第六节　空间曲线及其方程

一、空间曲线的一般方程

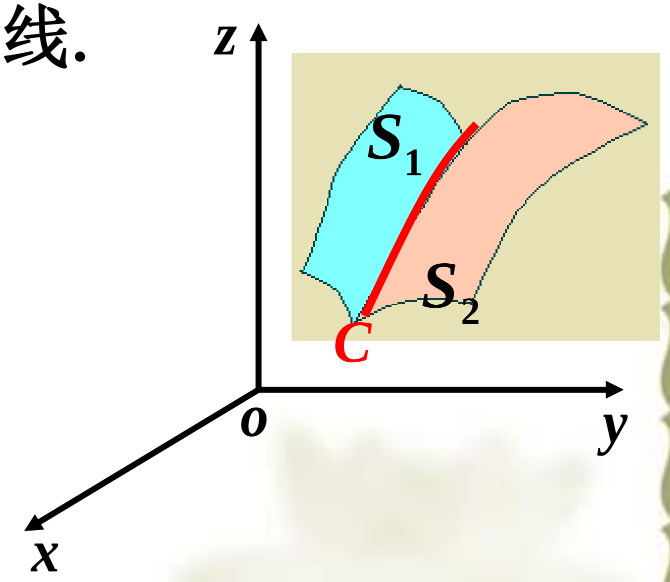
二、空间曲线的参数方程

三、空间曲线在坐标面上的投影

四、小结　思考题

一、空间曲线的一般方程

空间曲线C可看作空间两曲面的交线.



$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

空间曲线的一般方程

特点:曲线上的点都满足方程组，满足方程组的点都在曲线上，不在曲线上的点不能同时满足这两个方程.

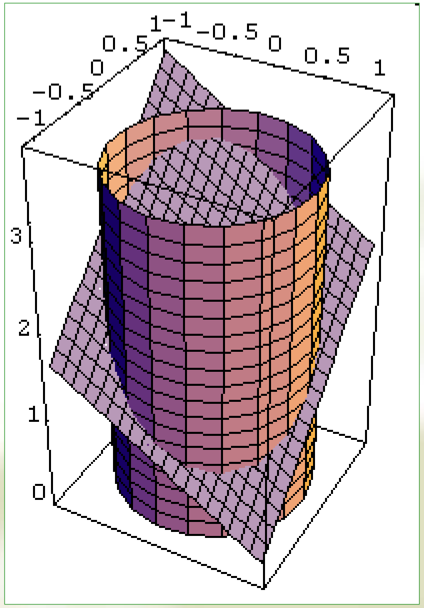
【注】空间曲线用一般方程表示, 表达式形式不唯一.

【例1】方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3y+3z=6 \end{cases}$ 表示怎样的曲线?

【解】 $x^2+y^2=1$ 表示圆柱面,

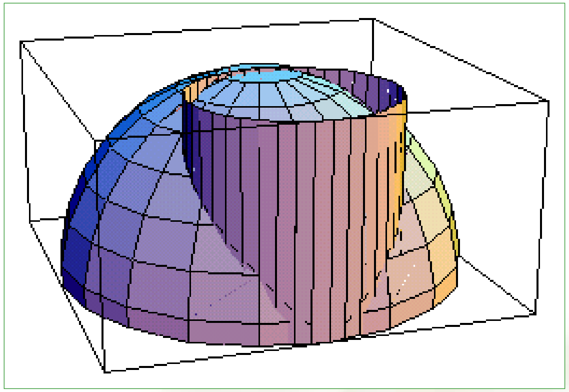
$2x+3y+3z=6$ 表示平面,

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3y+3z=6 \end{cases}$$



Flash动画

【教材例2】方程组 $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ (x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4} \end{cases}$ 表示怎样的曲线?

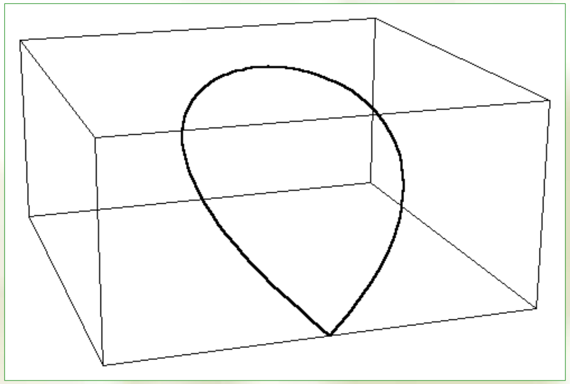


【解】

$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 上半球面,

$(x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$ 圆柱面,

交线如图.



二、空间曲线的参数方程

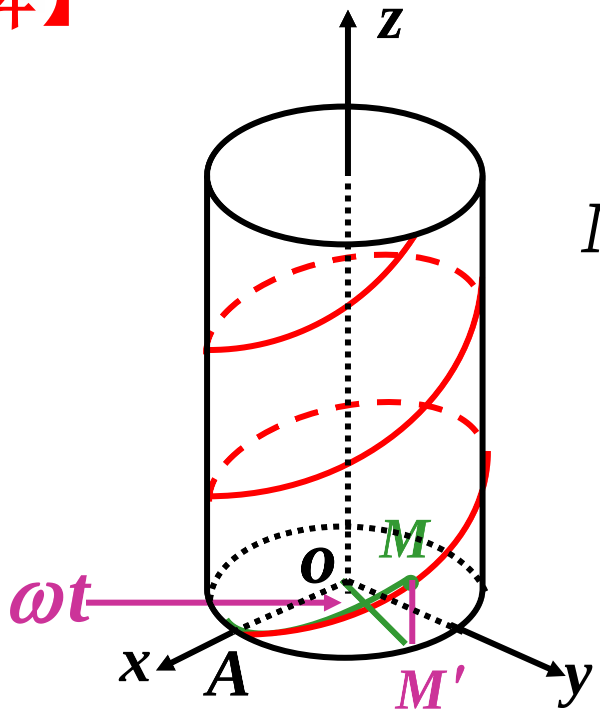
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

空间曲线的参数方程

当给定 $t = t_1$ 时，就得到曲线上的一个点 (x_1, y_1, z_1)，随着参数的变化可得到曲线上的全部点.

【教材例 3 】如果空间一点 M 在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上以角速度 ω 绕 z 轴旋转，同时又以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升（其中 ω、v 都是常数），那么点 M 构成的图形叫做螺旋线．试建立其参数方程．

【解】



取时间 t 为参数，动点从 A 点出发，经过 t 时间，运动到 M 点

$M(x,y,z)$ 在 xoy 面的投影 $M'(x,y,0)$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a\cos\omega t \\ y &= a\sin\omega t \\ z &= vt \end{aligned}}$$

螺旋线的参数方程

螺旋线又称圆柱螺线

圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$

$M(x,y,z)$

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \quad (\theta = \omega t, \quad b = \dfrac{v}{\omega}) \\ z = b\theta \end{cases}$$

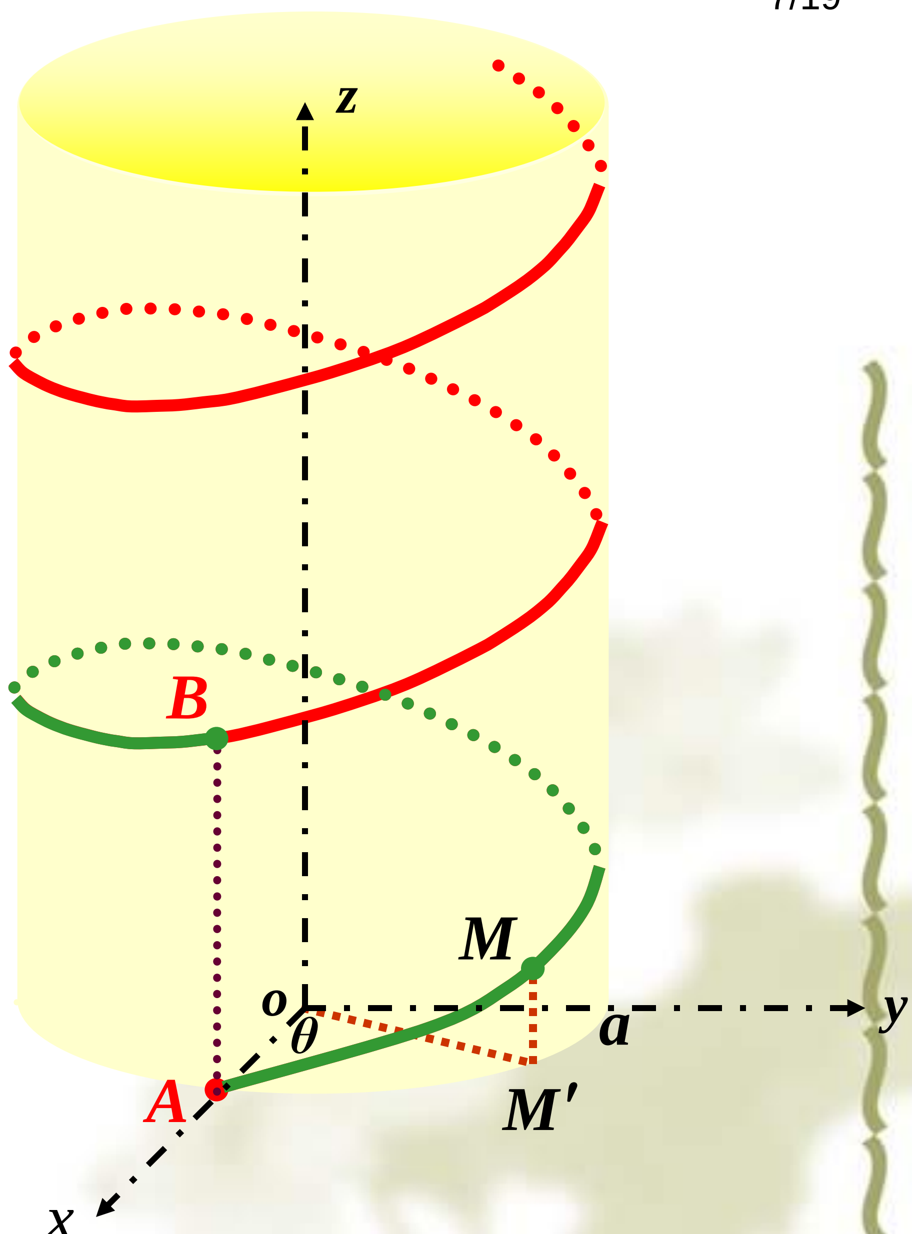
螺旋线的重要性质：

上升的高度与转过的角度成正比

当 θ 从 $0 \to 2\pi$，

螺线从点 $A \to B$

$|AB| = 2\pi b$ 叫螺距

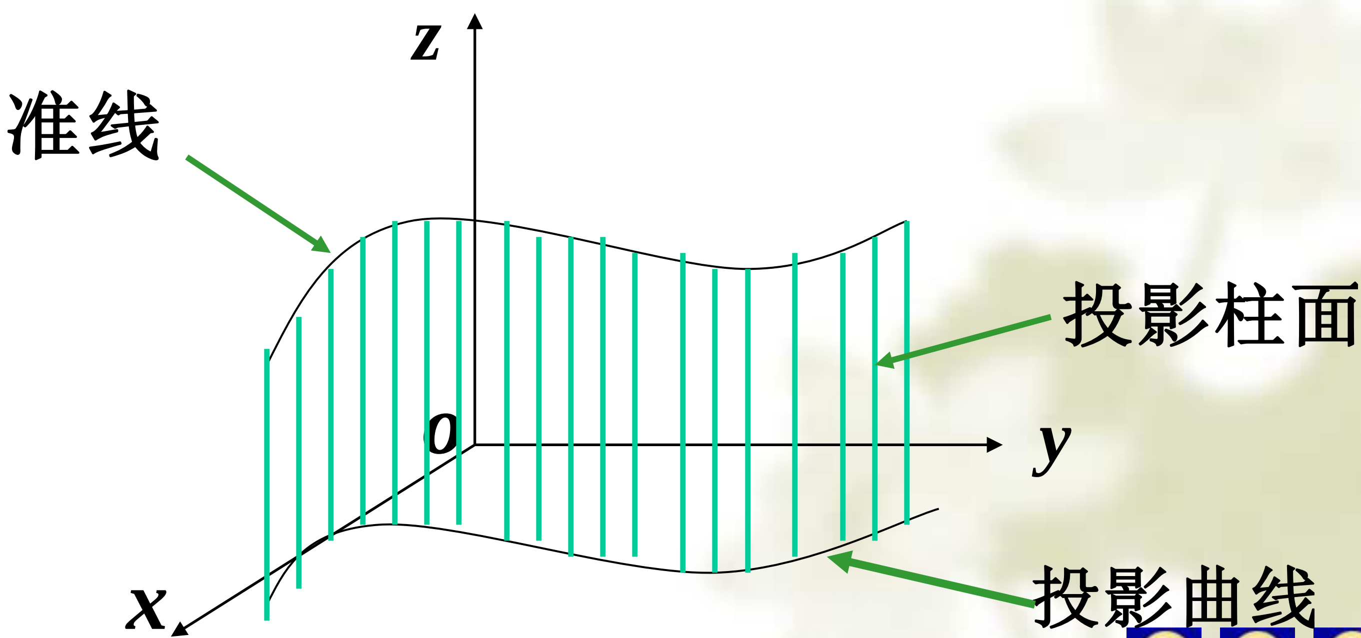


三、空间曲线在坐标面上的投影

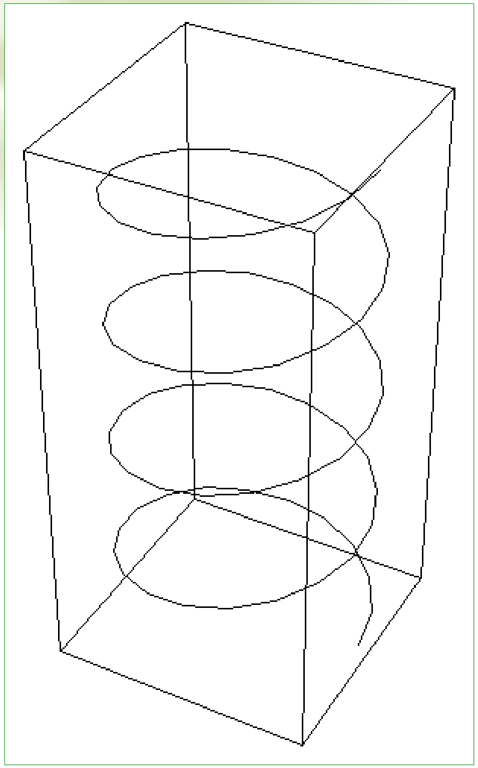
设空间曲线的一般方程：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

投影曲线：

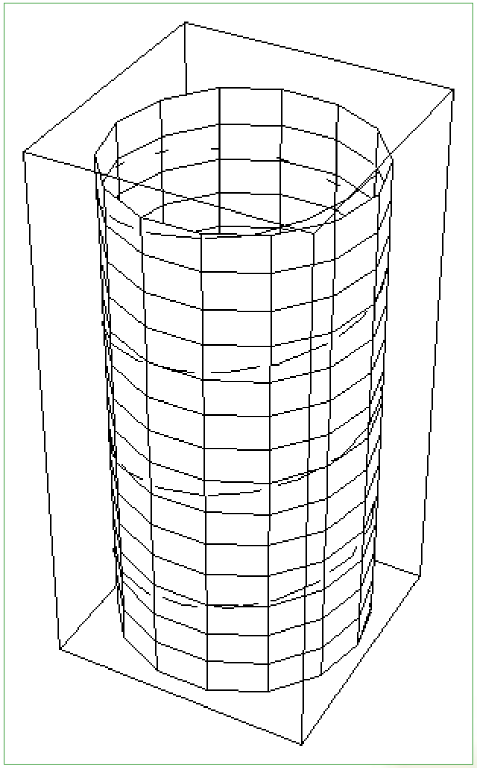
从曲线C上各点向坐标面作垂线垂足所构成的曲线



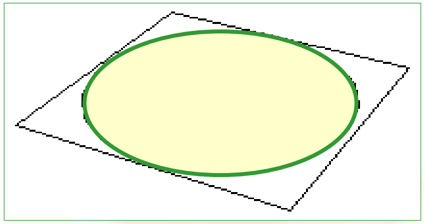
如图:投影曲线的研究过程.



空间曲线



投影柱面



投影曲线

★ 投影曲线方程的求法

设空间曲线C的一般方程：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

消去变量z后得：　$H(x,y)=0$

曲线C关于 xoy 面的投影柱面

投影柱面的特征：

以此空间曲线C为准线，母线平行于z轴的柱面.

空间曲线在 xoy 面上的投影曲线, 简称投影.

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

类似地：可定义空间曲线在其他坐标面上的投影

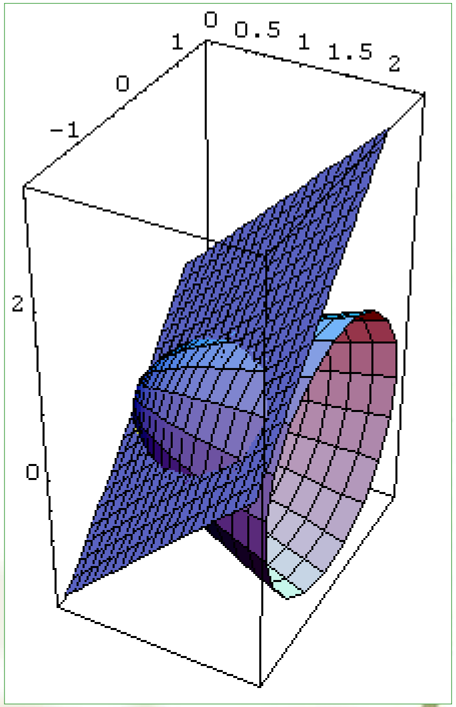
yoz 面上的投影：

$$\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

xoz 面上的投影：

$$\begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$$

【例 4】求抛物面 $y^2+z^2=x$ 与平面 $x+2y-z=0$ 的截线在三个坐标面上的投影曲线方程.



【解】 截线方程为 $\begin{cases} y^2+z^2=x \\ x+2y-z=0 \end{cases}$

如图,

(1) 消去 z 得投影 $\begin{cases} x^2+5y^2+4xy-x=0 \\ z=0 \end{cases}$,

(2) 消去 y 得投影 $\begin{cases} x^2+5z^2-2xz-4x=0 \\ y=0 \end{cases}$,

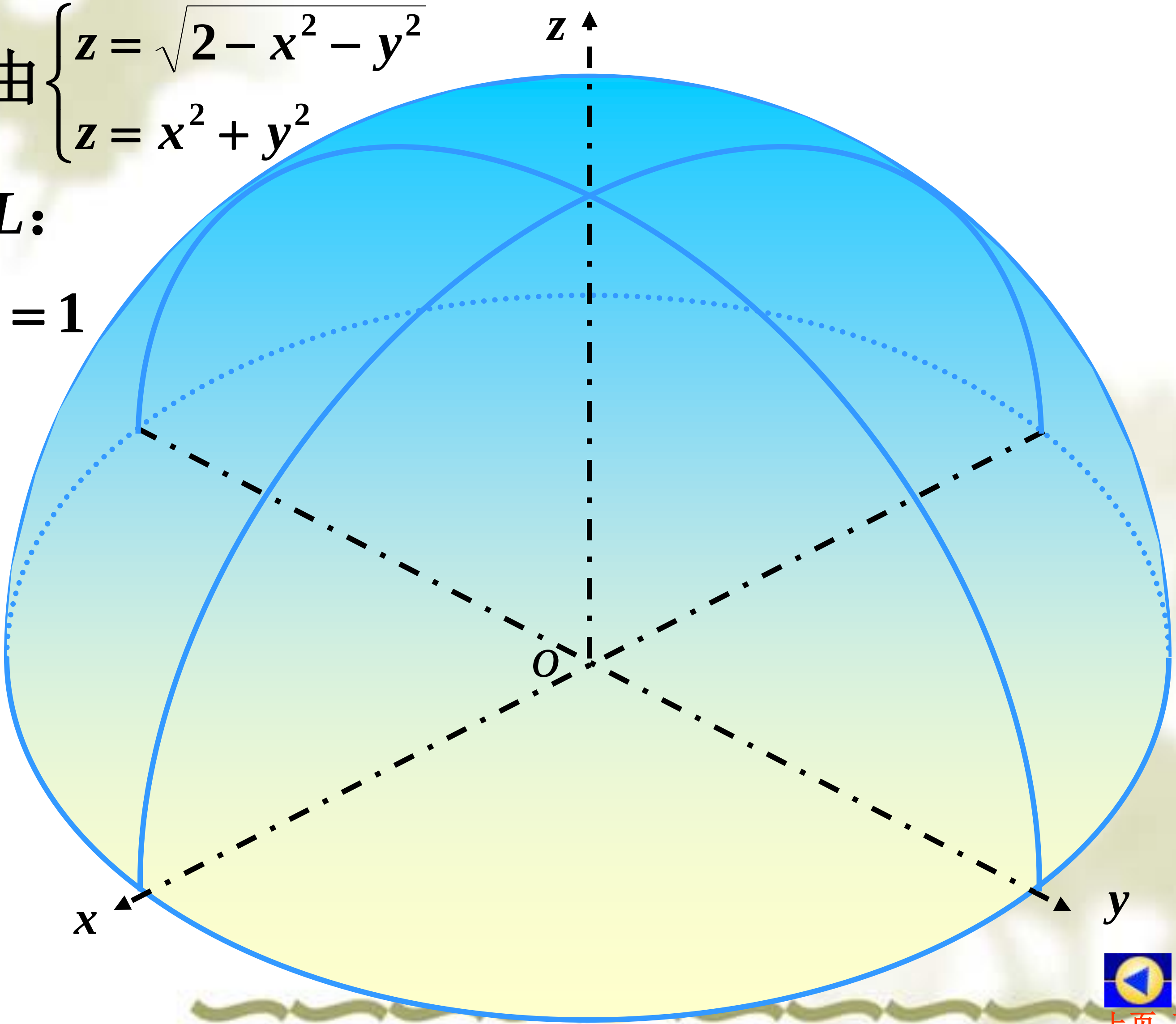
(3) 消去 x 得投影 $\begin{cases} y^2+z^2+2y-z=0 \\ x=0 \end{cases}$.

【例5】求曲面$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$及$z=x^2+y^2$的交线L在xoy平面的投影.

【解】由$\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2} \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$

得交线L:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$$

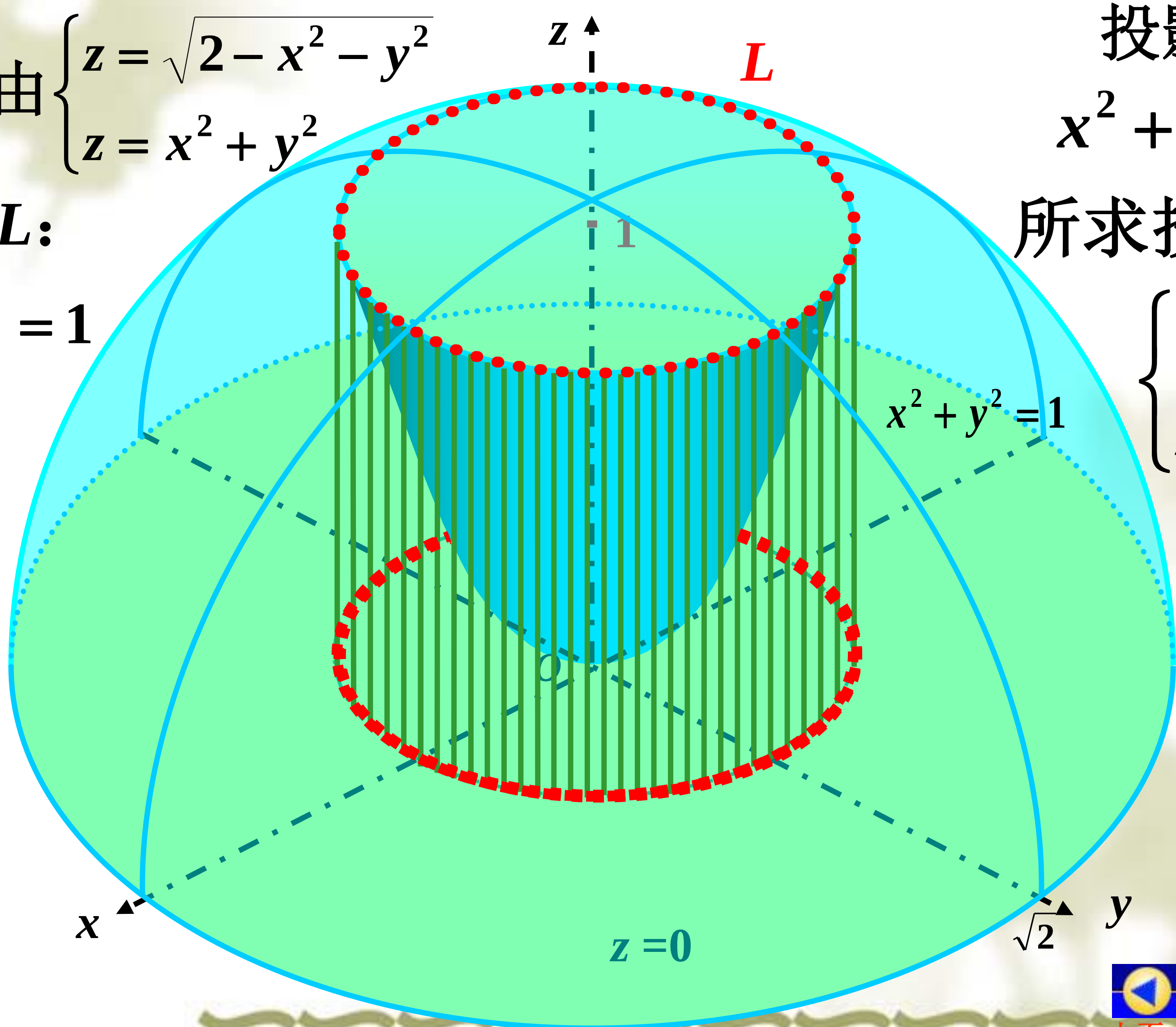


【例5】求曲面$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 的交线 L 在 xoy 平面的投影。

【解】由$\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2} \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$

得交线L:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$$



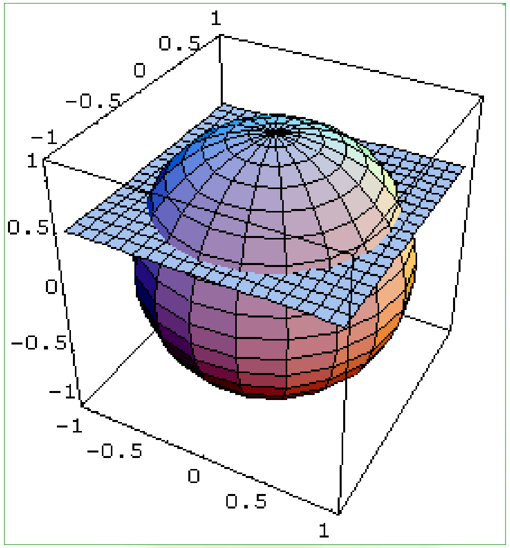
投影柱面

$$x^2+y^2=1$$

所求投影曲线为

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$$

【例6】求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 在坐标面上的投影.



【解】 (1)消去变量z 后得 $x^2+y^2=\dfrac{3}{4}$,

在 xoy 面上的投影为 $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{3}{4}, \\ z=0 \end{cases}$

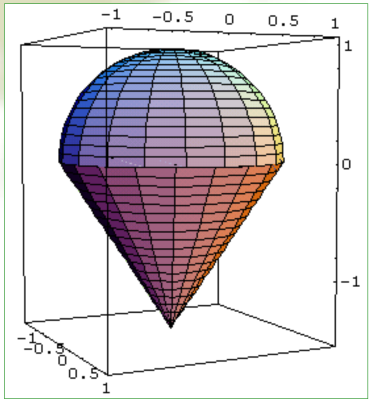
(2) 因为曲线在平面 $z=\dfrac{1}{2}$ 上,

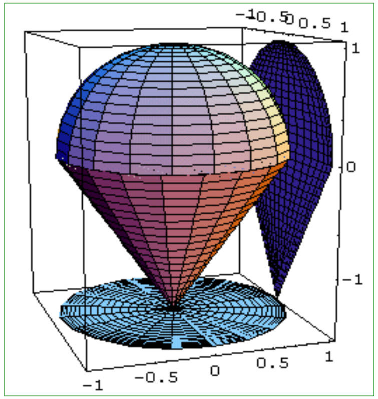
所以在 xoz 面上的投影为线段. $\begin{cases} z=\dfrac{1}{2}, & |x|\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \\ y=0 \end{cases}$

(3) 同理在 yoz 面上的投影也为线段.

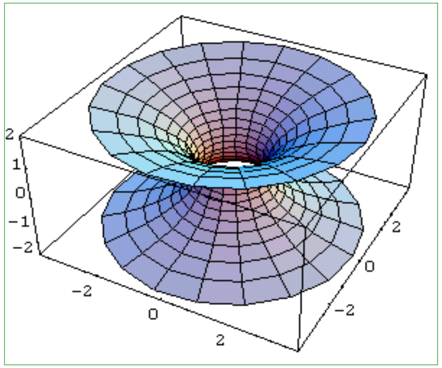
$\begin{cases} z=\dfrac{1}{2}, & |y|\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \\ x=0 \end{cases}$

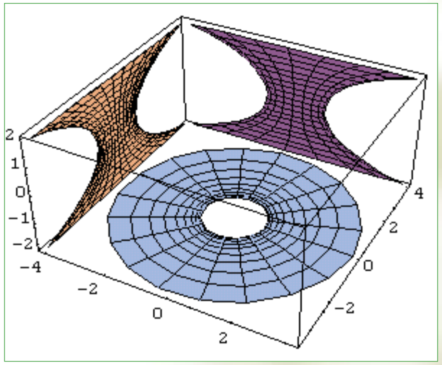
补充：空间立体或曲面在坐标面上的投影.





半球和锥





单叶双曲面

【教材例7】设一个立体由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 锥面所围成,求它在 xoy 面上的投影 .

【解】 半球面和锥面的交线为 $C:\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)}, \end{cases}$

消去 z 得投影柱面 $x^2+y^2=1$,

则交线 C 在 xoy 面上的投影为圆 $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=0. \end{cases}$

$\therefore$ 所求立体在 xoy 面上的投影为 $x^2+y^2\le 1$.

【注意】空间立体或曲面在坐标面上的投影是该坐标面上的一块区域, 或一段曲线. 故一般用不等式表示.

四、小结

空间曲线的一般方程、参数方程.

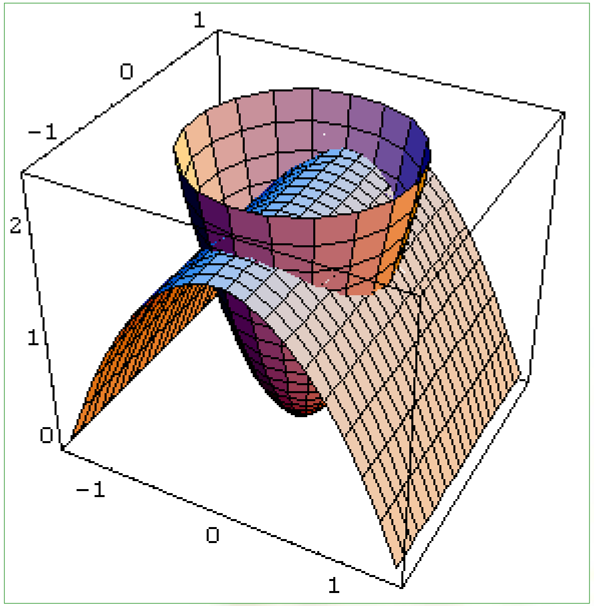
$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$$

空间曲线在坐标面上的投影.

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$$

【思考题】

求椭圆抛物面$2y^2+x^2=z$与抛物柱面$2-x^2=z$的交线关于xoy面的投影柱面和在xoy面上的投影曲线方程.



【思考题解答】

交线方程为 $\begin{cases} 2y^2+x^2=z \\ 2-x^2=z \end{cases}$,

消去z得关于xoy面的投影柱面 $x^2+y^2=1$,

在 xoy 面上的投影为 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$.