第四节 隐函数和参数方程求导

一、隐函数的导数

二、对数求导法

三、由参数方程确定的函数的导数

一、 隐函数的导数

以解析式 $y=f(x)$ 的形式确定的函数称为显函数.

例如 $y=e^{x}\cos x,\quad y=x\ln x.$

以二元方程 $F(x,y)=0$ 的形式确定的函数称为隐函数.

例如 $x+y^{3}-1=0,\quad \sin(x+y)=3x-y+2.$

把一个隐函数化成显函数，称为隐函数的显化.

$$x+y^{3}-1=0 \;\Rightarrow\; y=\sqrt[3]{x-1}.$$

$\sin(x+y)=3x-y+2$ 难以化成显函数.

隐函数求导的基本思想是：

把方程 $F(x,y)=0$ 中的 y 看成自变量 x 的函数 $y(x)$，结合复合函数求导法，在方程两端同时对 x 求导数，然后整理变形解出 y' 即可.

- y' 的结果中可同时含有 x 和 y .
- 若将 y 看成自变量，同理可求出 x'.

隐函数求导法则：对方程两边同时求导.

例1 求由方程$y=\ln(x+y)$所确定的隐函数的导数y'.

解 方程两端对x求导，得

$$y'=\frac{1}{x+y}(x+y)'=\frac{1}{x+y}(1+y'),$$

从而
$$y'=\frac{1}{x+y-1}.$$

例2 求由方程$e^y+xy-e=0$所确定的隐函数的导数y'.

解 方程两端对x求导，得

$$e^y\cdot y'+y+x\cdot y'=0,$$

从而
$$y'=-\frac{y}{x+e^y}.$$

例3 求由方程 $xy - e^x + e^y = 0$所确定的隐函数$y = y(x)$

的导数 $\frac{dy}{dx}, \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解 方程两边对 x求导,

$$y + xy' - e^x + e^y y' = 0 \Rightarrow (x + e^y)y' = e^x - y$$

解得 $y' = \frac{e^x - y}{x + e^y}$, 由原方程知 $x = 0, y = 0$,

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{e^x - y}{x + e^y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = 1.$$

例4 设曲线C的方程为$x^3+y^3=3xy$,求过C上点$\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$的切线方程.

解 方程两边对x求导, $3x^2+3y^2y'=3y+3xy'$

$$\therefore y'=\frac{y-x^2}{y^2-x}$$

$$\therefore y'\Big|_{x=\frac{3}{2}}=\frac{y-x^2}{y^2-x}\bigg|_{x=\frac{3}{2},y=\frac{3}{2}}=-1.$$

所求切线方程为 $y-\frac{3}{2}=-(x-\frac{3}{2})$

即 $x+y-3=0.$

例5求由方程 $x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$ 所确定的隐函数的二阶导数

解 两边对x求导 $1-\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}\cos y\cdot\frac{dy}{dx}=0,$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{2-\cos y}.$$

上式两边再对x求导,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2\sin y\dfrac{dy}{dx}}{(2-\cos y)^2}=\frac{-4\sin y}{(2-\cos y)^3}.$$

例6 已知 $y=1+xe^y$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

解 两边对x求导 $y'=e^y+xe^y y'$

$$\therefore y'=\frac{e^y}{1-xe^y}=\frac{e^y}{2-y}$$

$$y''=\frac{e^y y'(2-y)-e^y(-y')}{(2-y)^2}=\frac{e^y y'(3-y)}{(2-y)^2}$$

$$=\frac{e^y\cdot\dfrac{e^y}{2-y}(3-y)}{(2-y)^2}=\frac{e^{2y}(3-y)}{(2-y)^3}$$

解法二：两边对x求导 $$y' = e^y + xe^y y' \quad (1)$$

两边继续对 x求导

$$y'' = e^y \cdot y' + e^y y' + xe^y (y')^2 + xe^y y'' \quad (2)$$

$$\because y' = \frac{e^y}{1 - xe^y} = \frac{e^y}{2 - y}$$

$$y'' = \frac{2e^y y' + xe^y (y')^2}{1 - xe^y} = \frac{e^{2y}(3 - y)}{(2 - y)^3}$$

内容小结

1. 隐函数求导法则：直接对方程两边求导;