$$y = f(x), x \in R.$$

$$\uparrow$$

数列是以正整数为定义域的函数：$x_n = f(n), n \in N^+.$

数列极限：当自变量n无限增大时，对应函数值无限接近一个确定常数a $(n \to \infty)$

函数极限：在自变量x的某一个变化过程中，对应函数值无限接近一个确定的常数，这个确定的数就称为这一变化过程中函数的极限。

对 $y=f(x)$,自变量变化过程的六种形式:

(1) $x\to\infty$ (4) $x\to x_0$

(2) $x\to+\infty$ (5) $x\to x_0^+$

(3) $x\to-\infty$ (6) $x\to x_0^-$

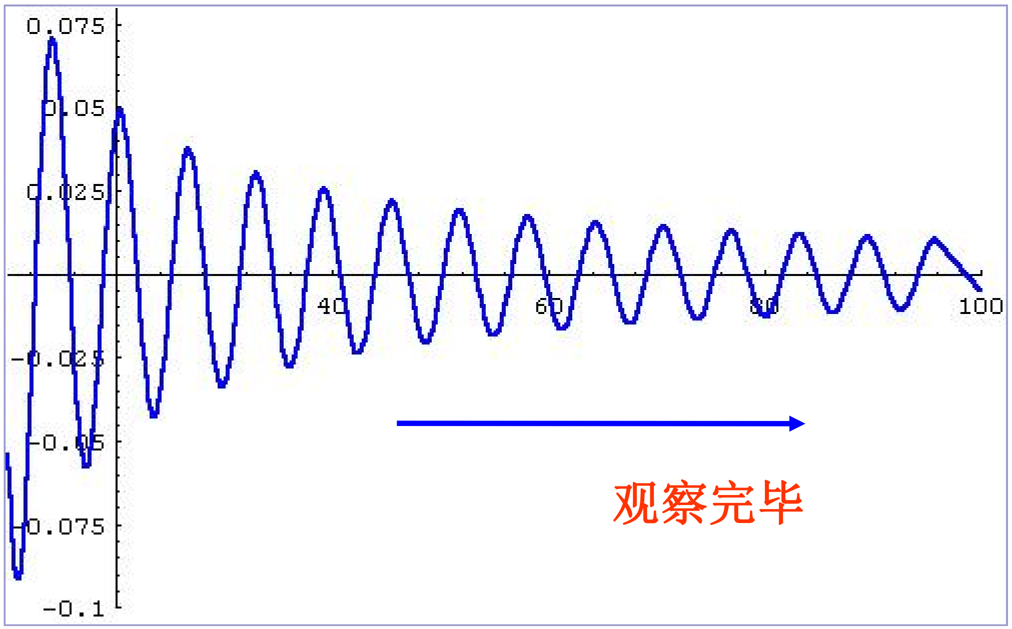
第三节 函数的极限

自变量趋向无穷大时函数的极限

自变量趋向有限值时函数的极限

1. 自变量 $x\to\infty$ 时, 函数的极限

引例 观察函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x\to+\infty$ 时的变化趋势.



通过观察得到:

$$\text{当 } x \text{ 无限增大时}, f(x)=\frac{\sin x}{x} \text{ 无限接近于 } 0.$$

函数 $f(x)$ 在$x\to+\infty$ 时极限的直观定义：

定义1 设 $f(x)$ 当 x 大于某一正数时有定义，

当 x 无限增大时, 函数值 $f(x)$无限接近于一个确定的常数 A ,称 A为 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$时的极限.

记作：

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A, \quad \text{或} \quad f(x)\to A\,(x\to+\infty)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

类似可以定义函数 $f(x)$ 在$x\to-\infty$ 时的极限。

定义2 设 $f(x)$ 当 x 小于某一负数时有定义，

当 $-x$ 无限增大时，函数值 $f(x)$无限接近于一个确定的常数 A ,称 A为 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$时的极限.

记作：

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A, \quad \text{或} \quad f(x)\to A\,(x\to-\infty)$$

函数 $f(x)$ 在$x\to\infty$ 时极限的直观定义：

定义3 设 $f(x)$ 当 |x| 大于某一正数时有定义，

当|x|无限增大时，函数值 $f(x)$无限接近于一个确定的常数 A ,称 A为 $f(x)$ 当 $x\to\infty$时的极限.

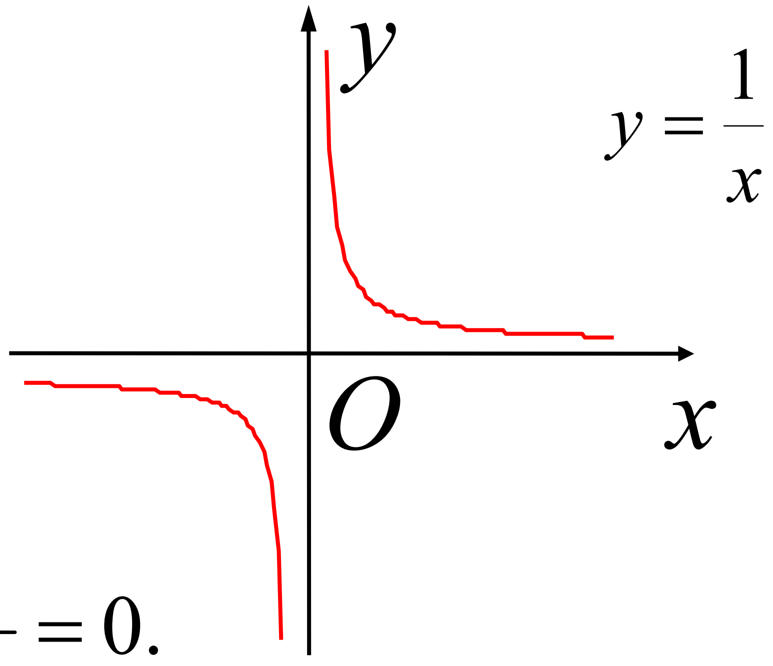
记作：

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A, \qquad \text{或} \quad f(x)\to A\ (x\to\infty)$$

结论： 函数$f(x)$在$x\to\infty$极限存在的充要条件：

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = A.$$

例



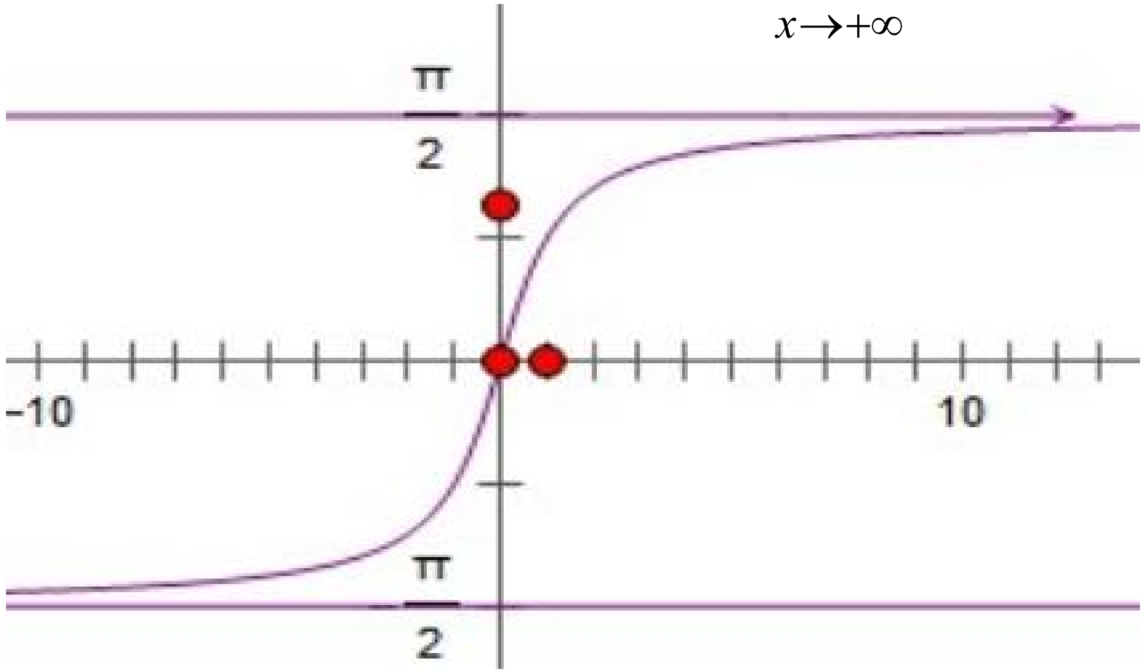
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

对于函数 $y=arctan\ x$ 如图，

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}.$$



$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}.$$

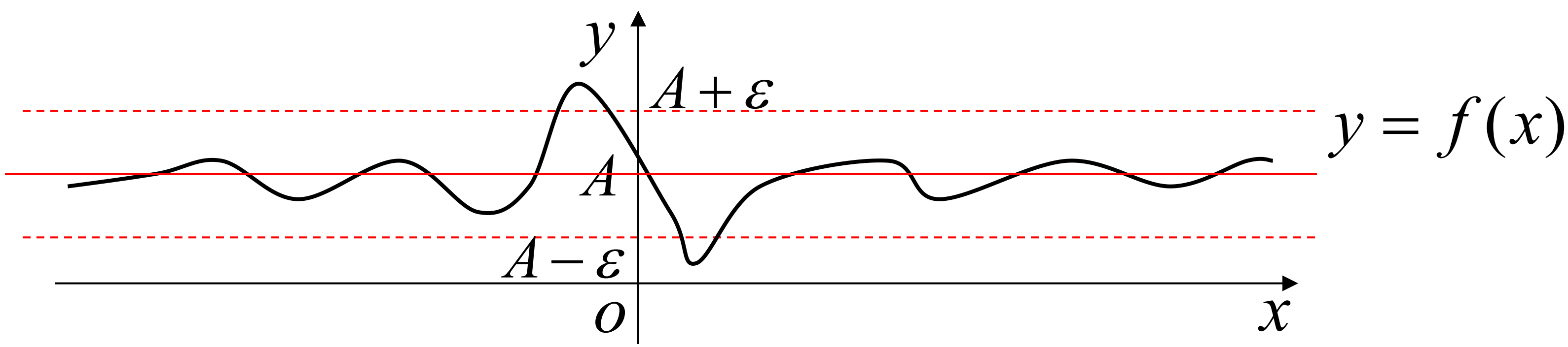
$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在

几何解释

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon \to 0$$

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$



几何上，函数 $y=f(x)$ 的图形位于两直线之间.

结论：函数$f(x)$在$x\to\infty$极限存在的充要条件：

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=A.$$

例

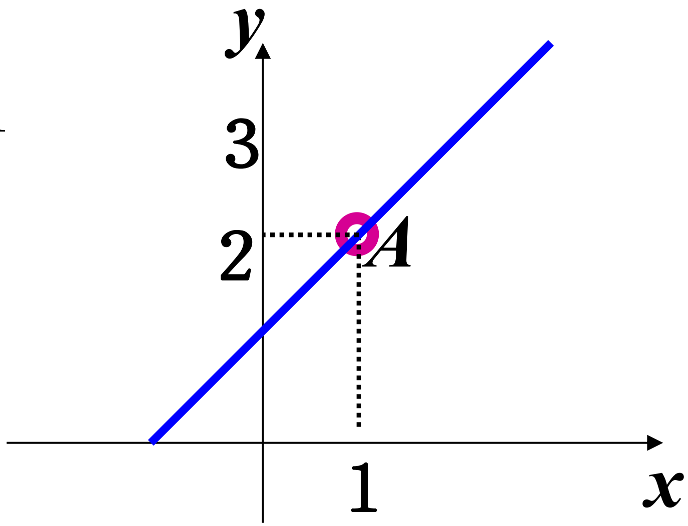
(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+1)$ 不存在

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2+1}=$ 0

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ 不存在

2. 自变量 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限

引例 ① 函数 $f(x)=x+1$ 在 $x=1$ 处的极限为 2



②函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 处的极限为 2

结论： $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$的极限是否存在,与 $f(x)$在 x_0 处是否有定义无关.

函数$f(x)$在$x \to x_0$时极限的直观定义：

定义4 设 $f(x)$在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，

当$x \to x_0$时，函数$f(x)$无限接近一个确定的常 数A，

则称A是函数$f(x)$当$x \to x_0$时的极限。

记作：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad 或 f(x) \to A(x \to x_0).$$

上例中

$$\lim_{x \to 1}(x+1) = 2, \quad \lim_{x \to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2,$$

单侧极限 $\begin{cases} \text{左极限} \\ \text{右极限} \end{cases}$

$$x \to x_0 \begin{cases} x\text{从左侧无限趋近 } x_0\text{, 记作 } x \to x_0^-; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{或 } x \to x_0 - 0 \\ x\text{从右侧无限趋近 } x_0\text{, 记作} x \to x_0^+; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{或 } x \to x_0 + 0 \end{cases}$$

左极限: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(x_0^-) = A.$ 或 $f(x_0 - 0) = A.$

右极限: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ 或 $f(x_0^+) = A.$ 或 $f(x_0 + 0) = A.$

结论: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$

用左右极限求极限的三种情况

1、分段函数在分段点处求极限必须用左右极限。

2、绝对值函数求极限。

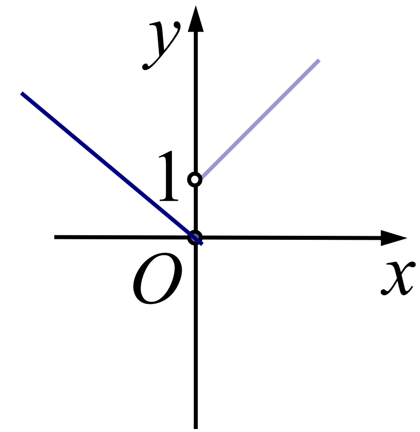
3、含有 e^{∞} 类型的极限。

1）分段点处求极限

分段点处左右表达式不同

例1 给定函数

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0\\ 1+x, & x>0\end{cases}$$



讨论 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的极限是否存在 .

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0,$

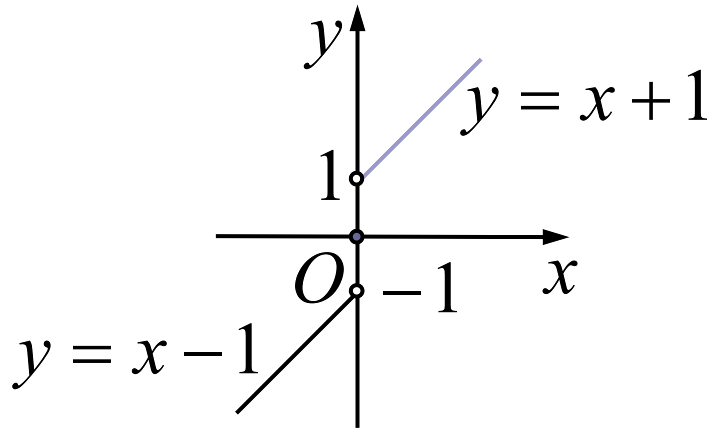
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1$$

显然 $f(0^-)\ne f(0^+)$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在 .

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)\ne \lim_{x\to x_0^+} f(x) \quad f(x_0-0)\ne f(x_0+0)$$

例2. 给定函数

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0\quad, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$$



讨论 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的极限是否存在 .

解: 因为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x-1) = -1$$

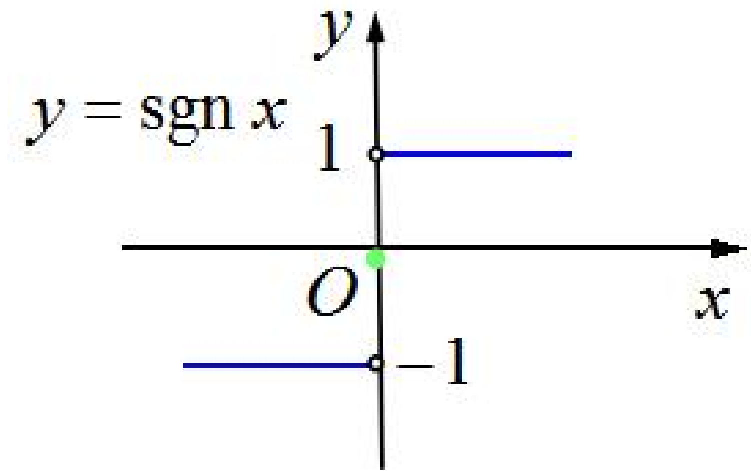
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x+1) = 1$$

显然 $f(0^-)\neq f(0^+)$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在 .

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

例3 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



解：因为

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

显然 $f(0^-) \neq f(0^+)$，所以 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在 .

例4

分段点处
左右表达
式相同

$$f(x)=\begin{cases} x+1, x\neq 0 \\ 0 \quad , x=0 \end{cases},\text{求}x\to 0\text{时，}f(x)\text{的极限.}$$

$$\text{解:}\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(\text{x}+1)=1$$

练习:

$$f(0-0)=1=f(0+0),$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)=1.$$

$$\mathbf{1、}\ f(x)=\begin{cases} 2x+1, x<0 \\ 0 \quad , x=0 \\ x+1 \ , x>0 \end{cases},\text{求}x\to 0\text{时}f(x)\text{的极限.}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(\cos x-1)$$

$$=0$$

$$\mathbf{2、}\ f(x)=\begin{cases} \cos x-1, x\neq 0 \\ 0 \quad , x=0 \end{cases},\text{求}x\to 0\text{时}f(x)\text{的极限.}$$

2）绝对值函数求极限

例5 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x} = ?$

1^o $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} (-1) = -1$$

$$f(0^-) \neq f(0^+),$$

所以$\lim\limits_{x\to0} f(x)$不存在.

2^0直接用左右极限求

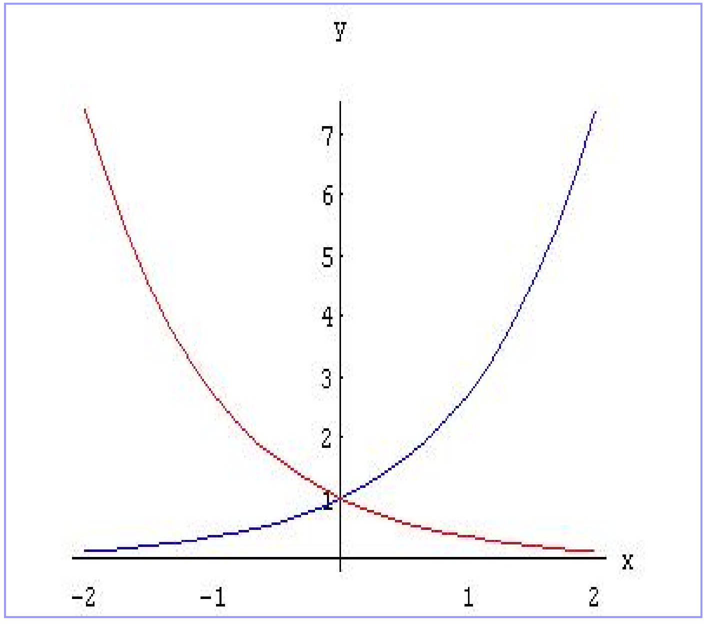
$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to0^-} \frac{-x}{x} = -1,$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

$$f(0^-) \neq f(0^+),$$

所以$\lim\limits_{x\to0} f(x)$不存在.

3）$\boxed{\text{含}e^{\infty}\text{类型极限}}$ $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = ?$



解：$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty} e^x$不存在.

思考：$\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$

解：$x \to 0^+$时，$\frac{1}{x} \to +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

$x \to 0^-$时，$\frac{1}{x} \to -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} \neq \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$，所以$\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$不存在.

3. 函数极限的性质

下面仅以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$为代表讨论.

性质1（唯一性） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,极限值必唯一.

性质2（局部有界性） 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,$

则在x_0的某一空心领域内，有 $|f(x)|\le M.$

性质3（局部保号性） 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,$且$A>0,$ $(A<0)$

则在x_0的某一空心领域内，有$f(x)>0.$ $(f(x)<0)$

（由极限值的符号推函数值的符号）

推论 如果在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x) \ge 0$

（或 $f(x) \le 0$）而且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,那么 $A \ge 0$（或 $A \le 0$ ）

性质4 夹逼定理

若对于点x_0的某一邻域内任意一点x，不等式$g(x) \le f(x) \le h(x)$

成立; 且 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A,$

则 $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A.}$

内容小结

1. 求函数极限

2. 了解函数极限的 唯一性；局部有界性；局部保号性性质:

两个重要结论

结论1: 函数$f(x)$在$x\to\infty$极限存在的充要条件:

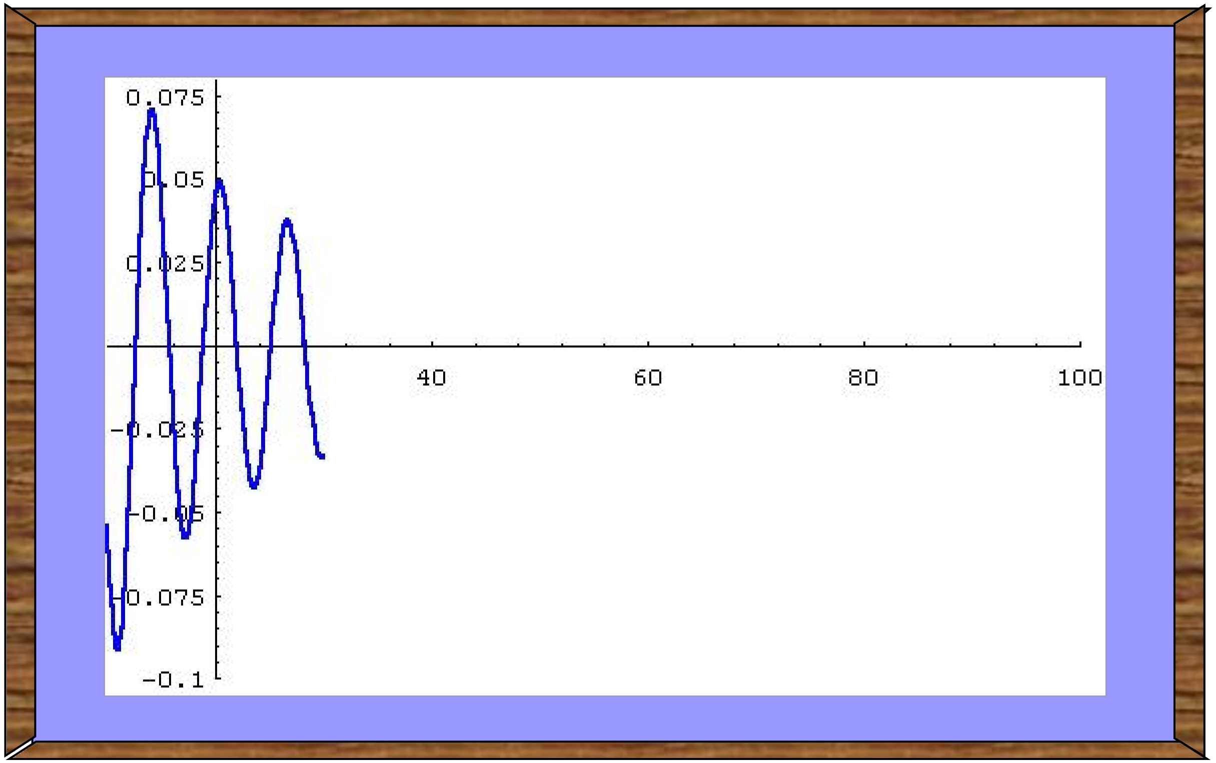
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = A.$$

结论2: 函数$f(x)$在$x\to x_0$时极限存在的充要条件:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A$$

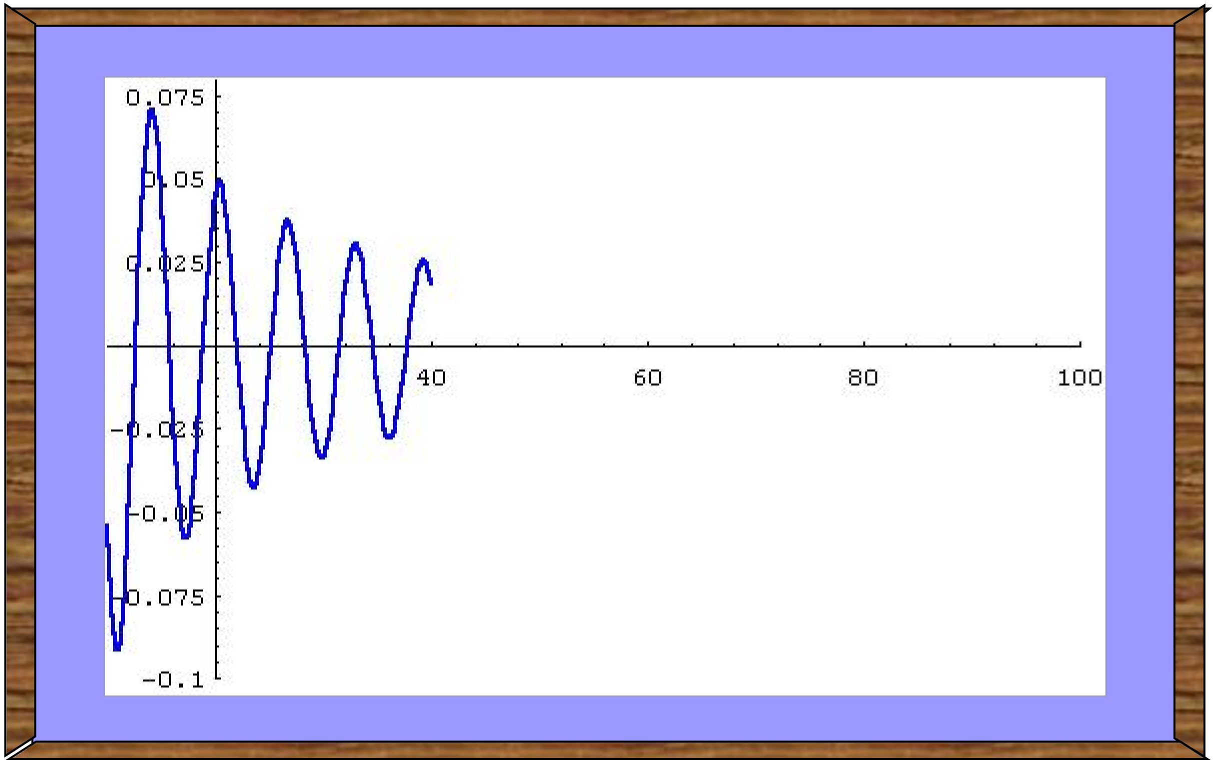
一、自变量趋向无穷大时函数的极限

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的变化趋势.



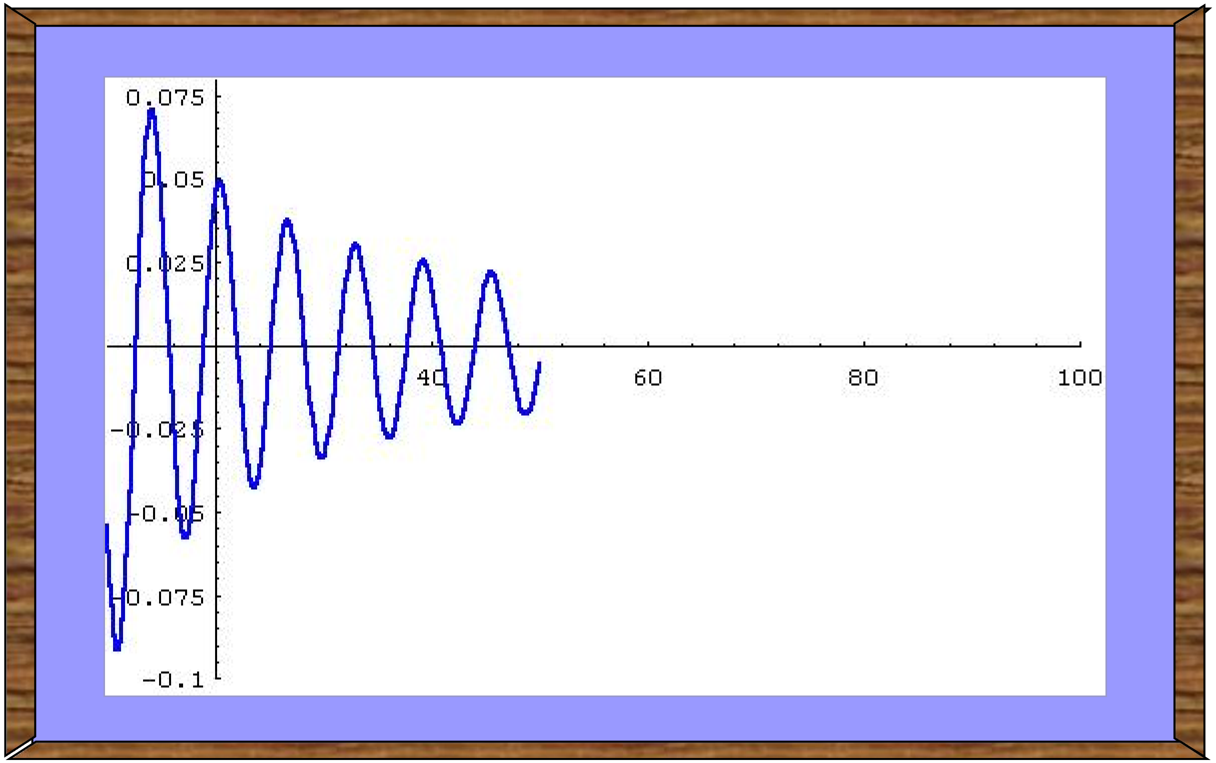
一、自变量趋向无穷大时函数的极限

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的变化趋势.



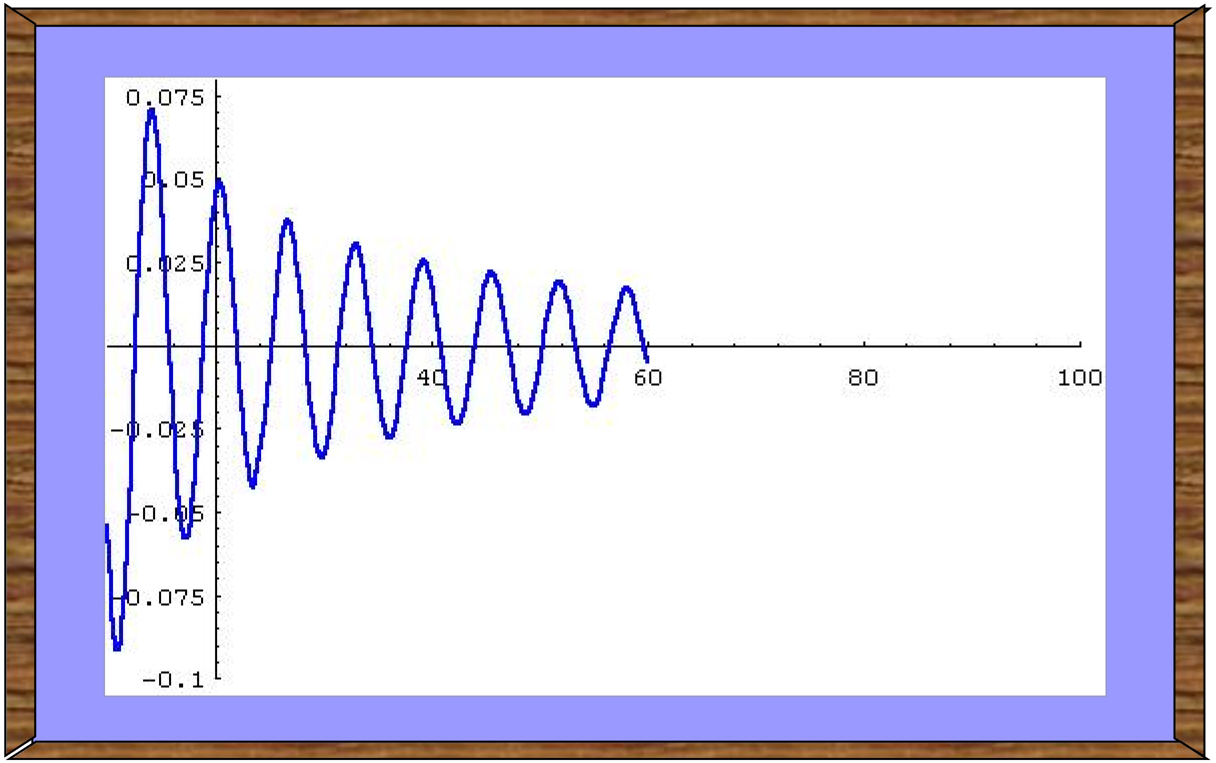
一、自变量趋向无穷大时函数的极限

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的变化趋势.



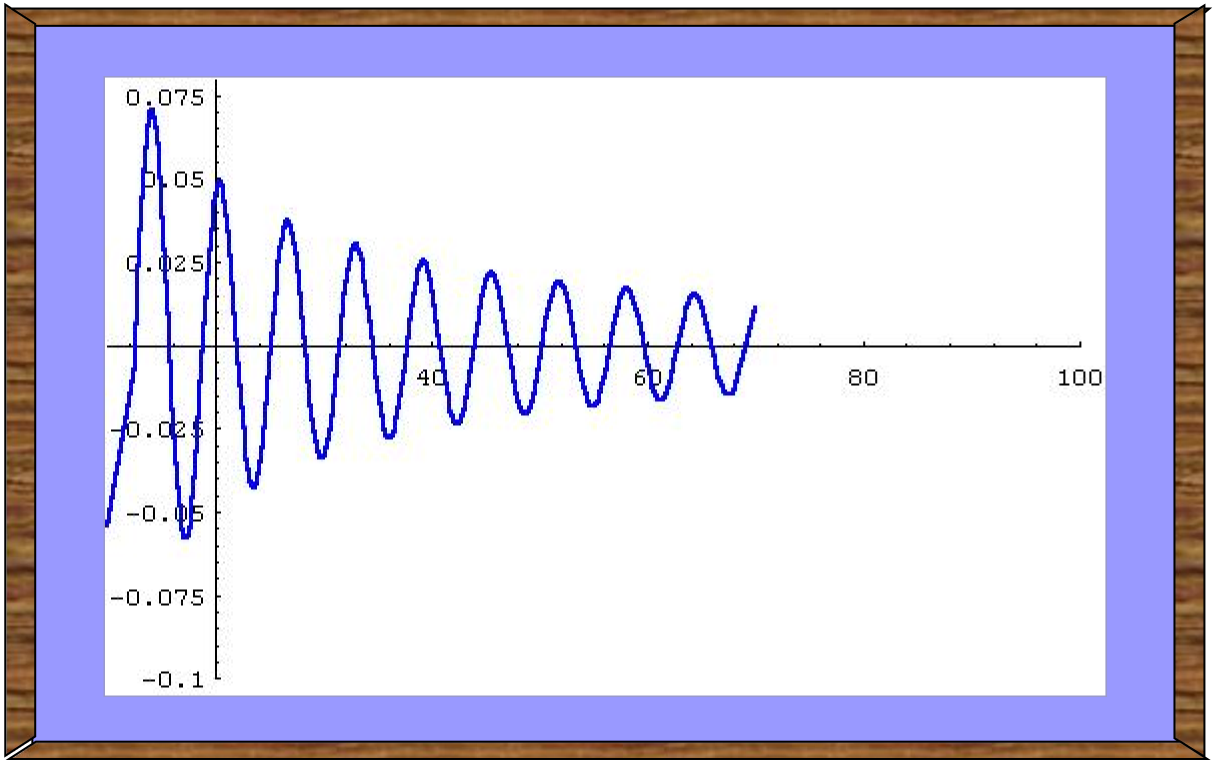
一、自变量趋向无穷大时函数的极限

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的变化趋势.



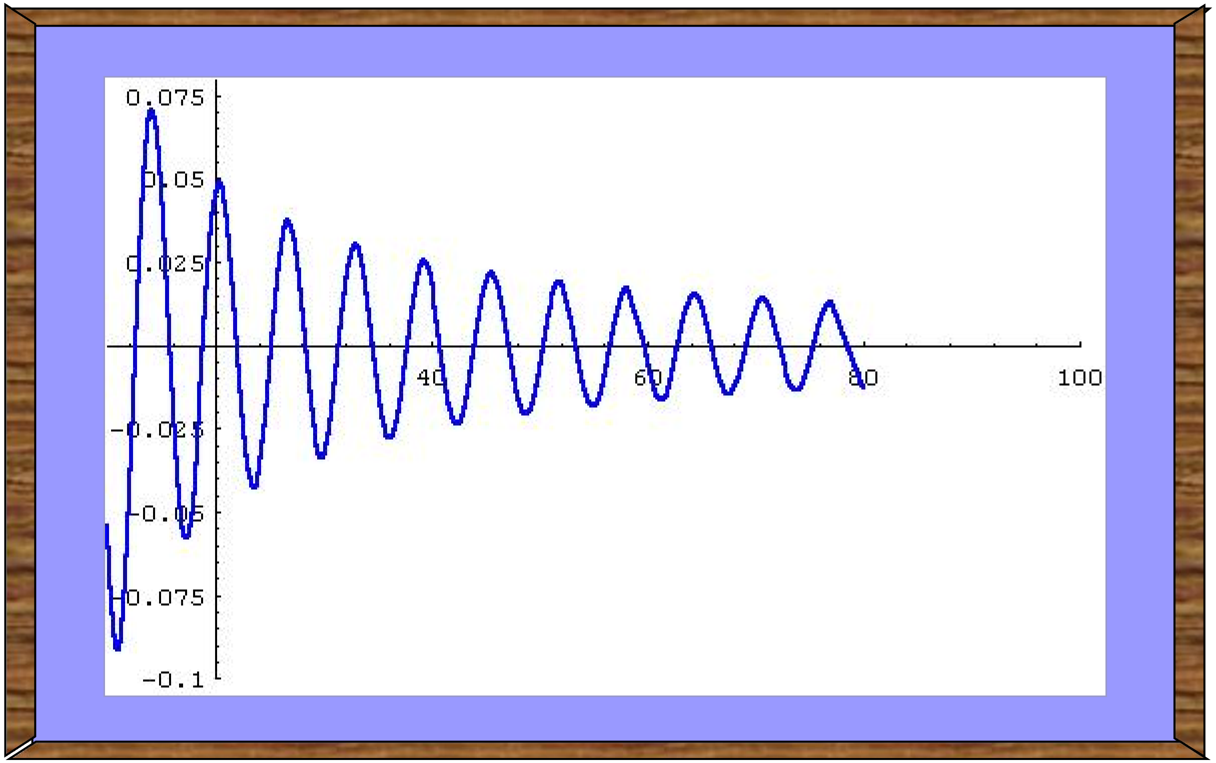
一、自变量趋向无穷大时函数的极限

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的变化趋势.



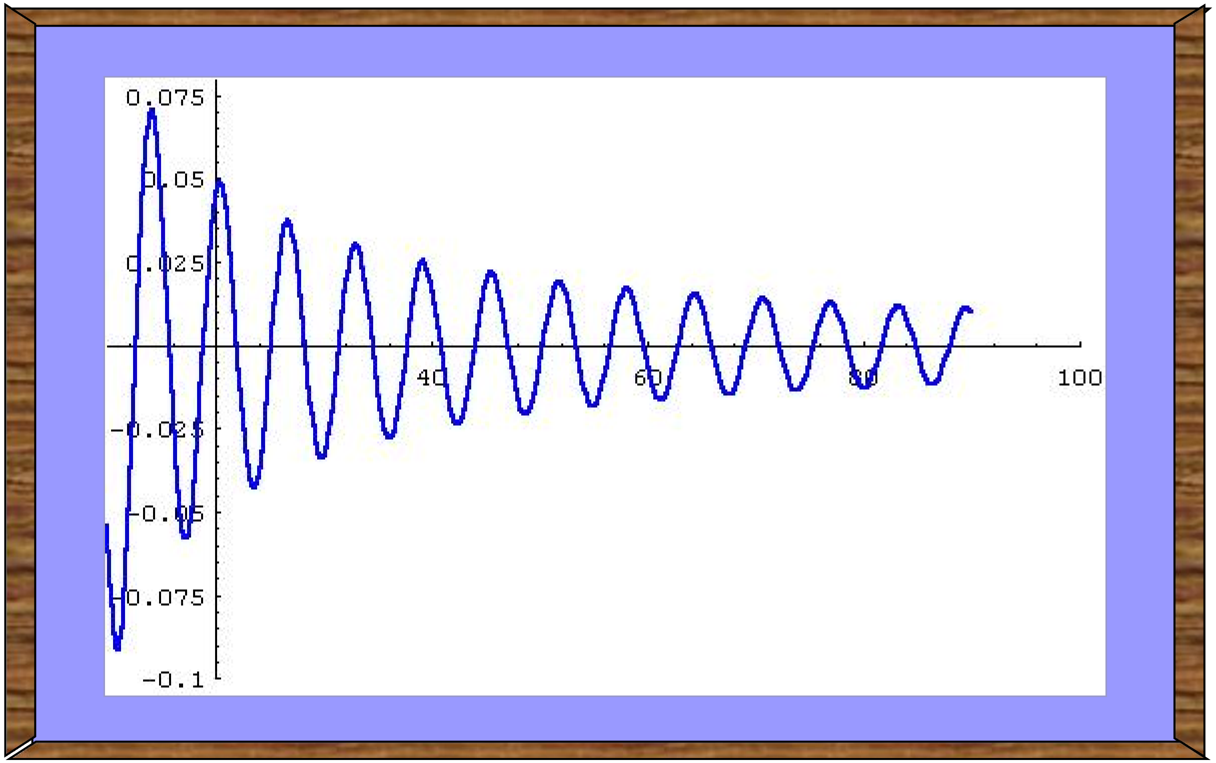
一、自变量趋向无穷大时函数的极限

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的变化趋势.



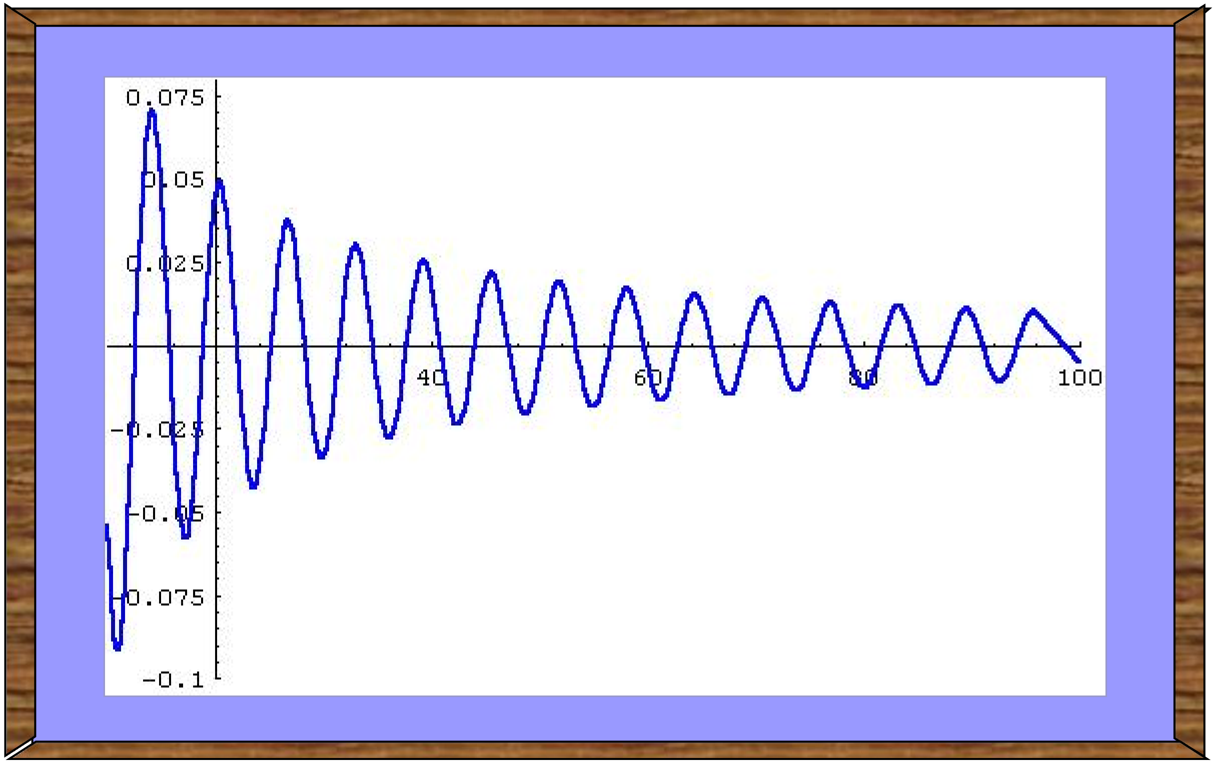
一、自变量趋向无穷大时函数的极限

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的变化趋势.



一、自变量趋向无穷大时函数的极限

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的变化趋势.



一、自变量趋向无穷大时函数的极限

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的变化趋势.