第四节 有理函数的积分

一、有理函数的积分

二、三角函数有理式的积分

三、简单无理式的积分

一、有理函数的积分

1. 定义

(1) 两个多项式的商称为有理函数(也称有理分式).

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

其中：$a_0\neq 0, b_0\neq 0.$

(2) $n<m$, 有理函数 $R(x)$ 是真分式；

$n\geq m$, 有理函数 $R(x)$ 是假分式.

2．假分式分解

(1) 利用多项式除法，假分式可以化成一个多项式和一个真分式之和.

例如，$$\frac{x^3+x+1}{x^2+1}=x+\frac{1}{x^2+1}.$$

(2) 真分式化成部分分式之和.

部分分式：把真分式拆成真分式.

$$\frac{1}{x^2-x-2}=\frac{1}{(x-2)(x+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)$$

3. 有理函数化为部分分式之和的一般规律

(1) 分母中有因式$(x-a)^k$, 则分解后为

$$\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x-a},$$

其中$A_1, A_2, \cdots, A_k$都是常数.

特殊地: $k=1$, 分解后为$\frac{A}{x-a}$;

$$\frac{x+2}{(x-1)^3}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3},$$

(2) 分母中有因式 $(x^2+px+q)^k$，其中 $p^2-4q<0$

分解后为

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}$$

其中 M_i, N_i 都是常数 $(i=1,2,\cdots,k)$.

特殊地：$k=1$, 分解后为 $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$;

$$\frac{1}{(x^2+2x+3)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+3}+\frac{Cx+D}{(x^2+2x+3)^2}$$

例1 $\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}=\dfrac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{x-2},$

$$\because\quad x+3=A(x-2)+B(x-3),$$

$$=(A+B)x-(2A+3B),$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=1,\\-(2A+3B)=3,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=6\\B=-5\end{cases},$$

$$\therefore\quad \frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{6}{x-3}-\frac{5}{x-2}.$$

所以$\displaystyle\int\frac{x+3}{x^2-5x+6}dx=\int\left(\frac{6}{x-3}-\frac{5}{x-2}\right)dx$

$$=6\ln|x-3|-5\ln|x-2|+c$$

例2 $$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2},$$

$$1=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx \qquad (1)$$

代入特殊值来确定系数 A,B,C

取 $x=0,\ \Rightarrow\ A=1$ 　　取 $x=1,\ \Rightarrow C=1$

取 $x=2$, 并将 A , C值代入 (1) $\Rightarrow B=-1$

$$\therefore \frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}.$$

解 $$\int\frac{1}{x(x-1)^2}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$$

$$=\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C.$$

例3 $$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+2x}+\frac{Bx+C}{1+x^2},$$

$$1=A(1+x^2)+(Bx+C)(1+2x),$$

整理得 $$1=(A+2B)x^2+(B+2C)x+C+A,$$

$$\begin{cases} A+2B=0, \\ B+2C=0, \\ A+C=1, \end{cases} \Rightarrow A=\frac{4}{5}, B=-\frac{2}{5}, C=\frac{1}{5},$$

$$\therefore \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{\frac{4}{5}}{1+2x}+\frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}.$$

4. 有理函数不定积分

积分 $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx$

(1) $p^2-4q \geq 0, \Rightarrow \int \frac{ax+b}{(x-x_1)(x-x_2)}dx$ 裂项积分

(2) $p^2-4q<0,$

① $\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx = \int \frac{1}{x^2+px+q}d\left(x^2+px+q\right)$ 凑微分

② $\int \frac{1}{x^2+px+q}dx = \int \frac{1}{\left(x+a\right)^2+b^2}dx$ 配方

例4 求积分$\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}dx$

解 $\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}dx = \int \left(\frac{6}{x-3} - \frac{5}{x-2}\right)dx$

$$= 6\ln|x-3| - 5\ln|x-2| + c$$

例5 求 $\displaystyle\int \frac{2x-8}{x^2-8x+25}dx.$

解 $\displaystyle\int \frac{2x-8}{x^2-8x+25}dx$

$$=\int \frac{1}{x^2-8x+25}d(x^2-8x)$$

$$=\int \frac{1}{x^2-8x+25}d\left(x^2-8x+25\right)$$

$$=\ln\left(x^2-8x+25\right)+C.$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C;$$

例6 求 $\int \frac{1}{x^2-8x+25}dx.$

解 $\int \frac{1}{x^2-8x+25}dx = \int \frac{1}{(x-4)^2+9}dx$

$$=\int \frac{1}{(x-4)^2+3^2}d(x-4)$$

$$=\frac{1}{3}\arctan\frac{x-4}{3}+C.$$

例7. 求 $\int \frac{x-2}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C;$$

解：原式 $= \int \frac{x+1-3}{(x+1)^2+2}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d[(x+1)^2+2]}{(x+1)^2+2} - 3\int \frac{1}{(x+1)^2+2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3} - 3\int \frac{1}{(x+1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}\mathrm{d}(x+1)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+3\right) - \frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

例8 求积分 $\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx$.

解 $$\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$$

$$= \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx$$

$$= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

例9　求积分 $\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}dx$.

解　$\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}dx = \int \frac{\frac{4}{5}}{1+2x}dx + \int \frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}dx$

$$= \frac{2}{5}\ln|1+2x| - \frac{2}{5}\int \frac{x}{1+x^2}dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{2}{5}\ln|1+2x| - \frac{1}{5}\ln(1+x^2) + \frac{1}{5}\arctan x + C.$$

练习 $\int \frac{1}{x(x^2+1)}dx$

$$= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \end{cases} \quad \therefore \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

二、三角函数有理式的积分

不定积分：$\int R(\sin x, \cos x)dx$

$$\because \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

——万能公式

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

令$u = \tan\frac{x}{2}$ $\quad x = 2\arctan u$

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad dx = \frac{2}{1+u^2}du$$

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}du.$$

——万能置换公式

例10 求积分$\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx.$

解 令 $\displaystyle\tan\frac{x}{2}=u$, $\displaystyle\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$, $\displaystyle\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$

$$dx=\frac{2}{1+u^2}du,$$

$$\text{原式}=\int\frac{2u}{(1+u)(1+u^2)}du=\int\frac{1+u}{1+u^2}du-\int\frac{1}{1+u}du$$

$$=\arctan u+\frac{1}{2}\ln(1+u^2)-\ln|1+u|+C$$

$\because\quad u=\tan\dfrac{x}{2}$ $\quad\displaystyle=\frac{x}{2}+\ln\left|\sec\frac{x}{2}\right|-\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C.$

另解 $$\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx.$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{\sin x+\cos x+1-\cos x-1+\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx.$$

$$\int \frac{d(\sin x+x+\cos x)}{1+\sin x+\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{2}[\int dx+\int \frac{-\cos x-1+\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx].$$

$$=\frac{1}{2}[x+\int \frac{-\cos x+\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx-\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx]$$

$$=\frac{1}{2}[\int dx-\int \frac{d(\sin x+\cos x+1)}{1+\sin x+\cos x}dx-\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx]$$

万能公式

例11 求积分$\int \frac{1}{\sin^4 x} dx.$

解 $u = \tan\frac{x}{2}, \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad dx = \frac{2}{1+u^2} du,$

$$\int \frac{1}{\sin^4 x} dx = \int \frac{1+3u^2+3u^4+u^6}{8u^4} du$$

$$= \frac{1}{8}[-\frac{1}{3u^3} - \frac{3}{u} + 3u + \frac{u^3}{3}] + C$$

$$= -\frac{1}{24\left(\tan\frac{x}{2}\right)^3} - \frac{3}{8\tan\frac{x}{2}} + \frac{3}{8}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{24}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^3 + C.$$

另解 $\int \frac{1}{\sin^4 x} dx = \int \csc^2 x(1+\cot^2 x)dx$

$$= -\int (1+\cot^2 x)d(\cot x)$$

$$= -\cot x - \frac{1}{3}\cot^3 x + C.$$

结论：万能置换不一定是最佳方法，故三角有理式的计算中先考虑其它手段，不得已才用万能置换.

三、简单无理函数的积分

讨论类型 $R(x,\sqrt[n]{ax+b}),\ R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+e}}\right),$

解决方法 作代换去掉根号.

例12 求积分 $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$

解 令 $\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}=t \Rightarrow \dfrac{1+x}{x}=t^2,\quad x=\dfrac{1}{t^2-1},$

$$dx=-\frac{2tdt}{\left(t^2-1\right)^2},$$

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx = -\int \left(t^2-1\right)t\frac{2t}{\left(t^2-1\right)^2}dt = -2\int \frac{t^2 dt}{t^2-1}$$

$$= -2\int \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt = -2t - \ln\frac{t-1}{t+1} + C$$

$$= -2\sqrt{\frac{1+x}{x}} - \ln\left[x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)^2\right] + C.$$

例13 求积分 $\int \frac{x}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+1}}dx.$

解 先对分母进行有理化

$$原式=\int \frac{x(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+1})}{(\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+1})(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+1})}dx$$

$$=\int (\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+1})dx$$

$$=\frac{1}{3}\int \sqrt{3x+1}d(3x+1)-\frac{1}{2}\int \sqrt{2x+1}d(2x+1)$$

$$=\frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

内容小结

有理式分解成部分分式之和的积分.

（注意：必须化成真分式）

三角有理式的积分.（万能置换公式）

（注意：万能公式并不万能）

简单无理式的积分.