第三节　齐次方程

一、齐次方程

二、小结

一、齐次方程

属于一阶微分方程 $y' = f(x,y)$

1.【定义】 形如 $\dfrac{dy}{dx} = \varphi(\dfrac{y}{x})$ 的微分方程称为齐次方程.

2.【解法】 作变量代换 $u = \dfrac{y}{x}$, 即 $y = xu$,

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx},$$

代入原式 $$u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u),$$

即 $$\frac{du}{dx} = \frac{\varphi(u) - u}{x}.$$ 可分离变量的方程

分离变量得 $$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

两端积分得 $$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{1}{x}dx$$

求出积分后再以 $\dfrac{y}{x}$ 代替 u,即得方程通解.

【例1】 解微分方程 $(y^2-2xy)\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=0.$

【解】 方程变形为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\frac{y}{x}-(\frac{y}{x})^2,$

令 $u=\frac{y}{x},$ 则有 $u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2u-u^2$

分离变量 $\frac{\mathrm{d}u}{u^2-u}=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 即 $(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u})\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$

积分得 $\ln\left|\frac{u-1}{u}\right|=-\ln|x|+\ln|C|,$ 即 $\frac{x(u-1)}{u}=C$

代回原变量得通解 $x(y-x)=Cy$ (C为任意常数)

【例2】求解微分方程 $(x-y\cos\frac{y}{x})dx+x\cos\frac{y}{x}dy=0.$

【解】 令 $u=\frac{y}{x}$, 则 $dy=d(xu)=udx+xdu$,

代入原式得 $(x-xu\cos u)dx+x\cos u(udx+xdu)=0$

化简得 $\cos udu=-\frac{dx}{x}$,

两边积分得 $\sin u=-\ln|x|+C$,

微分方程的解为 $\sin\frac{y}{x}=-\ln|x|+C.$

【思考题】

方程 $\int_0^x \left[2y(t)+\sqrt{t^2+y^2(t)}\right]dt = xy(x)$

是否为齐次方程?

【思考题解答】

方程两边同时对 x 求导得:

$$2y+\sqrt{x^2+y^2}=y+xy',$$

$$xy'=\sqrt{x^2+y^2}+y, \qquad y'=\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x}, \ (x>0\text{时})$$

原方程是齐次方程.

如何观察一阶微分方程是齐次的：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}y+\cdots+a_kx^{m-k}y^k+\cdots+a_my^m}{b_0x^m+b_1x^{m-1}y+\cdots+b_kx^{m-k}y^k+\cdots+b_my^m}$$

特点：分式中分子与分母的各项中 x与y的幂次之和无一例外的“整齐”——都是m,则该微分方程就是齐次型的，例如 $(x^3+y^3)dx-3xy^2dy=0$

可化为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^3+y^3}{3xy^2}$

二、小结

齐次方程 $\dfrac{dy}{dx}=f(\dfrac{y}{x})$.

齐次方程的解法 令 $u=\dfrac{y}{x}$.