2.5 函数的微分

2.5 函数的微分

2.5.1 微分的概念

2.5.2 微分与导数的关系

2.5.3 微分的几何意义

2.5.4 微分公式与微分运算法则

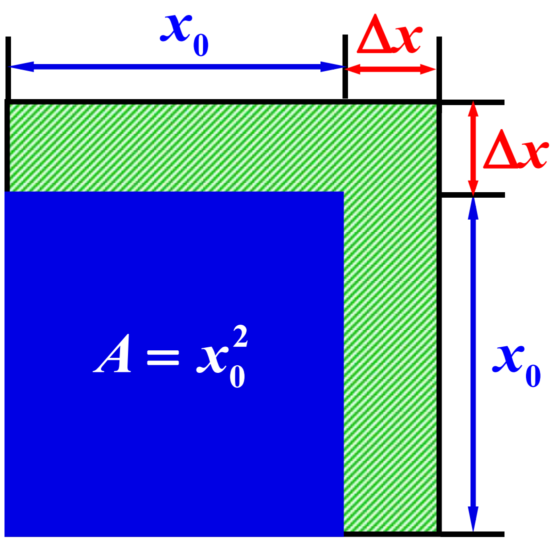
2.5.5 微分在近似计算中的应用

2.5.1 微分的概念

要求研究当自变量发生微小改变时所引起的相应的函数值的改变.

例：一块正方形金属薄片受温度变化的影响，其边长由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$，问此薄片的面积改变了多少？

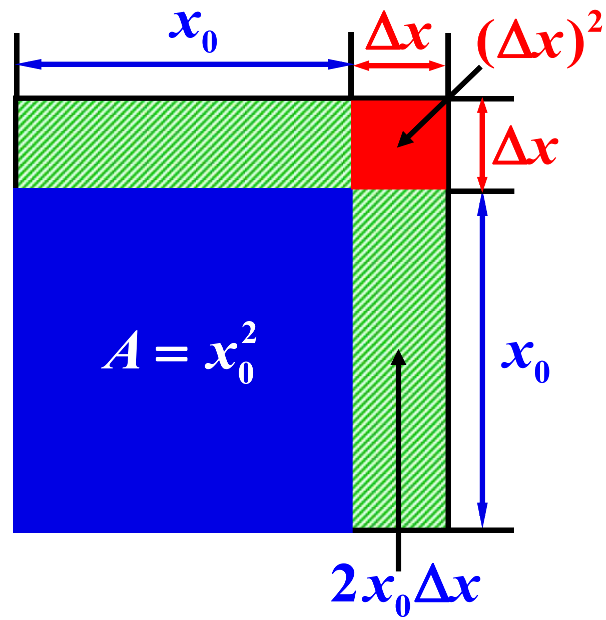
当 $|\Delta x|$ 很微小时，正方形的面积改变的近似值是多少？



$y = x^2$

如果边长由 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$,

则正方形面积改变量为



$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2$$

$$= \underbrace{2x_0 \cdot \Delta x}_{(\mathrm{I})} + \underbrace{(\Delta x)^2}_{(\mathrm{II})}.$$

(1) $2x_0\Delta x$ 为 Δx 的线性函数，为 Δy 的主要部分。

线性主部

(2) $(\Delta x)^2$，当 $\Delta x \to 0$ 时，$(\Delta x)^2 = o(\Delta x)$.

当 $|\Delta x|$ 很微小时，可以忽略不计。

故正方形的面积改变的近似值为 $2x_0\Delta x$.

定义1 设函数 $y = f(x)$在某区间内有定义，x_0及$x_0 + \Delta x$在此区间内，如果函数的增量

$$\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)$$

可表示为

$$\Delta y = \boxed{A \cdot \Delta x + o(\Delta x)}$$

其中 A是不依赖于Δx的常数，那么称函数 $y = f(x)$在在 x_0 处可微，并称$A \cdot \Delta x$ 为函数 $y = f(x)$在x_0处相应于自变量增量Δx的微分，

$$\boxed{dy\big|_{x=x_0} = A\Delta x} \text{或} \boxed{df\left(x_0\right) = A\Delta x.}$$

2.5.2 微分与导数的关系

函数$f(x)$在点x_0可微$\Leftrightarrow f(x)$在点x_0可导,且$A=f'(x_0)$.

证 (1) 必要性 设$f(x)$在点x_0可微,

$$即\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x),$$

则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(A+\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)=A.$

故函数 $f(x)$在点 x_0可导,且$A=f'(x_0)$.

(2) 充分性 $\because$ 函数$f(x)$在点x_0可导, $\therefore \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$,

即 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$, $\quad \left(\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0 \right)$

从而 $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$,

$$= f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$

故函数 $f(x)$在点x_0可微, 且 $f'(x_0) = A$.

故 $\boxed{dy = f'(x_0)\Delta x}$

注：（1）函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的微分就是当自变量 x 产生增量 Δx 时，函数 y 的增量 Δy 的主要部分.（此时 $A=f'\left(x_0\right)\neq 0$）

由于 $dy=A\Delta x$ 是 Δx 的线性函数，故称微分 dy 是 Δy 的线性主部.

在 $|\Delta x|$ 很小时，$\Delta y\approx dy$.

- 因为当 $f'(x_0)\neq 0$ 时，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{f'(x_0)\Delta x}=\frac{1}{f'(x_0)}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1.$$

（2）函数 $y=f(x)$ 的可导性与可微性是等价的，

故求导法又称微分法.

(3)$y=f(x)$在任意点x的微分，称为函数的微分

记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$，即 $\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$.

通常把自变量 x 的增量 Δx 称为自变量的微分，

记作 $\mathrm{d}x$，即 $\mathrm{d}x=\Delta x$.

因此，函数 $y=f(x)$ 的微分可以写成

$$\boxed{dy=f'(x)dx} \text{ 或 } \boxed{df(x)=f'(x)dx.}$$

从而有 $\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$ 或 $\dfrac{df(x)}{dx}=f'(x)$. 导数又称微商

例1 $y=x^2$,(1)dy;(2)$dy\big|_{x=3}$;(3)$x=3,\Delta x=0.01,dy$与Δy.

解 (1) $\mathrm{d}y=(x^2)'dx \quad =2xdx$

(2) $\mathrm{d}y\big|_{x=3}=2x\big|_{x=2}dx=6dx$

(3) $\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=3\\ \Delta x=0.01}}=2x\Delta x\Big|_{\substack{x=3\\ \Delta x=0.01}}=0.06.$

$\Delta y=(3+0.01)^2-3^2=0.0601.$

2.5.3 微分的几何意义

曲线 $y = f(x)$ 上点 $M(x_0, y_0)$, $\xrightarrow{\Delta x}$ $N(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

过点 M 作曲线的切线 MT

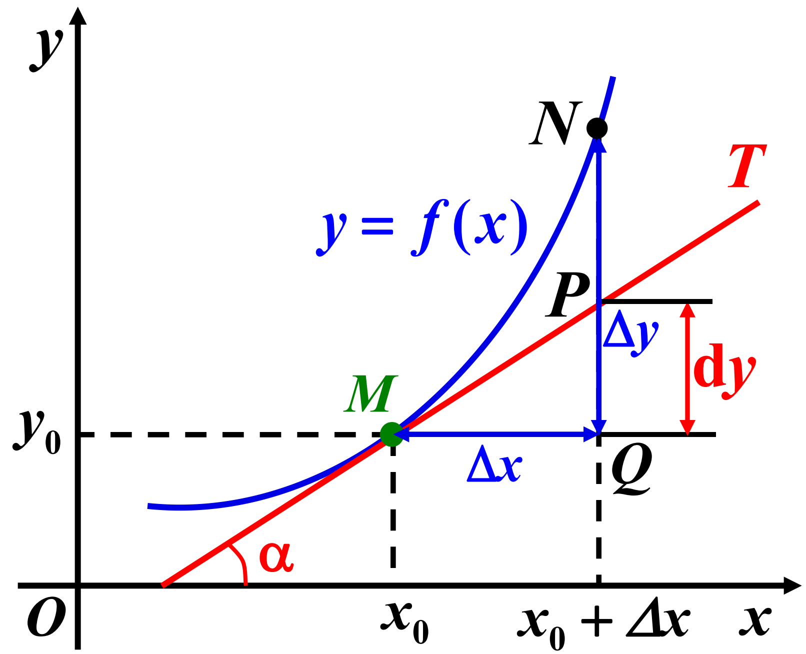
它的倾斜角为 α,

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

$= NQ$,

$dy = f'(x_0)\Delta x = \tan\alpha \cdot \Delta x$

$= \dfrac{PQ}{\Delta x}\Delta x = PQ.$



微分的几何意义:

曲线 $y = f(x)$ 在点 M 的切线 MT 的纵坐标的增量 PQ.

2.5.4 微分公式与微分运算法则

1. 基本初等函数的微分公式

(1) $dC = 0$（C 为常数）

(2) $d\left(x^{\mu}\right) = \mu x^{\mu-1}dx$

(3) $d\left(a^{x}\right) = a^{x}\ln a\,dx$

(4) $d\left(e^{x}\right) = e^{x}dx$

(5) $d\left(\log_a x\right) = \dfrac{1}{x\ln a}dx$

(6) $d\left(\ln x\right) = \dfrac{1}{x}dx$

(7) $d\left(\sin x\right) = \cos x\,dx$

(8) $d\left(\cos x\right) = -\sin x\,dx$

(9) $d\left(\tan x\right) = \sec^{2} x\,dx$

(10) $d\left(\cot x\right) = -\csc^{2} x\,dx$

(11) $d\left(\sec x\right) = \sec x\tan x\,dx$

(12) $d\left(\csc x\right) = -\csc x\cot x\,dx$

(13) $d\left(\arcsin x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx$

(14) $d\left(\arccos x\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx$

(15) $d\left(\arctan x\right) = \dfrac{1}{1+x^{2}}dx$

(16) $d\left(\operatorname{arc}\cot x\right) = -\dfrac{1}{1+x^{2}}dx$

2.5.4 微分公式与微分运算法则

2. 微分的运算法则

设函数 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$ 都可导，则

(1) $d\left(u\pm v\right)=du\pm dv$;

(2) $d\left(u\cdot v\right)=vdu+udv$;

(3) $d\left(C\cdot u\right)=Cdu$（$C$ 为常数）；

(4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vdu-udv}{v^2}\ (v\neq 0)$;

例2 设 $y=\ln(x+e^{x^2})$, 求dy.

解 $\because y'=\dfrac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}}$, $\therefore \mathrm{d}y=\dfrac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}}\mathrm{d}x.$

例3 设 $y=\left(x^2-2\right)^3$，求 dy.

解 $\dfrac{dy}{dx}=3(x^2-2)^2\cdot 2x$ $\therefore dy=6x(x^2-2)^2dx$

例4 设 $y=\sin(x^2+e^x+1)$ 求 dy.

$$\because \frac{dy}{dx}=(2x+e^x)\cos(x^2+e^x+1)$$

$$\therefore dy=(2x+e^x)\cos(x^2+e^x+1)dx$$

3. 复合函数的微分法

设函数 $y=f(u)$,

(1) 若u是自变量时, $dy=\boxed{f'(u)du;}$

(2) 若$y=f(u), u=g(x)$,则复合函数$y=f\big(g(x)\big)$的微分:

$$dy=y_x'dx=f'(u)g'(x)dx=\boxed{f'(u)du}.$$

结论:无论 u 是自变量还是中间变量,函数 $y=f(u)$的微分形式总是$dy=f'(u)du$

一阶微分形式的不变性

例5 设 $y=\sin(2x+1)$, 求dy.

（法二）利用微分形式不变

解 $\because y=\sin u, u=2x+1.$

$$\therefore dy=\cos u du \quad =\cos(2x+1)d(2x+1) \quad =2\cos(2x+1)dx.$$

例6 设 $y=e^{-ax}\sin bx$, 求dy.

解 $dy=e^{-ax}\cdot\cos bx d(bx)+\sin bx\cdot e^{-ax}d(-ax)$

$$=e^{-ax}\cdot\cos bx\cdot bdx+\sin bx\cdot e^{-ax}\cdot(-a)dx$$

$$=e^{-ax}(b\cos bx-a\sin bx)dx.$$

例7 设 $y=e^{\sin(x^2+\sqrt{x})}$ 求 dy.

$$dy=e^{\sin(x^2+\sqrt{x})}d\sin(x^2+\sqrt{x})$$

$$=e^{\sin(x^2+\sqrt{x})}\cos(x^2+\sqrt{x})d(x^2+\sqrt{x})$$

$$=e^{\sin(x^2+\sqrt{x})}(2x+\frac{1}{2\sqrt{x}})\cos(x^2+\sqrt{x})dx$$

例8 设 $y=e^{ax+bx^2}$, 求 $dy\big|_{x=0}$.

解 用微分形式不变性

$$dy=e^{ax+bx^2}\mathrm{d}(ax+bx^2)=e^{ax+bx^2}\cdot(a+2bx)\mathrm{d}x$$

$$\therefore dy\big|_{x=0}=adx.$$

例9 (1) d(   ) = xdx; (2) d(   ) = cos ωtdt;

解 $(1)d(x^2)=2xdx \quad \therefore xdx=\frac{1}{2}d(x^2)=d(\frac{x^2}{2})$

$d(\frac{x^2}{2}+C)=xdx.$（C为任意常数）

$(2)d(\sin wt)=w\cos wtdt,$

$\cos wtdt=\frac{1}{w}d(\sin wt)=d(\frac{\sin wt}{w}),$

$d(\frac{\sin wt}{w}+C)=\cos wtdt.$（$C$为任意常数）

2.5.5 微分在近似计算中的应用

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)\neq 0$，且 $|\Delta x|$ 很小时，那么有 $\Delta y \approx dy = f'(x_0)\Delta x.$ (1)

(1) 式可改写为

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x, \qquad (2)$$

或

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \qquad (3)$$

在 (3) 式中令 $x = x_0+\Delta x$，即 $\Delta x = x - x_0$，则可得

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0). \qquad (4)$$

若在（4）式中令 $x_0=0$，则有

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x. \tag{5}$$

从而，当 $|x|=|\Delta x|$ 很小时，可用（5）式推得以下几个常用的近似公式:

(1) $\sin x\approx x$;　(2) $\tan x\approx x$;

(3) $\arcsin x\approx x$;　(4) $e^{x}\approx 1+x$;

(5) $\ln(1+x)\approx x$;　(6) $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\dfrac{1}{n}x$.

应用

(1) 求$f(x)$在点$x=x_0$附近的近似值

$$\boxed{f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}$$

(2) 求$f(x)$在点$x=0$附近的近似值

$$\therefore f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x.$$

(1) $\sin x\approx x$;　　(2) $\tan x\approx x$;

(3) $\arcsin x\approx x$;　　(4) $e^x\approx 1+x$;

(5) $\ln(1+x)\approx x$;　　(6) $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x$.

例11 计算 $\sqrt[3]{1003}$ 的近似值.

解 设$f(x)=\sqrt[3]{x}$, 则$f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

取$x_0=1000, \Delta x=3$, 则

$$\sqrt[3]{1003}=f(1000+3)\approx f(1000)+f'(1000)\Delta x$$
$$=10+\frac{1}{300}\cdot 3=10.01.$$

例12 求$\sqrt[3]{1.021}$的近似值.

解 由公式 $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\dfrac{1}{n}x$ $\quad 1.021=1+0.021$

知 $\sqrt[3]{1.021}=\sqrt[3]{1+0.021}\approx 1+\dfrac{1}{3}\times 0.021=1.007$

内容小结

1. 微分的概念.

2. 函数的可微性与可导性是等价的.

3. 微分公式与微分运算法则.

   微分形式不变性 $df(u) = f'(u)du$.

4. 微分在近似计算中的应用.