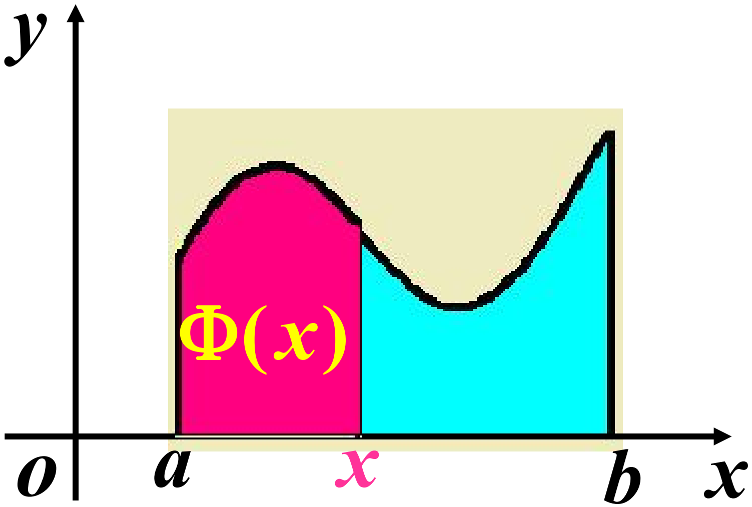
第二节 微积分基本公式

一、积分上限的函数及其导数

二、牛顿 – 莱布尼兹公式

一、积分上限函数及其导数

设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$x\in[a,b]$，则$f(x)$在部分区间$[a,x]$上也连续，可积.



$$\int_a^x f(x)dx = \int_a^x f(t)dt$$

$\int_a^x f(t)dt$ 在区间$[a,b]$上定义一个函数:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (a \le x \le b)$$

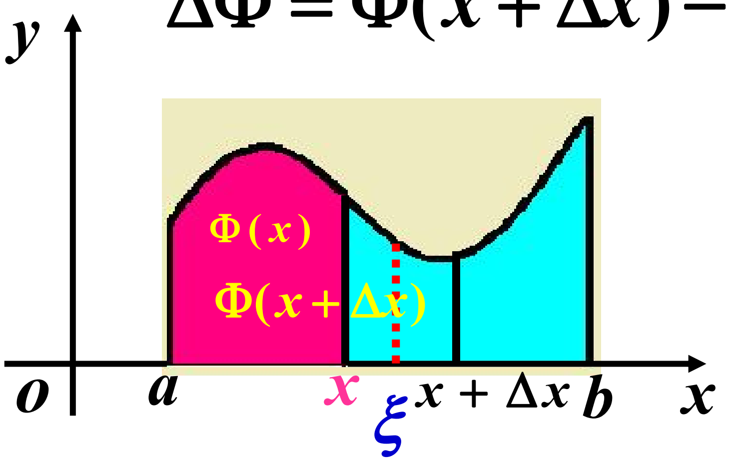
此函数是积分上限的函数，称为变上限积分的函数.

定理1 设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则变上限积分的函数$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上可导，且它的导数

$$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x),$$

证 由于$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$，则$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$,

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt,$$



$$= f(\xi)\Delta x,\quad \xi\in[x,x+\Delta x],$$

由导数的定义：

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi) = f(x).$$

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x),$$

说明：变上限积分的函数是被积函数的一个原函数.

说明： 1. 连续函数的原函数必存在.

$f(x)\in C[a,b]$, 则变上限函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数 .

例1 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x e^{-t}\sin t\,dt.$

解 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x e^{-t}\sin t\,dt = (\int_0^x e^{-t}\sin t\,dt)' = e^{-x}\sin x$

2. 变限积分求导: (1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = -f(x)$

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{\psi(x)}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right]$

$$= f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x)$$

例2 求 $\frac{d}{dx}\int_x^1 (\sin t + \cos t)\,dt.$

解 $\frac{d}{dx}\int_x^1 (\sin t + \cos t)\,dt = -\frac{d}{dx}\int_1^x (\sin t + \cos t)\,dt$

$$= -(\sin x + \cos x).$$

例3 求 $\dfrac{d}{dx}\int_0^{x^2}\tan t dt.$

解 $\dfrac{d}{dx}\int_0^{x^2}\tan t dt=\tan x^2\cdot\left(x^2\right)'=2x\tan x^2.$

例4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin t dt}{x^4}$

解 可以验证极限是 $\dfrac{0}{0}$ 型的未定式，利用洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin t dt}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2\cdot 2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{2x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$$

例5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_1^{\cos x} e^{-t^2}dt}{x^2}$

解 这是一个“$\dfrac{0}{0}$”型未定式，利用洛必达法则计算,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_1^{\cos x} e^{-t^2}dt}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\cos^2 x}(-\sin x)}{2x}$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\cos^2 x}\cdot \sin x}{2x} = -\frac{1}{2e}.$$

练习: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x} e^{-t^2}dt}{x}$. $=\lim\limits_{x\to 0}(e^{-\sin^2 x}\cdot\cos x)=1.$

“$\dfrac{0}{0}$”

例6 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,且$f(x)>0$,

证明$F(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$在$(0,+\infty)$内单调增加.

证 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x tf(t)dt = xf(x)$ $\qquad \dfrac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x)$,

$$F'(x)=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)dt - f(x)\int_0^x tf(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}$$

$$=\frac{f(x)\int_0^x (x-t)f(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2} \geq 0,$$

练习: $\dfrac{d}{dx}\int_0^x (x-t)f(t)dt = \dfrac{d}{dx}\left[x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt\right]$

二、牛顿—莱布尼茨公式

若$F(x)$是连续函数 $f(x)$在区间$[a, b]$上的一个原函数,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

证 $\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$是 $f(x)$的一个原函数，故

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x + C$$

令 $x = a$,得$C = F(a)$, $\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) - F(a)$

再令 $x = b$,得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} F(x)\Big|_a^b$

例7 计算$\int_0^1 x^2dx$

解 由于$\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2的一个原函数, 所以

$$\int_0^1 x^2dx=[\frac{1}{3}x^3]_0^1=\frac{1}{3}\cdot 1^3-\frac{1}{3}\cdot 0^3=\frac{1}{3}$$

例8 计算$\int_{-1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$

解 $\int_{-1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}=[\arctan x]_{-1}^{\sqrt{3}}=\arctan\sqrt{3}-\arctan(-1)$

$$=\frac{\pi}{3}-(-\frac{\pi}{4})=\frac{7}{12}\pi$$

例9 计算$\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}dx$

解 $\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}dx=[\ln|x|]_{-2}^{-1}=\ln 1-\ln 2=-\ln 2$

例10 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=1-(-1)=2$

例11 求 $\int_{-1}^{3}|2-x|dx$

$$=\int_{-1}^{2}|2-x|dx+\int_{2}^{3}|2-x|dx=\int_{-1}^{2}(2-x)dx+\int_{2}^{3}(x-2)dx$$

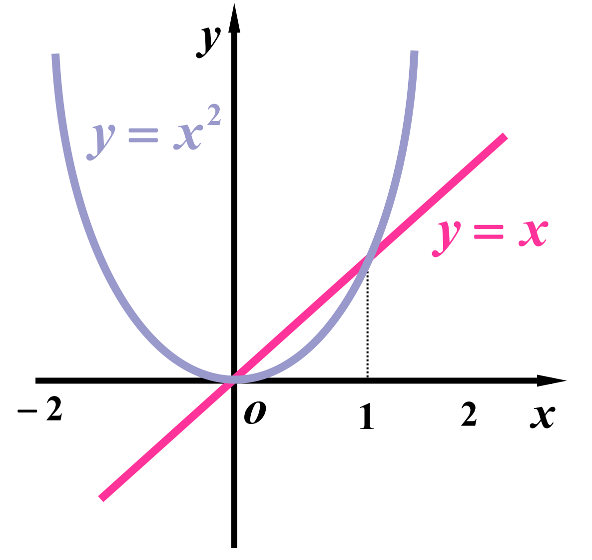
$$=(2x-\frac{1}{2}x^2)\Big|_{-1}^{2}+(\frac{1}{2}x^2-2x)\Big|_{2}^{3}=5$$

例12　求$\int_{-2}^{2}\max\{x,x^2\}dx.$

解　由图形可知

$$f(x)=\max\{x,x^2\}$$

$$=\begin{cases} x^2 & -2\le x\le 0 \\ x & 0\le x\le 1 \\ x^2 & 1\le x\le 2 \end{cases},$$



$$\therefore \text{原式}=\int_{-2}^{0}x^2dx+\int_{0}^{1}xdx+\int_{1}^{2}x^2dx=\frac{11}{2}.$$

例13 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left({}^{i}\!/_{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\xi_i^{\,2}}\Delta x_i=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

例14 计算正弦曲线y=sin x在[0, π]上与x轴所围成的平面图形的面积.

解 这图形是曲边梯形的一个特例. 它的面积

$$A = \int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi}$$

$$= -(-1) - (-1) = 2$$

内容小结

1. 微积分基本公式

设 $f(x)\in C[a,b]$，且 $F'(x)=f(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$ 牛顿 – 莱布尼茨公式

2. 变限积分求导公式

练习：(1) $\dfrac{d}{dx}\int_0^x e^{t^2}dt = e^{x^2}$.

(2) $\dfrac{d}{dx}\int_0^{x^2} e^{t^2}dt = 2xe^{x^4}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^{t^2}dt}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\int_0^x e^{t^2}dt)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}}{1} = 1.$

$$(4)\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x \sin t^2 dt\right)^2}{\int_0^x t^2 \sin t^3 dt}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\int_0^x \sin t^2 dt\right)\left(\int_0^x \sin t^2 dt\right)'}{x^2 \sin x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\int_0^x \sin t^2 dt\right)\sin x^2}{x^2 \sin x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\int_0^x \sin t^2 dt\right)x^2}{x^2 \cdot x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\int_0^x \sin t^2 dt\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\int_0^x \sin t^2 dt\right)'}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x^2}{3x^2}=\frac{2}{3}.$$

（5）求由方程 $\int_0^y e^t dt + \int_0^x \cos t dt = 0$ 所确定的函数

$y = y(x)$ 的导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

法一： $\int_0^y e^t dt = e^y - 1, \int_0^x \cos t dt = \sin x.$

$$e^y - 1 + \sin x = 0.$$

法二：方程两边同时对x求导： $e^y \cdot y' + \cos x = 0$

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{\cos x}{e^y} = \frac{\cos x}{\sin x - 1}.$$