# 第六节 高阶线性微分方程

一、二阶线性微分方程

二、线性齐次方程解的结构

三、线性非齐次方程解的结构

# 一、二阶线性微分方程

**$n$阶线性微分方程:**

$$y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}(x)y'+P_n(x)y=f(x).$$

未知函数$y$及其各阶导数$y',\cdots,y^{(n)}$均为一次有理式

特别地，$n$=2　　$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$

当 $f(x)\equiv 0$时，二阶线性齐次微分方程;

当 $f(x)\neq 0$时，二阶线性非齐次微分方程.

［复习］ 一阶线性方程 $y'+P(x)y=Q(x)$

通解: $y=\underbrace{Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}_{\text{齐次方程通解}Y}+\underbrace{e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}_{\text{非齐次方程特解 }y^*}$

齐次方程通解$Y$　　非齐次方程特解 $y^*$

# 二、齐次线性方程解的结构

## 1. 叠加原理

【定理1】若函数 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶齐次线性方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个解，则 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ ($C_1, C_2$为任意常数)

也是该方程的解. (齐次方程解的叠加原理)

【证】将 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 代入方程左边，得

$$[C_1 y_1'' + C_2 y_2''] + P(x)[C_1 y_1' + C_2 y_2'] + Q(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2]$$

$$= C_1[y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1] + C_2[y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2]$$

$$= 0$$

[例如]若 $y_1(x)$ 是某二阶齐次方程的解, 则

$y_2(x)=2y_1(x)$ 是齐次方程的解

并且 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=(C_1+2C_2)y_1(x)$

也是齐次方程的解

但并不是通解

【说明】:

$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$不一定是所给二阶方程的通解.

为解决通解的判别问题, 下面引入函数的线性相关与线性无关概念.

## 2. 线性相关

【定义】设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是定义在区间 $I$ 上的 $n$ 个函数，若存在不全为 0的 常数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，使得

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \cdots + k_n y_n(x) \equiv 0, \quad x \in I,$$

则称这 $n$ 个函数在 $I$ 上线性相关，否则称为线性无关.

[思考] 若 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ 中有一个恒为 0，则

则 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ 必线性 相关

[例如] $1, \cos^2 x, \sin^2 x$, 在$(-\infty, +\infty)$上都有

$$1-\cos^2 x-\sin^2 x \equiv 0$$

故它们在任何区间 $I$ 上都线性相关;

[又如] $1, x, x^2$, 若在某区间 $I$ 上 $k_1+k_2x+k_3x^2 \equiv 0$,

则根据二次多项式至多只有两个零点, 可见 $k_1, k_2, k_3$

必需全为0, 故 $1, x, x^2$ 在任何区间 $I$ 上都线性无关.

两个函数在区间 $I$ 上线性相关与线性无关的充要条件:

$y_1(x), y_2(x)$ 线性相关

$\rightleftarrows$ 存在不全为 0 的 $k_1, k_2$ 使 $k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) \equiv 0$

$$\rightleftarrows \frac{y_1(x)}{y_2(x)} \equiv -\frac{k_2}{k_1}$$

$\boxed{(\text{不妨设 } k_1 \neq 0)}$

$$y_1(x), y_2(x) \text{ 线性无关} \rightleftarrows \frac{y_1(x)}{y_2(x)} \not\equiv \text{常数}$$

## 3. 解的结构

【定理 2】若 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶齐次线性方程的两个线性无关特解，则 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$（$C_1, C_2$ 为任意常数）是该方程的通解.（通解结构1）

［例如］方程 $y'' + y = 0$ 有特解 $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$, 且 $\dfrac{y_2}{y_1} = \tan x \not\equiv$ 常数, 故方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

【推论】若 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是 $n$ 阶齐次线性方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

的 $n$ 个线性无关的特解, 则方程的通解为

$$y = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x) \quad (C_k \text{为任意常数})$$

# 三、非齐次线性方程解的结构

【定理 3】设 $y^*(x)$ 是二阶非齐次线性方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad ①$$

的一个特解, $Y(x)$ 是相应齐次方程的通解, 则

$$y = Y(x) + y^*(x) \quad ②$$

是非齐次方程的通解.

非齐通=齐通+非齐特

非齐特=齐特+非齐特

【证】 将 $y=Y(x)+y^*(x)$ 代入方程①左端，得

$$(Y''+y^{*''})+P(x)(Y'+y^{*'})+Q(x)(Y+y^*)$$

$$=(y^{*''}+P(x)y^{*'}+Q(x)y^*)+(Y''+P(x)Y'+Q(x)Y)$$

$$=f(x)+0=f(x)$$

故 $y=Y(x)+y^*(x)$ 是非齐次方程的解,

又$Y$ 中含有两个独立任意常数，因而 ② 也是通解 .

证毕

[例如] 方程 $y'' + y = x$ 有特解 $y^* = x$

对应齐次方程 $y'' + y = 0$ 有通解

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

因此该方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x$$

【推论】给定 $n$ 阶非齐次线性方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x)$$

设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是对应齐次方程的 $n$ 个线性无关特解， $y^*(x)$ 是非齐次方程的特解, 则非齐次线性方程的通解为

$$y = \underline{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)} + y^*(x)$$

$$= Y(x) + y^*(x)$$

齐次方程通解　　非齐次方程特解

**【定理 4】** 设 $y_k^*(x)\ (k=1,2)$ 分别是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_k(x)\quad (k=1,2)$$

的特解, 则 $y=y_1^*(x)\pm y_2^*(x)$ 是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)\pm f_2(x)$$ 的特解.

(非齐次线性方程解的叠加原理)

**【推论】** 设 $y_k^*(x)\ (k=1,2,\cdots,n)$ 分别是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_k(x)\quad (k=1,2,\cdots,n)$$

的特解, 则 $y=\sum_{k=1}^{n}y_k^*(x)$ 是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=\sum_{k=1}^{n}f_k(x)$$

的特解.

**结论：** 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

的两个特解，则 $y_1(x) - y_2(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$ 的解.

例1. 已知微分方程$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$有三 个解

$y_1=x,\ y_2=e^x,\ y_3=e^{2x}$，求此方程满足初始条件

$y(0)=1,\ y'(0)=3$ 的特解.

解：$y_2-y_1,\ y_3-y_1$ 是对应齐次方程的解, 且

$$\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}=\frac{e^x-x}{e^{2x}-x}\neq$$ 常数, 因而线性无关,

故原方程通解为 $y=C_1(e^x-x)+C_2(e^{2x}-x)+x$

代入初始条件 $y(0)=1,\ y'(0)=3$, 得$C_1=-1, C_2=2$,

故所求特解为 $y=2e^{2x}-e^x$.

## 【思考题】

已知$y_1=3$，$y_2=3+x^2$，$y_3=3+x^2+e^x$

都是微分方程

$$\left(x^2-2x\right)y''-\left(x^2-2\right)y'+\left(2x-2\right)y=6\left(x-1\right)$$

的解，求此方程所对应齐次方程的通解.

## 【思考题解答】

$\because y_1$，$y_2$，$y_3$ 都是微分方程的解,

$\therefore y_3 - y_2 = e^x$， $y_2 - y_1 = x^2$,

是对应齐次方程的解,

$\because \dfrac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1} = \dfrac{e^x}{x^2} \neq$ 常数

$\therefore$ 所求通解为 $y = C_1(y_3 - y_2) + C_2(y_2 - y_1)$

$$= C_1 e^x + C_2 x^2.$$

# 四、小结

主要内容　线性方程解的结构

线性相关与线性无关