第一节　二重积分的概念与性质

一、问题的提出

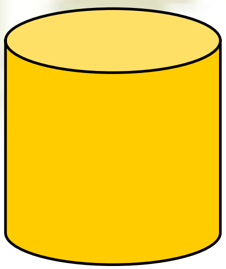
二、二重积分的概念

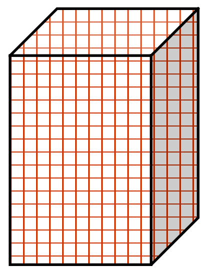
三、二重积分的性质

四、小结 思考题

一、问题的提出——引例

1．曲顶柱体的体积

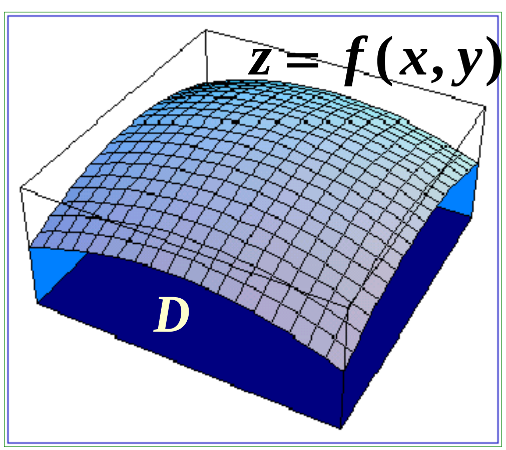


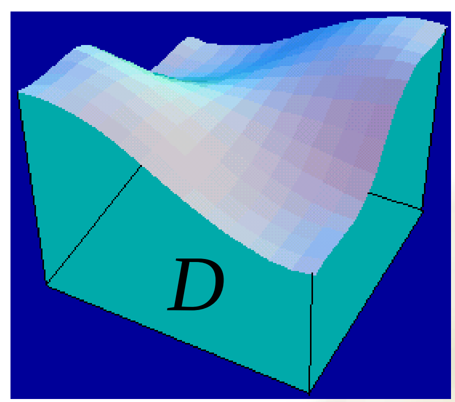


【特点】平顶.

柱体体积=底面积×高

$z = f(x,y)$

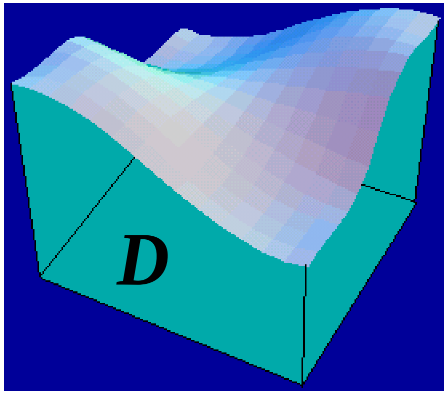




【特点】曲顶.

柱体体积=?

$z = f(x,y)$



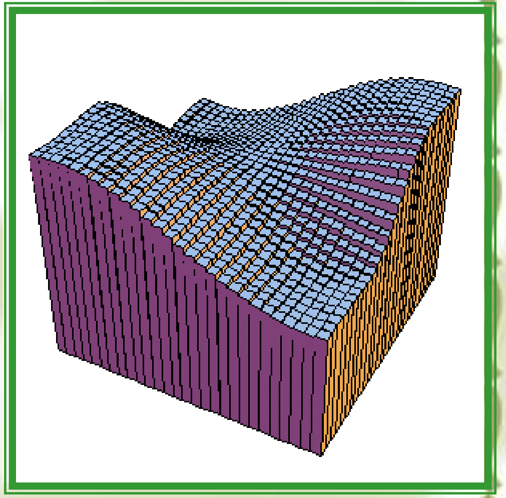
给定曲顶柱体:

底: xoy 面上的闭区域D

顶: 连续曲面 $z = f(x,y) \geq 0$

侧面: 以D的边界为准线 , 母线平行于z 轴的柱面

求其体积:



【解法】类似定积分解决问题的思想:

"分割, 取近似, 求和, 取极限"

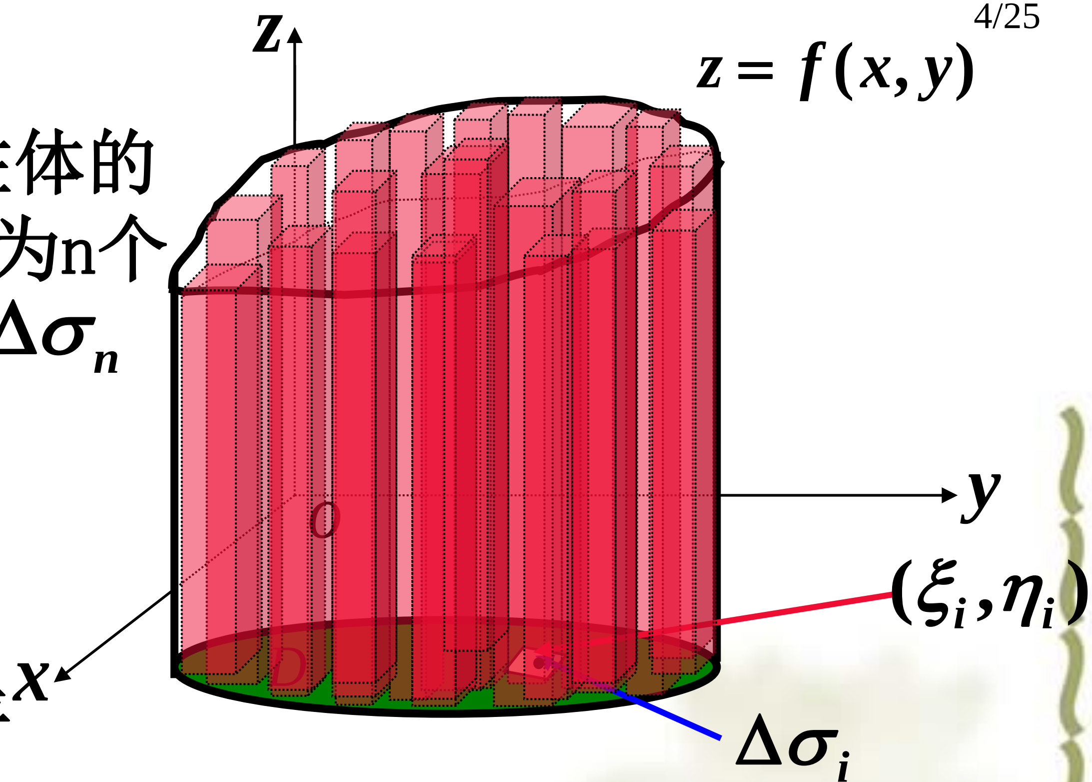
【步骤如下】

①分割：先分割曲顶柱体的底以任意的曲线网分D为n个小区域,$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$

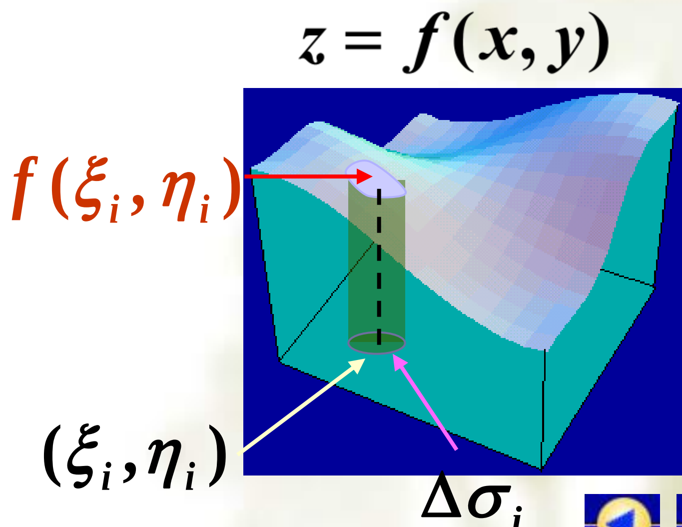
分为n个小曲顶柱体;

②取近似：

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$



③求和：用若干个小平顶柱体体积之和近似表示曲顶柱体的体积,



④取极限：

得曲顶柱体的体积

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

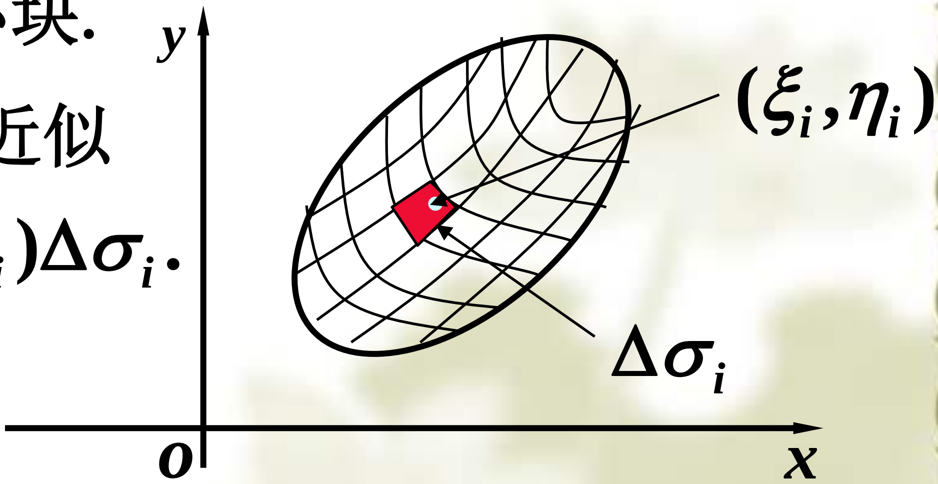
2. 求平面薄片的质量

设有一平面薄片，占有 xoy 面上的闭区域 D，在点 (x,y) 处的面密度为 $\mu(x,y)$，假定 $\mu(x,y)$ 在 D 上连续，平面薄片的质量为多少？

【分析】 $\mu=$常数时，质量$=\mu\ \sigma$，其中 σ 为面积.

若 μ 为非常数，仍可用"分割, 取近似, 求和, 取极限"解决.

(1)分割：将薄片分割成若干小块.



(2)近似：取典型小块，将其近似看作均匀薄片, $\Delta m_i \approx \mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

(3)求和：所有小块质量之和近似等于薄片总质量.

(4) 取极限：得薄片总质量 $m=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

两个问题的共性：

(1) 解决问题的步骤相同

"分割, 取近似, 求和, 取极限"

(2) 所求量的结构式相同

曲顶柱体体积：

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

平面薄片的质量：

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

二、二重积分的概念

1.【定义】 设$f(x,y)$是有界闭区域D上的有界函数，将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2$，$\cdots$，$\Delta\sigma_n$，其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域，也表示它的面积. 在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)，

作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$， $(i=1,2,\cdots,n)$，

并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

如果当各小闭区域的直径中的最大值λ趋近于零时，这和的极限总存在，则称此极限为函数$f(x,y)$在闭区域D上的二重积分，记为$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，即

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i .$$

积分区域　被积函数　积分变量　面积元素　被积表达式　积分和

2.【对二重积分定义的说明】

(1) 积分存在时，积分值与区域的分法和点的取法无关

不能用 $\Delta\sigma_i \to 0$ 代替 $\lambda \to 0$？

(2) $f(x,y)$在D上有界是二重积分存在的必要条件.

(3) 存在条件（充分条件）

当 $f(x,y)$ 在有界闭区域上连续时，定义中和式的极限必存在，即二重积分必存在.

以后总假定 $f(x,y)$在所论有界闭区域D 上连续，从而二重积分都是存在的.

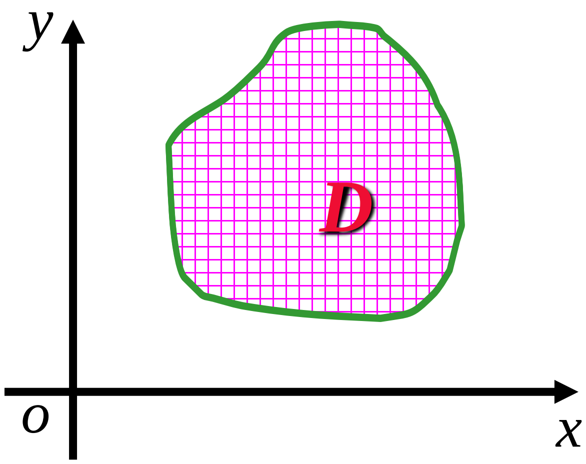
3.【二重积分的几何意义】

1)若 $f(x,y)\geq 0$, $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 表曲顶柱体的体积.

2)若 $f(x,y)\leq 0$, $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 表曲顶柱体体积的负值.

3)若 $f(x,y)\equiv 1$, $\iint\limits_D 1\cdot d\sigma$ 表区域D的面积.

根据分割的任意性，当二重积分存在时，在直角坐标系下用平行于坐标轴的直线网来划分区域 D



即　　$x =$ 常数

$y =$ 常数

则直角坐标系下面积元素为　$d\sigma = dxdy$

故二重积分可写为

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy$$

三、二重积分的性质

（二重积分与定积分有类似的性质）

【性质1】 设 α、β 为常数, 则

$$\iint_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]d\sigma \qquad \text{被积函数的可加性}$$

$$=\alpha\iint_D f(x,y)d\sigma+\beta\iint_D g(x,y)d\sigma$$

【性质2】 对区域具有可加性

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma.$$

$(D=D_1\cup D_2$, D_1, D_2无公共内点)

（下述性质请从几何上理解）

【性质3】 若 σ 为 D 的面积， $\sigma = \iint_D 1 \cdot d\sigma = \iint_D d\sigma.$

【性质4】 若在D上 $f(x,y) \le g(x,y)$, 比较性质

则有 $$\iint_D f(x,y)d\sigma \le \iint_D g(x,y)d\sigma.$$

特殊地，由于 $-|f(x,y)| \le f(x,y) \le |f(x,y)|$,

$$\left|\iint_D f(x,y)d\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|d\sigma.$$

【性质5】设 M、m 分别是 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的最大值和最小值，σ 为 D 的面积，则

$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le M\sigma$$

（二重积分估值不等式）

【性质6】设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，σ 为 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ,η) 使得

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot\sigma$$

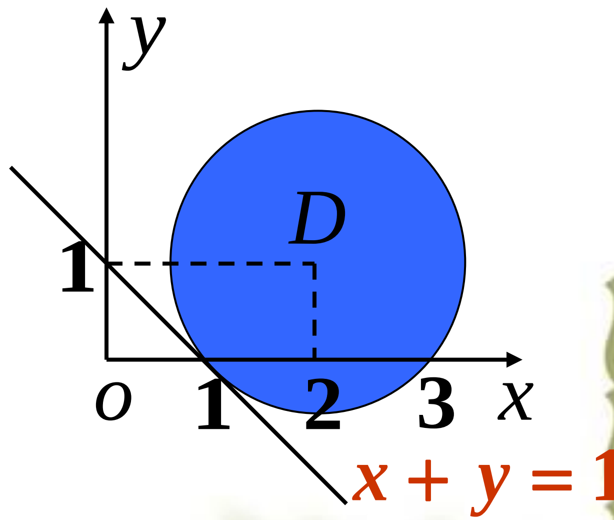
（二重积分中值定理）

【几何意义】曲顶柱体的体积等于一个平顶柱体的体积

【例1】 比较下列积分的大小:

$$\iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma,\quad \iint_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$$

其中 $D:(x-2)^2+(y-1)^2\le 2$



【解】积分域D 的边界为圆周

$$(x-2)^2+(y-1)^2=2$$

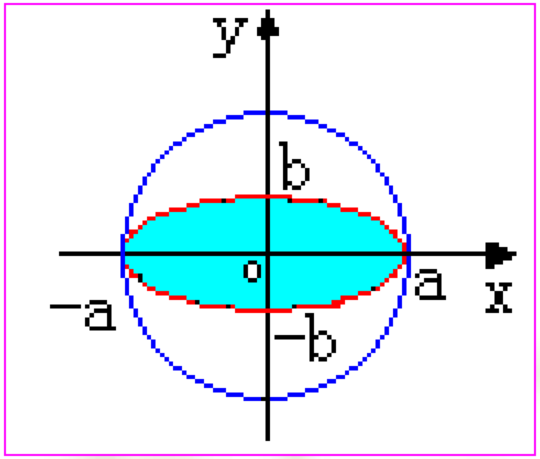
它与x 轴交于点(1,0)，与直线 $x+y=1$ 相切. 而区域D位于直线的上方，故在 D 上 $x+y\ge 1$, 从而

$$(x+y)^2\le(x+y)^3$$

$$\therefore\quad \iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma\le\iint_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$$

【例 2】不作计算，估计 $I=\iint_D e^{(x^2+y^2)}d\sigma$ 的值，

其中 D 是椭圆闭区域： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (0<b<a)$.



【解】 区域 D 的面积 $\sigma=\pi ab$

在 D 上 $\because 0\le x^2+y^2\le a^2$

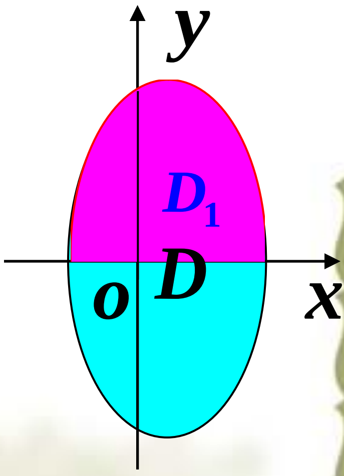
$\therefore 1=e^0\le e^{x^2+y^2}\le e^{a^2}$,

由性质5知 $\sigma\le\iint_D e^{(x^2+y^2)}d\sigma\le\sigma\cdot e^{a^2}$,

即 $\pi ab\le\iint_D e^{(x^2+y^2)}d\sigma\le\pi ab e^{a^2}$.

注意：设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，D关于x 轴对称，

D 位于x 轴上方的部分为D_1，在 D 上



(1) $f(x,-y)=f(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = 2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma$$

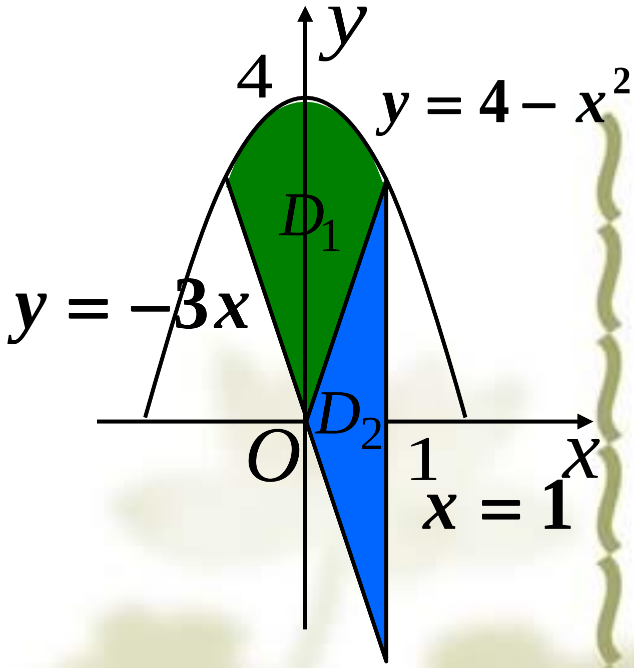
(2) $f(x,-y)=-f(x,y)$，则 $\iint_D f(x,y)d\sigma = 0$

当区域关于 y 轴对称，函数关于变量 x 有

奇偶性时，仍有类似结果.

【例4】计算 $I=\iint_D x\ln(y+\sqrt{1+y^2})dxdy$，其中$D$ 由

$y=4-x^2,\ y=-3x,\ x=1$所围成.



【解】 令 $f(x,y)=x\ln(y+\sqrt{1+y^2})$

$D=D_1\cup D_2$ (如图所示)

显然，在 D_1上，$f(-x,y)=-f(x,y)$

在 D_2上，$f(x,-y)=-f(x,y)$

$$I=\iint_{D_1} x\ln(y+\sqrt{1+y^2})dxdy$$

$$+\iint_{D_2} x\ln(y+\sqrt{1+y^2})dxdy=0$$

【例5】 设D是xOy平面上以$(1,1),(-1,1)$和$(-1,-1)$为顶点的三角形区域，D_1是D在第一象限的部分，则

$$\iint_D (xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

（A） $2\iint_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ （B） $2\iint_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

（C） $4\iint_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

（D）0.

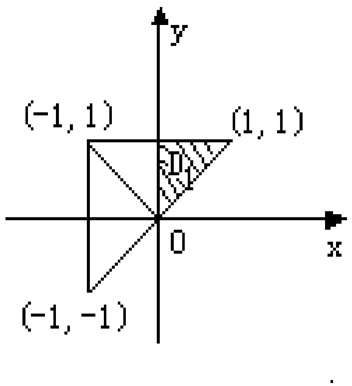
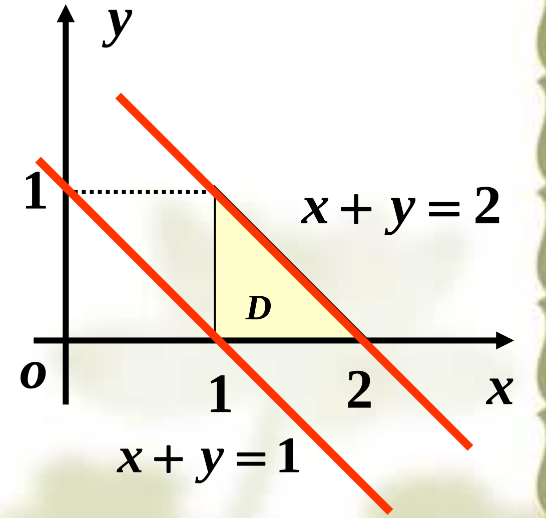


图 10-3

【例 7】比较积分$\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma$与$\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$的大小， 其中 D 是三角形闭区域， 三顶点各为(1,0),(1,1), (2,0).

【解】 在 D 内有 $1 \le x+y \le 2 < e$,



故 $0 \le \ln(x+y) < 1$,

于是 $\ln(x+y) > [\ln(x+y)]^2$,

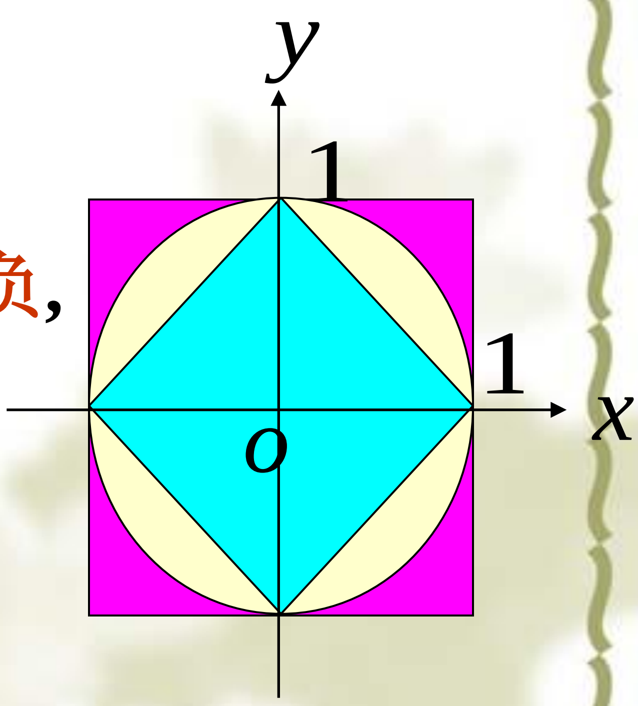
因此 $\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma > \iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$

【练习】

1. 比较下列积分值的大小关系：

$$I_1 = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad I_2 = \iint\limits_{|x|+|y|\le 1} |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$I_3 = \iint\limits_{\substack{-1\le x\le 1\\ -1\le y\le 1}} |xy|\,dxdy$$



【解】 I_1, I_2, I_3 被积函数相同，且非负，

由它们的积分域范围可知

$$I_2 < I_1 < I_3$$

2. 设D是第二象限的一个有界闭域，且 $0 < y < 1$，则

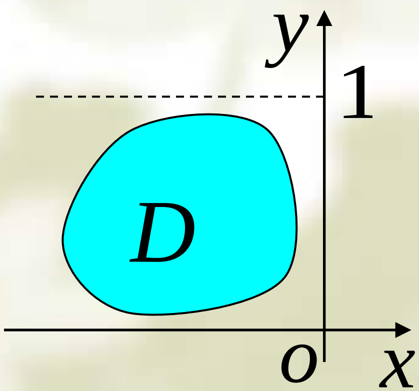
$$I_1 = \iint\limits_D yx^3 \mathrm{d}\sigma, \quad I_2 = \iint\limits_D y^2 x^3 \mathrm{d}\sigma, \quad I_3 = \iint\limits_D y^{1/2} x^3 \mathrm{d}\sigma$$

的大小顺序为（ D ）

(A) $I_1 \le I_2 \le I_3$;　　(B) $I_2 \le I_1 \le I_3$;

(C) $I_3 \le I_2 \le I_1$;　　(D) $I_3 \le I_1 \le I_2$.

【提示】因 $0 < y < 1$, 故 $y^2 \le y \le y^{1/2}$;



又因 $x^3 < 0$, 故在D上有

$$y^{1/2} x^3 \le y x^3 \le y^2 x^3$$

四、小结

二重积分的定义（积分和式的极限）

二重积分的几何意义（曲顶柱体的体积）

二重积分的物理意义（平面薄片的质量）

二重积分的性质（6条）

【思考题】

将二重积分定义与定积分定义进行比较，找出它们的相同之处与不同之处.

【思考题解答】

定积分与二重积分都表示某个和式的极限值，且此值只与被积函数及积分区域有关．不同的是定积分的积分区域为区间，被积函数为定义在区间上的一元函数，而二重积分的积分区域为平面区域，被积函数为定义在平面区域上的二元函数．