第四节　函数展开成幂级数

一、泰勒 (Taylor) 级数

二、函数展开成幂级数

三、小结

一、泰勒级数

两类问题： 在收敛域内

$$\text{幂级数}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \underset{\text{展 开}}{\overset{\text{求 和}}{\rightleftarrows}} \text{和函数 } s(x)$$

上节例题 $$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}\quad(-1<x<1)$$

【定义】 对于给定的函数 $f(x)$, 若存在幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$

在其收敛域内以 $f(x)$ 为和函数，则称函数 $f(x)$ 在该区间内

能展开成 $(x-x_0)$ 的幂级数.

收敛域

【复习】

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数, 则在该邻域内有 :

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

此式称为 $f(x)$ 的 n 阶泰勒公式， 其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad (\xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间})$$

称为拉格朗日余项 .

【定义】

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有任意阶导数， 则称

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

为 $f(x)$ 的泰勒级数，系数 $a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

当 $x_0=0$ 时, 泰勒级数又称为麦克劳林级数 .

【待解决的问题 】 1) 对此级数，它的收敛域是什么?

2) 在收敛域上，和函数是否为 $f(x)$? 不一定.

【定理1】 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$内具有各阶导数，则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数的充要条件是 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项满足： $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$，

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ （ξ在 x 与 x_0 之间）

证明

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\quad x\in U(x_0)$$

令 $S_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

$$f(x)=S_{n+1}(x)+R_n(x)$$

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left[f(x)-S_{n+1}(x)\right]=0,\quad x\in U(x_0)$$

【定理2】 若 $f(x)$ 能展成 x 的幂级数, 则这种展开式是唯一的， 且与它的麦克劳林级数相同.

分析 设 $f(x)$ 所展成的幂级数为

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots, \quad x\in(-R,R)$$

则 $a_0=f(0)$

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots; \qquad a_1=f'(0)$$

$$f''(x)=2!a_2+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots; \quad a_2=\frac{1}{2!}f''(0)$$

$\cdots\cdots$

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+\cdots; \qquad a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$$

二、函数展开成幂级数

展开方法 $\begin{cases} \text{直接展开法 — 利用泰勒级数} \\ \text{间接展开法 — 利用已知其级数展开式的函数展开} \end{cases}$

1. 直接展开法(泰勒级数法)

【步骤】

第一步 求函数及其各阶导数在 $x = 0$ 处的值；

第二步 写出麦克劳林级数，并求出其收敛半径 R；

第三步 判别在收敛区间$(-R, R)$内 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)$ 是否为0.

【教材例1】将函数 $f(x)=e^x$ 展开成 x 的幂级数.

【解】 $\because\ f^{(n)}(x)=e^x,\quad f^{(n)}(0)=1\ \ (n=0,1,\cdots),$ 故得级数

$$e^x \longleftrightarrow \quad 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

其收敛半径为 $\quad R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\Big/\frac{1}{(n+1)!}=+\infty$

对任何有限数 x，其余项满足

$$|R_n(x)|=\left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\qquad (\xi\text{在}0\text{与}x\text{之间})$$

$$\because\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\text{ 收敛 }\ \therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0\quad \therefore\ |R_n(x)|\to 0\ \ n\to\infty$$

故 $\quad e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$

【教材例2】将 $f(x)=\sin x$ 展开成 x 的幂级数.

【解】 $\because\ f^{(n)}(x)=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

$$\therefore\ f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k\\ (-1)^k, & n=2k+1\end{cases}\qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

得级数:

$$\sin x \longleftrightarrow x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots$$

其收敛半径为 $R=+\infty$, 对任何有限数 x, 其余项满足

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\sin(\xi+(n+1)\frac{\pi}{2})}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

$$\therefore\ \sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots$$

$$x\in(-\infty,+\infty)$$

2.间接展开法（重点）

根据唯一性，利用常见展开式，　通过变量代换，四则运算，恒等变形，逐项求导，逐项积分等方法，求展开式.（优点：避免研究余项）

［例如］①

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

例4 将函数 $\frac{1}{1+x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

解 因为

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots\quad(-1<x<1)$$

把 x 换成 x^2，得

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots\quad(-1<x<1)$$

② $$\arctan x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x(1-t^2+t^4-t^6+\cdots)dt$$

$$=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\qquad x\in[-1,1]$$

例5 将函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数.

解 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1<x<1)$

从 0 到 x 积分, 得

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1},$$

收敛域为 $-1<x\leq 1$.

例6 将 $\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展成 $x-1$ 的幂级数.

解

$$\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{2(1+x)}-\frac{1}{2(3+x)}$$

$$=\frac{1}{4\left(1+\frac{x-1}{2}\right)}-\frac{1}{8\left(1+\frac{x-1}{4}\right)}\quad(|x-1|<2)$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}-\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{4^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n\quad(-1<x<3)$$

【常用已知和函数的幂级数】

【注意各收敛域】

$$(1)\ \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x};\quad x \in (-1,1)$$

$$(2)\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x};\quad x \in (-1,1)$$

$$(4)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x;\quad x \in (-\infty,+\infty)$$

$$(5)\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x;\quad x \in (-\infty,+\infty)$$

$$(6)\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x);\quad x \in (-1,1]$$

三、小结

1. 如何求函数的泰勒级数;

2. 泰勒级数收敛于函数的条件; $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

3. 函数展开成泰勒级数的方法. $\begin{cases} \text{1.直接法} \\ \text{2.间接法} \end{cases}$

4. 常用函数的幂级数展开式

【思考与练习】

1. 函数 $f(x)$ 在 x_0 处 "有泰勒级数" 与 "能展成泰勒级数" 有何不同 ?

[提示] 后者必需证明 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0,$ 前者无此要求.