- 一阶微分方程
  - 可分离变量方程
  - 齐次方程
  - 一阶线性方程
  - 伯努利方程
- 高阶微分方程
  - 可降阶方程（三个）
  - 二阶常系数线性齐次方程
  - 二阶常系数线性非齐次方程

第二节　可分离变量微分方程

可分离变量方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_1(x)f_2(y)$$

$$M_1(x)M_2(y)\mathrm{d}x + N_1(x)N_2(y)\mathrm{d}y = 0$$

转化

解分离变量方程　$g(y)\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x$

一、可分离变量的微分方程

分离变量方程的解法:

$$g(y)\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x \qquad ①$$

两边积分，得

$$\underbrace{\int g(y)\,\mathrm{d}y}_{G(y)} = \underbrace{\int f(x)\,\mathrm{d}x}_{F(x)}$$

则有

$$G(y) = F(x) + C \qquad ②$$

则称②为方程①的隐式通解.

二、典型例题

例1 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=2xy$ 的解.

解 分离变量得 $\dfrac{1}{y}dy=2xdx \quad (y\neq 0)$,

两边积分得 $\ln|y|=x^2+\ln|C|(C\neq 0)$,

通解为 $y=Ce^{x^2}(C\neq 0)$,

当$C=0$时,$y=0$也是方程的解,

方程的解 $y=Ce^{x^2}$ (C为任意常数).

说明：变量分离过程中，将微分方程变形，有时会产生“失解”的现象：

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \longrightarrow G(y) = F(x) + C \quad (1)$$

(1)若存在y_0,使$g(y_0)=0$满足微分方程,且包含在通解(1)中,可与通解合并,即方程的解为 $G(y)=F(x)+C.$

(2)如果y_0不包含在通解中,补上,

即方程的解 $\begin{cases} G(y) = F(x) + C \\ y = y_0 \end{cases}$

【例2】求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=3x^2y$ 的通解.

【解】分离变量得 $\dfrac{dy}{y}=3x^2\,dx$

两边积分 $\displaystyle\int\frac{dy}{y}=\int 3x^2\,dx$

得 $\ln|y|=x^3+C_1$ ——隐式通解

即 $y=\pm e^{x^3+C_1}=\pm e^{C_1}e^{x^3}$

$\Big\downarrow$ 令 $C=\pm e^{C_1}$

$y=Ce^{x^3}$ (显式通解, C为任意常数)

【例3】 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=e^{x+y}$ 的通解.

【解法】 分离变量 $e^{-y}\,\mathrm{d}y=e^{x}\,\mathrm{d}x$

$$-e^{-y}=e^{x}+C$$

即 $(e^{x}+C)e^{y}+1=0$ $(C<0)$

例4 解初值问题 $\begin{cases} xy\,\mathrm{d}x+(x^2+1)\,\mathrm{d}y=0 \\ y(0)=1 \end{cases}$

解 分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=-\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

两边积分得 $\ln|y|=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\ln|C|$

即 $y\sqrt{x^2+1}=C$ （ C为非零任意常数 ）

由初始条件得 $C=1$,

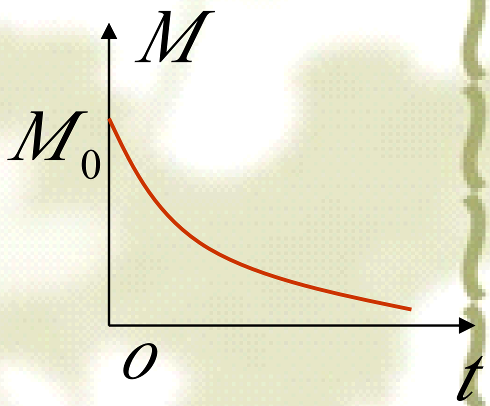
故所求特解为 $y\sqrt{x^2+1}=1$

【教材例4】已知放射性元素铀的衰变速度与当时未衰变原子的含量 M 成正比,已知 $t=0$ 时铀的含量为 M_0,求在衰变过程中铀含量 $M(t)$ 随时间 t 的变化规律.

【解】 根据题意, 有 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -\lambda M \quad (\lambda > 0) \\ M\big|_{t=0} = M_0 \quad \text{(初始条件)} \end{cases}$

对方程分离变量, 然后积分: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}M}{M} = \int (-\lambda)\,\mathrm{d}t$

得 $\ln M = -\lambda t + \ln C$, 即 $M = Ce^{-\lambda t}$



利用初始条件, 得 $C = M_0$

故所求铀的变化规律为 $M = M_0 e^{-\lambda t}$.

衰变规律

利用变量代换求微分方程的解

【例5】 求 $\dfrac{dy}{dx}=(x+y)^2$ 的通解.

【解】 令 $x+y=u$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}-1$ 代入原方程

$$\frac{du}{dx}=1+u^2 \qquad \frac{du}{1+u^2}=dx$$

可分离变量的方程

解得 $\arctan u=x+C$,

代回 $u=x+y$,得 $\arctan(x+y)=x+C$,

原方程的通解为 $y=\tan(x+C)-x.$

【例6】 求下述微分方程的通解:

$$y' = \sin^2(x - y + 1)$$

【解】 令 $u = x - y + 1,$ 则

变量代换

$$u' = 1 - y'$$

故有 $1 - u' = \sin^2 u$

即 $\sec^2 u\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$

解得 $\tan u = x + C$

所求通解 $\tan(x - y + 1) = x + C$ (C为任意常数)

三、小结

1. 可分离变量微分方程的概念

2. 可分离变量方程的求解方法:

分离变量　两边积分;

根据初始条件定常数 .