第九章　线性方程组求解

§9.1　简单消去法

9.1.1 简单实例

看下面的方程组

$2X_1-4X_2-X_3=-4$　（9.1a）

$3X_1+X_2-2X_3=9$　(9.1b)

$5X_1+4X_2-6X_3=25$　(9.1c)

消去法求此方程组的解,

先消去9.1b和c中的X_1 。

（9.1b)-（9.1a）× (3/2),

(9.1c)-（9.1a）×(5/2) 即可。

（9.1a）不变，得:

$2X_1-4X_2-X_3=-4$　（9.2a）

$7X_2-0.5X_3=15$　(9.2b)

$14X_2-3.5X_3=35$　(9.2c)

分母是9.1a中X_1系数,分子3, 5为9.1b, c中X_1系数.

下面进一步消去C式中的X_2。为此，9.2a与9.2b不变.

(9.2a): $2X_1-4X_2-X_3=-4$ **(9.3a)**

(9.2b): $7X_2-0.5X_3=15$ **(9.3b)**

(9.2c)- (9.2b) ×(14/7)： $-2.5X_3=5$ **(9.3c)**

这样9.3c中只有一个变量X_3，很容易求出:

$$X_3=5/(-2.5)=-2 \qquad (9.4)$$

以上几个步骤称为消去法中的消元过程,下面的几个步骤称为消去法中的回代过程,目的是根据已求出的变量通过代入已知的方程,依次求出其它变量.

经过消元过程，我们得到如下方程组：

$$2X_1-4X_2-X_3=-4 \quad (9.3a)$$

$$7X_2-0.5X_3=15 \quad (9.3b)$$

$$X_3=-2 \quad （9.4）$$

回代过程对本具体问题, 把X_3代入9.3b求出X_2

$$X_2=[15-(-0.5X_3)]/7=2$$

然后将X_3与X_2代入9.3a求出X_1

$$X_1=[-4-(-4X_2-X_3)]/2=1$$

这就是简单消去法的基本步骤,我们的任务是在计算机上实现上述步骤.

9.1.2.增广矩阵

在以上的消元过程中，参加运算的只是方程组等号左方的系数和右方的常数，这些系数和常数在线性方程组中是整齐排列的，可用矩阵表示。

比如方程组（9.1）：

$2X_1-4X_2-X_3=-4$ （9.1a）

$3X_1+X_2-2X_3=9$ (9.1b)

$5X_1+4X_2-6X_3=25$ (9.1c)

用 $$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & -2 & 9 \\ 5 & 4 & -6 & 25 \end{pmatrix} \qquad (9.7)$$ 表示.

第一列，9. 1a, b, c, 中x_1系数. 第二列，……第一行，方程9. 1a中x_1, x_2, x_3系数及常数. 第二行，……

上述矩阵元素是线性方程组的系数和右方常数项，称为线性方程组的增广矩阵。

9．2式

$2X_1-4X_2-X_3=-4$ （9.2a）

$7\ X_2-0.5\ X_3=15$ (9.2b)

$14X_2-3.5X_3=35$ (9.2c)

的增广矩阵：

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & 7 & -0.5 & 15 \\ 0 & 14 & -3.5 & 35 \end{pmatrix} \quad (9.8)$$

9. 3式

$2X_1-4X_2-X_3=-4$ (9.3a)

$7X_2-0.5X_3=15$ (9.3b)

$-2.5X_3=5$ (9.3c)

的增广矩阵：

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & 7 & -0.5 & 15 \\ 0 & 0 & -2.5 & 5 \end{pmatrix} \quad (9.9)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & -2 & 9 \\ 5 & 4 & -6 & 25 \end{pmatrix} \quad (9.7)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & 7 & -0.5 & 15 \\ 0 & 14 & -3.5 & 35 \end{pmatrix} \quad (9.8)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & 7 & -0.5 & 15 \\ 0 & 0 & -2.5 & 5 \end{pmatrix} \quad (9.9)$$

消元过程也就是由增广矩阵9.7导出9.8再导出9.9的过程.我们不把方程组9.1存储在计算机内,只是存储矩阵9.7,放入一个二维数组中.

9.1.3. 消元过程及其在计算机上的实现.

我们利用组合法一步步设计其程序框图.

线形方程组一般可写成如下形式：

$a_{11}^{(1)}x_1+a_{12}^{(1)}x_2+\ldots\ldots+a_{1n}^{(1)}x_n=a_{1,n+1}^{(1)}$
(9.10a)

$a_{21}^{(1)}x_1+a_{22}^{(1)}x_2+\ldots\ldots+a_{2n}^{(1)}x_n=a_{2,n+1}^{(1)}$
(9.10b)

……

$a_{n1}^{(1)}x_1+a_{n2}^{(1)}x_2+\ldots\ldots+a_{nn}^{(1)}x_n=a_{n,n+1}^{(1)}$
(9.10c)

与此相应的矩阵为：

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2,n+1}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & a_{n,n+1}^{(1)} \end{pmatrix} \qquad (9.11)$$

这是一个n×(n+1)矩阵，矩阵的每一个元素有一个上标和两个下标，上标（1）代表该元素属于原方程组。第一个下标表示行，第二个下标表示列。

元素$A_{ij}^{(1)}$表示原方程组矩阵i行j列的元素。最后一列常数项。前面系数项。

下面具体进行消元：

1、消X_1：第一步应消去式（9.10b-9.10c）中的X_1，从而得出方程组(9.12)：

$$a_{11}^{(1)}x_1+a_{12}^{(1)}x_2+\ldots\ldots+a_{1n}^{(1)}x_n=a_{1,n+1}^{(1)}$$

$$a_{22}^{(2)}x_2+\ldots\ldots+a_{2n}^{(2)}x_n=a_{2,n+1}^{(2)}$$

……

$$a_{n2}^{(2)}x_2+\ldots\ldots+a_{nn}^{(2)}x_n=a_{n,n+1}^{(2)}$$

从第二行开始X_1的系数为0。（不写）

与此相应的矩阵为:

$$
\begin{pmatrix}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & a_{2,n+1}^{(2)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & a_{n,n+1}^{(2)}
\end{pmatrix} \tag{9.13}
$$

这相当于把矩阵**9.11**变成**9.13**。
这里第一行元素不变，**(1)**表示这些元素与原矩阵**9.11**相同;第二行以下的上标**(2)**表示这些元素是经计算重新得到的.

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2,n+1}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & a_{n,n+1}^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & a_{2,n+1}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & a_{n,n+1}^{(2)} \end{pmatrix}$$

为得此矩阵须进行以下运算：

(1) 求$a_{2j}^{(2)}$，第二行元素.

参照上面讲的简单例子，9.11式第二行减去9.11式第一行乘以系数($a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)}$)就得到9.13式的第二行元素$a_{2j}^{(2)}$。

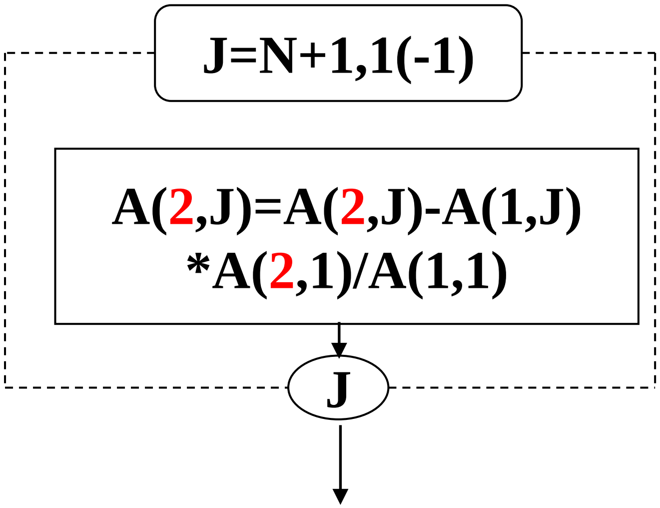
$$a_{2j}^{(2)} = a_{2j}^{(1)} - a_{1j}^{(1)} \times (a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)})$$

$$(j=n+1, n, \ldots 2, 1) \qquad (9.14)$$

$$a_{2j}^{(2)} = a_{2j}^{(1)} - a_{1j}^{(1)} * (a_{21}^{(1)} / a_{11}^{(1)})$$

$$(j=n+1, n, \ldots 2, 1) \qquad (9.14)$$

用计算机很容易实现此运算, 与此相应的程序框图为:

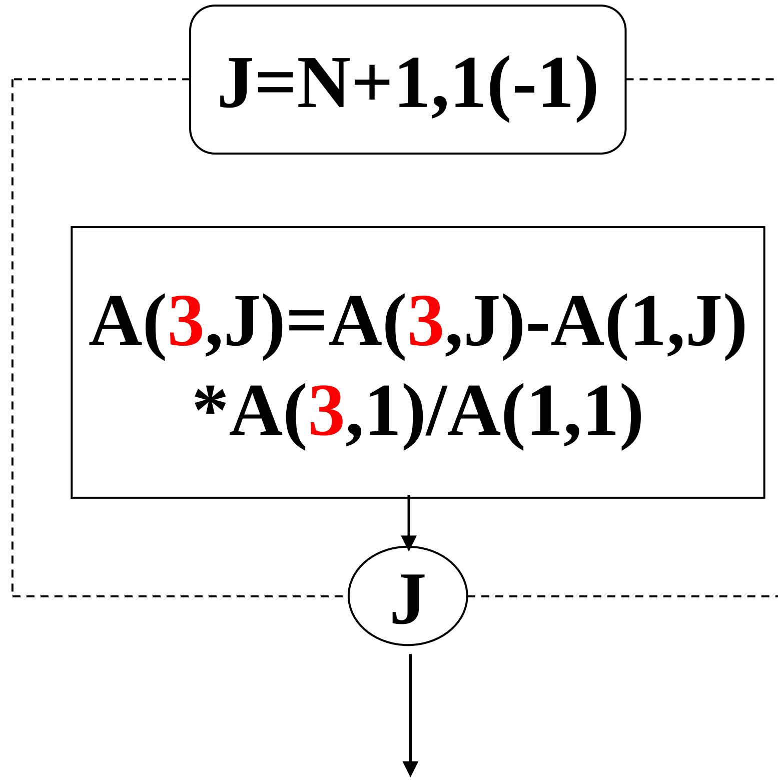


（2）求 $a_{3j}^{(2)}$ 第三行元素

同求$a_{2j}^{(2)}$类似:

$$a_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(1)} - a_{1j}^{(1)} \times (a_{31}^{(1)} / a_{11}^{(1)})$$

$$(j=n+1, n, \ldots 2, 1) \qquad (9.16)$$



（3）求i行元素$a^{(2)}_{ij}$：

第二行元素 $a_{2j}^{(2)} = a_{2j}^{(1)} - a_{1j}^{(1)} \times (a_{21}^{(1)} / a_{11}^{(1)})$

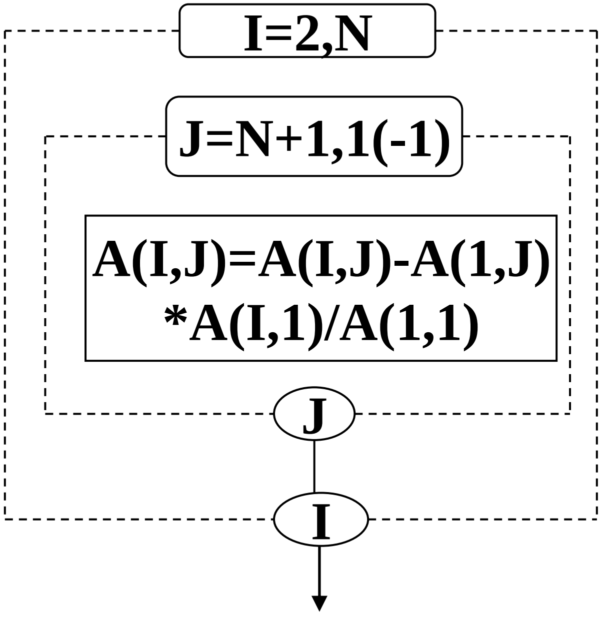
第三行元素 $a_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(1)} - a_{1j}^{(1)} \times (a_{31}^{(1)} / a_{11}^{(1)})$

第i行元素$a^{(2)}_{ij}$

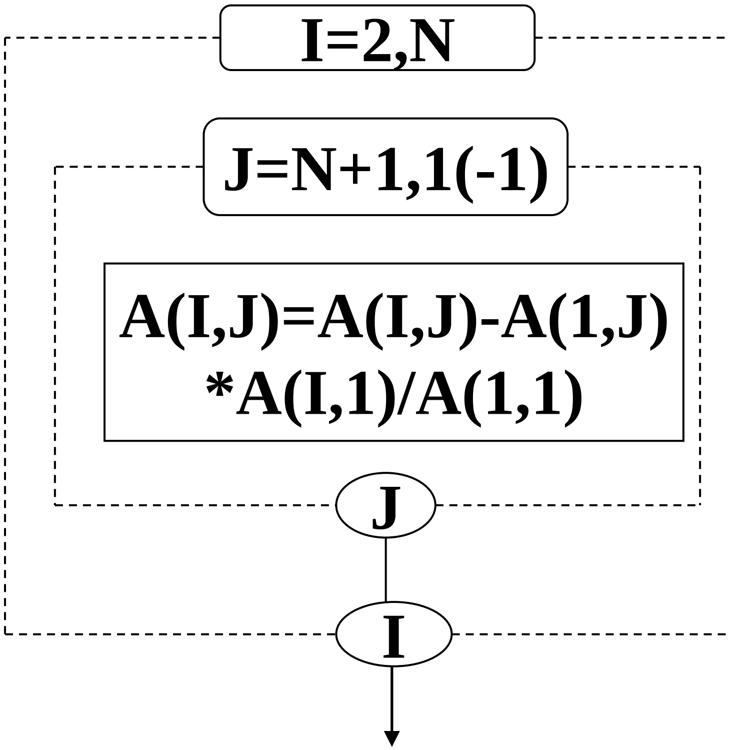
$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{1j}^{(1)} \times (a_{i1}^{(1)} / a_{11}^{(1)})$$

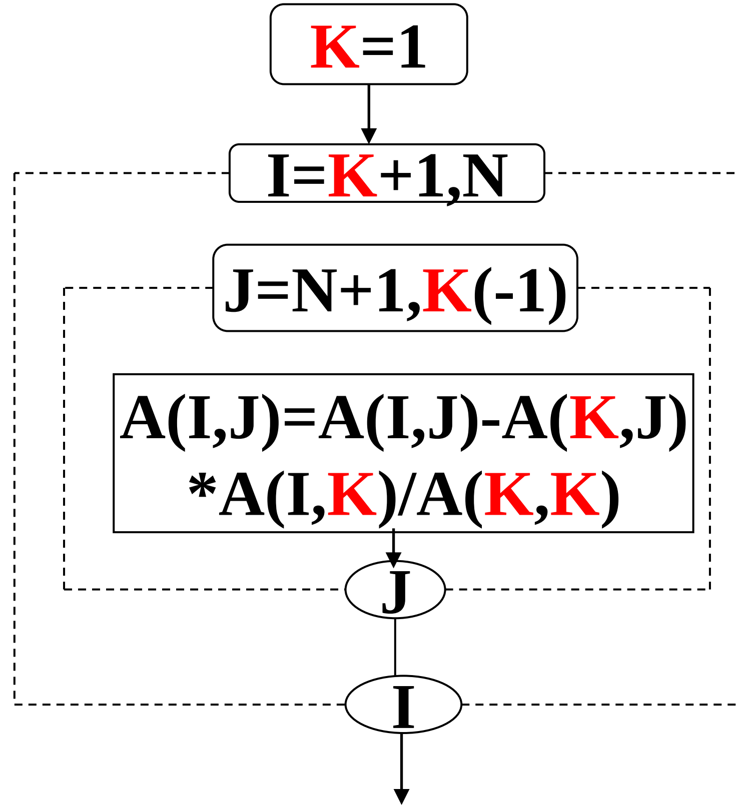
$$(i=2,3,4,\ldots n) \quad (j=n+1, n, \ldots 2, 1)$$

因此,为计算出整个矩阵(9.13),可用图9—3所示的二重循环.



矩阵9.11在经过以上三步骤运算后不再使用.为了节省内存,矩阵9.13与9.11共用相同的数组A.这样程序也比较简单.





以上是为了消去X_1所进行的运算.为了突出这一点,可令K=1代表消X_1 ,框图9—3改为9—4.

把里面的1换成K.→

K=1　I=K+1,N　J=N+1,K(-1)

A(I,J)=A(I,J)-A(K,J)＊A(I,K)/A(K,K).

2. 消X_2 。即由矩阵（9.13）

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & a_{2,n+1}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & a_{n,n+1}^{(2)} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(9.13)}$$

导出矩阵:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & a_{2,n+1}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & a_{3,n+1}^{(3)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} & a_{n,n+1}^{(3)} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(9.17)}$$

消X_1时为第一行元素不变，后边各行元素等于原来元素减去第一行元素乘各行X_1系数与第一行X_1系数之比：

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{1j}^{(1)} \times (a_{i1}^{(1)} / a_{11}^{(1)})$$

消X_2时为第一、二行元素不变，后边各行元素等于原来元素减去第二行元素乘各行X_2系数与第二行X_2系数之比：

（1）第三行元素

$$a_{3j}^{(3)} = a_{3j}^{(2)} - a_{2j}^{(2)} \times (a_{32}^{(2)} / a_{22}^{(2)})$$

$(j=n+1, n, \ldots 3, 2)$

(2)第四行元素:

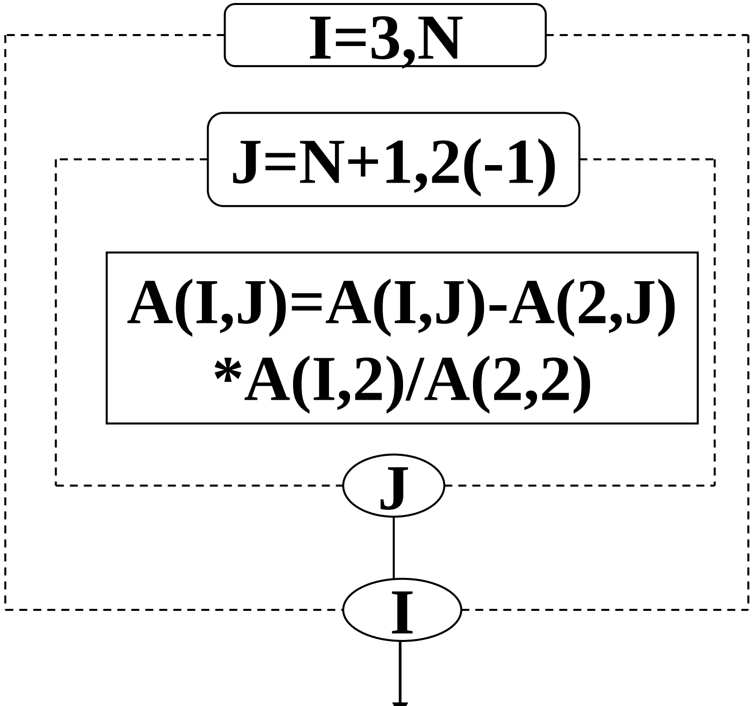
$$a_{4j}^{(3)} = a_{4j}^{(2)} - a_{2j}^{(2)} \times (a_{42}^{(2)} / a_{22}^{(2)}) \qquad (j=n+1, n, \ldots 3, 2)$$

(3)求i行元素 :

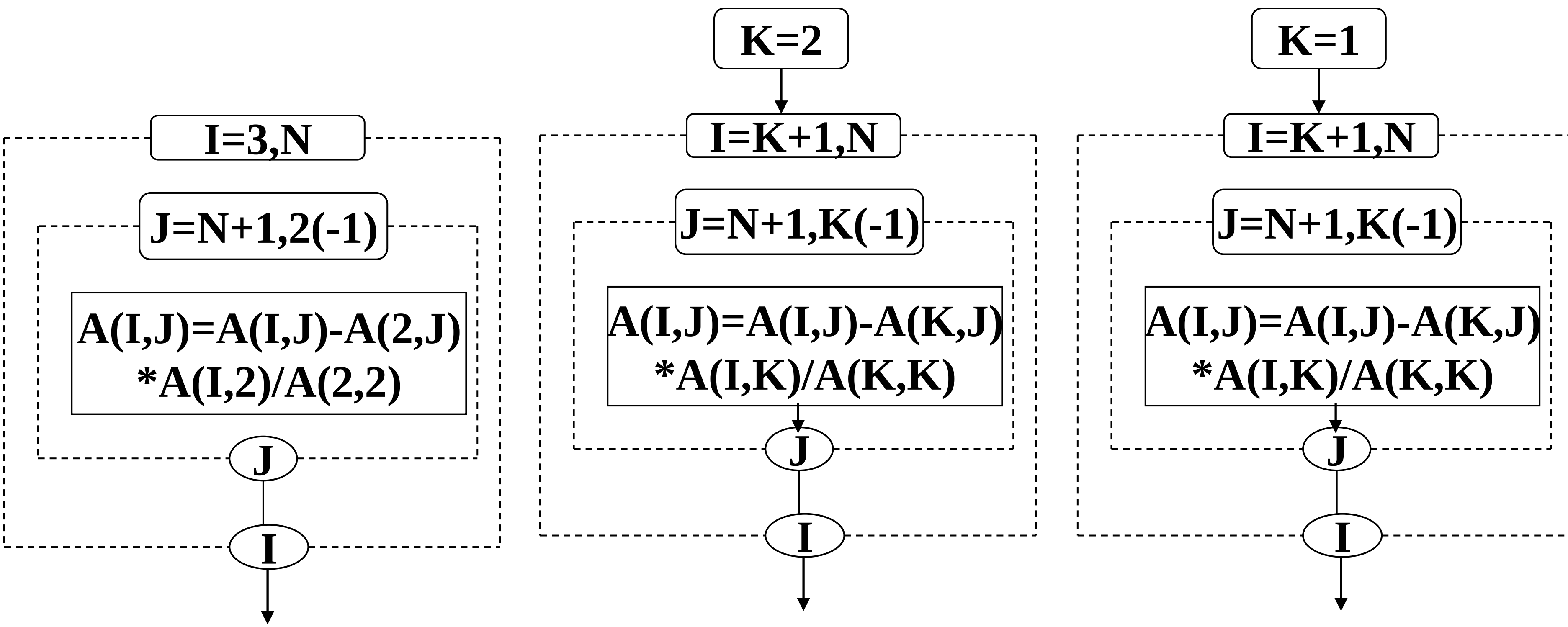
$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - a_{2j}^{(2)} \times (a_{i2}^{(2)} / a_{22}^{(2)}) \qquad (j=n+1, n, \ldots 3, 2)$$

$$(i=3, 4, 5, \ldots n)$$

所以,要从矩阵9.13导出9.17,可用136页图9—5所示的二重循环.



以上是为了消去X_2所进行的运算.为了突出这一点,可令K=2代表消X_2 ,框图9—5改为9—6,与图9—4不同的只是(K=2).



3、消X_3，X_4 …X_{N-1}。我们看上页的图9-4与9-6。

K=1时，消X_1，K=2时消X_2，所以K=3时消X_3 ……K=N-1时，消X_{N-1}。所以K=1—N-1，消元过程结束，可得到（9.20）式：

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1,n-1}^{(1)} & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2,n-1}^{(2)} & a_{2n}^{(2)} & a_{2,n+1}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3,n-1}^{(3)} & a_{3n}^{(3)} & a_{3,n+1}^{(3)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1}^{(n-1)} & a_{n-1,n}^{(n-1)} & a_{n-1,n+1}^{(n-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} & a_{n,n+1}^{(n)} \end{pmatrix} \tag{9.20}$$

与此相应的方程组见下页.

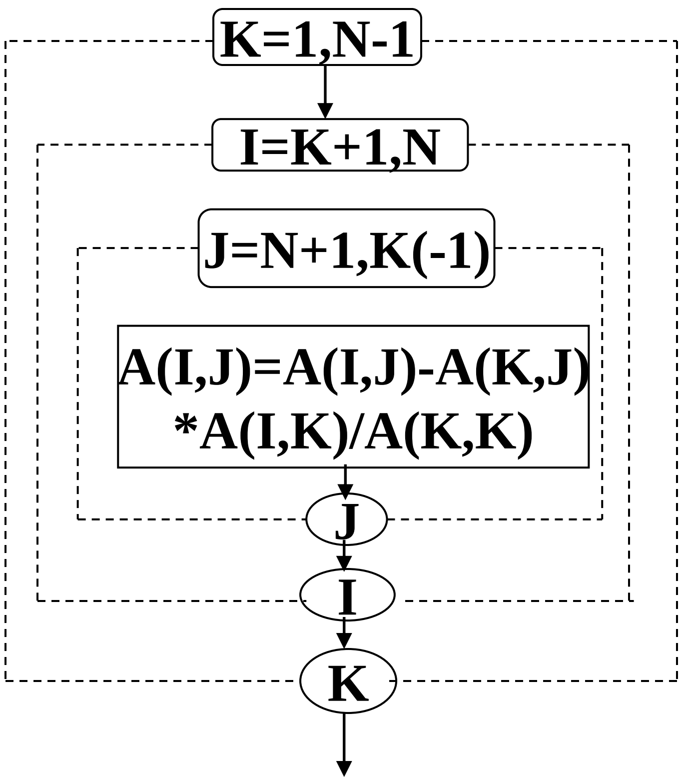
$$a_{11}^{(1)}x_1+a_{12}^{(1)}x_2+\ldots\ldots+a_{1,n-1}^{(1)}x_{n-1}+a_{1n}^{(1)}x_n=a_{1,n+1}^{(1)}$$

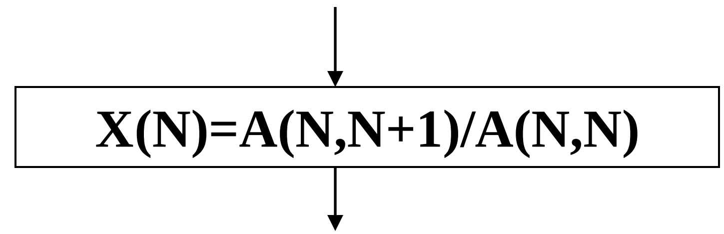
$$a_{22}^{(2)}x_2+\ldots\ldots+a_{2,n-1}^{(2)}x_{n-1}+a_{2n}^{(2)}x_n=a_{2,n+1}^{(2)}$$

$$\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots \qquad (9.21)$$

$$a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1}+a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n=a_{n-1,n+1}^{(n-1)}$$

$$a_{nn}^{(n)}x_n=a_{n,n+1}^{(n)}$$





K=1,N-1,实际上就是K控制的第三重循环,框图9.7。从原始矩阵出发，执行完图9-7的三重循环，即得9.20式,方程组9.21。

4、求出x_n。框图9-8所代表为方程组9.21最后一个方程,从最后一个方程求出x_n，消元过程结束。

9.14、回代过程及其在计算机上的实现.

在已知X_n ---X_{k+1}时, 回代求X_k ：

$$x_k = \left(a_{k,n+1}^{(k)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k)} x_j \right) / a_{kk}^{k}$$

我们用k=n-1和k=2时方程组(9.21)来验证。

$$a_{11}^{(1)}x_1+a_{12}^{(1)}x_2+\ldots\ldots+a_{1,n-1}^{(1)}x_{n-1}+a_{1n}^{(1)}x_n=a_{1,n+1}^{(1)} \qquad (9.24)$$

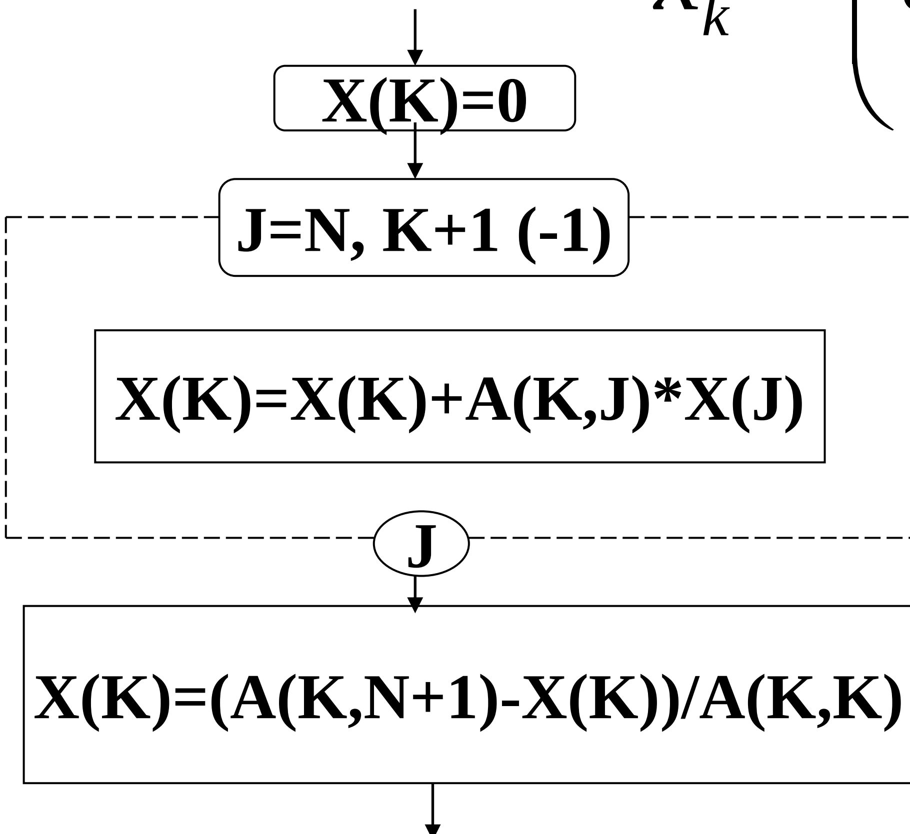
$$
\begin{aligned}
a_{22}^{(2)}x_2+\ldots\ldots+a_{2,n-1}^{(2)}x_{n-1}+a_{2n}^{(2)}x_n&=a_{2,n+1}^{(2)}\\
\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots& \qquad (9.21)\\
a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1}+a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n&=a_{n-1,n+1}^{(n-1)}\\
a_{nn}^{(n)}x_n&=a_{n,n+1}^{(n)}
\end{aligned}
$$

k=n-1： $x_{n-1}=(a_{n-1,n+1}^{(n-1)}-(a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n))/a_{n-1,n-1}^{(n-1)}$

k=2： $x_2=(a_{2,n+1}^{(2)}-(a_{23}^{(2)}x_3\ldots\ldots+a_{2,n-1}^{(2)}x_{n-1}+a_{2n}^{(2)}x_n))/a_{22}^{(2)}$

与(9.24)式相应的框图为图9−9:

$$x_k = \left(a_{k,n+1}^{(k)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k)} x_j \right) / a_{kk}^{k}$$

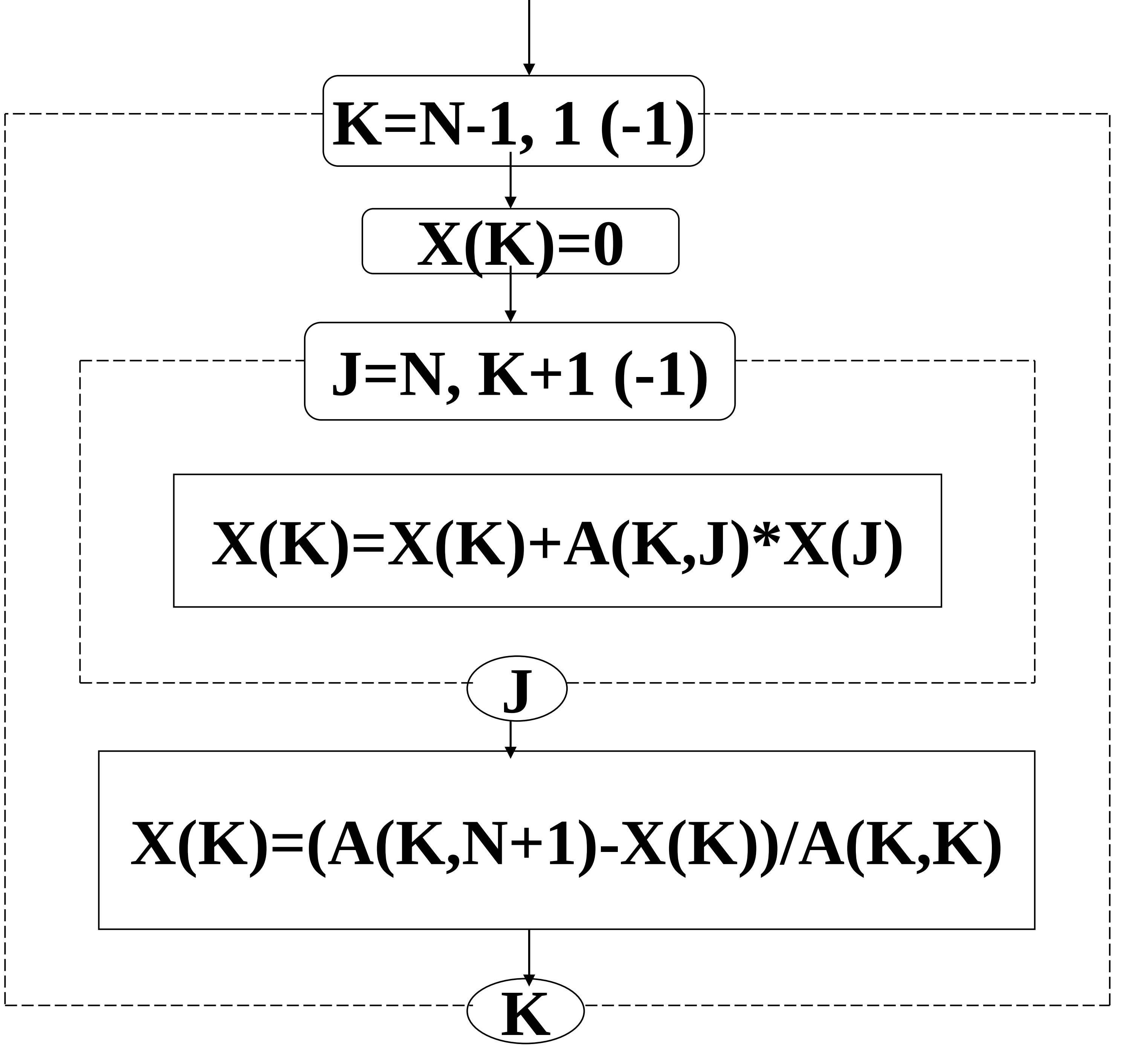


先计算Σ,暂放入X(K)中,再用式9.24计算最终X_K 。

只要K分别为N-1，N-2，...1，依次执行图9-9，

就可求出方程的解 。所以外边K=N-1，　1（-1），

控制一个大循环，回代过程实现。　　　　　　如图9-10所示:


K=N-1, 1 (-1)
X(K)=0
J=N, K+1 (-1)
X(K)=X(K)+A(K,J)*X(J)
J
X(K)=(A(K,N+1)-X(K))/A(K,K)
K

9.1.5、 简单的消去法的程序：

```
9010 FOR K=1 TO N-1
9320 FOR I=K+1 TO N
9330 FOR J=N+1 TO K+1 STEP -1
9340 A(I,J)=A(I,J)-A(K,J)*A(I,K)/A(K,K)
9350 NEXT J: NEXT I: NEXT K
9360 X(N) = A(N, N + 1) / A(N, N)
9370 FOR K = N - 1 TO 1 STEP -1
9380 X(K) = 0
9390 FOR J = N TO K + 1 STEP -1
9400 X(K) = X(K) + A(K, J) * X(J)
9410 NEXT J
9420 X(K)=(A(K,N+1)-X(K))/A(K,K)
9430 NEXT K
9440 RETURN
```

子程序：

输入量： N，方程个数。

A(1， 1)…A(N， N+1)，增广矩阵元素。

输出量：

X(1)，…X(N)， 解 $X_1 \sim X_N$ 。

9010---9350消元，

9360---求X_N，

9370---9430回代。

为了减少运算：9330行：J循环改为K+1结束，框图中是到K。K=1时到2，$a_{21}^{(1)}$不变…这样削元得到的矩阵如下：

$$
\begin{pmatrix}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1,n-1}^{(1)} & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\
a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2,n-1}^{(2)} & a_{2n}^{(2)} & a_{2,n+1}^{(2)} \\
a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3,n-1}^{(3)} & a_{3n}^{(3)} & a_{3,n+1}^{(3)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n-1,1}^{(1)} & a_{n-1,2}^{(2)} & a_{n-1,3}^{(3)} & \cdots & a_{n-1,n-1}^{(n-1)} & a_{n-1,n}^{(n-1)} & a_{n-1,n+1}^{(n-1)} \\
a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{n,n-1}^{(n-1)} & a_{nn}^{(n)} & a_{n,n+1}^{(n)}
\end{pmatrix}
\quad (9.25)
$$

线上及其右上方与(9.20)相同, 线左下不再全是0. 由于线左下方数据在回代过程中用不到, 因此对结果无影响.

9.1.6、示例：

我们以前面所举的简单实例为例：

$2X_1-4X_2-X_3=-4$ （9.1a）

$3X_1+X_2-2X_3=9$ (9.1b)

$5X_1+4X_2-6X_3=25$ (9.1c)

其增广矩阵：

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & -2 & 9 \\ 5 & 4 & -6 & 25 \end{pmatrix} \qquad (9.7)$$

方程组由3个方程组成, N=3. 程序为:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & -2 & 9 \\ 5 & 4 & -6 & 25 \end{pmatrix} \qquad (9.7)$$

```
110 READ N
120 DIM A(N, N + 1), X(N)
130 FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N + 1
        : READ A(I, J): NEXT J: NEXT I
140 DATA 3
150 DATA 2,-4,-1,-4,3,1,-2,9,5,4,-6,25
```

```
160 GOSUB 9010
165 FOR I = 1 TO N
170 PRINT "X"; I; "="; X(I)
180 NEXT I
190 END
9010 FOR K = 1 TO N - 1
……
9440 RETURN
```

运行结果:

```
X 1 =1
X 2 =2
X 3 =-2
```

作业：150页第 四 题。

习题四：将CH_3Cl、C_2H_5Cl、HCN、NH_3混合，元素分析的结果以质量百分数表示为：C-18.71%，H-11.38，Cl-35.68。请用简单削去法编程计算混合前四种化合物的量，用占总量的质量百分数表示。原子量：C-12.01，H-1.008，N-14.01，Cl-35.45。