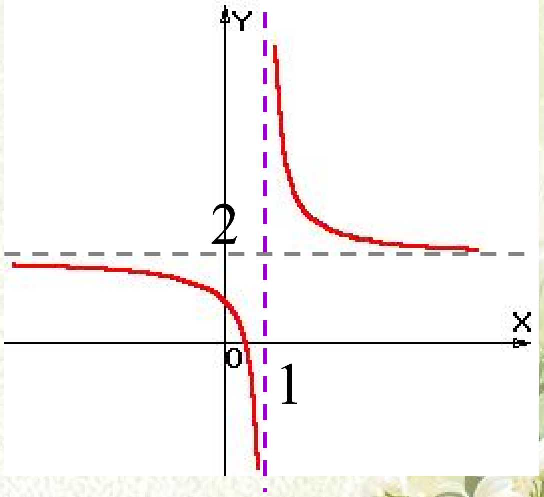
六 函数图像的描绘

水平与铅直渐近线

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$，则曲线 $y=f(x)$有水平渐近线 $y=b$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则曲线 $y=f(x)$有铅直渐近线 $x=x_0$.

例14. 求曲线 $y=\dfrac{1}{x-1}+2$ 的渐近线 .



解 $\because \lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1}{x-1}+2)=2$

$\therefore\ y=2$ 为水平渐近线;

$\because \lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{x-1}+2)=\infty$, $\therefore\ x=1$ 为垂直渐近线.

斜渐近线

若$\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$（$a\neq 0, b$ 为常数），则称直线 $y=ax+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线，

其中

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\ b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right].$$

注：以上各种渐近线有时要考虑单侧极限.

例1 求曲线 $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$的渐近线.

解 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x+1}=\infty$，故该曲线无水平渐近线.

因为函数 $f(x)$ 在点 $x=-1$ 处无定义，且

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2}{x+1}=-\infty,\quad \lim_{x\to-1^+}\frac{x^2}{x+1}=+\infty.$$

所以，$x=-1$ 为该曲线的一条铅直渐近线.

又因为

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x+1)}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-x\right)=-1,$$

所以，$y=x-1$为该曲线的一条斜渐近线.

图形描绘的步骤:

第一步　确定函数 $y=f(x)$ 的定义域,对函数进行奇偶性、周期性分析,求出函数的一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$

第二步　求出　$f'(x)$和$f''(x)$在定义域内的全部零点,及导数不存在的点，并求出函数的间断点，这些点把定义域划分成几个子区间.

第三步　确定在这些子区间内 $f'(x)$和$f''(x)$ 的符号并由此确定函数图形的升降、凹凸、极值点和拐点；

第四步　确定函数图形的水平、铅直渐近线；

第五步　算出 $f'(x)$和$f''(x)$ 的零点以及不存在的点对应的函数值，定出曲线上的点；为了把图形描绘的更准确，有时还需要补充一些点，画出函数的图形.

例2 画出函数 $y=x^3-x^2-x+1$ 的图形.

解 (1) 函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$.

(2) $f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$,

$f''(x)=6x-2=2(3x-1)$. 令$f'(x)=0$,得 $x_1=-\frac{1}{3}, x_2=1$;

令$f''(x)=0$,得 $x_3=\frac{1}{3}$.

把定义域分为: $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3},1\right), (1,+\infty)$.

$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$, $f''(x)=6x-2=2(3x-1)$.

(3) 列表分析:

x	$(-\infty,-1/3)$	$-1/3$	$(-1/3,1/3)$	$1/3$	$(1/3, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$ $\cap$	极大	$\searrow$ $\cap$	拐点	$\searrow$ $\cup$	极小	$\nearrow$ $\cup$

(4) 当$x\to-\infty$时，$y\to-\infty$; 当$x\to+\infty$时，$y\to+\infty$;

$y=x^3-x^2-x+1$ $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{32}{27}$. $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{16}{27}$. $f(1)=0$.

$y=x^3-x^2-x+1$

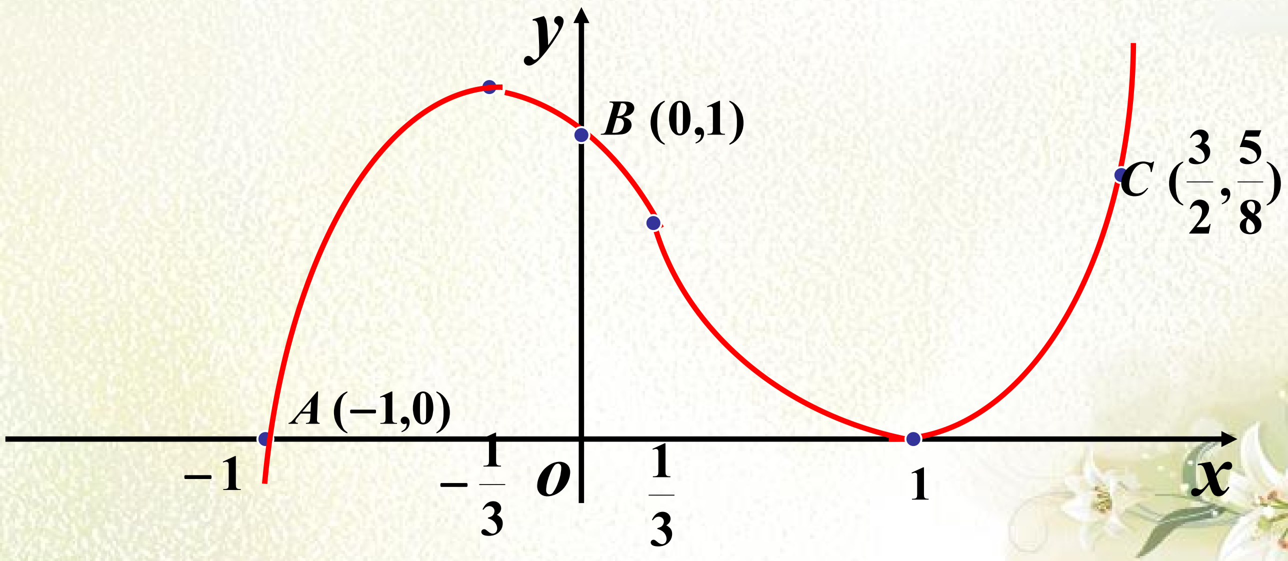
(5)特殊点的函数值：

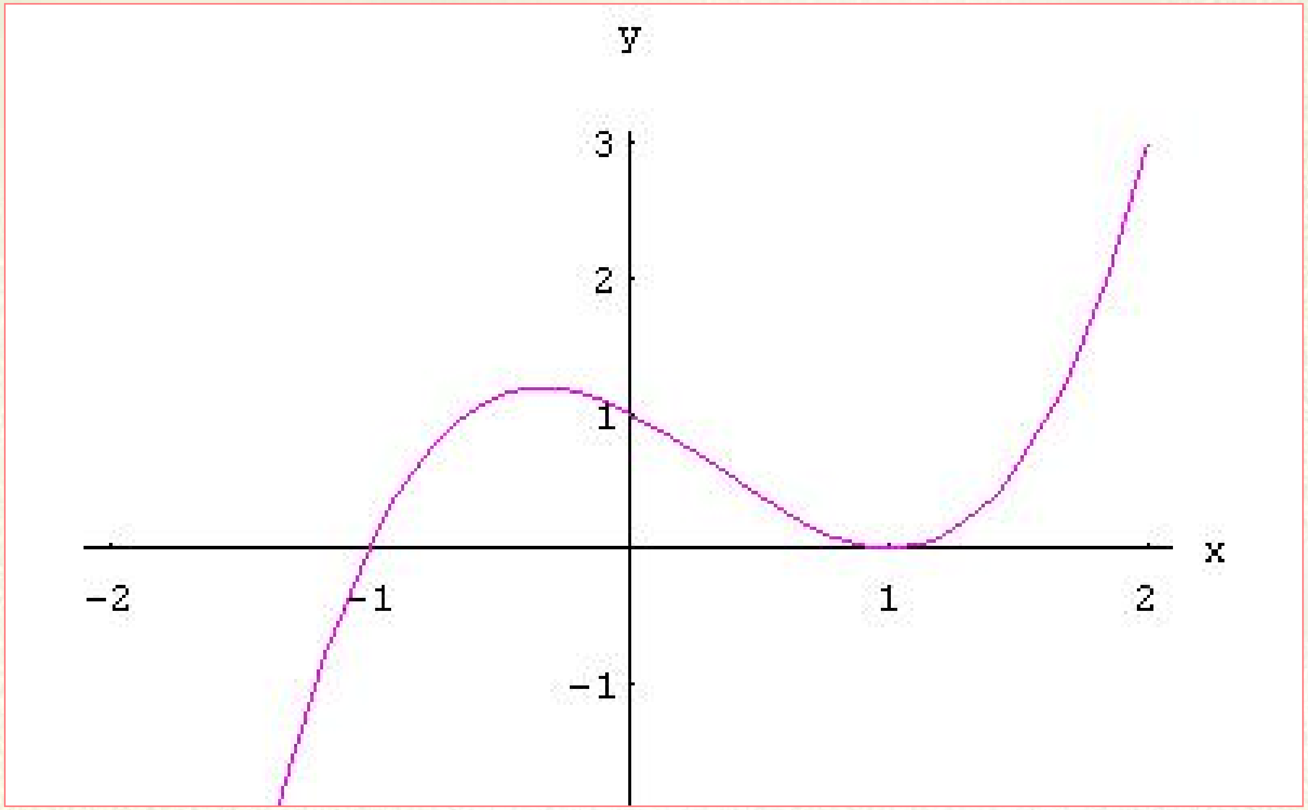
$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{32}{27}.\quad f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{27}.\quad f(1)=0.$$

适当补充点：$f(-1)=0, f(0)=1, f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{8}.$

x	$(-\infty,-1/3)$	$-1/3$	$(-1/3,1/3)$	$1/3$	$(1/3, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗ ∩	极大	↘ ∩	拐点	↘ ∪	极小	↗ ∪

$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{32}{27}$. $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{27}$. $f(1)=0$. $f(-1)=0$, $f(0)=1$, $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{8}$.




y
3
2
1
−1
x
−2
−1
1
2

例3 描述函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$的图形.

解 （1）函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

（2）因为

$$f(-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(-x)^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=f(x),$$

所以$f(x)$是偶函数，其图形关于y轴对称.

因此可先考虑$[0,+\infty)$上该函数的图形.

（3）依次求出

$$f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}xe^{-\frac{x^2}{2}},\ f''(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\left(x^2-1\right).$$

在 $[0,+\infty)$ 上，令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$. 没有 $f'(x)$ 不存在的点.

令 $f''(x)=0$，解得 $x=1$. 没有 $f''(x)$ 不存在的点.

因为 $f''(0)<0$，所以 $f(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 是极大值.

又因为 $f(1)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}}$，所以可得 $f(x)$ 图形上的两点坐标为 $M_1\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$ 和 $M_2\left(1,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$.

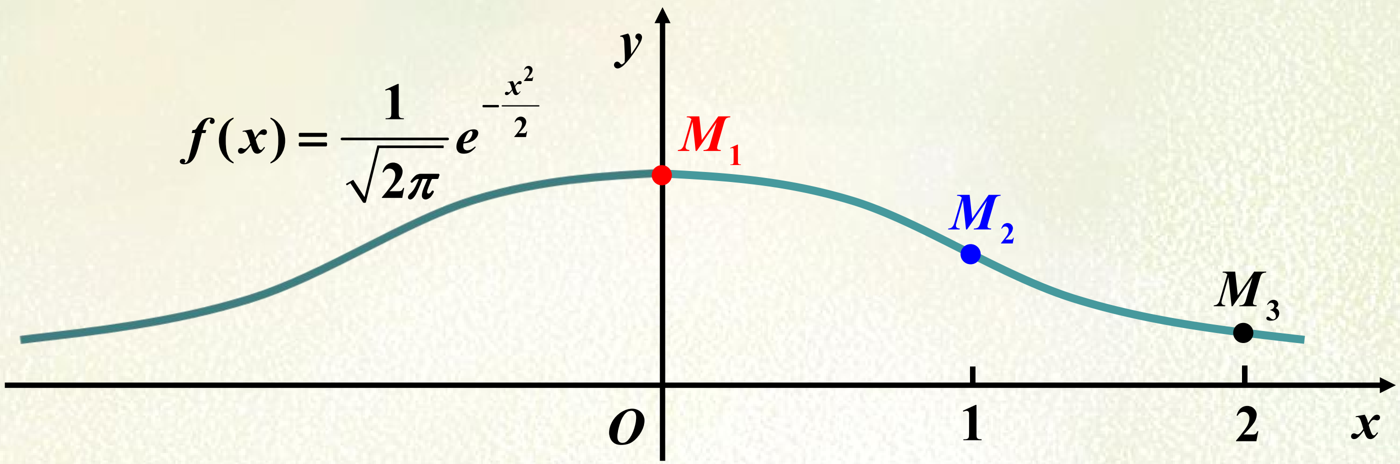
（4）列表讨论函数 $f(x)$ 的单调性、极值、凹凸性与拐点.

x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	极大值	递减 凸的	拐点 M_2	递减 凹的

（5）由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0,$ 可得水平渐近线 $y=0.$

（6）补充点：$M_3\left(2,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi e^2}}\right).$

（7）结合上述讨论，描绘 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的图形，同时利用图形的对称性作出 $(-\infty,0]$ 时的情形，便可得到函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的图形.



y
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$
M_1
M_2
M_3
O
1
2
x

练习：$y=\dfrac{x}{1+x^2}$图形描绘.

解:(1)定义域$(-\infty,+\infty)$, 奇函数 .

$$y'=\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2},\quad y''=\frac{2x(x^2-3)}{\left(1+x^2\right)^3},$$

(2) $y'=0, x=-1,1;\quad y''=0, x=0,-\sqrt{3},\sqrt{3};$

定义区间$(0,+\infty)$分为$(0,1)$;$(1,\sqrt{3})$;$(\sqrt{3},+\infty)$子区间;

$$y' = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}, \quad y'' = \frac{2x(x^2-3)}{\left(1+x^2\right)^3},$$

（3）

x	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	-	-	-
$f''(x)$	-	-	-	0	$+$
$f(x)$	↗ 凸	极大	↘ 凸	拐点	↘ 凹

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1+x^2} = 0$, 水平渐近线 $y = 0$.