第二节 函数的求导法则

一、四则运算求导法则

二、反函数的求导法则

三、复合函数求导法则

一、导数的四则运算法则

定理1 若函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在点 x 处均可导，则其和、差、积、商（分母不为零）都在点 x 处可导，

$$(1)\ [u(x)\pm v(x)]' = u'(x)\pm v'(x).$$

$$(2)\ [u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x).$$

特别地，$[C\cdot u(x)]' = C\cdot u'(x)$（$C$ 为常数）.

$$(3)\ \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}\quad (v(x)\neq 0).$$

特别地，$\left[\dfrac{1}{v(x)}\right]' = -\dfrac{v'(x)}{v^2(x)}\quad (v(x)\neq 0).$

注：

（1）法则（1）可以推广到有限个可导函数的和与差的求导．如

$$\left[u(x) \pm v(x) \pm w(x)\right]' = u'(x) \pm v'(x) \pm w'(x).$$

（2）法则（2）可以推广到有限个可导函数的积的求导．如

$$\left(u \cdot v \cdot w\right)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'.$$

例1 设 $f(x)=x^2+e^x-3$，求 $f'(x)$.

解 $f'(x)=\left(x^2+e^x-3\right)'$

$$=\left(x^2\right)'+\left(e^x\right)'-(3)'$$

$$=2x+e^x.$$

例2 设 $f(x)=x^5+x^2-\dfrac{1}{x}$，求 $f'(x)$.

解 $f'(x)=\left(x^5+x^2-\dfrac{1}{x}\right)'$

$$=\left(x^5\right)'+\left(x^2\right)'-\left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$=5x^4+2x+\frac{1}{x^2}.$$

例3 $y = e^x(\sin x + \cos x)$，求 y'.

解 $y' = (e^x)'(\sin x + \cos x) + e^x(\sin x + \cos x)'$

$= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x)$

$= 2e^x \cos x.$

例4 设 $f(x) = xe^x \ln x$，求 $f'(x)$.

解 $f'(x) = \left(xe^x \ln x\right)'$

$= (x)' e^x \ln x + x\left(e^x\right)' \ln x + xe^x (\ln x)'$

$= e^x \ln x + xe^x \ln x + xe^x \dfrac{1}{x}$

$= e^x \left(1 + \ln x + x \ln x\right).$

例5 $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}$, 求 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$. 先化简

解 $f(x)=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}=\cos x+\sin x$

$$f'(x)=-\sin x+\cos x,$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1.$$

例6 设 $f(x)=\tan x$，求 $f'(x)$.

解 $$f'(x)=(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

即得正切函数的导数公式：

$$\boxed{(\tan x)'=\sec^2 x.}$$

类似可得余切函数的导数公式：

$$\boxed{(\cot x)'=-\csc^2 x.}$$

例7 设 $f(x)=\sec x$，求 $f'(x)$.

解 $f'(x)=(\sec x)'=\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'=-\dfrac{(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$$=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x.$$

即得正割函数的导数公式:

$$\boxed{(\sec x)'=\sec x\tan x.}$$

类似可得余割函数的导数公式:

$$\boxed{(\csc x)'=-\csc x\cot x.}$$

二、 反函数的求导法则

定理2 如果函数 $x = f(y)$ 在区间 I_y 内单调、可导且 $f'(y) \neq 0$，那么它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 在区间 $I_x = \{x \mid x = f(y), y \in I_y\}$ 内也可导，且

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{f'(y)}.}$$

即反函数的导数等于原函数的导数的倒数.

例8. 求函数 y=arcsin$x$ 的导数.

解 $y = \arcsin x$, 则$x = \sin y$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

$\cos y > 0$, 则 $$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1).}$$

$$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1).}$$

例9 求反正切函数 $y=\arctan x$ 的导数。

解 $y=\arctan x$ 是 $x=\tan y$ 的反函数，

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

$$\boxed{(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in (-\infty, +\infty)).}$$

$$\boxed{(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \quad (x \in (-\infty, +\infty)).}$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x \qquad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (arc\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

基本求导公式

$$C' = 0 \qquad (x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} (a > 0, a \neq 1) \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

三、复合函数的求导法则

定理3 设函数 $u=g(x)$ 在点 x 处可导，函数$y=f(u)$ 在点 $u=g(x)$ 处可导，则复合函数 $y=f(g(x))$在点 x 处可导，且其导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(u)\cdot g'(x)$$

——链式求导法则

关键：搞清复合函数结构, 由外向内逐层求导.

设可导函数$y=f(u), u=g(v), v=\varphi(x)$构成复合函数，则 $y=f\left[g(\varphi(x))\right]$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}=f'(u)\cdot g'(v)\cdot\varphi'(x).$$

例10 设 $y=\sin x^2$，求$\dfrac{dy}{dx}$.

解 因为 $y=\sin x^2$ 由 $y=\sin u, u=x^2$ 复合而成，所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=(\sin u)'\cdot\left(x^2\right)'=\cos u\cdot 2x=2x\cos x^2.$$

例11 求函数 $y=e^{x^5}$ 的导数.

解 $y=e^{x^5}$ 可以看作由 $y=e^u$, $u=x^5$ 复合而成,

$$\therefore \frac{dy}{dx}=e^u\cdot 5x^4=e^{x^5}\cdot 5x^4$$

例12 设 $y=\ln\cos\left(e^{x}\right)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解 因为$y=\ln\cos\left(e^{x}\right)$ 由 $y=\ln u, u=\cos v, v=e^{x}$ 复合而成，所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}=(\ln u)'\cdot(\cos v)'\cdot\left(e^{x}\right)'$$

$$=\frac{1}{u}\cdot(-\sin v)\cdot e^{x}=-e^{x}\tan\left(e^{x}\right).$$

例13 设 $y=\ln\sin x$，求 y'.

解 $y'=\dfrac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'=\dfrac{1}{\sin x}\cdot\cos x=\cot x.$

例14 设$y=\left(x^2-4x+3\right)^5$，求$y'$.

解 $y'=5\left(x^2-4x+3\right)^4\cdot\left(x^2-4x+3\right)'$

$=10\left(x-2\right)\left(x^2-4x+3\right)^4$.

例15 $y=\sqrt[3]{1-2x^2}$, 求y'.

解 $y'=\left((1-2x^2)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}(1-2x^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot(1-2x^2)'$

$=\frac{-4x}{3\sqrt[3]{(1-2x^2)^2}}$.

例16 $y = e^{\sin\frac{1}{x}}$, 求 y'.

解 $y' = \left(e^{\sin\frac{1}{x}}\right)' = e^{\sin\frac{1}{x}} \cdot \left(\sin\frac{1}{x}\right)' = e^{\sin\frac{1}{x}} \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'$

$= -\frac{1}{x^2} e^{\sin\frac{1}{x}} \cdot \cos\frac{1}{x}$.

例17. 设 $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, 求 y'.

解 $$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)'$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(x^2+1\right)'\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

例18. $y = x\arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{4-x^2}$，求$y'$.

解 $y' = \left(x\arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{4-x^2}\right)'$

$$= \left(x\arcsin\frac{x}{2}\right)' + \left(\sqrt{4-x^2}\right)'$$

$$= \arcsin\frac{x}{2} + x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\left(4-x^2\right)'$$

$$= \arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2}.$$

内容小结:

1. 基本初等函数的导数公式

(1) $(C)'=0$（C 为常数）

(2) $\left(x^{\mu}\right)'=\mu x^{\mu-1}$

(3) $\left(a^{x}\right)'=a^{x}\ln a$

(4) $\left(e^{x}\right)'=e^{x}$

(5) $\left(\log_{a}x\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

(6) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

(7) $(\sin x)'=\cos x$

(8) $(\cos x)'=-\sin x$

(9) $(\tan x)'=\sec^{2}x$

(10) $(\cot x)'=-\csc^{2}x$

(11) $(\sec x)'=\sec x\tan x$

(12) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$

(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

(14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^{2}}$

(16) $(\operatorname{arc}\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^{2}}$

2. 导数的四则运算法则

设函数 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$ 都可导，则

(1) $\left(u\pm v\right)'=u'\pm v'$;

(2) $\left(u\cdot v\right)'=u'\cdot v+u\cdot v'$;

(3) $\left(C\cdot u\right)'=C\cdot u'$（$C$ 为常数）；

(4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$ $(v\neq 0)$; (5) $\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^2}$ $\left(v\neq 0\right)$.

注意:1） $(uv)'\neq u'v'$, $\left(\dfrac{u}{v}\right)'\neq\dfrac{u'}{v'}$

2） 搞清复合函数结构 ， 由外向内逐层求导 .