学院、系________ 专业班级________ 学号________ 姓名________

……………密……………封……………线……………

齐鲁工业大学 18/19 学年第二学期《高等数学 II（下）》期末考试试卷（A 卷）

（本试卷共 4 页）

题号	一	二	三	四	总分
得分					

说明：解答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	
阅卷人	

一、填空题（1~12 小题，每小题 3 分，满分 36 分）

1. 设直线 $x=y=z$ 与平面 $\lambda x+y-z=1$ ~~垂直~~平行，则 $\lambda=$ __0__.

2. 设 $\vec{a}=(1,-1,0),\vec{b}=(0,1,1)$，则 $\vec{a}\times\vec{b}=$ __$(-1,-1,1)$__.

3. xOy 上的曲线 $x^2-y^2=1$ 绕 x 轴旋转而成的曲面方程为 __$x^2-(y^2+z^2)=1$__

4. 曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 在 $t=1$ 对应点处的切线方程为 __$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$__

5. 设 $z=(x^2+y^2)\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 则 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)}=$ __1__.

6. 设 D 是以 $(-1,0),(1,0),(0,2)$ 为顶点的三角形区域，则 $\iint\limits_D dxdy=$ __2__.

7. 设 D 是圆域 $x^2+y^2\le 1$，则 $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=$ __$\frac{2}{3}\pi$__.

8. 二阶齐次线性微分方程 $y''-2y'+y=0$ 的通解为 __$y=(C_1+C_2x)e^x$__

9. 设 $y_1=\frac{x}{2},y_2=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$ 是某一阶线性微分方程的两个解，则该微分方程为

$y'+p(x)y=Q(x)$

__$y'+\frac{1}{x}y=1$__.

10. 设函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)=e^{x-f(x)}$，$f(0)=0$，则 $f(x)=$ __x__.

11. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛半径为 __1__.

12. 函数 e^{2x} 的 x 幂级数展开式为 __$e^{2x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}$__ $x\in(-\infty,+\infty)$

得分	
阅卷人	

二、解答题（13~15 小题，每小题 8 分，满分 24 分）

13. 设 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，证明 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

解. 令 $F(x,y,z)=2\sin(x+2y-3z)-(x+2y-3z)$

则 $F_x=2\cos(x+2y-3z)-1$

$F_y=2\cos(x+2y-3z)\cdot 2-2$

$F_z=-2\cos(x+2y-3z)\cdot 3+3$

故 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_x}{F_z}-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{F_x+F_y}{F_z}=1$，证毕.

14. 求球面 $x^2+y^2+z^2=21$ 在点 $(1,2,4)$ 处的切平面方程与法线方程.

解. 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-21$

则 $F_x=2x$，$F_y=2y$，$F_z=2z$

点 $(1,2,4)$ 处的法向量 $\vec{n}=(2,4,8)$

切平面方程：$2(x-1)+4(x-2)+8(x-4)=0\Rightarrow x+2y+4z-21=0$

法线方程：$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-4}{8}$

15. 计算立体 $0\le z\le 1-x^2-y^2$ 的体积.

解. $V=\iint\limits_D 1-x^2-y^2\,dxdy$　　$D: x^2+y^2\le 1$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-\rho^2)\rho\,d\rho$

$=2\pi\cdot\int_0^1\rho-\rho^3\,d\rho$

$=2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$

得分	
阅卷人	

三、解答题（16~18 小题，每小题 8 分，满分 24 分）

16. 求微分方程 $(xy-y^2)dx=(2x^2-xy)dy$ 的通解.

解. $\frac{dy}{dx}=\frac{xy-y^2}{2x^2-xy}=\frac{\frac{y}{x}-(\frac{y}{x})^2}{2-\frac{y}{x}}$

是齐次方程. 令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y=ux$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

$\frac{u-u^2}{2-u}=u+x\cdot\frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{u-2}{u}du=\frac{1}{x}dx$

两边积分. $u-2\ln|u|=\ln|x|+C. \Rightarrow \frac{y}{x}-2\ln|\frac{y}{x}|=\ln|x|+C.$

17. 求微分方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的满足初值条件 $y|_{x=0}=\frac{2}{3}$ 的特解.

解. $e^{-\int\frac{2}{x+1}dx}=\frac{1}{(x+1)^2}$

原式两边同乘 $\frac{1}{(x+1)^2}$，有

$\{\frac{1}{(x+1)^2}\cdot y\}'=(x+1)^{\frac{5}{2}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}$

$=(x+1)^{\frac{1}{2}}$

同时积分，有 $\frac{1}{(x+1)^2}\cdot y=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C$

将 $y(0)=\frac{2}{3}$ 代入上式，有 $C=0$. 故特解是 $y=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{7}{2}}$

18.判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln(1+\frac{1}{n})$ 的敛散性. 若收敛，是绝对收敛还是条件收敛?

解. (1) 是交错级数. 取 $u_n=\ln(1+\frac{1}{n})$

满足 ① $u_n\geq u_{n+1}$ ② $u_n\to 0\ (n\to\infty)$. 故收敛.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$. 因 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}=1$，又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ 发散. 综上所述. 条件收敛.

得分	
阅卷人	

四、解答题（19~20 小题，每小题 8 分，满分 16 分）

19. 求函数 $f(x,y)=xe-\frac{x^2+y^2}{2}$ 的极值.

解. $f_x=e-x$. $f_y=-y$.

得驻点 $(e,0)$.

$f_{xx}=-1$, $f_{xy}=0$, $f_{yy}=-1$

$\Rightarrow A=-1, B=0, C=-1$.

因 $AC-B^2=1>0$，故有极值.

又 $A<0$，故是极大值.

$f(e,0)=\frac{e^2}{2}$.

20. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 的和函数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 的和.

解. ① 收敛半径 $R=1$. 又 $\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$ 收敛.

故收敛域为 $(-1,1]$.

当 $x\in(-1,1]$ 时.

$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}$

求导，得 $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^{n-1}=\frac{1}{1+x}\quad(x\in(-1,1])$

再积分，得 $S(x)-S(0)=\int_0^x\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)$

故 $S(x)=\ln(1+x)$. $x\in(-1,1]$

② $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}=S(1)=\ln 2$.