§1.6 极限存在准则　两个重要极限

一、极限存在准则

1. 数列单调有界准则(准则I)

数列 x_n :单调增加 $x_1 \le x_2 \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots,$

单调减少 $x_1 \ge x_2 \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots,$

准则I(数列收敛准则) 单调有界数列必有极限.

2. 夹逼准则 (准则II)

当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 时, $g(x) \le f(x) \le h(x)$, 且

$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$ 则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

例2 证明数列 $x_n=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$ (n重根式)的极限存在.

证 显然 $x_{n+1}>x_n$, $\quad\therefore\{x_n\}$是单调递增的；

又 $\because x_1=\sqrt{3}<3$, 假定 $x_k<3$, $x_{k+1}=\sqrt{3+x_k}<\sqrt{3+3}<3$,

$\therefore\{x_n\}$是有界的； $\quad\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

$\because x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}$, $x_{n+1}^2=3+x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}^2=\lim\limits_{n\to\infty}(3+x_n)$,

$A^2=3+A$, 解得 $A=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, $A=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ (舍去)

$$\therefore\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

准则II′

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ y_n \le x_n \le z_n \quad (n = 1, 2, \cdots) \\ \\ (2)\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a\end{array}\right\} \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

例1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

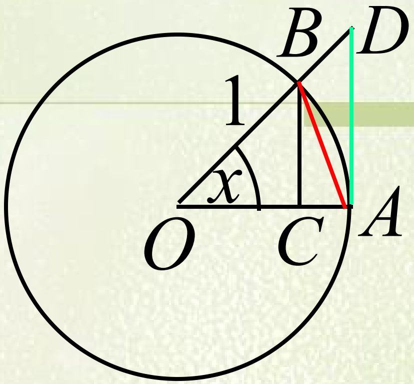
解: $\because \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$,

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$, 由夹逼准则得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 1.$$

二、两个重要极限



1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

证：当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，

$\triangle AOB$ 的面积< 扇形AOB的面积 <$\triangle AOD$的面积

即 $$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$$

亦即 $$\sin x<x<\tan x \quad (0<x<\frac{\pi}{2})$$

同时除以sin$x$，取倒数，得

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1 \quad (0<x<\frac{\pi}{2})$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

因为当$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$时，$\cos x$与$\frac{\sin x}{x}$都不变，故上面的

不等式对于开区间$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$内一切$x$也成立.

$$\boxed{\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{且} x \neq 0$$

$\because \lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ $\quad \boxed{\therefore \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$

——第一个重要极限

注：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$　——第一个重要极限

特点：(1)$\dfrac{0}{0}$型，　(2)三角函数，

$$(3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin \blacksquare}{\blacksquare}=1$$

注: $\blacksquare$ 代表相同的表达式.

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$$

例3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

解: 令 $t=\arcsin x$, 则 $x=\sin t$, 当$x\to 0$时, $t\to 0$.

因此 原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sin t}{t}}=1$

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e}$

引例 设 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$ $(n=1,2,\cdots)$, 证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在 .

证：利用二项式公式 ， 有

$$x_n=(1+\frac{1}{n})^n$$

$$=1+\frac{n}{1!}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$x_n = 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

$$< 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3$$

——第二个重要极限

根据单调有界准则可知, 数列 $\{x_n\}$ 有极限 . 记为 e ,

即

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \mathrm{e} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e}}$$

重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e}$ ——第二个重要极限

令 $\dfrac{1}{x}=t$，则 $x=\dfrac{1}{t}$，当 $x\to\infty$ 时，$t\to 0$，

则 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e.$

变换得

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.}$$

——第二个重要极限另一种形式

总结：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$

(1) 1^{∞}型

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\blacksquare}\right)^{\blacksquare}=e$

倒数关系

$$\lim_{x\to 0}(1+\blacksquare)^{\frac{1}{\blacksquare}}=e$$

例5 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x\cdot(-2)}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-2}=\mathrm{e}^{-2}$.

例6 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解: $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{-x}{3}\right)^{\frac{3}{-x}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\left(1+\frac{-x}{3}\right)^{\frac{3}{-x}}\right)^{-\frac{1}{3}} = e^{-\frac{1}{3}}$$

练习：$\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{1}{x}}$ $\quad\quad$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{2x}$

例7. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$.　　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e=\dfrac{1}{\ln a}$

例8. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\boxed{\ln a}$　　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

解: 令 $t=a^x-1$, 则 $x=\log_a(1+t)$,

原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\log_a(1+t)}=\ln a$

内容小结

1. 极限存在的两个准则

夹逼准则； 单调有界准则 .

2. 两个重要极限

$$(1)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin \blacksquare}{\blacksquare}=1$$

$$(2)\quad \lim_{\blacksquare\to\infty}\left(1+\frac{1}{\blacksquare}\right)^{\blacksquare}=e \quad \text{或} \quad \lim_{\blacksquare\to 0}(1+\blacksquare)^{\frac{1}{\blacksquare}}=e$$

注: $\blacksquare$ 代表相同的表达式

作业

P52　1，2

§1.7 无穷小的比较

引例： 当$x \to 0$时，$x, x^2, \sin x, x^2 \sin\frac{1}{x}$ 是无穷小.

观察各极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x} = 0,$$ $x^2 \to 0$比$3x \to 0$要快得多；

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2} = \infty,$$ $\sin x \to 0$比$x^2 \to 0$慢得多；

比值极限不同，反映了趋向于零的“快慢”程度不同.

定义1 设α, β 是同一变化过程中的两个无穷小,且$\alpha \neq 0$.

(1) 如果$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 就称$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小;

记作$\beta = o(\alpha)$; 则$\lim \frac{o(\alpha)}{\alpha} = 0$,

(2) 如果$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 就称$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小;

(3) 如果$\lim \frac{\beta}{\alpha} = C(C \neq 0)$, 就称$\beta$与$\alpha$是同阶无穷小;

特别,当$C = 1$时,则称β与α是等价无穷小,记作$\alpha \sim \beta$.

$\because \quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{3x}=0,$ 即 $x^2=o(3x)\ (x\to 0).$

$\therefore$ 当 $x\to 0$ 时，x^2 是比 $3x$ 高阶的无穷小；

$\because \quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,$ 即 $\sin x\sim x\ (x\to 0).$

$\therefore$ 当 $x\to 0$ 时，$\sin x$ 与 x 是等价无穷小．

(4) 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k}=C\neq 0, k>0,$ 就说 β 是 α 的 k 阶的无穷小.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

所以当 $x\to 0$ 时, $1-\cos x$ 是 x 的 二阶无穷小.

练习:比较下列各题中的两个无穷小的阶.

当$x\to 1$时，x^2-1与$\dfrac{x-1}{x}$.

同阶

当$n\to\infty$时，$\dfrac{1}{n^2}$是$\dfrac{1}{n}$的高阶无穷小，$\dfrac{1}{n^2}=o\left(\dfrac{1}{n}\right)$;

定理1. $\alpha \sim \beta \Longleftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$

证: $\alpha \sim \beta \rightleftarrows \lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$

$\rightleftarrows \lim(\dfrac{\beta}{\alpha} - 1) = 0$, 即 $\lim \dfrac{\beta - \alpha}{\alpha} = 0$

$\rightleftarrows \beta - \alpha = o(\alpha)$, 即 $\beta = \alpha + o(\alpha)$

例如, $x \to 0$ 时, $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, 故

$x \to 0$ 时, $\sin x = x + o(x)$, $\tan x = x + o(x)$

二、 等价无穷小的应用

常用等价无穷小

当$x \to 0$时

$$\sin x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \tan x \sim x,$$

$$\arctan x \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x,$$

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x.$$

定理2 (等价无穷小替换定理)

设 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, 且 $\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在 ，则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$$

证:

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \left(\frac{\beta}{\beta'} \frac{\beta'}{\alpha'} \frac{\alpha'}{\alpha} \right)$$

$$= \lim \frac{\beta}{\beta'} \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$$

例1

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$$

例2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3+3x}$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3+3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^3+3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+3}=\dfrac{1}{3}$

例3 $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\cdot\sin\dfrac{1}{x}.$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=0$

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan^2 x}{1-\cos x}$.

解: 当 $x\to 0$时，$\tan x \sim x$， $1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$,

$$\therefore \text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{x\bullet x^2}{\dfrac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} 2x = 0$$

例5 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$

错 当$x\to 0$时, $\tan x\sim x, \sin x\sim x,$

原式 $\displaystyle\cancel{=}\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{(2x)^3}=0.$

解 当$x\to 0$时, $\sin 2x\sim 2x,$

$$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x^3,$$

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{(2x)^3}=\frac{1}{16}.$$

说明：在减式中各等价无穷小不能分别替换，在因式中可以用等价无穷小的替换.

内容小结

1. 无穷小的比较

设 α, β 对同一自变量的变化过程为无穷小, 且 $\alpha \neq 0$

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \begin{cases} 0, & \beta \text{ 是 } \alpha \text{ 的高阶无穷小} \\ \infty, & \beta \text{ 是 } \alpha \text{ 的低阶无穷小} \\ C\,(\neq 0), & \beta \text{ 是 } \alpha \text{ 的同阶无穷小} \\ 1, & \beta \text{ 是 } \alpha \text{ 的等价无穷小} \end{cases}$$

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0, \qquad \beta \text{ 是 } \alpha \text{ 的 } k \text{ 阶无穷小}$$

常用等价无穷小：当$x \to 0$时,

$\sin x \sim x$　　$\tan x \sim x$　　$\arcsin x \sim x$

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$　　$\ln(1+x) \sim x$　　$e^x - 1 \sim x$,

$$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x,$$

2. 等价无穷小替换定理 Th 2

作业

P55　3；5

练 习 题

一、填空题:

1、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\omega x}{x} =$ ________.

2、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x} =$ ________.

3、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x} =$ ________.

4、 $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\cot 3x =$ ________.

5、 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{2x} =$ ________.

6、 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} =$ ________.

7、 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x} =$ __________ .

8、 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x} =$ __________ .

二、求下列各极限:

1、 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$

2、 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}$