第五节　曲面及其方程

一、曲面研究的基本问题

【教材例 1】建立球心在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$、半径为R的球面方程.

【解】 设$M(x,y,z)$是球面上任一点，

根据题意有 $|\overrightarrow{MM_0}|=R$

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$

所求方程为 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

特殊地：球心在原点时方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$

【教材例 2】已知$A(1,2,3)$，$B(2,-1,4)$，求线段AB的垂直平分面的方程.

【解】 设$M(x,y,z)$是所求平面上任一点，

根据题意有 $|MA|=|MB|,$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}$$

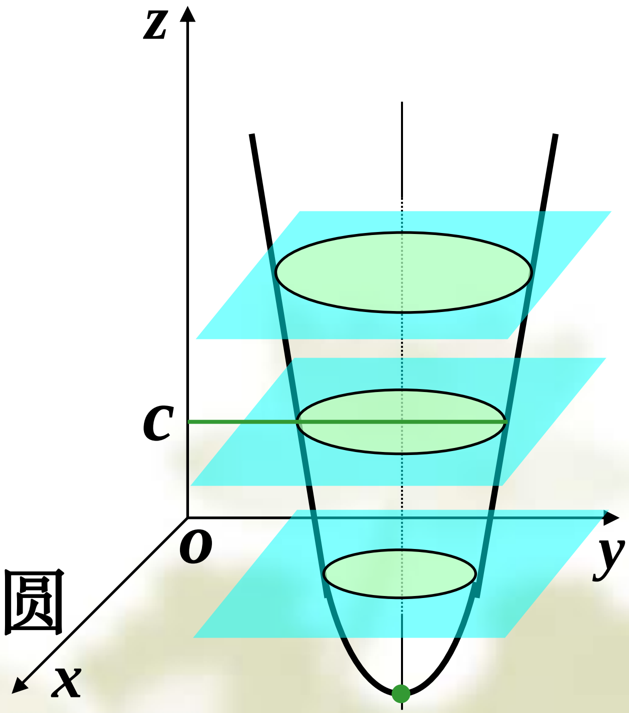
$$=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2},$$

化简得所求方程 $2x-6y+2z-7=0.$

【例 3】方程 $z=(x-1)^2+(y-2)^2-1$ 的图形是怎样的？

【解】 根据题意有 $z \geq -1$，用平面 $z=c$ 去截图形得到：

$$\begin{cases} z=(x-1)^2+(y-2)^2-1 \\ z=c \end{cases}$$



交线为 $z=c$ 平面上的圆

$$(x-1)^2+(y-2)^2=1+c \quad (c \geq -1)$$

当平面 $z=c$ 上下移动时，得到一系列圆

圆心在 $(1,2,c)$，半径为 $\sqrt{1+c}$

半径随 c 的增大而增大. 图形上不封顶，下封底.

以上几例表明研究空间曲面有<u>两个基本问题</u>：

(1) 已知曲面作为点的轨迹时，求曲面方程.

（讨论旋转曲面）

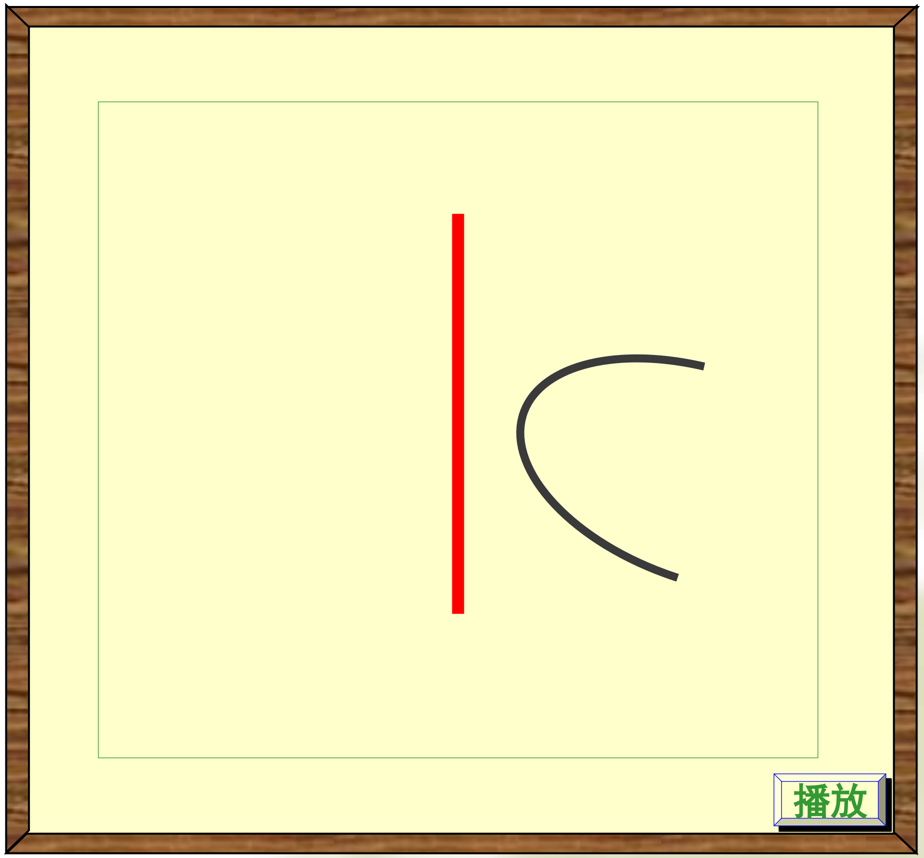
(2) 已知坐标间的关系式，研究曲面形状.

（讨论柱面、二次曲面）

二、旋转曲面

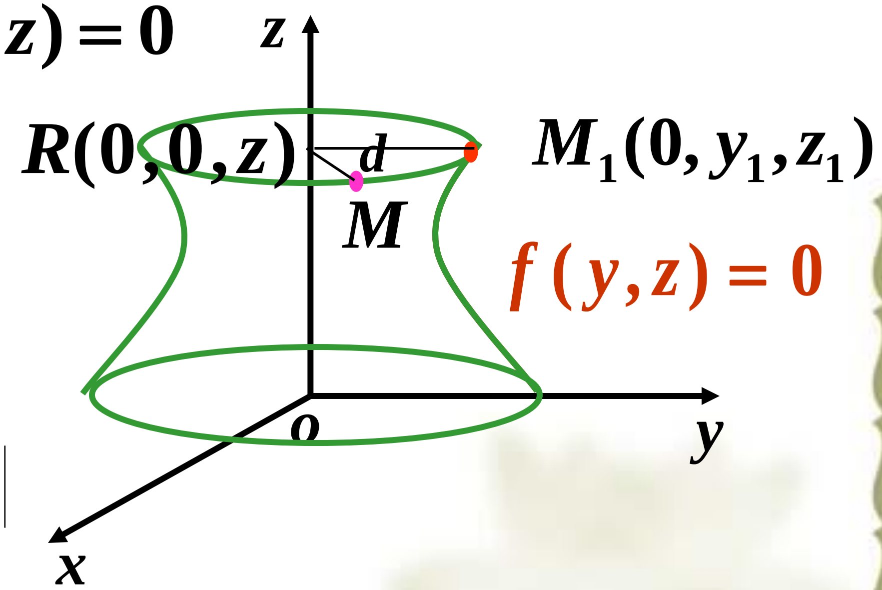
【定义】 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面.

旋转曲线和这条定直线依次叫做旋转曲面的母线和轴.



建立yoz面上曲线C 绕 z 轴旋转所成曲面的方程:

给定 yoz 面上曲线 C: $f(y,z)=0$



设 $M(x,y,z)$, (1) $z=z_1$

(2) 点M 到 z 轴的距离

$$d=|RM|=\sqrt{x^2+y^2}=|RM_1|$$

$$=|y_1|$$

将 $z=z_1$, $y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代入 $f(y_1,z_1)=0$

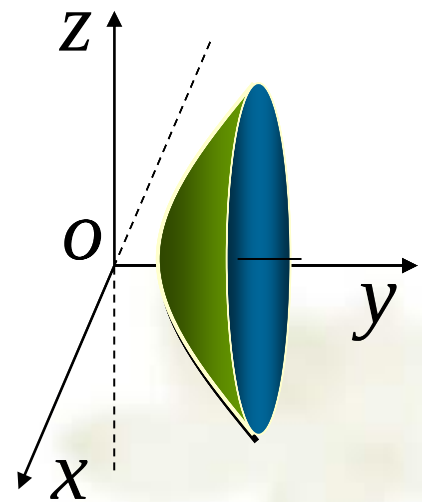
得方程 $f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z\right)=0,$

即为 yoz 坐标面上的已知曲线 $f(y,z)=0$ 绕 z 轴旋转一周的旋转曲面方程.

思考： 当曲线 $C: f(y,z)=0$ 绕 y 轴旋转时，方程？

$$f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0$$

——绕 y 轴旋转

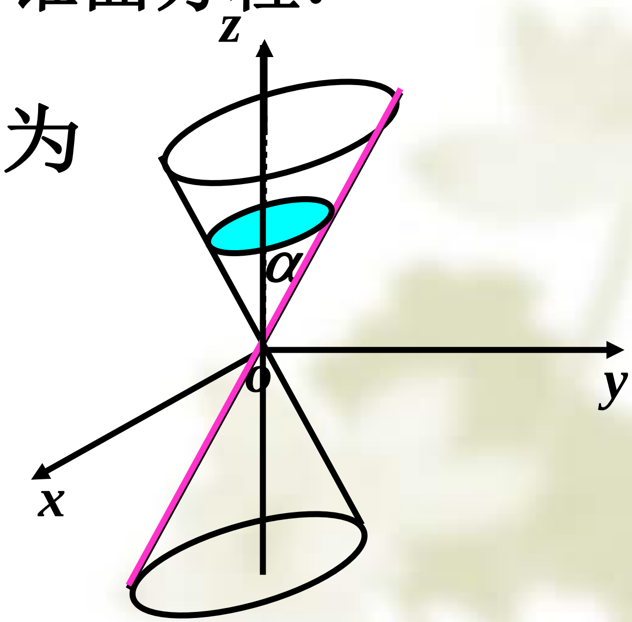


同理曲线 C 绕 x 轴旋转，方程为

$$f(x, \pm\sqrt{y^2+z^2})=0$$

——绕 x 轴旋转

【教材例 4】 直线L绕另一条与L相交的直线旋转一周，所得旋转曲面叫圆锥面．两直线的交点叫圆锥面的顶点，两直线的夹角$\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$叫圆锥面的半顶角．试建立顶点在坐标原点，旋转轴为$z$轴，半顶角为$\alpha$ 的圆锥面方程．



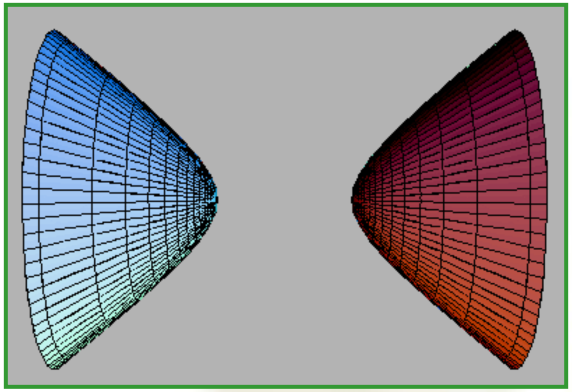
【解】yoz面上直线方程为

$$z = y\cot\alpha$$

圆锥面方程

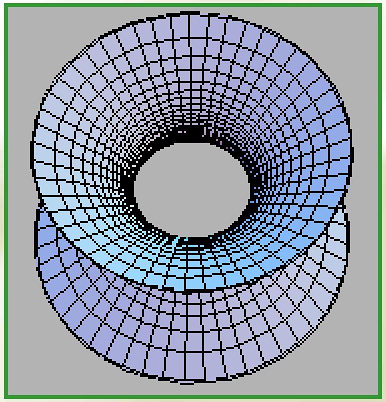
$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}\cot\alpha$$

例5. 求坐标面 xoz 上的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 x轴、z 轴旋转一周所成的旋转曲面方程.



解 绕 x 轴旋转所成曲面方程为

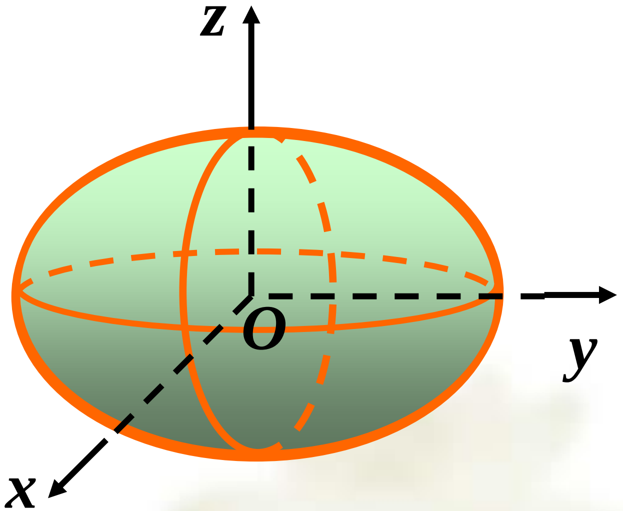
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$$ 旋转双叶双曲面



绕 z 轴旋转所成曲面方程为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$ 旋转单叶双曲面

练习： 以曲线 $\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$ 为母线,绕 z 轴旋转而成的曲面方程.



$$\frac{(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1,$$

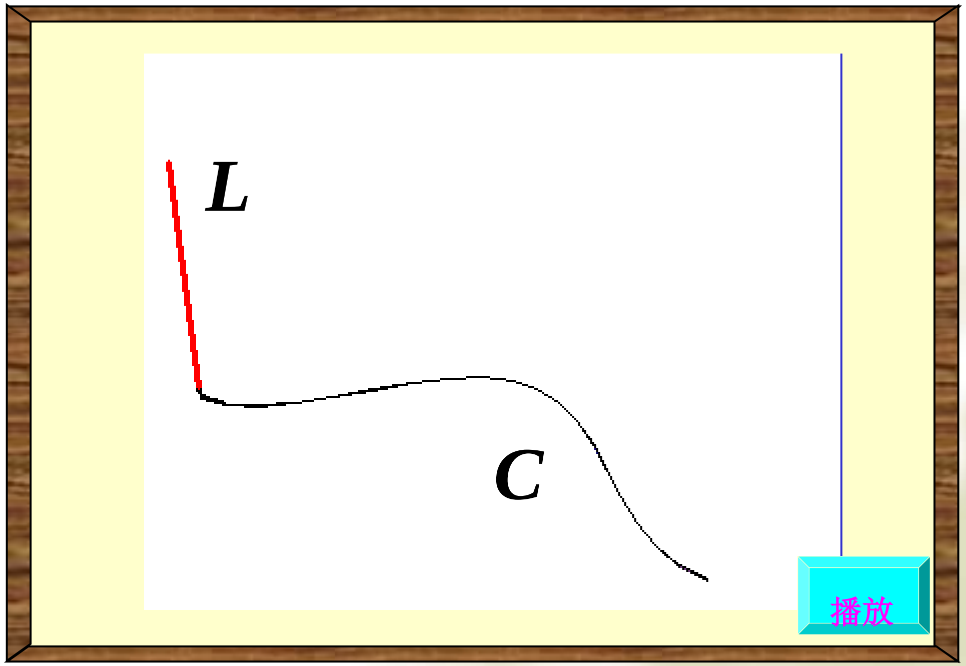
即 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$ ----旋转椭球面

旋转曲面方程的特点: 有系数相等的两坐标平方和的项.

三、柱面

【定义】直线 L 沿定曲线 C 平行移动形成的轨迹称为柱面.

这条定曲线 C 叫柱面的准线，动直线 L 叫柱面的母线.



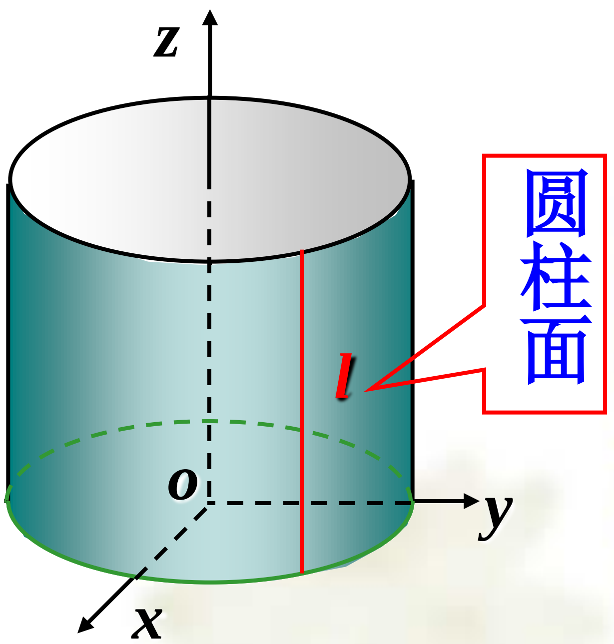
观察柱面的形成过程:

考虑方程 $x^2 + y^2 = R^2$ 所表示的曲面.

在xoy面上, $x^2 + y^2 = R^2$ 表示以原点O为圆心, 半径为R的圆.

曲面可以看作是由平行于 z 轴的直线 L 沿xoy面上的圆 $x^2 + y^2 = R^2$ 移动而形成,

称该曲面为圆柱面.

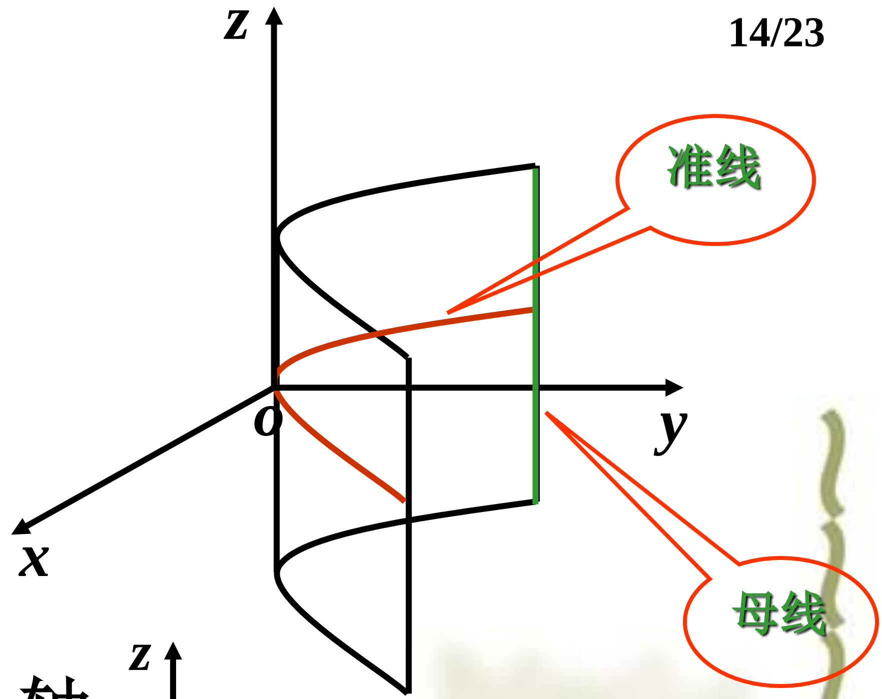


注意：在空间直角坐标系，缺项方程（不完全方程）的图形是柱面.

(1) $x^2 = 2y$ 表示抛物柱面

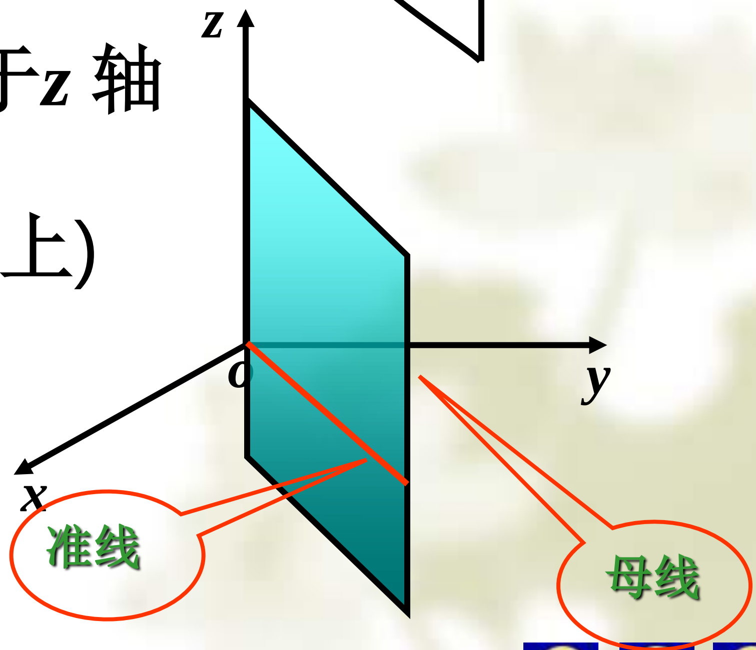
母线平行于 z 轴;

准线为 xoy 面上的抛物线.



(2) $x - y = 0$ 表示母线平行于 z 轴

的平面. (且 z 轴在平面上)



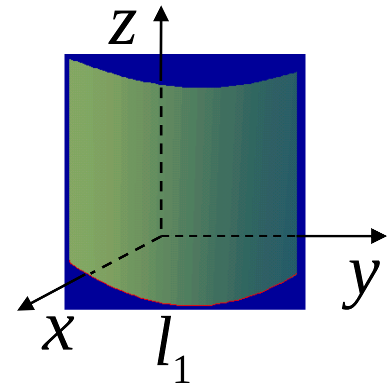
注意：描述柱面只须指出

其准线及母线.

方程 $F(x,y)=0$ 表示柱面,

母线 平行于 z 轴;

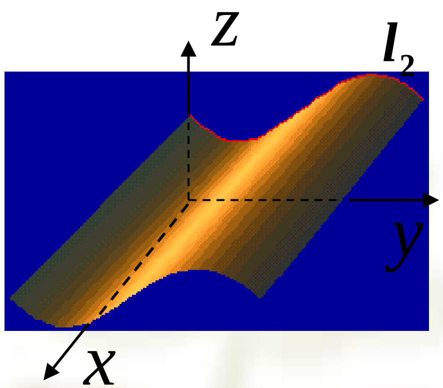
准线 xoy 面上的曲线 $l_1: F(x,y)=0$



方程 $G(y,z)=0$ 表示柱面,

母线平行于 x 轴;

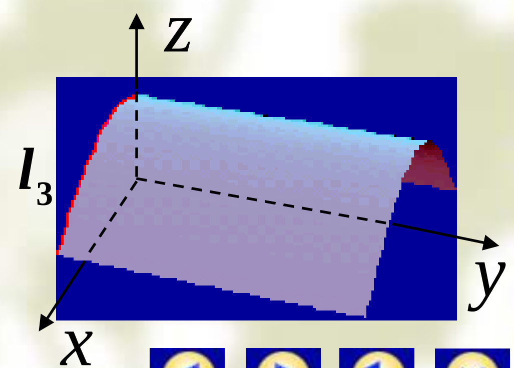
准线 yoz 面上的曲线 $l_2: G(y,z)=0$



方程 $H(z,x)=0$ 表示柱面,

母线平行于 y 轴;

准线 xoz 面上的曲线 $l_3: H(z,x)=0$



四、二次曲面

二次曲面的定义: 三元二次方程

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyx+Fzx+Gx+Hy+Iz+J=0$$

的图形通常为二次曲面. 相应地平面被称为一次曲面.

讨论二次曲面性状的截痕法:

用坐标面和平行于坐标面的平面与曲面相截,考察其交线(即截痕)的形状,然后加以综合,从而了解曲面的全貌.

以下用截痕法讨论几种特殊的二次曲面.

(1) 椭圆锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$$

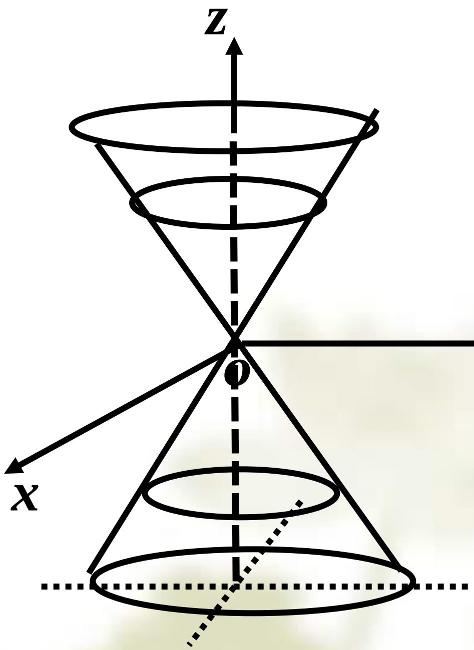
以平面 $z=t$ 截此曲面

当 $t=0$ 时得一点(0,0,0)

当 $t\neq 0$ 时, 得平面上的

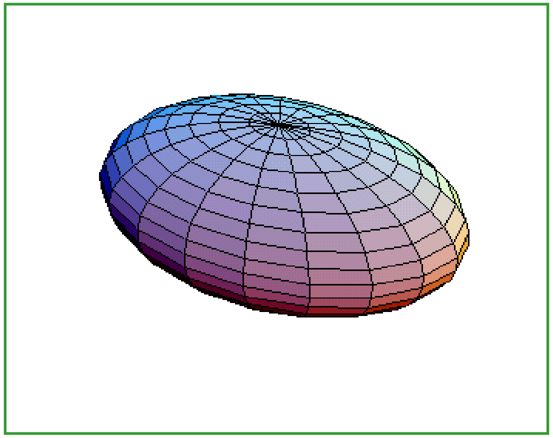
椭圆

$$\frac{x^2}{(at)^2}+\frac{y^2}{(bt)^2}=1$$



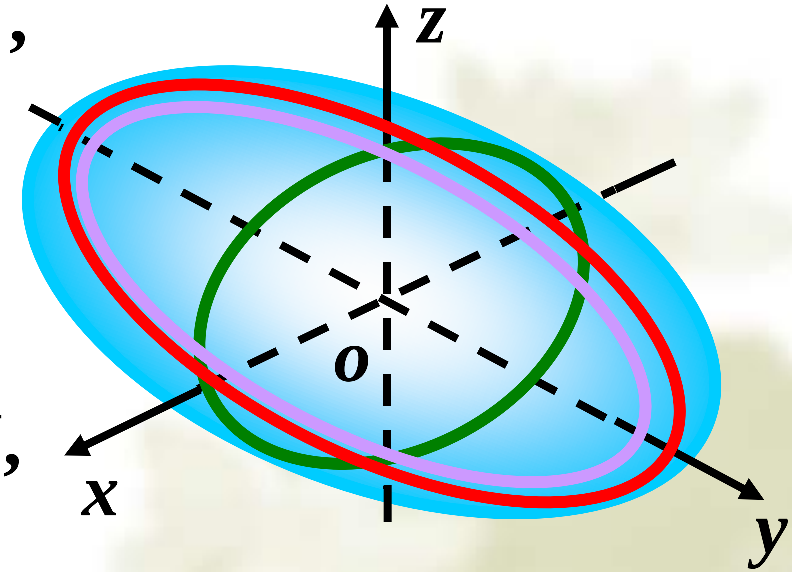
(2) 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



椭球面与三个坐标面的交线：

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0\end{cases}$$



$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0\end{cases},\quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0\end{cases},$$

椭球面与平面 $z = z_1$ 的交线为椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\dfrac{a^2}{c^2}(c^2 - z_1^2)} + \dfrac{y^2}{\dfrac{b^2}{c^2}(c^2 - z_1^2)} = 1 \\ z = z_1 \end{cases} \qquad |z_1| < c$$

同理与平面 $x = x_1$ 和 $y = y_1$ 的交线也是椭圆.

椭圆截面的大小随平面位置的变化而变化.

椭球面的几种特殊情况:

① $a=b$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 旋转椭球面

方程可写为 $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 或 $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转而成.

② $a=b=c$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{a^2}=1$ 球面

方程可写为 $x^2+y^2+z^2=a^2$.

五、小结

曲面方程的概念 $F(x,y,z)=0.$

旋转曲面: 曲线 $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴的旋转曲面:

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$

柱面 曲面 $F(x,y)=0$ 表示母线平行 z 轴的柱面.

【思考题】

指出下列方程在平面解析几何中和空间解析几何中分别表示什么图形？

(1) $x = 2$;　　(2) $x^2 + y^2 = 4$;

(3) $y = x + 1$.

【思考题解答】

方程	平面解析几何中	空间解析几何中
$x=2$	平行于 y 轴的直线	平行于 yoz 面的平面
$x^2+y^2=4$	圆心在(0,0)，半径为2的圆	以 z 轴为中心轴的圆柱面
$y=x+1$	斜率为1的直线	平行于 z 轴的平面