学院、系________ 专业班级________ 学号________ 姓名________

密 封

齐鲁工业大学 17 / 18 学年第一学期《 高等数学 II 》期末考试试卷

（A 卷）

（本试卷共 4 页）

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

得分	
阅卷人	

一、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1、若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$（A 为常数），则当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)-A$ 是(　　　)

A、无穷大量　　　　　B、无界，但非无穷大量

C、无穷小量　　　　　D、有界，而未必为无穷小量

2、关于函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导及可微三者的关系（　　　）

A、连续是可微的充分条件　　　　B、可导是可微的充分必要条件

C、可微不是连续的充分条件　　　D、连续是可导的充分必要条件

3、设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x-2, & x>0 \\ 1, & x=0 \\ x-\cos x, & x<0 \end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$（　　　）

A、－1　　　B、1　　　C、0　　　D、不存在

4、设 $f(x)=\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x(x-1)}$，且 $x=0,1$ 为 $f(x)$ 的二个间断点，则间断点的类型为（　　　）

A、$x=0$，$x-1$ 都是第一类间断点

B、$x=0$ 为第一类间断点，$x=1$ 为第二类间断点

C、$x=0$ 为第二类间断点，$x=1$ 为第一类间断点

D、$x=0$，$x-1$ 都是第二类间断点

5、函数 $y=xe^{-x}$ 在 $(-\infty,1)$ 内的图形是(　　　)

A、单调增而向上凹的曲线　　　　B、单调增而向上凸的曲线

C、以原点为拐点的上升曲线　　D、在原点取最大值而一凸的曲线

得分	
阅卷人	

二、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1、$\lim_{x \to 0} x \operatorname{arccot} \frac{1}{x} =$ ________。

2、设　$y = \arcsin x + \arccos x$，则$y' =$ ______。

3、极限$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} =$ _______。

4、$\int_{-5}^{5} \frac{x^2 \sin^3 x}{1 + x^4} dx =$ _______。

5、设$y = f(x)$在点x_0处可导，$f(x_0) = 0$，$f'(x_0) = 1$，$\lim_{h \to \infty} h \cdot f\left(x_0 - \frac{1}{h}\right) =$ ______。

得分	
阅卷人	

三、计算题（本题满分 35 分，每小题 5 分）

1、求函数$y = x^3$在点$(2,8)$处的切线方程和法线方程。

解：

2、求参数方程$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases}$所确定的函数$y = y(x)$的导数。

解：

3、设$y = \left(\frac{1}{x}\right)^x$，求$\frac{dy}{dx}$。

解：

4、求极限$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$。

解：

姓名______ 学号______ 专业班级______ 学院、系______

……封……密……

5、求$\int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} \mathrm{d}x$。

解：

6、求$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx$。

解：

7、求$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int_0^x \ln(1 + 2t^2) dt}{x^3}$。

解：

得分	
阅卷人	

四、解答题（本题满分 26 分）

1、(8 分)试问a为何值时，函数$f(x) = a\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$在$x = \frac{\pi}{3}$处取得极值？它是极大值还是极小值？并求此极值。

解：

2、(8 分)求曲线$y = 3x^4 - 4x^3 + 1$的拐点及凹、凸区间。

解：

3、(10 分)求曲线 $y=x^2$ 与 $y=2x-1$ 及 x 轴所围成的平面图形的面积,以及其绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积 V_x.

解：

得分	
阅卷人	

五、证明题（本题满分 9 分）应用拉格朗日中值定理证明不等式 $\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$，其中 $0 < a < b$。

证：

得分	
阅卷人	

六、附加题（本题满分 10 分）

备注：本试卷共出 110 分的题目，此题为附加题，若试卷总得分超过 100 分，按 100 分记。

设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ ax+b, & x>1 \end{cases}$，试确定 a,b 的值，使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导。

解：

姓名________ 学号________ 专业班级________ 学院、系________

封 密

试卷 A 卷参考答案

一、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1、(C)　2、（B）　3、（A）　4、（C）　5、(B)

二、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1、__0__。　2、__0__。　3、__-1__。4、__0__。　5、__-1__。

三、计算题（本题满分 35 分，每小题 5 分）

1、解：由导数的几何意义，得 $k_{切}=(x^3)'\big|_{x=2}=3x^2\big|_{x=2}=12$，$k_{法}=-\dfrac{1}{12}$　(1 分)

切线方程为 $y-8=12(x-2)$ 即 $12x-y-16=0$　(2 分)

法线方程为 $y-8=-\dfrac{1}{12}(x-2)$ 即 $x+12y-98=0$　(2 分)

2、解：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{3b\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=-\dfrac{b}{a}\tan t$（分子分母求导各 2 分，最后答案 1 分）

3、解：方程两边同时取对数 $\ln y=-x\ln x$　(2 分)

上式两边同时求导 $\dfrac{y'}{y}=-\ln x-1$　(2 分)

整理得 $\dfrac{dy}{dx}=-\left(\ln x+1\right)\left(\dfrac{1}{x}\right)^x$　(1 分)

4、解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{1-\cos x}$ (2 分) $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$　(2 分)

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin x}=2$　(1 分)

5、解：$\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}\mathrm{d}x=\int(x^{-\frac{5}{2}}-e^x+\frac{1}{x})\mathrm{d}x$　(2 分)

$=-\dfrac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}-e^x+\ln|x|+c$　(3 分)

6、解：原式 $=-\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\cos\frac{1}{x}d(\frac{1}{x})$　(2 分) $=-\sin\dfrac{1}{x}\Big|_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}$　(2 分) $=-1$　(1 分)

7、解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\int_0^x \ln(1+2t^2)dt\right)'}{(x^3)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x^2)}{3x^2}$ (2 分) $[=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2}{3x^2}=\dfrac{2}{3}$(3 分)]

或$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x}{6x(1+2x^2)}$ (2 分) $=\dfrac{2}{3}$ (1 分)

四、解答题（本题满分 26 分，第 1、2 题每小题 8 分，第 3 题 10 分）

1、解：$f'(x)=a\cos x+\cos 3x$

若此函数在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处为极值点

则 $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=0$ 即 $a\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\left(3\cdot\dfrac{\pi}{3}\right)=0$，解得 $a=2$ （3 分）

$f''(x)\big|_{x=\frac{\pi}{3}}=-a\sin x-3\sin 3x\big|_{x=\frac{\pi}{3}}=(-2)\sin\dfrac{\pi}{3}-3\sin\left(3\cdot\dfrac{\pi}{3}\right)<0$ （6 分）

所以 $x_0=\dfrac{\pi}{3}$ 为极大值点，且极大值点为 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ （8 分）

2、解：易见函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,

$y'=12x^3-12x^2$, $y''=36x\left(x-\dfrac{2}{3}\right)$

令 $y''=0$, 得 $x_1=0$, $x_2=\dfrac{2}{3}$ （3 分）

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$y''>0$,因此函数在 $(-\infty,0)$ 内是凹的

当 $x\in(0,\dfrac{2}{3})$ 时，$y''<0$,因此函数在 $(0,\dfrac{2}{3})$ 内是凸的

当 $x\in(\dfrac{2}{3},+\infty)$ 时，$y''>0$,因此函数在 $(\dfrac{2}{3},+\infty)$ 内是凹的 （6 分）

拐点坐标为 $(0,1)$ 和 $(\dfrac{2}{3},\dfrac{11}{27})$ （8 分）

3、解：所求面积 $S=\int_0^1(\dfrac{y+1}{2}-\sqrt{y})dy=\left[\dfrac{1}{4}(y+1)^2-\dfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\dfrac{1}{12}$ （5 分）

所求体积 $V_x=\pi\int_0^1\left(x^2\right)^2dx-\dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot1^2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{5}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{30}$ （10 分）

学院、系______ 专业班级______ 学号______ 姓名______

密 封

五、证：设 $f(x)=\ln x$，则 f 在 $[a, b]$ 上连续且可导，所以 f 在 $[a, b]$ 上满足 Lagrange 中值定理的条件，于是 $\exists\xi\in(a, b)$，使得

$$\ln\frac{b}{a}=\ln b-\ln a=f'(\xi)(b-a)=\frac{1}{\xi}(b-a)$$

（5 分）

$0<a<\xi<b$，$\dfrac{b-a}{b}<\dfrac{b-a}{\xi}<\dfrac{b-a}{a}$

从而 $\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}$ （9 分）

六、附加题（本题满分 10 分）

解：若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，则必在 $x=1$ 处连续

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=a+b$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$，即 $a+b=1$ （5 分）

$$\text{又 } f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}(x+1)=2$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{ax+b-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{a(x-1)}{x-1}=a$$

$a=2$，$b=-1$ （10 分）