第十二章 无穷级数

简介

无穷级数
- 常数项级数
  - 正项级数
  - 交错级数
  - 任意项级数
- 函数项级数
  - 幂级数
  - 傅里叶（属于三角）级数
  - 任意项（函数）级数

本章主要围绕三个问题展开讨论：①级数的收敛性判定问题，②级数求和问题，③把已知函数表示成级数问题.

第一节 常数项级数的概念和性质

一、引例

二、级数的概念

三、基本性质

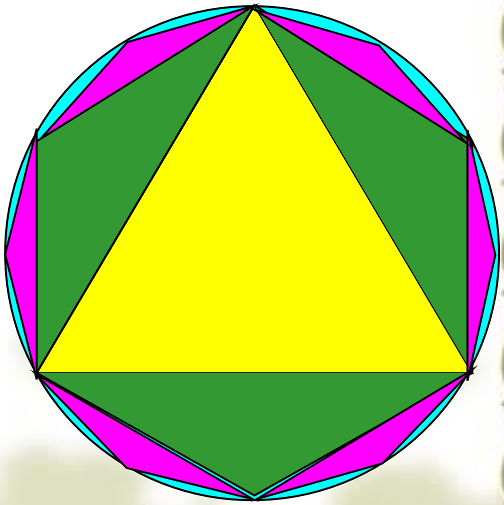
四、收敛的必要条件

五、小结

一、引例

1.【 用圆内接正多边形面积逼近圆面积 】

依次作圆内接正 3×2^n $(n=0,1,2,\cdots)$ 边形, 设 a_0 表示内接正三角形面积, a_k 表示边数增加时增加的面积, 则圆内接正 3×2^n 边形面积为



$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$$

$n\to\infty$ 时, 这个和逼近于圆的面积 A.

即 $$A=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

2.【无限循环小数的和】

$$\frac{1}{3}=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots$$

二、级数的概念

1.【级数的定义】

[定义] 给定一个数列 $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$ 由该数列构成的表达式 $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$

即 $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

称作(常数项)无穷级数,其中第 n 项 u_n 叫做级数的一般项.

【思考】 怎样理解无穷级数中无限多个量相加呢?

【解析】(1)加法是有限个数之间的运算, "无限个数相加"用加法是无法完成的;

(2) 级数是"无限和"的形式,是"有限和"的自然延续;可以理解为是"有限和"的极限,才构成了级数的"无限和".

2.【级数的部分和】——级数的前n项和

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$$ ——有限和

【部分和数列】当n依次取1，2，3，…时，它们构成一个新的数列$\{s_n\}$

$$s_1 = u_1, \quad s_2 = u_1 + u_2, \quad s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \cdots,$$

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \quad \cdots$$

3.【级数的收敛与发散】

当n无限增大时，如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的部分和数列$\{s_n\}$有极限s，即 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$，则称无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，这时极限 s 叫做级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和. 并写成

$$s = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

如果$\{s_n\}$没有极限，则称无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

即 常数项级数收敛(发散)$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n$存在(不存在)

余项 $r_n = s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} u_{n+i}$

即 $s_n \approx s$ 误差为 $|r_n|$ $(\lim_{n\to\infty} r_n = 0)$

【教材例 1】讨论等比级数(几何级数)

$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$ $(a \neq 0)$的收敛性.

【解】 $s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$

如果 $|q| \neq 1$时

当$|q| < 1$时, $\because$ $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ $\therefore$ $\lim_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a}{1-q}$ 收敛

当$|q| > 1$时, $\because$ $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$ $\therefore$ $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ 发散

如果$|q|=1$时

当$q=1$时，　$s_n = na \to \infty$　　级数发散

当$q=-1$时，级数变为$a-a+a-a+\cdots$

$s_{2n}=0\to 0$　$s_{2n-1}=a\to a$　$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} s_n$不存在　级数发散

$$\text{综上}\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \begin{cases} \text{当}|q|<1\text{时,收敛于}\dfrac{a}{1-q} \\ \text{当}|q|\geq 1\text{时,发散} \end{cases}$$

［要求熟记该结论］

【例 2】判别无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n}$的收敛性.

【解】 $\because \quad u_n = 2^{2n}3^{1-n} = 3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n,$

已知级数为等比级数，公比$q=\frac{4}{3},$

$\because |q|\geq 1,\qquad \therefore$ 原级数发散.

【教材例3】 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

【解】 (1)

$$s_n = \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n}$$

$$= (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln n)$$

$$= \ln(n+1) \to \infty \quad (n \to \infty)$$

所以级数 (1) 发散;

[技巧]

利用“拆项抵消”求和

(2) $$s_n=\frac{1}{\underline{1\cdot 2}}+\frac{1}{\underline{2\cdot 3}}+\frac{1}{\underline{3\cdot 4}}+\cdots+\frac{1}{\underline{n\cdot(n+1)}}$$

$$=\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}\to 1\quad(n\to\infty)$$

所以级数 (2) 收敛, 其和为 1 .

【小结】

[技巧]利用“拆项抵消”求和

在用定义判别级数的敛散性时，必须设法求出s_n的具体有限表达式，即须将s_n中的省略号“…”消去，才能求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ ，否则不能直接求出.

三、收敛级数的基本性质

【性质1】若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 s，即 $s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$，

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} k\, u_n$ 也收敛，其和为 $k s$.

【推广】 级数的每一项同乘一个不为零的常数，敛散性不变.

【性质2】 设两收敛级数 $s=\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\ \sigma=\sum_{n=1}^{\infty}v_n,$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 收敛, 其和为 $s \pm \sigma$.

【说明】 (1) 性质2 表明收敛级数可逐项相加或减 .

(2) 若两级数中一个收敛一个发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 必发散. (用反证法可证)

但若两个级数都发散, $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 不一定发散.

[例如] 取 $u_n=1,\quad v_n=-1,\quad$ 而 $u_n+v_n=0$

【例 4】求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right)$的和.

【解】 $\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n(n+1)}=5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=5$

$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$是等比级数，公比$q=\frac{1}{2}<1$, 首项是$\frac{1}{2}$,

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$, 故由性质2

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=5+1=6$$

【性质3】 在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的收敛性.

注意：「收敛性不变，但其和一般要变」

【性质4】 收敛级数加括弧后所成的级数仍收敛于原级数的和.

【注意】（逆命题不真）

收敛级数去括弧后所成的级数不一定收敛.

【例如】 $(1-1)+(1-1)+\cdots$ 收敛

$1-1+1-1+\cdots$ 发散

【推论】（逆否命题为真）如果加括弧后所成的级数发散, 则原来级数必发散. 用反证法可证

「常用此性质来判断一个级数发散」

【例5】判断级数的敛散性:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\cdots$$

【解】 考虑加括号后的级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}\right)+\cdots$$

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}=\frac{2}{n-1}$$

$$\therefore \quad \sum_{n=2}^{\infty}a_n=2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$ 发散，从而原级数发散.

已知调和级数发散

四、级数收敛的必要条件

【性质5】级数收敛的必要条件：

当n无限增大时，它的一般项 u_n 趋于零，即

$$\text{级数收敛} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

末项消逝的无穷级数之和有时有限而有时无限或不定

——雅各布-伯努利.

【注意】（逆否命题为真）

1. 如果级数的一般项不趋于零, 则级数发散;

例如 $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}+\cdots$ 发散

2. 必要条件不充分.

例如调和级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$

有 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, 但级数是发散的.

反证法 假设调和级数收敛，其和为s.

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}(s_{2n}-s_n)=s-s=0,$

又$\because$ $s_{2n}-s_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{n}{2n}=\frac{1}{2},$

便有 $0\geq\frac{1}{2}\quad(n\to\infty)$ 这是不可能的.

$\therefore$ 调和级数发散.

五、小结

常数项级数的基本概念

【基本审敛法】

1. 由定义, 若 $s_n \to s$, 则级数收敛;

2. 当 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, 则级数发散;

3. 按基本性质.