

## 第9讲 微分方程

### 9.1 微分方程的基本概念

来看一个最简单的微分方程：

$$y' = x$$

则可以得到：

$$y = \frac{x^2}{2} + C$$

这就是微分方程的解。需要注意到三个方面：

- (1) 微分方程最大的特点就是方程中含有导数项；
- (2) 求解微分方程，并非是要给 $y, x$ 以确定的数值，而是解出 $y, x$ 之间的关系式；
- (3) 微分方程的解并非唯一的，需要加入一个未定参数 $C$ 。

如果微分方程改变条件：

$$y' = x \quad (x = 0, y = 1)$$

得到对应的解就变成唯一的：

$$y = \frac{x^2}{2} + 1$$

由此，我们管“ $x = 0, y = 1$ ”叫做这个微分方程的定解条件，对应的解分为“通解”和“特解”，顾名思义，就是针对微分方程本身的通用的解，以及针对特定条件所确定的唯一的解：

$$\text{通解：} y = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\text{特解：} y = \frac{x^2}{2} + 1$$

一辆小车从原地静止开始加速，其速度随时间的变化规律是 $v = 4t$ ，请写出其位移 $x$ 关于时间的表达式。

根据题目可列出下列方程：

$$\frac{dx}{dt} = 4t \quad (t = 0, x = 0)$$

解得该方程为：

$$x = 2t^2$$

再看这样一个微分方程：

$$y'' = x$$

也不难得得出：

$$y' = \frac{x^2}{2} + C_1$$

进而：

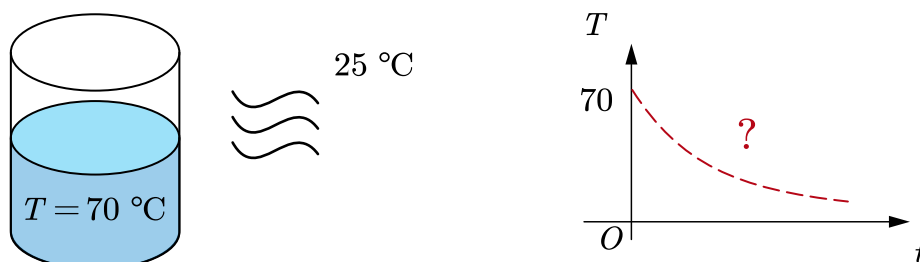
$$y = \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$$

这里的方程与上述微分方程不同的是，出现了二阶导数。微分方程是有“阶数”之分的，方程中出现的最高阶导数为2阶，则被称之为二阶微分方程。我们的主要研究对象就是一阶和二阶的微分方程。

而且二阶微分方程求得的通解中，会有两个未定参数 $C_1$ 和 $C_2$ 。同理，三阶微分方程就会有 3 个未定参数。

微分方程可以帮助我们解决什么问题：

(1) 水温冷却：

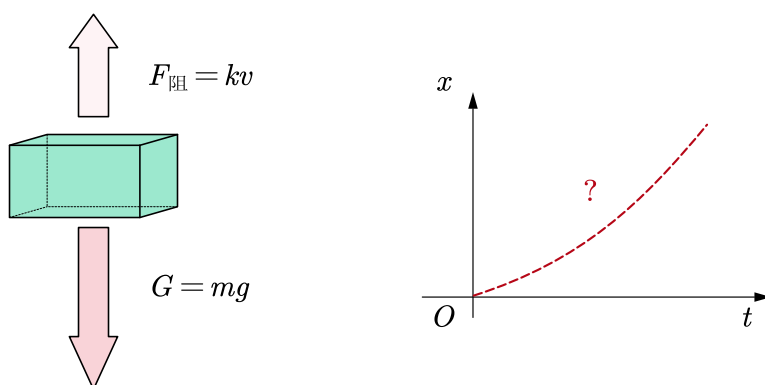


已知物体传热的速率与温差成正比例。假设室温为  $25^{\circ}\text{C}$ ，一杯水在  $t = 0$  时温度  $T = 70^{\circ}\text{C}$ ，那么则可以建立下面的方程：

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 25)$$

假设其中的  $k = 0.2$ ，那么请写出水温随时间变化的函数关系。

(2) 阻尼运动：

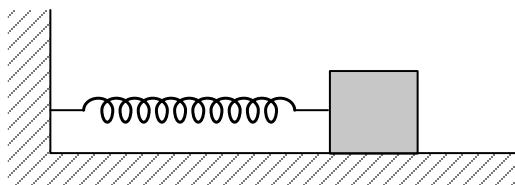


物体在空中下落时，主要受到重力和空气阻力的作用，重力大小为  $mg$ ，假设空气阻力大小与速度成正比例  $f_{\text{阻}} = -kv$ ，则可以写出下列微分方程：

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - \frac{k}{m}v = g - \frac{k}{m}\frac{dx}{dt}$$

那么如何写出物体的下落高度与时间的关系呢？

(3) 弹簧的简谐运动：



一个质量为  $m$  的物块在弹簧一端，弹簧另一端固定在壁面上，弹簧质量不计，不考虑摩擦力，弹性系数为  $k$ ，那么物体的位移随时间的方程，可以写为下列微分方程：

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

那么物块的位移是怎样变化的？

## 9.2 一阶微分方程

最为直接的求解方法：分离变量法

求解微分方程： $y' = 2xy$ .

解：第一步：将题目中的 $y'$ 写为 $\frac{dy}{dx}$ ：

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

第二步：将变量 $y$ 、 $x$ 分离到等号两侧：

$$\frac{dy}{y} = 2xdx$$

第三步：左右两侧求不定积分：

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 2xdx$$

$$\ln|y| = x^2 + C, \text{ 化简整理: } y = Ce^{x^2}$$

注意：将解写成 $\ln y = x^2 + C$ 、 $y = e^C e^{x^2}$ 都不正确，都不符合原有的 $y$ 的取值范围。

对于  $y' = p(x) \cdot y$  这种类型的微分方程，基于分离变量法，它的通解表达式为：

$$y = Ce^{\int p(x)dx}$$

已知曲线 $y = f(x)$ 过点 $(0, -\frac{1}{2})$ ，且其上任意一点 $(x, y)$ 的切线斜率为 $x \cdot \ln(1 + x^2)$ ，求曲线方程。

$$dy = x \ln(1 + x^2) dx$$

$$y = \int x \ln(1 + x^2) dx = \frac{1}{2} \int \ln(1 + x^2) d(1 + x^2)$$

$$y = \frac{1}{2} (1 + x^2) [\ln(1 + x^2) - 1] + C$$

根据 $x = 0, y = -\frac{1}{2}$ 代入可得： $C = 0$ ，于是：

$$y = \frac{1}{2} (1 + x^2) [\ln(1 + x^2) - 1]$$

连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x) = \int_0^{2x} f(\frac{t}{2}) dt + \ln 2$ ，请写出 $f(x)$ 的表达式。

对题目给出的关系式，左右两侧对 $x$ 求导数：

$$f'(x) = 2f(x)$$

解得：

$$f(x) = Ce^{2x}$$

由于 $f(0) = \ln 2$ ，则 $C = \ln 2$ ，所以

$$f(x) = e^{2x} \ln 2$$

设 $f(x)$ 为定义在 $[0, +\infty)$ 上的单调连续的凹函数，曲线 $C: y = f(x)$ 通过点 $(0, 0)$ 及 $(1, 1)$ ，在曲线 $C$ 上任取一点 $M(x, y)$ ，设点 $N(x, 0)$ ，点 $O(0, 0)$ ，曲线 $C$ 与直线 $MO$ 围成的图形的面积记为 $S_1$ ，三角形 $OMN$ 的面积为 $S_2$ ，已知 $S_1$ 是 $S_2$ 的 $\frac{1}{5}$ ，试求 $f(x)$ 表达式，以及曲线 $C$ 与直线 $y=x$ 围成的图形绕 $x$ 旋转一周的体积。

列写方程:  $\frac{xy}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \int_0^x f(t)dt$ , 两侧求导为  $\frac{2}{5}(xy' + y) = y$ , 即  $y' = \frac{3}{2x}y$

解该微分方程, 得  $y = Cx^{\frac{3}{2}}$ , 代入(1,1)可知  $y = x^{\frac{3}{2}}$

旋转一周得体积为:  $V = \int_0^1 (\pi x^2 - \pi x^3)dx = \frac{\pi}{12}$

对于  $y' + p(x)y = q(x)$  的方程, 则对应的通解为:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[ \int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)dx + C \right]$$

推理过程: 原方程左右两侧同乘  $e^{\int p(x)dx}$

$$e^{\int p(x)dx} y' + e^{\int p(x)dx} p(x)y = q(x)$$

$$[y \cdot e^{\int p(x)dx}]' = e^{\int p(x)dx} q(x)$$

$$y \cdot e^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)dx + C$$

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[ \int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)dx + C \right]$$

求解微分方程  $y' + y \tan x = \cos x$

$p(x) = \tan x, q(x) = \cos x$ , 基于线性微分方程的公式可知:

$$y = e^{-\int \tan x dx} \left[ \int e^{\int \tan x dx} \cdot \cos x dx + C \right] = \cos x \left( \int \frac{1}{\cos x} \cdot \cos x dx + C \right) = \cos x (x + C)$$

求解微分方程:  $(x - 2xy - y^2) \frac{dy}{dx} + y^2 = 0$

此方程并非是关于  $y$  的线性方程, 但是我们通过观察发现式中的  $x$  是线性的, 则可以考虑把  $x$  当作因变量, 把  $y$  当作自变量, 进行转化:

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1 - 2y}{y^2} x = 1$$

进而:

$$x = e^{-\int \frac{1-2y}{y^2} dy} \left[ \int e^{\int \frac{1-2y}{y^2} dy} \cdot 1 dy + C \right] = y^2 + C y^2 e^{\frac{1}{y}}$$

伯努利方程 (考研数学仅“数学一”涉及该内容):

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

设  $u = y^{1-n}$ , 则  $\frac{du}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx}$ ,  $y' = \frac{y^n}{1-n} u'$ , 代入可得:

$$u' + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x)$$

求解微分方程  $y' + \frac{1}{x}y = \frac{y^2}{x^2}$ , 得到满足  $y|_{x=1} = 1$  的特解

该方程符合伯努利方程特征, 故设  $u = y^{-1}$ , 于是  $u' = -y^{-2} \cdot y', y' = -y^2 \cdot u' = \frac{-u'}{u^2}$

$$\begin{aligned} \frac{-u'}{u^2} + \frac{1}{ux} &= \frac{1}{u^2 x^2} \\ u' - \frac{1}{x}u &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

$$u = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left[ \int e^{\int -\frac{1}{x} dx} \cdot -\frac{1}{x^2} dx + C \right]$$

$$u = x \left( \frac{1}{2x^2} + C \right) = \frac{1}{2x} + Cx$$

$$y = \frac{2x}{1 + 2Cx^2}$$

根据定解条件，可知  $1 = \frac{2}{1+2C}$ ，因而  $C = \frac{1}{2}$ ，所以特解为  $y = \frac{2x}{1+x^2}$

变量替换法一：方程中除了  $dx, dy$ ，所有其他的变量都可以化为 “ $\frac{y}{x}$ ” 的形式

求解微分方程：  $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$ .

解：左右除以  $x^2$ ，将等式中的每一项化为关于  $\left(\frac{y}{x}\right)$  的表达式

$$\left[ 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \right] dx - \frac{y}{x} dy = 0$$

将  $y = ux, dy = udx + xdu$  代入方程中，再分离变量求解：

$$(1 + u^2)dx - u(udx + xdu) = 0$$

$$dx - uxdu = 0$$

$$\frac{dx}{x} = udu$$

$$\frac{u^2}{2} = \ln|x| + C$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \ln|x| + C$$

解微分方程  $y' = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$ .

答案：令  $u = \frac{y}{x}$ ，则  $dy = udx + xdu$ ，代入原方程得  $\frac{udx + xdu}{dx} = u + \tan u$

$$\text{分离变量} \frac{\cos u}{\sin u} du = \frac{dx}{x}$$

两边积分得  $\ln|\sin u| = \ln|x| + \ln|C|$ ，即  $\sin u = Cx$

故原方程的通解为  $\sin \frac{y}{x} = Cx$

变量替换法二：将  $(ax + by + c)$  替换为  $u$

解微分方程  $dy = (3x + 2y + 1)^2 dx$

令  $u = 3x + 2y + 1$ ，则有  $du = 3dx + 2dy$ ， $dy = \frac{du - 3dx}{2}$  代入：

$$\frac{du - 3dx}{2} = u^2 dx$$

$$\frac{du}{2u^2 + 3} = dx$$

左右求不定积分可得：  $\frac{\sqrt{6}}{6} \arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{3}u\right) = x + C$

$$\frac{\sqrt{6}}{6} \arctan\left[\frac{\sqrt{6}}{3}(3x + 2y + 1)\right] = x + C$$

一阶微分方程方法总结：

方程名称	方程特征	求解方法
一阶线性齐次微分方程	$y' = p(x) \cdot y$	$y = Ce^{\int p(x)dx}$
一阶线性非齐次微分方程	$y' + p(x)y = q(x)$	$y = e^{-\int p(x)dx} \left[ \int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)dx + C \right]$
伯努利方程	$y' + p(x)y = q(x)y^n$	$u = y^{1-n}, y' = \frac{y^n}{1-n} u'$
变量代换一： $u = \frac{y}{x}$	$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$	$y = ux, dy = udx + xdu$
变量代换二： $u = ax + by + c$	$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$	$u = ax + by + c, dy = \frac{du - adx}{b}$

### 9.3 二阶微分方程

首要考虑的思路是，能否将二阶方程通过变量代换的方法，将其转化为一阶方程。可降阶的二阶微分方程有如下两类（考研内容中仅数学一、数学二要求掌握这部分）：

- （1）方程中没有  $y$ ，表达式为  $y'' = f(x, y')$ ，则设  $y' = p$ ，  $y'' = \frac{dp}{dx}$
- （2）方程中没有  $x$ ，表达式为  $y'' = f(y, y')$ ，则设  $y' = p$ ，  $y'' = p \frac{dp}{dy}$

求解微分方程：  $(1 + x^2)y'' = 2xy'$

由于方程中没有  $y$ ，表达式为  $y'' = f(x, y')$ ，则设  $y' = p$ ，  $y'' = \frac{dp}{dx}$ ，代入方程中得：

$$(1 + x^2) \frac{dp}{dx} = 2xp$$

通过分离变量方法求解：

$$\frac{dp}{p} = \frac{2x}{1 + x^2} dx, \quad \ln|p| = \ln(1 + x^2) + C$$

$$|p| = (1 + x^2) \cdot e^C, \quad p = C_1(1 + x^2)$$

将  $p = y' = \frac{dy}{dx}$  代入得：

$$\frac{dy}{dx} = C_1(1 + x^2)$$

分离变量求解：

$$dy = C_1(1 + x^2)dx, \quad y = C_1 \left( x + \frac{x^3}{3} \right) + C_2$$

求解微分方程：  $2y \cdot y'' + (y')^2 = 0 (y > 0)$

由于方程中没有  $x$ ，表达式为  $y'' = f(y, y')$ ，则设  $y' = p$ ，  $y'' = p \frac{dp}{dy}$ ，代入方程得：

$$2y \cdot p \frac{dp}{dy} + p^2 = 0$$

此时为关于  $p$ 、 $y$  的一阶微分方程，通过分离变量方法求解：

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{2y}, \quad \ln|p| = -\frac{1}{2} \ln y + C = \ln \frac{1}{\sqrt{y}} + C$$

$$|p| = \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot e^c, \quad p = \pm \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot e^c = C_1 \frac{1}{\sqrt{y}}$$

又因为  $p = y' = \frac{dy}{dx}$ , 代入得:  $\frac{dy}{dx} = C_1 \frac{1}{\sqrt{y}}$ , 分离变量求解:

$$\begin{aligned}\sqrt{y}dy &= C_1 dx \\ \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} &= C_1 x + C_2 \\ y &= \left( \frac{3}{2}C_1 x + \frac{3}{2}C_2 \right)^{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

二阶常系数线性齐次微分方程: 形式为  $y'' + py' + qy = 0$ ,  $p$ 、 $q$  皆为常数。

求解时, 需要求解一个特征方程:  $r^2 + pr + q = 0$

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 根的存在情况	微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的解
有两个不相等的实根 $r_1$ 、 $r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
两个相等的实根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
两个复数根 $r_1 = a + bi$ , $r_2 = a - bi$	$y = e^{ax} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

求解微分方程:  $y'' - 4y' + 4y = 0$

该方程中同样没有  $x$ , 也可以通过设  $y' = p$ ,  $y'' = p \frac{dp}{dy}$  的流程实现降阶为一阶微分方程求解。

但是我们观察方程属于  $y'' + py' + qy = 0$  的形式, 可以使用特征方程求解:

特征方程:  $r^2 - 4r + 4 = 0$ ,  $r_1 = r_2 = 2$

于是微分方程的解为:  $y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x} = (C_1 + C_2 x) e^{2x}$

求解微分方程:  $y'' - 2y' + 5y = 0$

特征方程:  $r^2 - 2r + 5 = 0$ ,  $r_1 = 1 + 2i$ ,  $r_2 = 1 - 2i$

于是微分方程的解为:  $y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

对于常系数线性齐次方程, 这里的“线性”和“齐次”都是针对  $y$  而言的, 做一下深入的了解:

- **线性**, 是指方程中的  $y, y', y''$  这些都是以 1 次的形式出现的, 没有  $y^2, \sin(y), \sqrt{y'}$  这种非线性项;
- **齐次**, 是指方程中每一项 (“0” 除外) 都是关于  $y$  的 “1 次”, 比如  $a(x)y + b(x)y' + c(x)y'' = 0$ ;
- **常系数**, 指  $y, y', y''$  前面的系数项中仅为常数, 而不是  $x$  的表达式。

判断下面的微分方程的阶数、是否为线性, 如果是线性方程, 判断是否齐次

- (1)  $y' + (\sin x)y = 0$  (一阶线性齐次方程)
- (2)  $y'' + \ln y = 0$  (二阶非线性方程)
- (3)  $(y')^2 + y^2 = 0$  (一阶非线性方程)
- (4)  $y' + 2xy + x = 0$  (一阶线性非齐次方程)

对于线性齐次方程, 如果  $y = y_1$  和  $y = y_2$  分别是方程的解, 则:

- (1)  $y = (y_1 + y_2)$  也是方程的解;
- (2)  $y = Cy_1$  也是方程的解, 其中  $C$  为常数;

(3)  $y = (ay_1 + by_2)$  也是方程的解。

以  $y'' - 2y' + 5y = 0$  为例，其通解为  $y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

验证 1: 根据通解公式，可知  $y_1 = e^x(2\cos 2x + 3\sin 2x)$  和  $y_2 = e^x(5\cos 2x + 6\sin 2x)$  都是该方程的解而  $y_3 = (y_1 + y_2) = e^x(7\cos 2x + 9\sin 2x)$  也符合通解的格式，也是该方程的解。同理也可验证后两条。

验证 2: 已知  $y = y_1$  和  $y = y_2$  是方程的解，所以有：

$$y_1'' - 2y_1' + 5y_1 = 0$$

$$y_2'' - 2y_2' + 5y_2 = 0$$

将  $y = (y_1 + y_2)$  代入方程，

$$(y_1 + y_2)'' - 2(y_1 + y_2)' + 5(y_1 + y_2) = (y_1'' - 2y_1' + 5y_1) + (y_2'' - 2y_2' + 5y_2) = 0$$

所以  $(y_1 + y_2)$  也是该齐次方程的解。

“消消乐”的原理：

解1	<div><div>A</div><div>A</div><div>A</div><div>B</div><div>B</div><div>B</div></div>	=	0
解2	<div><div>C</div><div>C</div><div>C</div></div>	=	0
解1 + 解2	<div><div>A</div><div>A</div><div>A</div><div>B</div><div>B</div><div>B</div><div>C</div><div>C</div><div>C</div></div>	=	0
2 × 解1	<div><div>A</div><div>A</div><div>A</div><div>B</div><div>B</div><div>B</div><div>A</div><div>A</div><div>A</div><div>B</div><div>B</div><div>B</div></div>	=	0

想想看，如果不是线性齐次方程，是否还具有这样的特点呢？答案是否定的。

比如非线性方程  $(y')^2 + y^2 = 0$ ，假设  $y = y_1$  和  $y = y_2$  是方程的解，而  $y = (y_1 + y_2)$  不是原方程的解：

$$(y_1' + y_2')^2 + (y_1 + y_2)^2 = (y_1')^2 + y_1^2 + (y_2')^2 + y_2^2 + 2y_1'y_2' + 2y_1y_2 = 2y_1'y_2' + 2y_1y_2 \neq 0$$

如果是非齐次方程  $y' + 2xy + x = 0$ ，假设  $y = y_1$  和  $y = y_2$  是方程的解，而  $y = (y_1 + y_2)$  不是原方程的解：

$$y_1' + y_2' + 2x(y_1 + y_2) + x = y_1' + 2xy_1 + x + y_2' + 2xy_2 + x - x = -x \neq 0$$

二阶线性非齐次微分方程：形式为  $y'' + py' + qy = f(x)$ ， $p$ 、 $q$  皆为常数

其通解分为两部分：齐次方程的通解+非齐次方程的特解

设  $y = y_1$  是方程  $y'' + py' + qy = 0$  的解；

设  $y = y_2$  是方程  $y'' + py' + qy = f(x)$  的解；

那么  $y = (y_1 + y_2)$  是上述哪个方程的解呢？显然是第二个方程的解。



## 齐次方程的解

$$\boxed{\text{A} \text{ A} \text{ A} \text{ B} \text{ B} \text{ B}} = 0$$

## 非齐次方程的解 (1)

$$\boxed{\text{A} \text{ A} \text{ A} \text{ A} \text{ B} \text{ B} \text{ C} \text{ C} \text{ C}} = \text{A} \text{ B} \text{ B}$$

## 非齐次方程的解 (2)

$$\boxed{\text{A} \text{ B} \text{ B} \text{ B} \text{ B} \text{ B}} = \text{A} \text{ B} \text{ B}$$

对于线性齐次方程的解与线性非齐次方程的解，可以推理下列关系：

$$\text{齐次解} + \text{非齐次解} = \text{非齐次解}$$

$$\text{非齐次解} - \text{非齐次解} = \text{齐次解}$$

$$a \times \text{非齐次解} + (1 - a) \times \text{非齐次解} = \text{非齐次解}$$

关于二阶线性非齐次方程  $y'' + py' + qy = f(x)$  的特解，需要分两种情况来讨论：

(1)  $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ ，特解形式为  $y^* = x^k Q_n(x)e^{\alpha x}$ ，其中

- $P_n(x)$  为  $x$  的  $n$  阶多项式 ( $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ ，常数项就当作 0 阶多项式)， $Q_n(x)$  也是一样；
- $k$  的取值情况：如果  $\alpha$  不是特征根， $k = 0$ ；如果  $\alpha$  是单特征根， $k = 1$ ；如果  $\alpha$  是双特征根， $k = 2$ 。

(2)  $f(x) = [P_m(x) \cos \beta x + P_n(x) \sin \beta x]e^{\alpha x}$ ，特解形式为  $y^* = x^k [Q_{l1}(x) \cos \beta x + Q_{l2}(x) \sin \beta x]e^{\alpha x}$

- $P_m(x), P_n(x)$  分别为  $x$  的  $m, n$  阶多项式，设  $l = \max\{m, n\}$ ， $Q_{l1}(x), Q_{l2}(x)$  均为  $x$  的  $l$  阶多项式；
- $k$  的取值情况：如果  $\alpha \pm \beta i$  不是特征根， $k = 0$ ；如果  $\alpha \pm \beta i$  是特征根， $k = 1$ 。

## 求微分方程 $y'' - 4y = e^{2x}$ 的通解

首先求对应的齐次方程  $y'' - 4y = 0$  的解，对应的特征方程为  $r^2 - 4 = 0$ ， $r_1 = 2, r_2 = -2$ ，于是齐次方程通解为：

$$Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

接下来求特解，根据  $f(x) = e^{2x} = (1) \cdot e^{2x}$ ，特构造特解为：

$$y^* = A x e^{2x}$$

代回方程可得：

$$(A x e^{2x})'' - 4(A x e^{2x}) = e^{2x}$$

$$A e^{2x} (4x + 4 - 4x) = e^{2x}, A = \frac{1}{4}$$

所以特解为

$$y^* = \frac{1}{4} x e^{2x}$$

方程的通解为：

$$y = Y + y^* = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{4} x e^{2x}$$

## 求微分方程 $y'' + y = \sin x$ 的通解

首先求对应的齐次方程 $y'' + y = 0$ 的解, 对应的特征方程为 $r^2 + 1 = 0$ ,  $r_{1,2} = \pm i$ , 于是齐次方程通解为:

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

接下来求特解, 根据 $f(x) = \sin x = e^{0 \cdot x} \sin x$ , 特构造特解为:

$$y^* = x(A \sin x + B \cos x)$$

代回方程可得:

$$\begin{aligned} [x(A \sin x + B \cos x)]'' + x(A \sin x + B \cos x) &= \sin x \\ -2B \sin x + 2A \cos x &= \sin x \\ A = 0, B &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

所以特解为

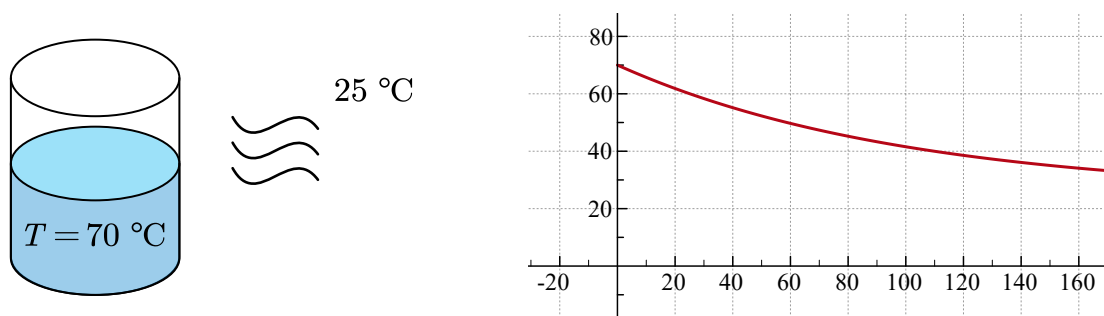
$$y^* = -\frac{1}{2}x \cos x$$

方程的通解为:

$$y = Y + y^* = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x$$

## 9.4 实际问题求解

(1) 水温冷却:



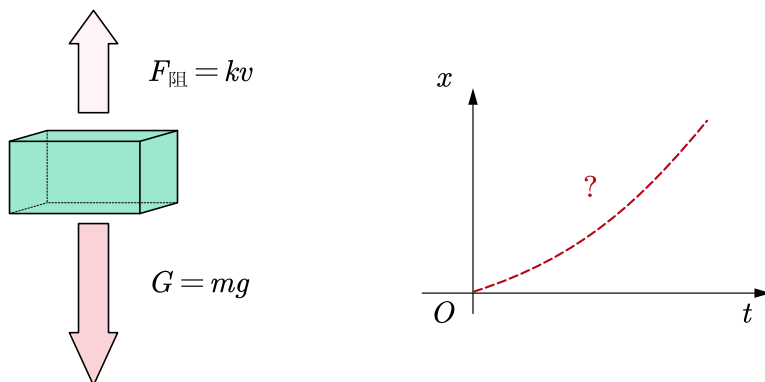
假设室温为  $25^\circ\text{C}$ , 一杯水在  $t = 0$  时温度  $T = 70^\circ\text{C}$ , 建立方程:  $\frac{dT}{dt} = -k(T - 25)$

令  $k = 0.01$ , 求解微分方程即可得水温随时间变化的函数关系:

$$T = 25 + Ce^{-0.01t}$$

根据  $t = 0$  时  $T = 70$ , 可确定  $C = 45$ , 所以  $T = 25 + 45e^{-0.01t}$

(2) 阻尼运动:



物体在空中下落时, 主要受到重力和空气阻力的作用, 重力大小为  $mg$ , 假设空气阻力大小与速度成

正比例 $f_{\text{阻}} = -kv$ ，则可以写出下列微分方程：

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - \frac{k}{m}v = g - \frac{k}{m} \frac{dx}{dt}$$

也可通过降阶的方式，记 $v = \frac{dx}{dt}$ ,  $v' = \frac{d^2x}{dt^2}$ ，即：

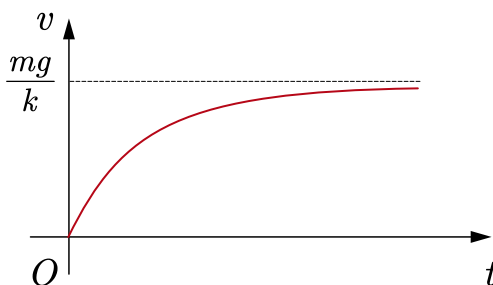
$$v' + \frac{k}{m}v = g$$

分离变量法求得：

$$v = \frac{m}{k}(g - Ce^{-\frac{kt}{m}})$$

根据 $t = 0$ 时 $v = 0$ ，确定参数 $C = g$ ，所以：

$$v = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{kt}{m}})$$



该结果可推演出一些规律：

- ① 如果 $k \rightarrow 0$ ，则 $v \rightarrow gt$ ，当空气阻力无限减小，则简化为自由落体；
- ② 如果 $t \rightarrow +\infty$ ，则 $v \rightarrow \frac{mg}{k}$ ，存在空气阻力时有极限速度。

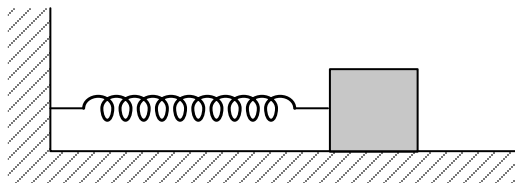
还可以继续求原函数，得到下落高度随时间的变化规律

$$x = \frac{mg}{k}(t + \frac{m}{k}e^{-\frac{kt}{m}} + C)$$

根据 $t = 0$ 时 $x = 0$ ，确定参数 $C = -\frac{m}{k}$ ，即

$$x = \frac{mg}{k}(t + \frac{m}{k}e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{m}{k})$$

### (3) 弹簧的简谐运动：



一个质量为 $m$ 的物块在弹簧一端，弹簧另一端固定在壁面上，弹簧质量不计，不考虑摩擦力，弹性系数为 $k$ ，以平衡位置为原点，物体的位移 $x$ 随时间的方程可以写为下列微分方程：

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

利用二阶线性齐次微分方程的格式求解：

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0, r^2 + \frac{k}{m} = 0, r_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}i$$

$$x = e^{0t} \left( C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t = A \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t + \theta \right)$$

由此可以看出，物块是呈现一个正弦或余弦形式的往复周期运动；并且，当弹簧的弹性系数 $k$ 以及物块质量 $m$ 确定时，往复运动的频率、周期已经确定。 $A$ 则为振幅， $\theta$ 为相位，需要根据具体情形进行判断：

(1)  $k = 4, m = 1$ ，将物块移动至距离平衡位置  $2\text{m}$  处，由静止状态开始运动：

$$x = A \cos \left( \sqrt{\frac{4}{1}} t + \theta \right) = A \cos(2t + \theta)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -2A \sin(2t + \theta)$$

根据初始条件，可知 $t = 0$ 时， $x = 2, v = 0$

$$A \cos(\theta) = 2$$

$$-2A \sin(\theta) = 0$$

可得 $A = 2, \theta = 0$

$$x = 2 \cos(2t)$$

(2)  $k = 18, m = 2$ ，物块从平衡位置出发，初始速度为  $4\text{m/s}$ ：

$$x = A \cos(3t + \theta)$$

$$v = -3A \sin(3t + \theta)$$

根据初始条件，可知 $t = 0$ 时， $x = 0, v = 4$

$$A \cos(\theta) = 0$$

$$-3A \sin(\theta) = 4$$

可得 $A = -\frac{4}{3}, \theta = \frac{\pi}{2}$

$$x = -\frac{4}{3} \cos \left( 3t + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{4}{3} \sin(3t)$$