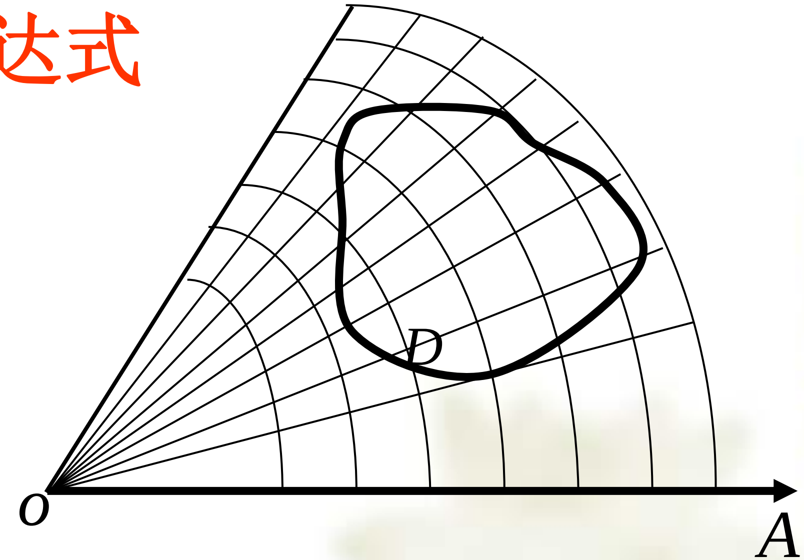
第二节　二重积分的计算法(二)

一、利用极坐标计算二重积分

二、小结 思考题

一、利用极坐标系计算二重积分

1. 极坐标系下二重积分表达式



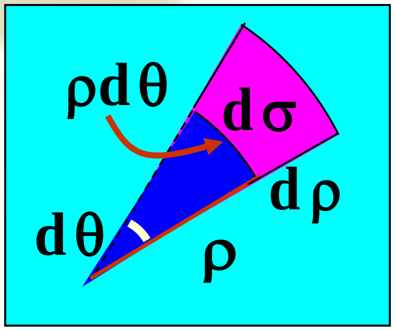
首先分割区域 D

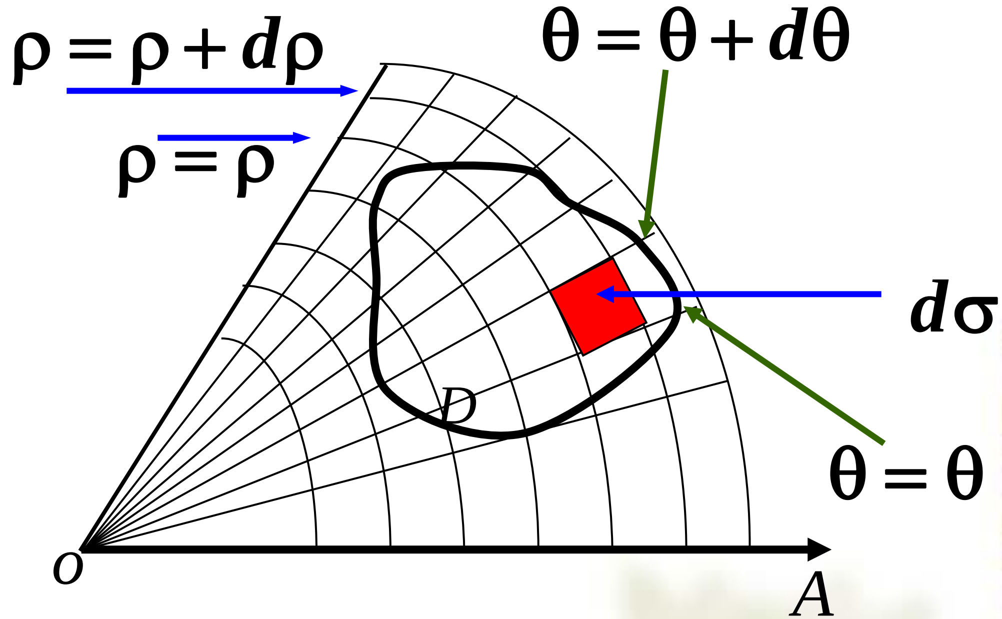
用

$\rho=$常数（一系列同心圆）

$\theta=$常数（一系列过极点的射线）

两组曲线将 D 分割成许多小区域





将典型小区域近似看作矩形（面积=长×宽）

则　面积元素　$$d\sigma = \boxed{\rho d\theta}\cdot\boxed{d\rho}$$

扇形弧长　　径向宽度

再作代换 $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

可得下式

则 $$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta.$$

二重积分极坐标表达式

【注意】极坐标系下的面积元素为

$$d\sigma = \rho d\theta \cdot d\rho$$

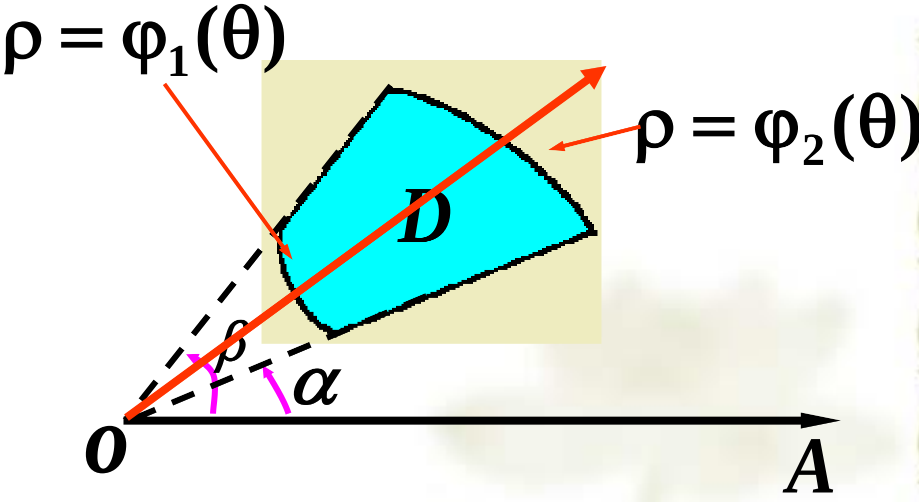
直角坐标系下的面积元素为

$$d\sigma = dxdy$$

区别

2. 二重积分化为二次积分的公式（两次穿线）

(1) 极点O在区域 D 的边界曲线之外时(外点)



区域特征如图

$$\alpha \le \theta \le \beta,$$

$$\varphi_1(\theta) \le \rho \le \varphi_2(\theta).$$

$$\iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

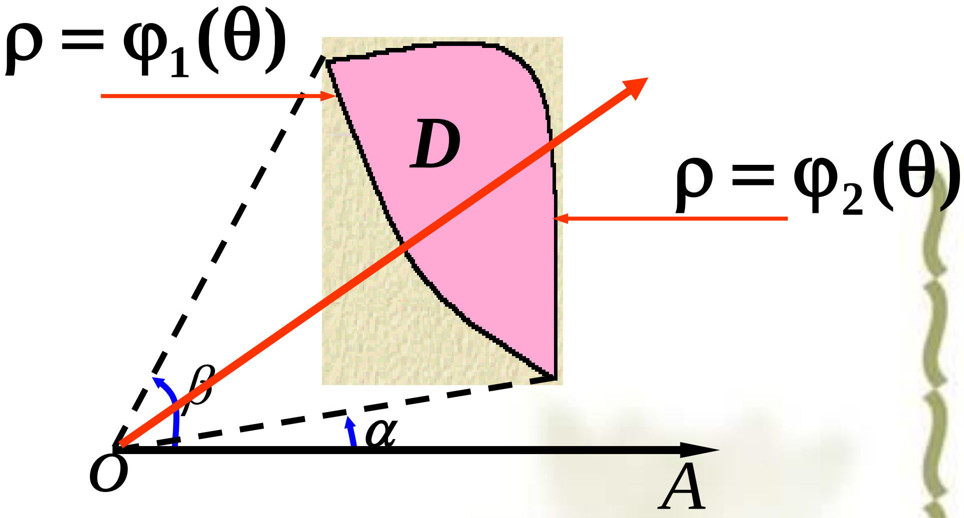
$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

特别地

若区域特征如图

$\alpha \le \theta \le \beta,$

$\varphi_1(\theta) \le \rho \le \varphi_2(\theta).$

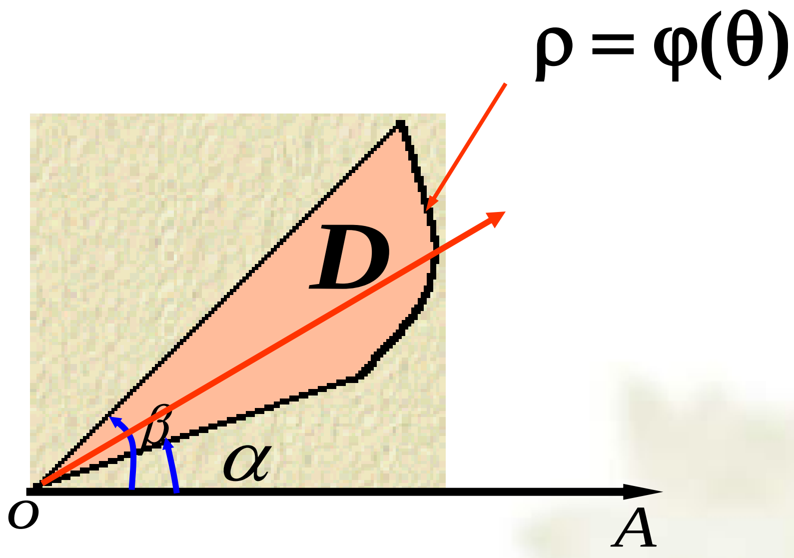


$$\iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

(2) 极点O恰在区域 D 的边界曲线之上时(边界点)

区域特征如图



$$\alpha \le \theta \le \beta,$$

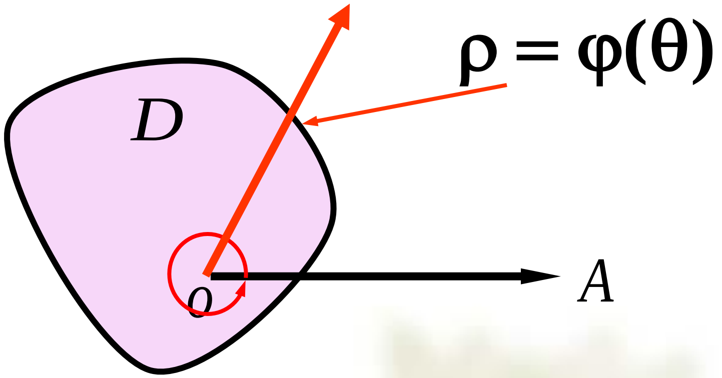
$$0 \le \rho \le \varphi(\theta).$$

$$\iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

(3) 极点 O 在区域 D 的边界曲线之内时(内点)

区域特征如图



$$0 \le \theta \le 2\pi \qquad 0 \le \rho \le \varphi(\theta).$$

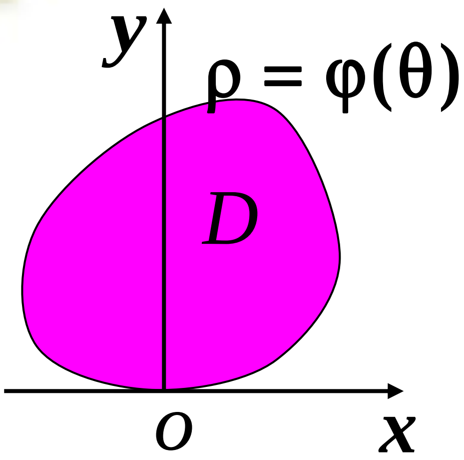
$$\iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\, d\rho.$$

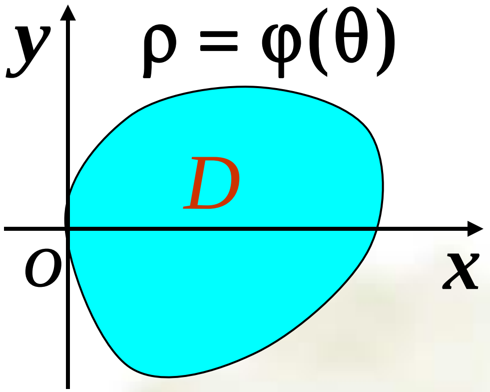
3. 极坐标系下区域的面积 $\sigma = \iint_D \rho\, d\rho\, d\theta.$

[观察练习] 下列各图中区域 D 分别与 x , y 轴相切于原点, 试问θ的变化范围是什么?

(1)



(2)

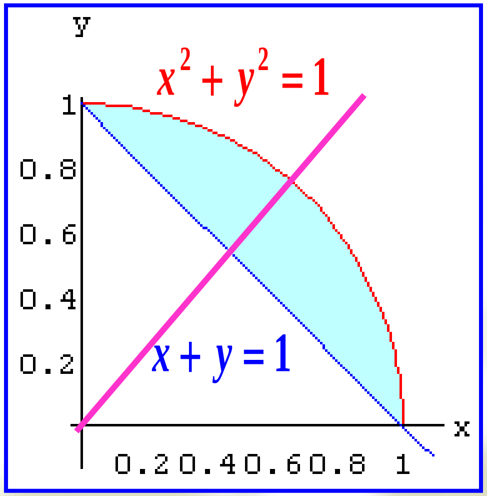


答: (1) $0 \le \theta \le \pi$;　　(2) $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$

【例 1】写出积分 $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ 的极坐标二次积分形式，其中积分区域

$$D=\{(x,y)\mid 1-x\le y\le\sqrt{1-x^2},\ 0\le x\le 1\}.$$

【解】 如图可知 $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$,



在极坐标系下 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$

所以直线方程为 $\rho=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$

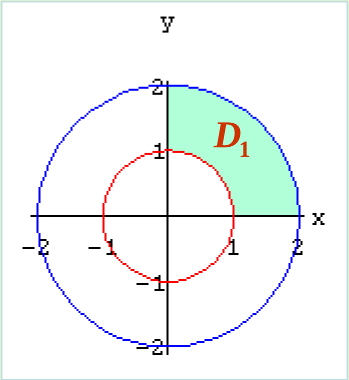
圆方程为 $\rho=1$

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

【例2】计算二重积分$\iint\limits_D \frac{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$

其中积分区域为$D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$.

【解】由对称性，可只考虑第一象限部分，



$$D=4D_1$$

$$\iint\limits_D \frac{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

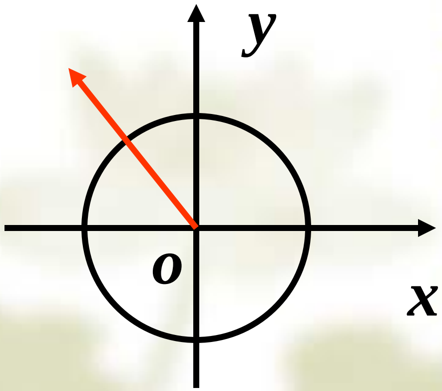
$$=4\iint\limits_{D_1} \frac{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2\frac{\sin\pi\rho}{\rho}\rho d\rho$$

$$=-4.$$

【教材例3】计算$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy$，其中$D$是由中心在原点，半径为$a$的圆周所围成的闭区域.

【解】 在极坐标系下

$$D: 0 \le \rho \le a,\quad 0 \le \theta \le 2\pi$$



$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a e^{-\rho^2}\rho d\rho$$

$$= \pi(1-e^{-a^2}).$$

【注】1.由于 e^{-x^2} 的原函数不是初等函数，故本题无法用直角坐标计算.

【注】2.利用例3可得到一个在概率论与数理统计以及工程上非常有用的反常积分公式

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad ①$$

事实上，当D为 R^2 时，

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

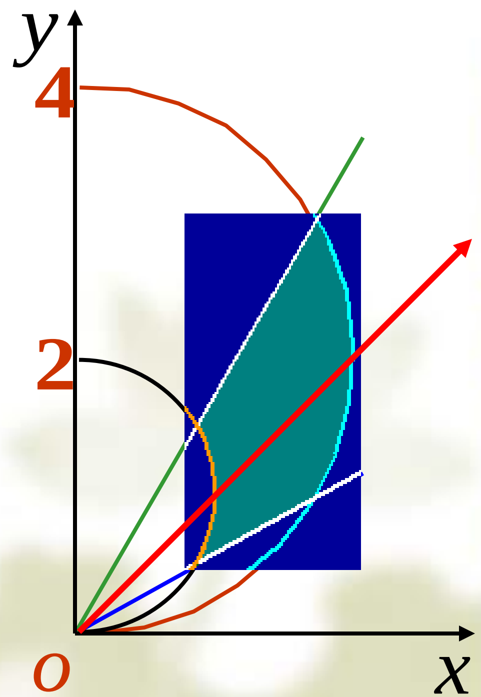
$$= 4\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2$$

利用例3的结果，得

$$4\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \lim_{a\to+\infty} \pi(1-e^{-a^2}) = \pi$$

故①式成立．

【例 4】 计算$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$，其中 D 为由圆 $x^2+y^2=2y$，$x^2+y^2=4y$ 及直线 $y-\sqrt{3}x=0$，$x-\sqrt{3}y=0$ 所围成的平面闭区域.



【解】 $x^2+y^2=2y \Rightarrow \rho=2\sin\theta$

$x^2+y^2=4y \Rightarrow \rho=4\sin\theta$

$y-\sqrt{3}x=0 \quad \Rightarrow \theta_2=\dfrac{\pi}{3}$

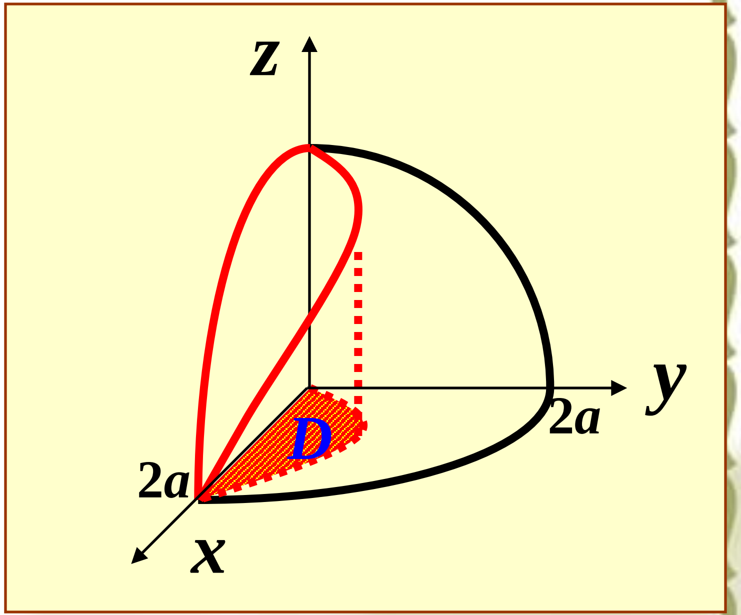
$x-\sqrt{3}y=0 \quad \Rightarrow \theta_1=\dfrac{\pi}{6}$

$$\therefore \iint\limits_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}\rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho=15\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}\right)$$

【教材例5】

求球体$x^2+y^2+z^2\le 4a^2$被圆柱面$x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$所截得的(含在圆柱面内的部分)立体的体积.

【解】 由对称性 $V=4V_1$

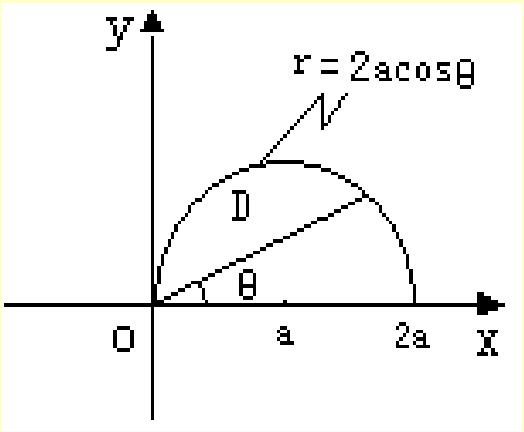


其中

$$V_1=\iint\limits_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy$$

$D: x$ 轴与 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 所围

Flash 动画演示



用极坐标表示

$$D:\begin{cases}0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\\0\le\rho\le 2a\cos\theta\end{cases}$$

于是

$$V=4\iint\limits_D\sqrt{4a^2-\rho^2}\rho d\rho d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}\rho d\rho$$

$$=\frac{32}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta=\frac{32}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

二、小结

二重积分在极坐标下的计算公式

$$\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$\begin{cases} = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho. \\ = \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho. \\ = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho. \end{cases}$$

（在积分中注意使用对称性）

计算步骤及注意事项

- 画出积分域

a. 选择坐标系

使积分域多为坐标线围成;

被积函数用此坐标表示简洁或变量分离.

b. 确定积分序

积分域分块要少, 累次积分易算为妙 .

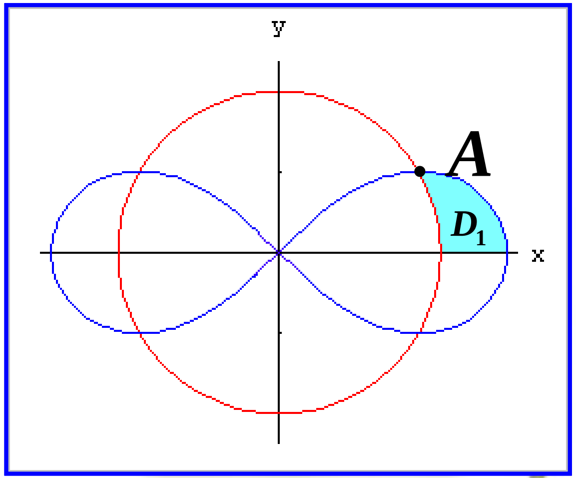
c. 写出积分限

列不等式法 (投影穿线)

d. 计算要简便　充分利用对称性

【例 6】求曲线 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ 和 $x^2+y^2\geq a^2$ 所围成的图形的面积.

【解】根据对称性有 $D=4D_1$



在极坐标系下 $x^2+y^2=a^2 \Rightarrow \rho=a,$

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$$

$$\Rightarrow \rho=a\sqrt{2\cos 2\theta},$$

由 $\begin{cases}\rho=a\sqrt{2\cos 2\theta}\\ \rho=a\end{cases}$ 得交点 $A=(a,\dfrac{\pi}{6}),$

所求面积 $\sigma=\iint\limits_{D}dxdy=4\iint\limits_{D_1}dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta\int_a^{a\sqrt{2\cos 2\theta}}\rho d\rho$

$$=a^2(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}).$$