用倒代换：$x=\dfrac{1}{t}$.

例11 求$\displaystyle\int \frac{1}{x(x^7+2)}dx$ （分母的阶较高）

解 令 $x=\dfrac{1}{t} \Rightarrow dx=-\dfrac{1}{t^2}dt,$

$$\int \frac{1}{x(x^7+2)}dx=\int \frac{t}{\left(\frac{1}{t}\right)^7+2}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int \frac{t^6}{1+2t^7}dt$$

$$=-\frac{1}{14}\int \frac{d(2t^7+1)}{1+2t^7}$$

$$=-\frac{1}{14}\ln|1+2t^7|+C=-\frac{1}{14}\ln|2+x^7|+\frac{1}{2}\ln|x|+C.$$

例12 求 $\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}dx.$ （分母的阶较高）

解 令 $x=\frac{1}{t} \Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt,$

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}dx=\int \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^4\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=-\int \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}dt \ =-\frac{1}{2}\int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt^2 \ \underline{\underline{u=t^2}} \ -\frac{1}{2}\int \frac{u}{\sqrt{1+u}}du$$

$$=-\frac{1}{2}\int \frac{u+1-1}{\sqrt{1+u}}du \ =-\frac{1}{2}\int (\sqrt{1+u}-\frac{1}{\sqrt{1+u}})d(1+u)$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^3+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$$

(4) 指数代换 $a^x = t$

适用于被积函数$f(x)$由a^x所构成的代数式.

� �. $\int \frac{1}{1+e^x}dx$ 令 $e^x = t$ $\Rightarrow dx = \frac{1}{t}dt$

$$= \int \frac{dt}{t(1+t)} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)dt = \ln t - \ln(t+1) + C = x - \ln(1+e^x) + C$$

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx = \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right)dx = x - \int \frac{d(1+e^x)}{1+e^x}$$

三、小结

两类积分换元法：

$$\begin{cases}（一）\text{凑微分} \\ （二）\text{三角代换、倒数代换、根式代换}\end{cases}$$

基本积分表(2)