第六节 多元函数微分学的几何应用

一、一元向量值函数及其导数

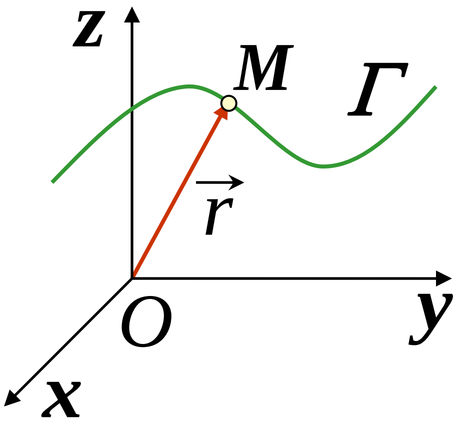
二、空间曲线的切线与法平面

三、曲面的切平面与法线

四、小结 思考题

一、一元向量值函数及其导数

引例: 已知空间曲线 Γ 的参数方程:



$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \quad t \in [\alpha, \beta] \\ z = \omega(t) \end{cases}$$

记 $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{f}(t) = (\varphi(t), \psi(t), \omega(t))$

Γ 的向量方程 $\vec{r} = \vec{f}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$

此方程确定映射 $\vec{f}: [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}^3$,称此映射为一元向量值函数.

对 Γ 上的动点 M , 显然 $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, 即 Γ 是 $\vec{r}$ 的终点 M 的轨迹, 此轨迹称为向量值函数的终端曲线.

定义: 给定数集 $D\subset \mathrm{R}$，称映射 $\vec{f}: D\to \mathrm{R}^n$ 为**一元向量值函数**（简称向量值函数），记为

$$\vec{r}=\vec{f}(t),\quad t\in D$$

定义域

因变量

自变量

向量值函数的极限、连续和导数都与各分量的极限、连续和导数密切相关，因此下面仅以 $n=3$ 的情形为代表进行讨论.

设 $\vec{f}(t)=(f_1(t), f_2(t), f_3(t)),\ t\in D$，则

极限： $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t)=(\lim\limits_{t\to t_0} f_1(t), \lim\limits_{t\to t_0} f_2(t), \lim\limits_{t\to t_0} f_3(t))$

连续： $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t)=\vec{f}(t_0)$

导数： $\vec{f}\,'(t)=(f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t))$

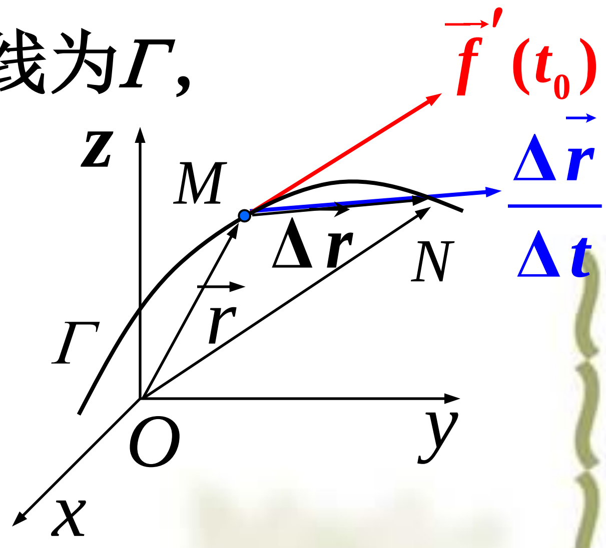
向量值函数导数的几何意义:

在 $\mathbf{R}^3$中，设 $\vec{r}=\vec{f}(t), t\in D$ 的终端曲线为Γ,

$$\overrightarrow{OM}=\vec{f}(t_0),\quad \overrightarrow{ON}=\vec{f}(t_0+\Delta t)$$

$$\Delta\vec{r}=\vec{f}(t_0+\Delta t)-\vec{f}(t_0)$$

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\vec{f}'(t_0)$$



设 $\vec{f}'(t_0)\neq 0$，则 $\vec{f}'(t_0)$表示终端曲线在t_0处的 切向量,

其指向与t 的增长方向 向一致.

向量值函数导数的物理意义:

设 $\vec{r}=\overrightarrow{f}(t)$ 表示沿光滑曲线运动的质点的**位置向量**，则有

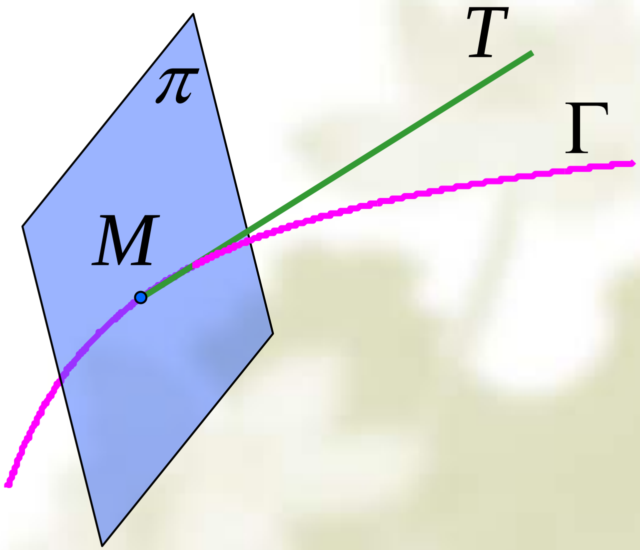
速度向量：$\vec{v}(t)=\overrightarrow{f}'(t)$

加速度向量：$\vec{a}=\vec{v}'(t)=\overrightarrow{f}''(t)$

二、空间曲线的切线与法平面

空间光滑曲线在点 M 处的切线为此点处割线的极限位置.

过点 M 与切线垂直的平面称为曲线在该点的法平面.



1. 曲线方程为参数方程的情况

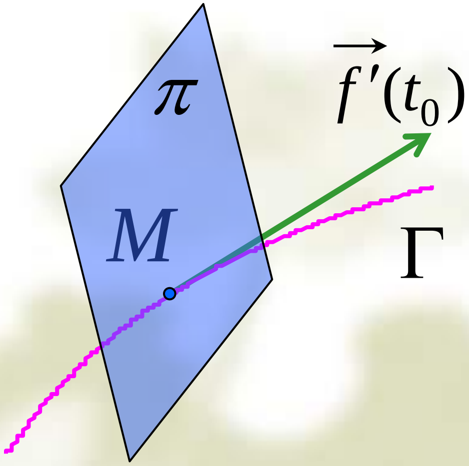
光滑曲线 Γ: $x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t), \quad t\in[\alpha,\beta]$

当$t=t_0$时,Γ上的点$M(x_0,y_0,z_0)$,

则Γ在点M 的切向量: $\vec{f}'(t_0)=\left(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)\right)$

曲线 Γ在点 M 处的切线方程:

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$



法平面方程:

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$$

例1 求曲线$x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$在点(1,1,1)处的切线及法平面方程.

解 点 (1,1,1) 对应的参数为 $t=1$,

$\because\quad x'=1,\ y'=2t,\ z'=3t^2$, 切向量为$\vec{T}=(1,2,3)$

切线方程: $$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3},$$

法平面方程: $$(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0,$$

即 $x+2y+3z-6=0.$

【例 4】求曲线 $\Gamma: x=\int_0^t e^u \cos u du$，$y=2\sin t+\cos t$, $z=1+e^{3t}$在$t=0$处的切线和法平面方程.

【解】当$t=0$时 $x=0, y=1, z=2,$

$$x'=e^t\cos t,\quad y'=2\cos t-\sin t,\quad z'=3e^{3t},$$

$$\Rightarrow\ x'(0)=1,\quad y'(0)=2,\quad z'(0)=3,$$

切线方程 $$\frac{x-0}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3},$$

法平面方程 $$x+2(y-1)+3(z-2)=0,$$

即 $x+2y+3z-8=0.$

2. 曲线方程是以 x 参数的情况

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases} \xrightarrow{x = x_0} \left(1, y'(x_0), z'(x_0)\right)$$

切向量

故曲线在 $x=x_0$ 处，在 $M(x_0, y_0, z_0)$ 处，

切线方程:
$$\frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{y'(x_0)} = \frac{z-z_0}{z'(x_0)},$$

法平面方程:

$$(x-x_0) + y'(x_0)(y-y_0) + z'(x_0)(z-z_0) = 0.$$

3. 曲线为一般式的情况

空间曲线Γ方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$,（一般式）

基本情形

确定隐函数组 $\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=x \\ y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$

切向量为 $\vec{T}=(1,y'(x_0),z'(x_0))$

其中$y'(x_0),z'(x_0)$由方程组确定的隐函数求导法可得,

将切向量 $\vec{T}$ 代入基本情形即得切线方程和法平面方程

【教材例 5】 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6$，$x+y+z=0$ 在点$(1,-2,1)$处的切线及法平面方程.

【解 I 】直接利用公式(略)；

【解II】曲线方程等价于 $\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$,$\vec{T}=(1,y'(x),z'(x))$

将所给方程的两边对x求导得

$$\begin{cases} 2x+2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=0 \\ 1+\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{z-x}{y-z}, \quad \frac{dz}{dx}=\frac{x-y}{y-z},$$

$$\Rightarrow \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,-2,1)} = 0, \qquad \left.\frac{dz}{dx}\right|_{(1,-2,1)} = -1,$$

由此得切向量 $\left.\vec{T}\right|_{(1,-2,1)} = (1, 0, -1),$

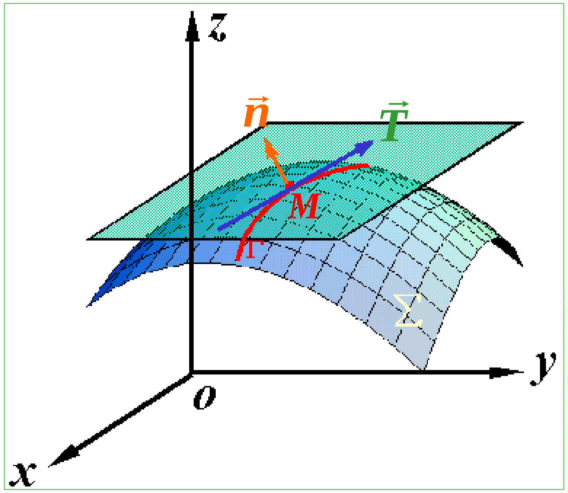
所求切线方程为 $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{z-1}{-1},$

法平面方程为 $(x-1) + 0 \cdot (y+2) - (z-1) = 0,$

即 $x - z = 0$

三、曲面的切平面与法线

1.【曲面Σ方程为隐式 $F(x,y,z)=0$】



其中F偏导连续, 在曲面上任取一条过点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 的光滑曲线

$$\Gamma:\ \begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t), \\ z=\omega(t) \end{cases}$$

曲线在M处的切向量 $\vec{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$,

令 $\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$ 则 $\vec{n}\perp\vec{T}$

事实上, 由 $F[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\equiv 0 \Longrightarrow \dfrac{d}{dt}F[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]=0$

即 $F_x\cdot\varphi'(t_0)+F_y\cdot\psi'(t_0)+F_z\cdot\omega'(t_0)=0$

故 $\vec{n}\perp\vec{T}$ 其中$F_x=F_x(x_0,y_0,z_0)$, 余同

由于$\vec{n}\perp\vec{T}$，且曲线是曲面上通过M的任意一条曲线，它们在M的切线都与同一向量$\vec{n}$垂直，故曲面上通过M的一切曲线在点M的切线都在同一平面上，这个平面称为曲面在点M的切平面.

切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

通过点$M(x_0,y_0,z_0)$而垂直于切平面的直线称为曲面在该点的法线.

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

垂直于曲面上切平面的向量称为曲面的**法向量**.

曲面在M处的**法向量**即

$$\vec{n} = (F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0))$$

2. 特殊地：【曲面∑方程为显式情形 $z = f(x,y)$】

令 $F(x,y,z) = f(x,y) - z$，(化为隐式)

则法向量为 $\vec{n} = \left(f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0),\ -1\right)$，

故曲面在M处的切平面方程为

$$\boxed{f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) = z - z_0,}$$

曲面在M处的法线方程为$\dfrac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)} = \dfrac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)} = \dfrac{z-z_0}{-1}$.

【例 6】求曲面$z-e^z+2xy=3$在点$(1,2,0)$处的切平面及法线方程.

【分析】 为隐式情形

【解】 令 $F(x,y,z)=z-e^z+2xy-3$,

$$F'_x\big|_{(1,2,0)}=2y\big|_{(1,2,0)}=4, \qquad F'_y\big|_{(1,2,0)}=2x\big|_{(1,2,0)}=2,$$

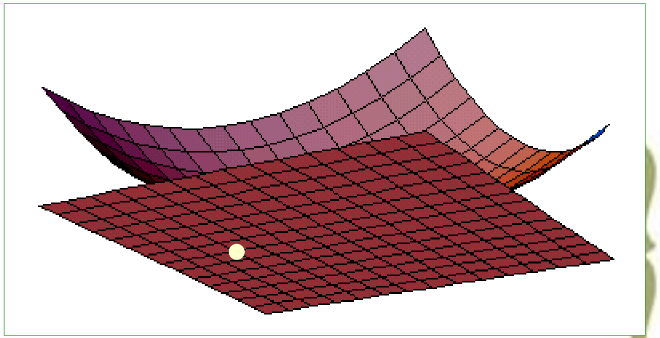
$$F'_z\big|_{(1,2,0)}=1-e^z\big|_{(1,2,0)}=0,$$

切平面方程 $4(x-1)+2(y-2)+0\cdot(z-0)=0,$

$$\Rightarrow \quad 2x+y-4=0,$$

法线方程 $$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-0}{0}.$$

【教材例 7】求旋转抛物面$z = x^2 + y^2 - 1$在点$(2,1,4)$处的切平面及法线方程.



【分析】为显式情形

【解】 $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1,$

$$\vec{n}\big|_{(2,1,4)} = (2x, 2y, -1)\big|_{(2,1,4)} = (4, 2, -1),$$

切平面方程为 $4(x-2) + 2(y-1) - (z-4) = 0,$

$$\Rightarrow \quad 4x + 2y - z - 6 = 0,$$

法线方程为 $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-4}{-1}.$

【注】也可化为隐式情形求解.

3. 【法向量的方向余弦】

若曲面Σ为 $z=f(x,y)$ ——显式 $\vec{n}=(f_x, f_y, -1)$

用α、β、γ表示曲面的法向量的方向角，并假定法向量的方向是向上的，即使得它与 z轴的正向所成的角 γ是锐角，则法向量的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\qquad \cos\alpha=\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\qquad \cos\beta=\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}.\qquad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}.$$

四、小结

1.空间曲线的切线与法平面

—按空间曲线方程的形式有三种情形

（当空间曲线方程为一般式时，求切向量注意采用直接法）

2.曲面的切平面与法线（显式、隐式两情形）

（求法向量的方向余弦时注意符号）

【思考题】 如果平面$3x+\lambda y-3z+16=0$与椭球面$3x^2+y^2+z^2=16$相切，求λ.

【思考题解答】

设切点 (x_0, y_0, z_0)， $\vec{n}=(6x_0, 2y_0, 2z_0)$,

依题意知平面的法向量为 $(3, \lambda, -3)$

$$\frac{6x_0}{3}=\frac{2y_0}{\lambda}=\frac{2z_0}{-3} \Rightarrow y_0=\lambda x_0,\quad z_0=-3x_0,$$

切点满足曲面和平面方程

$$\begin{cases} 3x_0+\lambda^2 x_0+9x_0+16=0 \\ 3x_0^2+\lambda^2 x_0^2+9x_0^2-16=0 \end{cases}, \quad \Rightarrow \lambda=\pm 2.$$