第二篇 一元函数微积分

第2章 导数与微分

第一节　导数的概念

一、导数的定义

二、单侧导数

三、函数的可导性与连续性的关系

四、导数的几何意义

一、导数的概念

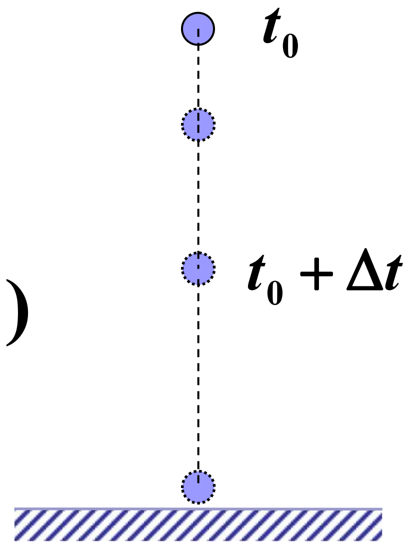
1. 引例

(1) 变速直线运动的瞬时速度问题

设描述质点运动位置的函数为 $s = s(t)$

则 t_0到 $t_0 + \Delta t$ 的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$



自由落体运动

当$\Delta t \to 0$时, $\bar{v} \to v(t_0)$,

即在 t_0 时刻的瞬时速度为

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

(2)平面曲线的切线斜率问题

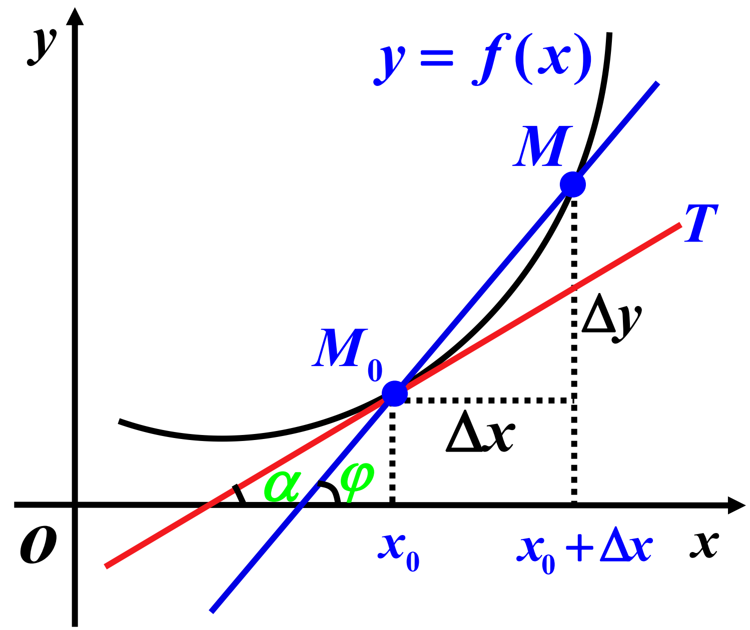
$M_0(x_0, y_0)$

$M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$

其中$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

割线 M_0M 的斜率：

$$\tan\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



当$\Delta x \to 0$时，$\tan\varphi \to \tan\alpha$,

切线 M_0T 的斜率：

$$k = \tan\alpha = \lim_{\Delta x\to 0}\tan\varphi = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

瞬时速度： $v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$

切线斜率： $k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta t}$

两个问题的共性:

所求量为函数增量与自变量增量之比的极限.

由此引入了一个新概念——导数

2、导数的定义

定义： 设$y=f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，当自变量

x在x_0处取得增量Δx时,相应地函数y取得增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0);$$

如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称$f(x)$在x_0可导，此极限称为$y=f(x)$在x_0点

的导数；

记作： $f'(x_0)$； $y'\big|_{x=x_0}$； $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$； $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$.

$$f'(x_0); \quad y'\big|_{x=x_0}; \quad \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_0}; \quad \frac{df(x)}{dx}\bigg|_{x=x_0}.$$

即 $$\boxed{f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.}$$

注：

1. 若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 不存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 不可导.

若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的导数为无穷大（实际上导数不存在，仅是为了书写方便）

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.}$$

2. 导数的等价定义

(1) $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. (令$x=x_0+\Delta x$)

(2) $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

利用导数定义求极限

【145】 下列各题中均假定 $f'(x_0)$ 存在，按照导数定义，求出下列各题中的 A 值.

(1) $A=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

(2) $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$，设 $f(0)=0$，且 $f'(0)$ 存在；

(3) $A=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{h}$.

解： $A=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}\cdot(-1)\quad=-f'(x_0).$

$A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\qquad=f'(0).$

$A=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{3h}\cdot 3\qquad=3f'(x_0).$

例1 设 $f'(x_0)=-2$，求下列极限

$$(1)\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

$$(2)\ \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}.$$

解

$$(1)\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$=3\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{3\Delta x}$$

$$=3f'(x_0)=-6.$$

$$(2)\ \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$$

$$=2f'(x_0)=-4.$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

3、如果函数 $y=f(x)$在(a,b)内的每点处都可导，

就称函数 $f(x)$在(a,b)内可导.

对于$\forall\ x\in(a,b)$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

称为 $f(x)$的导函数.

记作：$f'(x)$, y', $\boxed{\dfrac{dy}{dx}\ \text{或}\ \dfrac{df(x)}{dx}.}$ 微商

$f(x)$在点 x_0处的导数 $f'(x_0)$就是导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 处的函数值，即 $f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}$.

例2 求常值函数 $f(x)=C$（C 为常数）的导数.

解
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=0.$$

即得常值函数的导数公式:

$$\boxed{(C)'=0.}$$

例3 求指数函数 $f(x)=a^x\ (a>0, a\neq 1)$ 的导数.

解 $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$$

$$=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}.$$

$$=a^x\ln a.$$

即得指数函数的导数公式: $\boxed{\left(a^x\right)'=a^x\ln a.}$

特别地, $\boxed{\left(e^x\right)'=e^x.}$

例4 求对数函数 $f(x)=\log_a x\ (a>0, a\neq 1)$ 的导数.

解 $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}.$$

即得对数函数的导数公式: $\boxed{(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.}$

特别地, $\boxed{(\ln x)'=\frac{1}{x}.}$

例5 求正弦函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

解 $$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$=\cos x.$$

即得正弦函数的导数公式: $\boxed{(\sin x)'=\cos x.}$

类似可得余弦函数的导数公式: $\boxed{(\cos x)'=-\sin x.}$

例6 求幂函数 $f(x)=x^{\mu}$ 的导数.

解 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^{\mu}-x^{\mu}}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}x^{\mu}\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\mu}-1}{h}\ (x\neq 0).$$

由于当 $h\to 0$ 时, $\dfrac{h}{x}\to 0$, 从而 $\left(1+\dfrac{h}{x}\right)^{\mu}-1\sim\mu\dfrac{h}{x}$,

所以 $$f'(x)=\lim_{h\to 0}x^{\mu}\cdot\frac{\mu\frac{h}{x}}{h}=\mu x^{\mu-1}.$$

即得幂函数的导数公式: $\boxed{\left(x^{\mu}\right)'=\mu x^{\mu-1}.}$

对一般幂函数 $y = x^{\mu}$ （ μ 为常数)

$$\boxed{(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}}$$

例如，

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-1-1} = \frac{-1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)' = (x^{-\frac{3}{4}})' = -\frac{3}{4} x^{-\frac{7}{4}}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

基本求导公式

$$C' = 0$$

$$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(a^{x})' = a^{x} \ln a$$

$$(e^{x})' = e^{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} (a > 0, a \neq 1)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

二、单侧导数

定义2. 设函数$y=f(x)$在点x_0 的某个右邻域内有定义,

若极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在,

则称此极限值为$f(x)$在x_0处的右导数, 记作 $f'_+(x_0)$

即

$$\boxed{f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

x_0处的左导数:

$$\boxed{f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

由极限存在的充要条件可得函数$y=f(x)$在点x_0可导的充要条件如下：

定理1 函数$y=f(x)$在点x_0可导$\Leftrightarrow$ $f_-'(x_0)$和$f_+'(x_0)$存在且相等.

讨论分段函数在分段点的导数问题可用左、右导。

例7 研究函数 $f(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 的可导性.

解 因为 $f(x)=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\geq 0\end{cases}$, 所以　　　在x=0点连续

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1;$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1.$$

从而 $f_-'(0)\neq f_+'(0)$,

因此 $f(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 不可导.　连续推不出可导

三、 函数可导性与连续性的关系

定理 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，那么 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

证明 因为 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

其中 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=f'(x_0)\cdot 0=0.$$

根据连续的定义可知 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

注：（1）定理的逆命题不成立，即连续函数未必可导.（例如绝对值函数）

（2）如果函数在某一点不连续，那么函数在该点一定不可导.

可导 $\longrightarrow$ 连续 $\longrightarrow$ 有极限 $\longrightarrow$ 有界（局部）

例8 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解 因为

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}=0=f(0),$$

所以 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

又因为

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

不存在，所以 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不可导.

例9 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<1 \\ 2x, & x\geq 1 \end{cases}$ 在点 $x=1$ 处的连续性与可导性.

解 因为 $f(1)=2$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2,$$

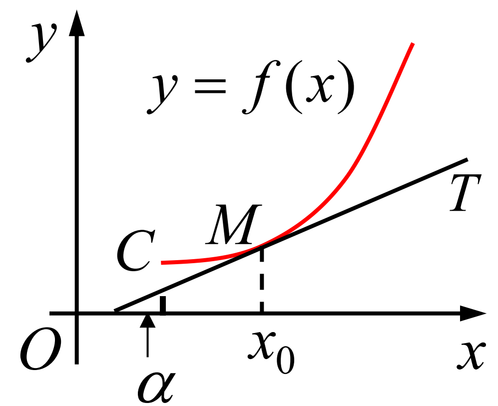
所以 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处不连续,

从而 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处不可导.

例10 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0 \\ x^2+ax+b, & x>0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处可导，求 a,b.

四、导数的几何意义

曲线$y=f(x)$在点(x_0,y_0)的切线斜率为



$$k=f'(x_0)$$

曲线在点(x_0,y_0)处的切线方程:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

法线方程: $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)\quad (f'(x_0)\neq 0)$

若$f'(x_0)=\infty$,切线与x轴垂直．切线方程：$x=x_0$.

例11 求等边双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点$(\frac{1}{2},2)$处的切线的斜率，并写出在该点处的切线方程和法线方程.

解 由导数的几何意义，得切线斜率为

$$k = y'\Big|_{x=\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{x}\right)'\Big|_{x=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{x^2}\Big|_{x=\frac{1}{2}} = -4.$$

所求切线方程为 $y-2=-4(x-\frac{1}{2})$，即 $4x+y-4=0$.

法线方程为 $y-2=\frac{1}{4}(x-\frac{1}{2})$，即 $2x-8y+15=0$.

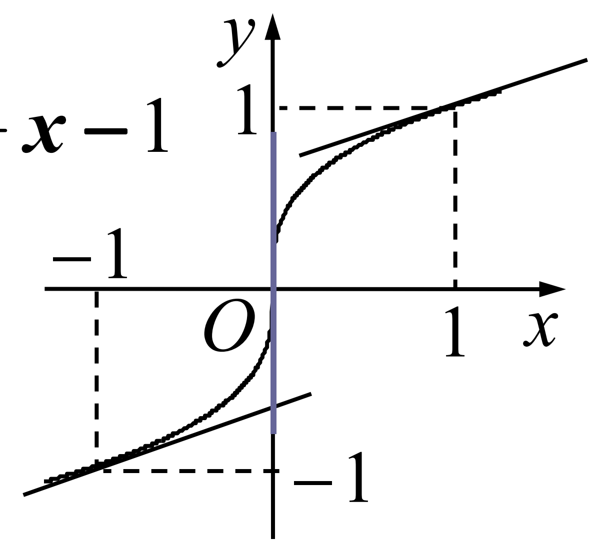
例12. 问曲线$y=\sqrt[3]{x}$ 哪一点有铅直切线？哪一点处的切线与直线 $y=\frac{1}{3}x-1$ 平行? 写出其切线方程.

解: $\because \ y'=(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $\therefore \ y'\big|_{x=0}=\infty$,

故在原点 (0 , 0) 有铅直切线 $x=0$

令 $\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3}$, 得 $x=\pm1$, 对应 $y=\pm1$,

则在点(1,1) , (–1,–1) 处与直线 $y=\frac{1}{3}x-1$



平行的切线方程分别为

$$y-1=\frac{1}{3}(x-1),\quad y+1=\frac{1}{3}(x+1)$$

即 $x-3y\pm2=0$

内容小结

1. 导数定义：

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

2. 导数的几何意义：切线的斜率.

3. 可导必连续，但连续不一定可导.

4. 判断可导性 $\begin{cases}\text{直接用导数定义.}\\ \text{不连续，一定不可导.}\\ \text{看左右导数是否存在且相等.}\end{cases}$

5. 基本求导公式：