第七节　常系数齐次线性微分方程

基本思路:

求解常系数齐次线性微分方程

$\Big\downarrow$ 转化

求特征方程(代数方程)之根

一、定义

n 阶常系数线性微分方程的标准形式

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1} y' + P_n y = f(x)$$

二阶常系数齐次线性方程的标准形式

$$y'' + py' + qy = 0$$

二阶常系数非齐次线性方程的标准形式

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

二、二阶常系数齐次线性方程解法------特征方程法

$$y'' + p y' + q y = 0 \quad (p, q\text{为常数}) \qquad ①$$

因为 r 为常数时, 函数 e^{rx} 和它的导数只差常数因子,

所以令①的解为 $y = e^{rx}$ (r 为待定常数), 代入①得

$$(r^2 + pr + q)e^{rx} = 0$$

$$\longrightarrow \quad r^2 + pr + q = 0 \qquad ②$$

称②为微分方程①的特征方程, 其根称为特征根.

1. 当 $p^2 - 4q > 0$ 时, ②有两个相异实根 r_1, r_2, 则微分方程有两个线性无关的特解: $y_1 = e^{r_1 x}$, $y_2 = e^{r_2 x}$,

因此方程的通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

2\. 当 $p^2-4q=0$ 时, 特征方程有两个相等实根 $r_1=r_2$ $=-\frac{p}{2}$, 则微分方程有一个特解 $y_1=e^{r_1x}$.

设另一特解 $y_2=y_1u(x)=e^{r_1x}u(x)$ ($u(x)$ 待定)

代入方程得:

$$\cancel{e^{r_1x}}[\,(u''+2r_1u'+r_1^2u)+p(u'+r_1u)+qu\,]=0$$

$$u''+\underline{(2r_1+p)}u'+\underline{(r_1^2+pr_1+q)}u=0$$

注意 r_1 是特征方程的重根

$$u''=0$$

取 $u=x$, 则得 $y_2=xe^{r_1x}$, 因此原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$$

3. 当 $p^2-4q<0$ 时，特征方程有一对共轭复根

$$r_1=\alpha+i\beta,\quad r_2=\alpha-i\beta$$

这时原方程有两个复数解:

欧拉公式

$$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$$

$$y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$$

利用解的叠加原理，得原方程的线性无关特解:

$$\overline{y_1}=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$\overline{y_2}=\frac{1}{2i}(y_1-y_2)=e^{\alpha x}\sin\beta x$$

因此原方程的通解为

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

［小结］ $y'' + p\,y' + q\,y = 0$ （p, q为常数）

二阶常系数齐次线性微分方程求通解的一般步骤：

（1）写出相应的特征方程； $r^2 + pr + q = 0,$

（2）求出特征根； r_1, r_2

（3）根据特征根的不同情况，得到相应的通解.

特 征 根	通 解
$r_1 \neq r_2$ 实根	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2 = -\dfrac{p}{2}$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

【教材例1】求方程 $y''-2y'-3y=0$ 的通解.

【解】 特征方程 $r^2-2r-3=0$, 特征根: $r_1=-1, r_2=3$,

因此原方程的通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$

【教材例2】求解初值问题 $\begin{cases} \dfrac{d^2s}{dt^2}+2\dfrac{ds}{dt}+s=0 \\ s\big|_{t=0}=4, \quad \dfrac{ds}{dt}\Big|_{t=0}=-2 \end{cases}$

【解】特征方程 $r^2+2r+1=0$ 有重根 $r_1=r_2=-1$,

因此原方程的通解为 $s=(C_1+C_2t)e^{-t}$

利用初始条件得 $C_1=4, \quad C_2=2$

于是所求初值问题的解为 $s=(4+2t)e^{-t}$

【例3】 求方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解.

【解】 特征方程为 $r^2+2r+5=0$,

解得

$$r_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{(-1)\cdot 16}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{i^2\cdot 4^2}}{2}=\frac{-2\pm 4i}{2}$$

$$=-1\pm 2i,$$

故所求通解为

$$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

［推广］上述结论推广到高阶常系数线性微分方程 .

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}y' + p_n y = 0 \ (p_k \text{ 均为常数})$$

特征方程: $r^n + p_1 r^{n-1} + \cdots + p_{n-1} r + p_n = 0$

若特征方程含 k 重实根 r , 则其通解中必含对应 (k) 项

$$(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) e^{rx}$$

若特征方程含 k 重复根 $r = \alpha \pm i\beta$, 则其通解中必含对应 $(2k)$ 项

$$e^{\alpha x}[(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1})\cos\beta x +$$

$$+ (D_1 + D_2 x + \cdots + D_k x^{k-1})\sin\beta x]$$

(以上 C_i, D_i 均为任意常数)

$$y^{(n)}+P_1y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}y'+P_ny=0$$

特征方程为

$$r^n+P_1r^{n-1}+\cdots+P_{n-1}r+P_n=0$$

特征方程的根	对应项的特解
若是k重根r	$e^{rx},xe^{rx},x^2e^{rx},\cdots,x^{k-1}e^{rx}$
若是k重共轭复根$\alpha\pm i\beta$	$e^{\alpha x}\cos\beta x,xe^{\alpha x}\cos\beta x,\cdots,x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x;$ $e^{\alpha x}\sin\beta x,xe^{\alpha x}\sin\beta x,\cdots,x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$

【教材例5】求方程 $y^{(4)}-2y'''+5y''=0$ 的通解.

【解】 特征方程 $r^4-2r^3+5r^2=0$，特征根：

$$r_1=r_2=0,\quad r_{3,4}=1\pm 2i$$

因此原方程通解为

$$y=C_1+C_2x+e^x(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x)$$

【例6】解方程 $y^{(5)}-y^{(4)}=0$.

【解】特征方程：$r^5-r^4=0$，特征根 ：

$$r_1=r_2=r_3=r_4=0,\quad r_5=1$$

原方程通解： $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+C_5e^x$

【例7】 求方程

$$y^{(5)}+y^{(4)}+2y^{(3)}+2y''+y'+y=0$$ 的通解.

【解】 特征方程为 $r^5+r^4+2r^3+2r^2+r+1=0,$

$$(r+1)(r^2+1)^2=0,$$

特征根为 $r_1=-1,\quad r_2=r_3=i,\quad r_4=r_5=-i,$

故所求通解为

$$y=C_1e^{-x}+(C_2+C_3x)\cos x+(C_4+C_5x)\sin x.$$

【例8】 求一个以 $y_1 = e^x$, $y_2 = 2xe^x$, $y_3 = \cos 2x$, $y_4 = 3\sin 2x$ 为特解的 4 阶常系数线性齐次微分方程, 并求其通解.

［解］ 根据给定的特解知特征方程有根 ：

$$r_1 = r_2 = 1, \qquad r_{3,4} = \pm 2i$$

因此特征方程为 $(r-1)^2\,(r^2+4) = 0$

即 $$r^4 - 2r^3 + 5r^2 - 8r + 4 = 0$$

故所求方程为 $$y^{(4)} - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4y = 0$$

其通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x$