第四节　空间直线及其方程

一、空间直线的一般方程

二、空间直线的对称式方程与参数方程

三、两直线的夹角

四、直线与平面的夹角

五、杂例

六、小结　思考题

一、空间直线的一般方程

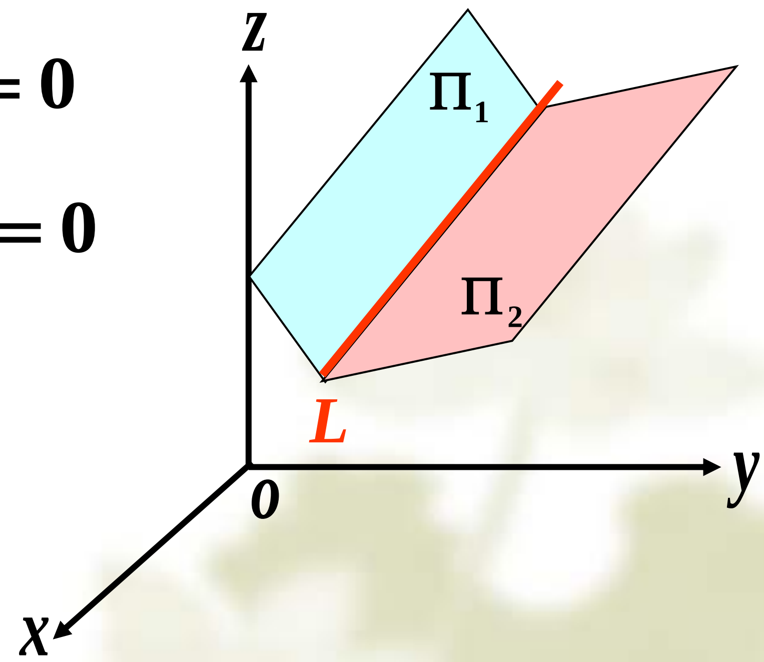
定义: 空间直线可看成两平面的交线.

$$\Pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

$$\Pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

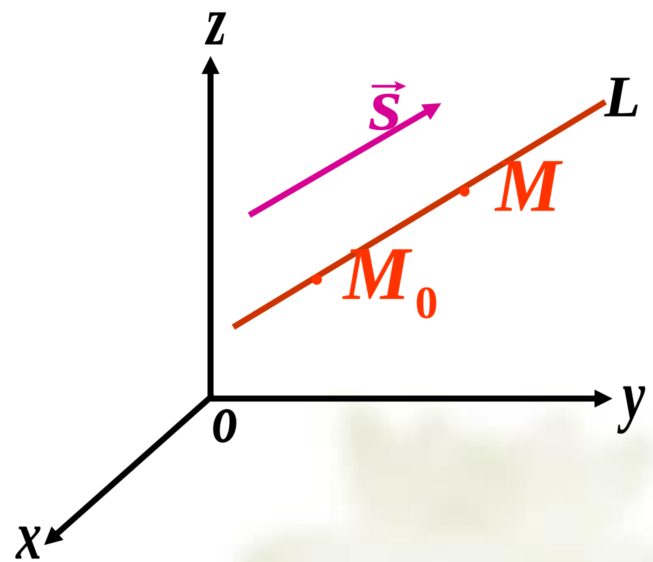
空间直线的一般方程



二、空间直线的对称式方程与参数方程

1、方向向量

如果一非零向量平行于一条已知直线，这个向量称为这条直线的方向向量.



2、直线的方程

定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\quad \vec{s} = (m, n, p)$,

$\forall\, M(x, y, z) \in L$, $\quad \overrightarrow{M_0M} \mathbin{//} \vec{s}$

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

直线的对称式方程
(点向式方程)

令 $$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

直线的一组方向数

向量 $\vec{s}$ 的方向余弦称为直线的方向余弦.

直线的参数方程

【教材例1】用对称式方程及参数方程表示直线.

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}.$$

【解】 在直线上任取一点 (x_0,y_0,z_0)

取 $x_0=1 \Rightarrow \begin{cases} y_0+z_0+2=0 \\ y_0-3z_0-6=0 \end{cases},$

解得 $y_0=0,\quad z_0=-2$

点坐标 $(1,0,-2)$,

因所求直线与两平面的法向量都垂直

取 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(4,-1,-3)$,

对称式方程 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-0}{-1}=\dfrac{z+2}{-3}$,

参数方程 $\begin{cases} x=1+4t \\ y=-t \\ z=-2-3t \end{cases}$.

【注意】 1. 直线的三种方程之间的互化.

2. 重要特点：两平面交线与两平面的法向量都垂直.

【例2】 一直线过点 $A(2,-3,4)$， 且和 y 轴垂直相交, 求其方程.

【解】 因为直线和y轴垂直相交,

所以交点为 $B(0,-3,0)$,

取 $\vec{s}=\overrightarrow{BA}=(2,0,4)=2(1,0,2)$,

所求直线方程 $$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-4}{2}.$$

【教材例3】求过点 $M(2,1,3)$ 且与直线 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程.

【解】先作过点 M 且与已知直线垂直的平面 Π

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$$

再求已知直线与该平面的交点N,

令 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}=t \Rightarrow \begin{cases} x=3t-1 \\ y=2t+1. \\ z=-t \end{cases}$

代入平面方程得 $t=\frac{3}{7}$ ，交点 $N(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7})$

取所求直线的方向向量为 $\overrightarrow{MN}$

$$\overrightarrow{MN}=(\frac{2}{7}-2,\frac{13}{7}-1,-\frac{3}{7}-3)=(-\frac{12}{7},\frac{6}{7},-\frac{24}{7}),$$

所求直线方程为 $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}.$

三、两直线的夹角

1、定义与夹角公式

定义 两直线的方向向量的夹角称之.（锐角或直角）

直线 L_1 : $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$,

直线 L_2 : $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$,

两直线的夹角 φ 公式

$$\cos\varphi=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

2、两直线的位置关系：

(1) $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0,$

(2) $L_1 // L_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 // \vec{s}_2 \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2},$

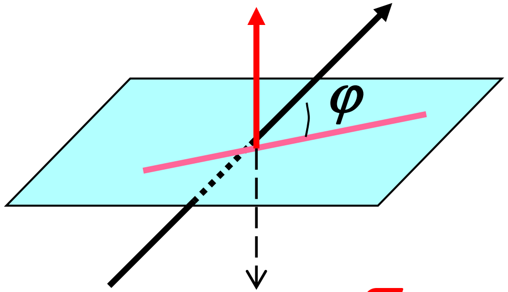
例如，直线 L_1： $\vec{s}_1 = (1, -4, 0),$

直线 L_2： $\vec{s}_2 = (0, 0, 1),$

$\because \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0, \quad \therefore \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2,$ 即 $L_1 \perp L_2$.

四、直线与平面的夹角

1、定义与夹角公式



(1) 定义 直线和它在平面上的投影直线的夹角 φ 称为直线与平面的夹角. $0 \le \varphi < \dfrac{\pi}{2}$

$$L: \quad \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}, \qquad \vec{s} = (m, n, p),$$

$$\Pi: \quad Ax + By + Cz + D = 0, \qquad \vec{n} = (A, B, C),$$

$$(\widehat{\vec{s}, \vec{n}}) = \frac{\pi}{2} - \varphi \qquad (\widehat{\vec{s}, \vec{n}}) = \frac{\pi}{2} + \varphi$$

(2) 直线与平面的夹角公式 $\quad \cos(\widehat{\vec{s}, \vec{n}}) = \pm \sin\varphi$

$$\left|\cos(\widehat{\vec{s}, \vec{n}})\right| = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} = \sin\varphi$$

2、直线与平面的位置关系：

(1) $L \perp \Pi \Leftrightarrow \vec{s} \mathbin{/\!/} \vec{n} \Leftrightarrow \dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}.$

(2) $L \mathbin{/\!/} \Pi \Leftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0.$

【例4】设直线 $L: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$，平面 $\Pi: x - y + 2z = 3$，求直线与平面的夹角.

【解】 $\vec{n} = (1,-1,2),\qquad \vec{s} = (2,-1,2),$

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} = \frac{|1\times 2 + (-1)\times(-1) + 2\times 2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}} = \frac{7}{3\sqrt{6}}.$$

$\therefore\quad \varphi = \arcsin\dfrac{7}{3\sqrt{6}}$ 为所求夹角.

五、杂例

【教材例5】求过点$(-3,2,5)$ 且与两平面$x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行的直线方程.

【解】设所求直线的方向向量为 $\vec{s}=(m,n,p)$,

根据题意知 $\vec{s}\perp\vec{n}_1$, $\vec{s}\perp\vec{n}_2$,

取 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2 \;=(-4,-3,-1)$,

所求直线的方程 $$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}.$$

【例6】求直线 $L:\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 5 + 8t \end{cases}$ 在三个坐标面及平面

$x - y + 3z + 8 = 0$ 上的投影方程.

【解】 先将参数方程转化为对称式方程

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-5}{8},$$

然后分别结合 x, y, z 为 0 即可得直线在三个坐标面上的投影方程.

则在 xoy、yoz、zox 面的投影方程依次为

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+1}{2} \\ z=0 \end{cases},\qquad \begin{cases} \dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-5}{8} \\ x=0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{z-5}{8} \\ y=0 \end{cases}.$$

过直线作一平面与已知平面垂直

直线的方向向量 $\vec{s} = (-1,2,8)$

已知平面的法向量 $\vec{n} = (1,-1,3)$

$$\Rightarrow \quad \vec{s} \times \vec{n} = (14,11,-1)$$

即为所求平面的法向量.

又点 (3,–1,5) 在所求平面上

故所求平面的方程为

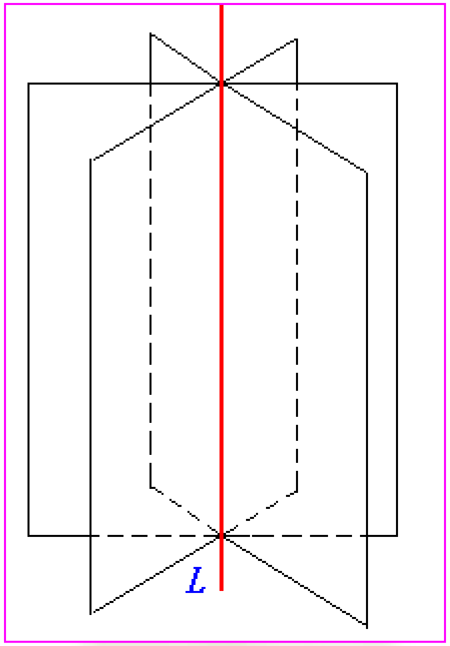
$$14(x-3)+11(y+1)-(z-5)=0$$

即 $\quad 14x+11y-z-26=0$

已知直线在所给平面上的投影直线的方程为

$$\begin{cases} x-y+3z+8=0 \\ 14x+11y-z-26=0 \end{cases}$$

【平面束】通过定直线的所有平面的全体.



若直线L：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 & (1) \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & (2) \end{cases}$

则方程

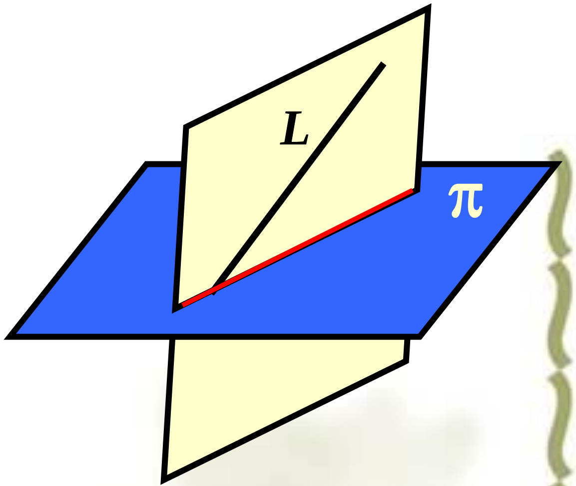
$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

表示过直线L的平面束方程（实际上表示缺少平面(2)的平面束）

有时用平面束方程解题比较方便，请看下例

【教材例7】求直线 $L:\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $\pi: x+y+z=0$ 上的投影直线的方程.

【分析】因所求直线既在平面π上又在平面π的垂面上.故只需求出垂面方程即可.



【解】 平面束方程为

$$(x+y-z-1)+\lambda(x-y+z+1)=0$$

即 $(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z+(-1+\lambda)=0$

又 $\because$ 垂直于平面 π,

$$\therefore (1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 1=0. \Longrightarrow \lambda=-1$$

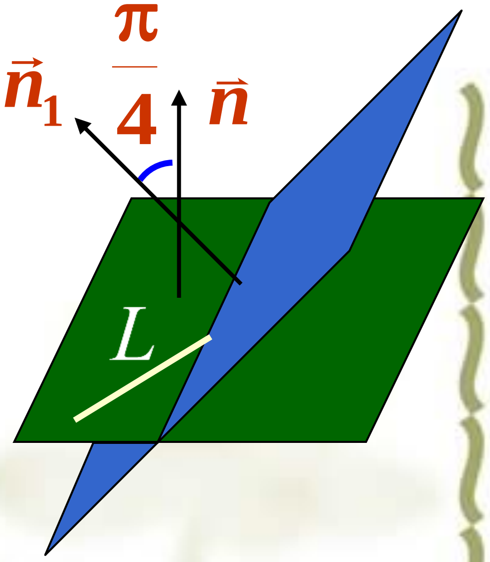
垂面方程为 $y-z-1=0$

投影直线方程 $\begin{cases} y-z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

【例8】

求过直线 $L:\begin{cases}x+5y+z=0\\x-z+4=0,\end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$

组成 $\dfrac{\pi}{4}$ 角的平面方程.



【解】 过已知直线的平面束方程为

$$x+5y+z+\lambda(x-z+4)=0,$$

即 $(1+\lambda)x+5y+(1-\lambda)z+4\lambda=0,$

其法向量 $\vec{n}=(1+\lambda,5,1-\lambda).$

又已知平面的法向量 $\vec{n}_1=(1,-4,-8).$

由题设知

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{n}_1|}{|\vec{n}||\vec{n}_1|}$$

$$=\frac{|(1+\lambda)\cdot 1+5\cdot(-4)+(1-\lambda)\cdot(-8)|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+(-8)^2}\sqrt{(1+\lambda)^2+5^2+(1-\lambda)^2}}$$

即 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{|\lambda-3|}{\sqrt{2\lambda^2+27}}$， 由此解得 $\lambda=-\dfrac{3}{4}$.

代回平面束方程为 $x+20y+7z-12=0.$

六、小结

空间直线的一般方程

空间直线的对称式方程与参数方程

两直线的夹角

直线与平面的夹角