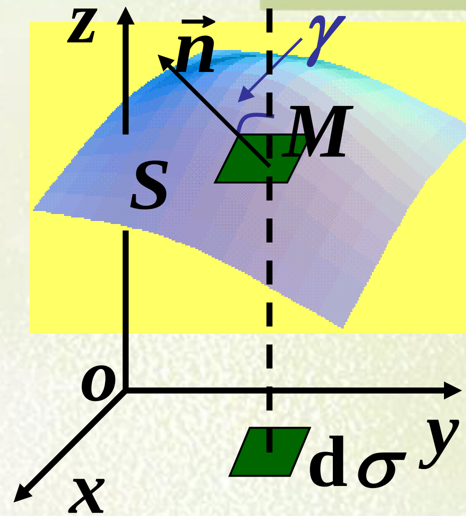
第四节　重积分的应用

曲面的面积:

设光滑曲面 $S: z = f(x, y), (x, y) \in D$

则面积 A 可看成曲面上各点 $M(x, y, z)$

处小切平面的面积 $\mathrm{d}A$ 无限积累而成.

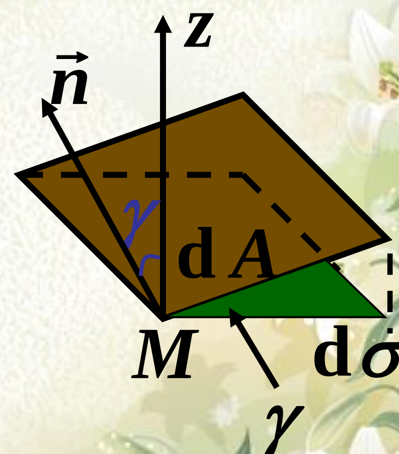


设它在 D 上的投影为 $\mathrm{d}\sigma$,则

$$\mathrm{d}\sigma = \cos\gamma \cdot \mathrm{d}A$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}}$$

$$\mathrm{d}A = \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}\ \mathrm{d}\sigma$$



(称为面积元素)

故有曲面面积公式

$$A=\iint_{D}\sqrt{1+f_x^{2}(x,y)+f_y^{2}(x,y)}\,\mathrm{d}\sigma$$

也可以写成

$$A=\iint_{D}\sqrt{1+z_x^{2}+z_y^{2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

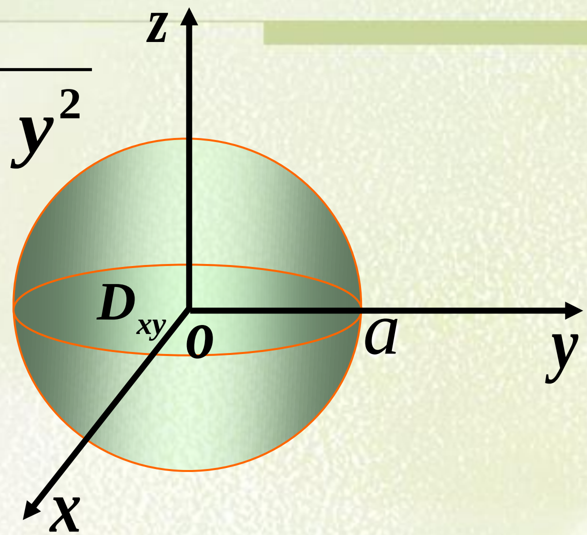
2.若光滑曲面方程为 $x = g(y,z)\,,\,(y,z) \in D_{yz}\,,$

$$A = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

3.若光滑曲面方程为 $y = h(z,x)\,,\,(z,x) \in D_{zx}\,,$

$$A = \iint_{D_{zx}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

例1 求半径为a的球的表面积.



解 取上半球面方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

它在xOy面上的投影区域为

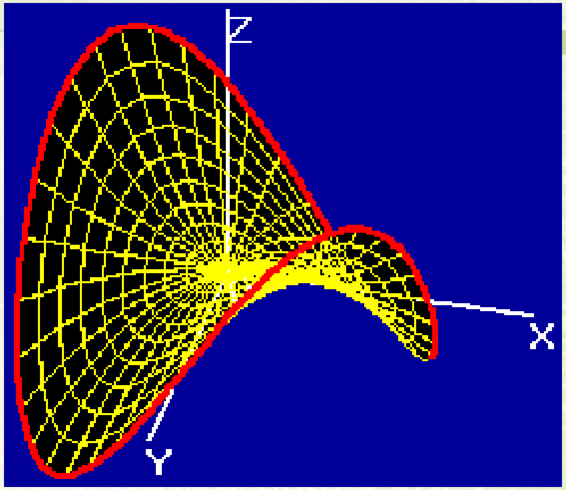
$$D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le a^2\},$$

$$z_x=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\quad z_y=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$A=2\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_{xy}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho=4\pi a^2.$$

【例2】计算双曲抛物面 $z = xy$ 被柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 所截出的面积 A .



【解】 曲面在 xoy 面上投影为

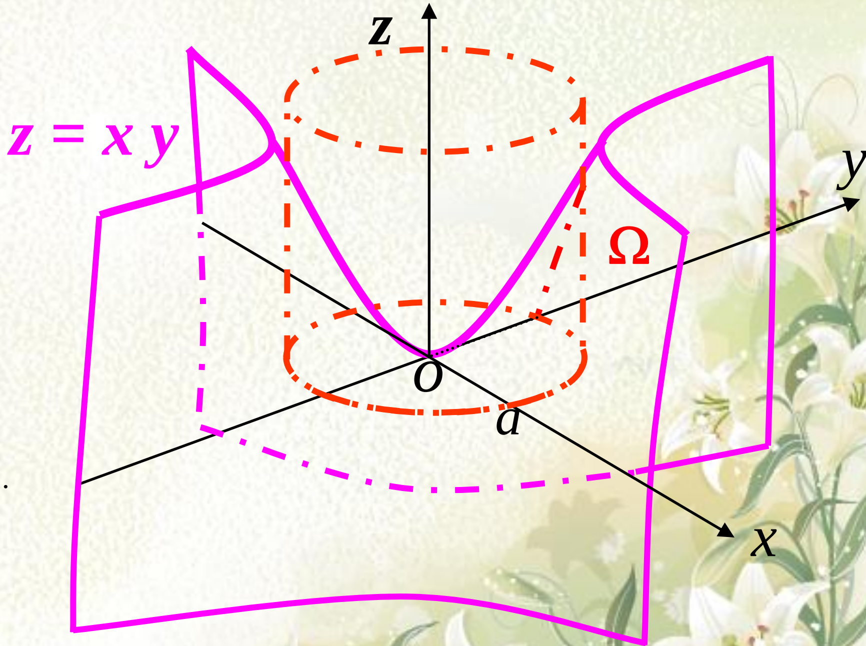
$D : x^2 + y^2 \le R^2$， 则

$$A = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dxdy$$

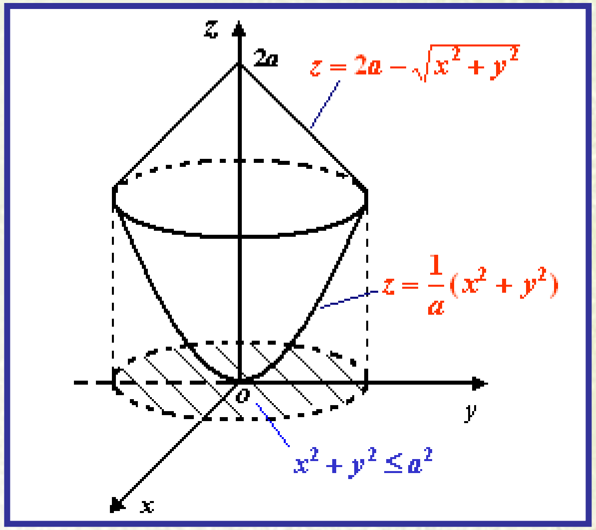
$$= \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \sqrt{1+\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{2}{3}\pi[(1+R^2)^{\frac{3}{2}} - 1]$$



【例 2】求由曲面 $x^2+y^2=az$ 和 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$ 所围立体的表面积.



【解】 解方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=az \\ z=2a-\sqrt{x^2+y^2} \end{cases},$$

得两曲面的交线为圆周 $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ z=a \end{cases},$

在 xoy 平面上的投影域为 D_{xy}： $x^2+y^2\le a^2$,

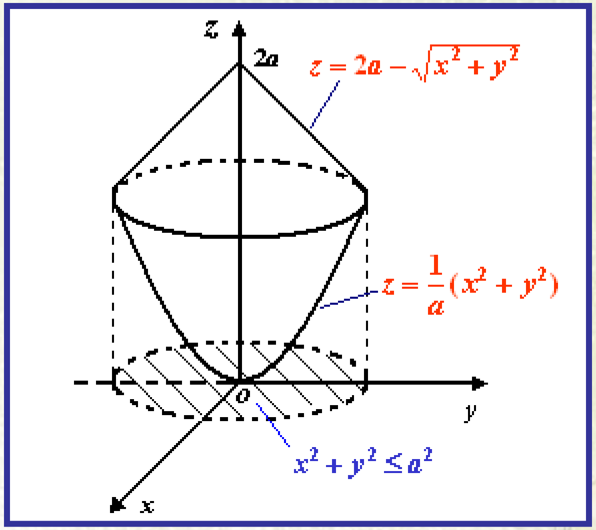
由 $z=\frac{1}{a}(x^2+y^2)$ 得 $z_x=\frac{2x}{a}$, $z_y=\frac{2y}{a}$,

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\left(\frac{2x}{a}\right)^2+\left(\frac{2y}{a}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+4x^2+4y^2},$$

由 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ 知

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{2},$$



故 $S=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{a}\sqrt{a^2+4x^2+4y^2}dxdy+\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{2}dxdy$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\frac{1}{a}\sqrt{a^2+4\rho^2}\cdot\rho d\rho+\sqrt{2}\pi a^2$$

$$=\frac{\pi a^2}{6}(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-1).$$