第五节　隐函数的求导公式

一、一个方程的情形

二、方程组的情形

三、小结 思考题

一、一个方程的情形

1. $F(x,y)=0$

【隐函数存在定理 1】 设函数$F(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某一邻域内具有连续的偏导数，且$F(x_0,y_0)=0$，$F_y(x_0,y_0)\neq 0$，则方程$F(x,y)=0$在点$P_0(x_0,y_0)$的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数$y=f(x)$，它满足条件$y_0=f(x_0)$，并有

隐函数的求导公式

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}.$$

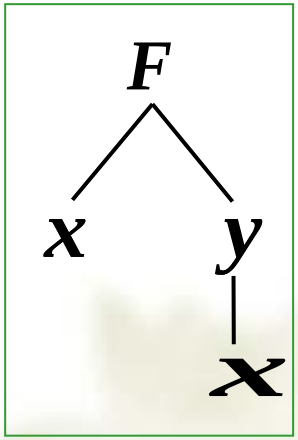
求导公式推导如下：

设 $y=f(x)$ 为方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数，

$$F(x,y)=0$$

两边对 x 求导

$$F_x+F_y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\equiv 0$$



$F_y(x_0,y_0)\neq 0$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内 $F_y\neq 0$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}$$

【例 1】 已知$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

【方法】(1)直接法(分清谁是函数，谁是自变量，两边对自变量求导)；　(2)公式法

【解】 令 $F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\frac{y}{x}$,

则 $F_x(x,y)=\frac{x+y}{x^2+y^2}$，$F_y(x,y)=\frac{y-x}{x^2+y^2}$,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{x+y}{x-y}.$$

【说明】若$F(x,y)$的二阶偏导数仍连续，欲求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

【法 I 】

$$\frac{dy}{dx}=(-\frac{F_x}{F_y})\begin{array}{l} x \\ \\ y \;—\; x \end{array}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{F_x}{F_y})+\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{F_x}{F_y})\cdot\frac{dy}{dx}$$

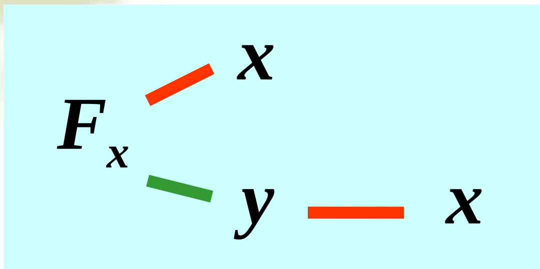
$$=-\frac{F_{xx}F_y-F_xF_{yx}}{F_y^2}-\frac{F_{xy}F_y-F_xF_{yy}}{F_y^2}(-\frac{F_x}{F_y})$$

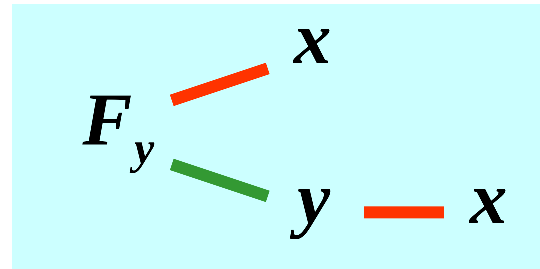
$$=-\frac{F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

此即先用复合函数求导法则，再用商的求导公式.

【法Ⅱ】

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(-\frac{F_x}{F_y})=-\frac{\frac{dF_x}{dx}\cdot F_y-F_x\frac{dF_y}{dx}}{F_y^2}$$





则 $\frac{dF_x}{dx}=F_{xx}+F_{xy}\cdot\frac{dy}{dx}$ 同理 $\frac{dF_y}{dx}=F_{yx}+F_{yy}\cdot\frac{dy}{dx}$

代入上式化简，结果相同.

此即先用商的求导公式, 再用复合函数求导法则.

【例 1】已知$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

【解】 令 $F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\frac{y}{x}$,

则 $F_x(x,y)=\frac{x+y}{x^2+y^2}$, $F_y(x,y)=\frac{y-x}{x^2+y^2}$,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{x+y}{x-y}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$$

$$=\frac{(1+\frac{dy}{dx})(x-y)-(x+y)(1-\frac{dy}{dx})}{(x-y)^2}=\frac{2(x^2+y^2)}{(y-x)^3}$$

2. $F(x,y,z)=0$

【隐函数存在定理 2】设函数$F(x,y,z)$在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$的某一邻域内有连续的偏导数，且$F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程$F(x,y,z)=0$在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数$z=f(x,y)$，它满足条件$z_0=f(x_0,y_0)$，

并有 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

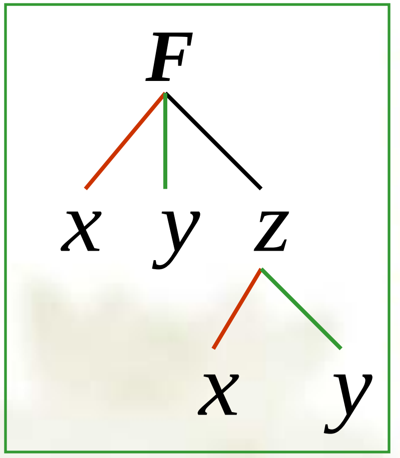
设 $z=f(x,y)$ 是方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的隐函数

则

$$F(x,y,z)=0$$

两边对 x 求偏导

$$F_x + F_z\frac{\partial z}{\partial x} \equiv 0$$



在 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域内 $F_z \neq 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$

同样可得 $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z}$

【教材例 2】 设 $x^2+y^2+z^2-4z=0$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

【方法】(1)公式法；(2)直接法

【解】 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z$,

则 $F_x=2x$, $F_z=2z-4$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=\dfrac{x}{2-z}$,

$z=z(x,y)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(2-z)+x\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)+x\cdot\dfrac{x}{2-z}}{(2-z)^2}$$

$$=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}.$$

【例 3】设$z=f(x+y+z,\ xyz)$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial x}{\partial y},\ \dfrac{\partial y}{\partial z}$.

【解 I (直接法)】

【思路】 把 z 看成 x,y 的函数对 x 求偏导数得$\dfrac{\partial z}{\partial x}$

把 x 看成 z,y 的函数对 y 求偏导数得$\dfrac{\partial x}{\partial y}$

把 y 看成 x,z 的函数对 z 求偏导数得$\dfrac{\partial y}{\partial z}$

把 z 看成 x, y 的函数等式两边对 x 求偏导数得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' \cdot (1 + \frac{\partial z}{\partial x}) + f_2' \cdot y \cdot (z + x\frac{\partial z}{\partial x}),$$

整理得 $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f_1' + yzf_2'}{1 - f_1' - xyf_2'},$$

把 x 看成 z, y 的函数等式两边对 y 求偏导数得

$$0 = f_1' \cdot (1 + \frac{\partial x}{\partial y}) + f_2' \cdot z \cdot (x + y\frac{\partial x}{\partial y}),$$

整理得 $$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{f_1' + xzf_2'}{f_1' + yzf_2'},$$

把 y 看成 x,z 的函数等式两边对 z 求偏导数得

$$1 = f_1' \cdot \left(1 + \frac{\partial y}{\partial z}\right) + f_2' \cdot x \cdot \left(y + z\frac{\partial y}{\partial z}\right),$$

整理得 $$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1 - f_1' - xyf_2'}{f_1' + xzf_2'}.$$

【解Ⅱ(公式法)】

令 $F(x,y,z)=z-f(x+y+z,xyz)$

则 $F_x=-f_1'-f_2'\cdot yz,\quad F_y=-f_1'-f_2'\cdot xz,$

$F_z=1-f_1'-f_2'\cdot xy,$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{f_1'+yzf_2'}{1-f_1'-xyf_2'},\qquad \frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_x}=-\frac{f_1'+xzf_2'}{f_1'+yzf_2'},$$

$$\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{F_z}{F_y}=\frac{1-f_1'-xyf_2'}{f_1'+xzf_2'}.$$

二、方程组的情形 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$

【隐函数存在定理 3】设$F(x,y,u,v)$、$G(x,y,u,v)$在点$P(x_0,y_0,u_0,v_0)$的某一邻域内有对各个变量的连续偏导数，又$F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$, $G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，且偏导数所组成的函数行列式（或称雅可比式）

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$$

在点$P(x_0,y_0,u_0,v_0)$不等于零，则方程组

$$F(x,y,u,v)=0、\qquad G(x,y,u,v)=0$$

在点$P(x_0,y_0,u_0,v_0)$的某一邻域内恒能唯一确定一组连续且具有连续偏导数的函数$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，它们满足条件$u_0=u(x_0,y_0)$, $v_0=v(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}.$$

公式推导如下

由于 $\begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y)) \equiv 0 \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y)) \equiv 0 \end{cases}$

方程组两边先分别对x 求偏导, u, v是函数, y是常数, 得

$$\begin{cases} F_x + F_u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + F_v \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ G_x + G_u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + G_v \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

这是关于$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$的线性方程组

解出$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$ 即可 $(J \neq 0,$保证分母有意义)

同理方程组两边再分别对y求偏导， u,v是函数, x是常数, 得

$$\begin{cases} F_y + F_u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + F_v \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ G_y + G_u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + G_v \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

这是关于$\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial y}$的线性方程组

解出$\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 即可

【注意】
(1)公式法（繁杂 不要求记）
(2)直接法（要求熟练掌握、记忆）

【教材例 4】设 $xu-yv=0$， $yu+xv=1$，

求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

【解 I 】公式法(略)

【解 II】直接法

将所给方程的两边对 x 求导并移项

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial v}{\partial x}=-u \\ y\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial v}{\partial x}=-v \end{cases}, \qquad J=\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}=x^2+y^2,$$

解得 $(J = x^2 + y^2 \neq 0\text{时})$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{yu - xv}{x^2 + y^2},$$

将所给方程的两边对 y 求导，用同样方法得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xv - yu}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}.$$

【思考题】已知$\dfrac{x}{z}=\varphi(\dfrac{y}{z})$，其中$\varphi$为可微函数，

求$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=?$

【思考题解答】

记$F(x,y,z)=\dfrac{x}{z}-\varphi(\dfrac{y}{z})$，　　则$F_x=\dfrac{1}{z}$，

$$F_y=-\varphi'(\frac{y}{z})\cdot\frac{1}{z},\quad F_z=\frac{-x}{z^2}-\varphi'(\frac{y}{z})\cdot\frac{(-y)}{z^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{z}{x-y\varphi'(\frac{y}{z})},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{-z\varphi'(\frac{y}{z})}{x-y\varphi'(\frac{y}{z})},$$

于是$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z.$

三、小结

隐函数的求导法则（分以下几种情况）

$$(1)\ F(x,y)=0$$

$$(2)\ F(x,y,z)=0$$

$$(3)\ \begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$$

【方法】
(1)公式法：各个变量地位等同.
(2)直接法：两边同时对某自变量求偏导.
注意此时有因变量与自变量之分. 先搞清哪个变量是因变量，哪个变量是自变量.