第四节 隐函数和参数方程求导

一、隐函数的导数

二、对数求导法

三、由参数方程确定的函数的导数

一、 隐函数的导数

以解析式 $y=f(x)$ 的形式确定的函数称为显函数.

例如 $y=e^x\cos x,\quad y=x\ln x.$

以二元方程 $F(x,y)=0$ 的形式确定的函数称为隐函数.

例如 $x+y^3-1=0,\quad \sin(x+y)=3x-y+2.$

把一个隐函数化成显函数，称为隐函数的显化.

$$x+y^3-1=0 \;\Rightarrow\; y=\sqrt[3]{x-1}.$$

$\sin(x+y)=3x-y+2$ 难以化成显函数.

隐函数求导的基本思想是：

把方程 $F(x,y)=0$ 中的 y 看成自变量 x 的函数 $y(x)$，结合复合函数求导法，在方程两端同时对 x 求导数，然后整理变形解出 y' 即可.

- y' 的结果中可同时含有 x 和 y.
- 若将 y 看成自变量，同理可求出 x'.

隐函数求导法则：对方程两边同时求导.

例1 求由方程$y=\ln(x+y)$所确定的隐函数的导数y'.

解 方程两端对x求导，得

$$y'=\frac{1}{x+y}(x+y)'=\frac{1}{x+y}(1+y'),$$

从而
$$y'=\frac{1}{x+y-1}.$$

例2 求由方程$e^y+xy-e=0$所确定的隐函数的导数y'.

解 方程两端对x求导，得

$$e^y\cdot y'+y+x\cdot y'=0,$$

从而
$$y'=-\frac{y}{x+e^y}.$$

例3 求由方程 $xy - e^x + e^y = 0$所确定的隐函数$y = y(x)$的导数$\dfrac{dy}{dx}, \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解 方程两边对 x求导，

$$y + xy' - e^x + e^y y' = 0 \Rightarrow (x + e^y)y' = e^x - y$$

解得 $y' = \dfrac{e^x - y}{x + e^y}$，　由原方程知 $x = 0, y = 0$,

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{e^x - y}{x + e^y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = 1.$$

例4 设曲线C的方程为$x^3+y^3=3xy$，求过C上点$\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$的切线方程.

解 方程两边对x求导，$3x^2+3y^2y'=3y+3xy'$

$$\therefore y'=\frac{y-x^2}{y^2-x}$$

$$\therefore y'\Big|_{x=\frac{3}{2}}=\frac{y-x^2}{y^2-x}\Bigg|_{x=\frac{3}{2},y=\frac{3}{2}}=-1.$$

所求切线方程为 $y-\frac{3}{2}=-(x-\frac{3}{2})$

即 $x+y-3=0.$

例5求由方程 $x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$ 所确定的隐函数的二阶导数

解　两边对x求导　$1-\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}\cos y\cdot\frac{dy}{dx}=0,$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{2-\cos y}.$$

上式两边再对x求导，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2\sin y\frac{dy}{dx}}{(2-\cos y)^2}=\frac{-4\sin y}{(2-\cos y)^3}.$$

例6 已知 $y = 1 + xe^y$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

解 两边对x求导 $y' = e^y + xe^y y'$

$$\therefore y' = \frac{e^y}{1 - xe^y} = \frac{e^y}{2 - y}$$

$$y'' = \frac{e^y y'(2-y) - e^y(-y')}{(2-y)^2} = \frac{e^y y'(3-y)}{(2-y)^2}$$

$$= \frac{e^y \cdot \dfrac{e^y}{2-y}(3-y)}{(2-y)^2} = \frac{e^{2y}(3-y)}{(2-y)^3}$$

解法二：两边对x求导 $y' = e^y + xe^y y'$ (1)

两边继续对 x求导

$$y'' = e^y \cdot y' + e^y y' + xe^y (y')^2 + xe^y y'' \quad (2)$$

$$\because y' = \frac{e^y}{1 - xe^y} = \frac{e^y}{2 - y}$$

$$y'' = \frac{2e^y y' + xe^y (y')^2}{1 - xe^y} = \frac{e^{2y}(3 - y)}{(2 - y)^3}$$

二、对数求导法

适用范围：表达式是若干个因式的连乘、开方、商、

幂指函数：$u(x)^{v(x)}$.

例如：$y=\dfrac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2 e^x}$，$y=x^{\sin x}$.

方法:先在方程两边取对数，然后利用隐函数的求

导方法求出导数. --------对数求导法

例7 设 $y=\dfrac{(x+1)\cdot\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}$, 求$y'$.

解 等式两边取绝对值后再取对数，得

$$\ln|y|=\ln|x+1|+\frac{1}{3}\ln|x-1|-2\ln|x+4|-x$$

上式两边对 x求导,得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1$$

$$\therefore y'=\frac{(x+1)\cdot\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1\right)$$

练习 $y=(3x-1)^{\frac{5}{3}}\cdot\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$

$$\ln|y|=\frac{5}{3}\ln|3x-1|+\frac{1}{2}\left[\ln|x-1|-\ln|x-2|\right]$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{3x-1}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}\right]$$

$$y'=\left\{\frac{5}{3x-1}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}\right]\right\}\cdot y$$

- 在使用对数求导法时，常省略取绝对值的步骤.

例8 设 $y = x^{\sin x}\ (x > 0)$, 求y'.

解 等式两边取对数，得 $\ln y = \sin x \cdot \ln x$

上式两边对 x求导，得

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\therefore y' = y(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x})$$

$$= x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x})$$

（方法2）幂指函数变换为复合函数求导法

$$y = x^{\sin x} = e^{\sin x \cdot \ln x}$$

$$y' = (x^{\sin x})' = (e^{\sin x \cdot \ln x})'$$

$$= (e^{\sin x \cdot \ln x}) \cdot (\sin x \cdot \ln x)'$$

$$= e^{\sin x \cdot \ln x}\left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$= x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

三、由参数方程确定的函数的导数

若参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 确定 y 与 x 间的函数关系，称此为由参数方程所确定的函 数.

例如 $\begin{cases} x = 2t, \\ y = t^2, \end{cases} \Longrightarrow t = \dfrac{x}{2}$ 消去参数 t

$\therefore y = t^2 = \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{4}$ 即：$y = \dfrac{x^2}{4}$.

问题：消参困难或无法消参如何求导?

在方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$中，确定了函数函数关系： $y = y(x)$.

设函数 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$都可导, 且$\varphi'(t) \neq 0$,

则由参数方程所确定的函数关系$y = y(x)$的导数：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

例9 求摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 在 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程.

解 $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a\sin t}{a - a\cos t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1 - \cos\frac{\pi}{2}} = 1.$$ 当 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 时, $\begin{cases} x = a(\frac{\pi}{2} - 1) \\ y = a \end{cases}$

所求切线方程为 $y - a = x - a(\dfrac{\pi}{2} - 1)$

即 $y = x + a(2 - \dfrac{\pi}{2})$

练习 求由方程 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ 确定的函数在$t = \dfrac{\pi}{4}$的切线方程

解 $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\cot t.$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \left.\frac{b\cos t}{-a\sin t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}.$$ 当 $t = \dfrac{\pi}{4}$ 时, $\begin{cases} x_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a \\ y_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}b \end{cases}.$

所求切线方程为 $y - \dfrac{\sqrt{2}}{2}b = -\dfrac{b}{a}(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}a)$

$$bx + ay - \sqrt{2}ab = 0.$$

若函数$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$二阶可导,则

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{\dfrac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}.$$

即:

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}.}$$

例10 求由方程 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$ 确定的函数 $y = y(x)$ 的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{a\cos t}{-a\sin t} = -\cot t.$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(-\cot t)}{dx}$$

则 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{(-\cot t)'}{(a\cos t)'} = \dfrac{\csc^2 t}{-a\sin t} = -\dfrac{1}{a\sin^3 t}$

练习 求方程 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 的二阶导数.

解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{a\sin t}{a - a\cos t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\left(\dfrac{\sin t}{1 - \cos t}\right)'}{a(t - \sin t)'}$$

$$= \frac{\cos t(1 - \cos t) - \sin t \cdot \sin t}{(1 - \cos t)^2} \cdot \frac{1}{a(1 - \cos t)}$$

$$= \frac{\cos t - 1}{(1 - \cos t)^2} \cdot \frac{1}{a(1 - \cos t)} = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2}.$$

思考： 设 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 3 \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$ 确定 $y = f(x)$，

求曲线的对应 $t = 0$ 点的切线方程。

解 第二个方程对 t 求导 $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{e^y \cos t}{1 - e^y \sin t}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{e^y \cos t}{1 - e^y \sin t} \cdot \frac{1}{6t + 2}$$

$\because t = 0 \Rightarrow x = 3, y = 1,$

$\therefore \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \dfrac{e}{2}$, 切线方程 $y - 1 = \dfrac{e}{2}(x - 3)$

内容小结

1. 隐函数求导法则：直接对方程两边求导;

2. 对数求导法：对方程两边取对数,按隐函数的求导法则求导;

3. 参数方程求导：实质上是利用复合函数求导法则;