第九节 连续函数的运算与

初等函数的连续性

一、连续函数的运算法则

二、反函数与复合函数的连续性

三、初等函数的连续性

一、连续函数的运算法则

定理1　若 $f(x)$, $g(x)$在点x_0处连续,则$f(x)\pm g(x)$,

$$f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}\ (g(x_0)\neq 0)\text{在点 }x_0\text{处也连续.}$$

例如, $\sin x,\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内连续,

故 $\tan x,\cot x,\sec x,\csc x$ 在其定义域内连续.

二、反函数与复合函数的连续性

定理2 如果函数 $y=f(x)$ 在其定义区间 D_f 是连续且单调增加(或减少), 则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在 R_f 上也连续且单调增加(或减少).

例如 由于 $y=\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上单调增加且连续,

故 $y=\arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上也是单调增加且连续.

同理 $y=\arccos x$ 在 $[-1,1]$ 上单调减少且连续;

$$\left.\begin{aligned} &y=\arctan x, \\ &y=arc\cot x, \end{aligned}\right\} \text{在}[-\infty,+\infty]\text{上单调且连续}.$$

定理3 函数$y=f(g(x))$由$y=f(u), u=g(x)$复合而成，

若$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，$f(u)$在$u_0$处连续，则

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(g(x))}=\lim_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)=\boxed{f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)}$$

说明：内函数的极限存在，外函数在该极限点连续，

则求复合函数的极限时极限符号可以与外函数符号

互换.

例1 求 $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}$.

解 $$\lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}}=\sqrt{\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}}=\sqrt{\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

三、初等函数的连续性

（1）基本初等函数在定义区间内连续

（2）连续函数经四则运算仍连续

（3）连续函数的复合函数连续

所以，一切初等函数在定义区间内连续

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$

$=0$

法二:等价无穷小

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{\arctan 2x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan 2x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}} = e^2$$

$$\lim_{x\to +\infty} \ln(\arctan x) = \ln(\lim_{x\to +\infty} \arctan x) = \ln\frac{\pi}{2}$$

例4. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e=\dfrac{1}{\ln a}$

例5. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\boxed{\ln a}$.

解：令 $t=a^x-1$， 则 $x=\log_a(1+t)$，

原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\log_a(1+t)}=\ln a$

例6. 求 $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}}$. ——幂指函数

解: 原式 $= e^{\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\sqrt{x}}\ln\frac{x+1}{x+2}} = e^{\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

说明: (1)若 $\lim u(x) = a\,(a>0)$, $\lim v(x) = b$,

则有 $\boxed{\lim u(x)^{v(x)}} = \lim e^{v(x)\ln u(x)}$

$= e^{\lim v(x)\ln u(x)}$

$= e^{b\ln a} = \boxed{a^b}$

$(2)\lim u(x)=0$， $\lim v(x)=\infty$， 则有

$$\lim\left[1+u(x)\right]^{v(x)}=e^{\lim v(x)\ln\left[1+u(x)\right]}=e^{\lim v(x)u(x)}$$

$(3)\lim u(x)=1$， $\lim v(x)=\infty$， 则有

$$\lim u(x)^{v(x)}=\lim\left(1+u(x)-1\right)^{v(x)}$$

$$=e^{\lim v(x)\cdot\ln\left(1+u(x)-1\right)}$$

$$=\lim e^{v(x)\cdot\left(u(x)-1\right)}$$

例7 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$. $a^b = e^{b\ln a}$

解 原式$= \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{3}{\sin x}\ln(1+2x)}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{\sin x}\cdot\ln(1+2x)}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{x}\cdot 2x} = \mathrm{e}^6$$

例8 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2\tan^2 x\right)^{\cot^2 x}$.

解 由于 $\left(1+2\tan^2 x\right)^{\cot^2 x} = e^{\cot^2 x\cdot\ln\left(1+2\tan^2 x\right)}$

当 $x\to 0$ 时，$\ln\left(1+2\tan^2 x\right)\sim 2\tan^2 x$，

$$\lim_{x\to 0}\left(1+2\tan^2 x\right)^{\cot^2 x} = \lim_{x\to 0} e^{\cot^2 x\cdot\ln\left(1+2\tan^2 x\right)}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\cot^2 x\cdot\ln\left(1+2\tan^2 x\right)}$$

$$= e^{2\lim\limits_{x\to 0}\cot^2 x\cdot\tan^2 x} = e^2$$

例9 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0, b>0)$

解 $$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a^x+b^x-2}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\cdot\ln\left(1+\frac{a^x+b^x-2}{2}\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x+b^x-2}{2x}}=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}\right)}=e^{\frac{1}{2}\ln ab}$$

$$=\sqrt{ab}.$$

第十节 闭区间上连续函数的性质

一、最值定理

二、介值定理

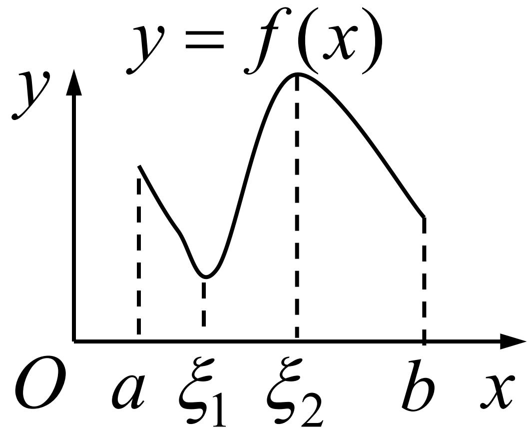
一、最值定理

定理1. 在闭区间上连续的函数在该区间上一定有最大值和最小值.

即：设 $f(x)\in C[a,b]$，则 $\exists\, \xi_1,\xi_2\in[a,b]$，使

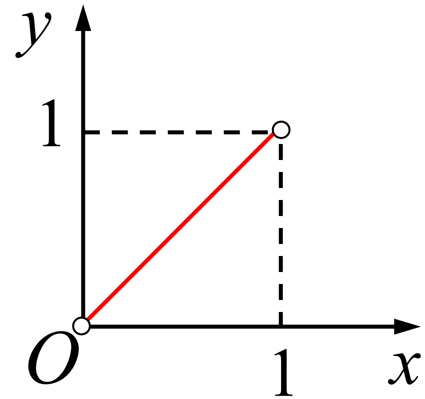
$$f(\xi_1)=\min_{a\le x\le b} f(x)$$

$$f(\xi_2)=\max_{a\le x\le b} f(x)$$



注意： 若函数在开区间上连续或在闭区间内有间断点，结论不一定成立 .

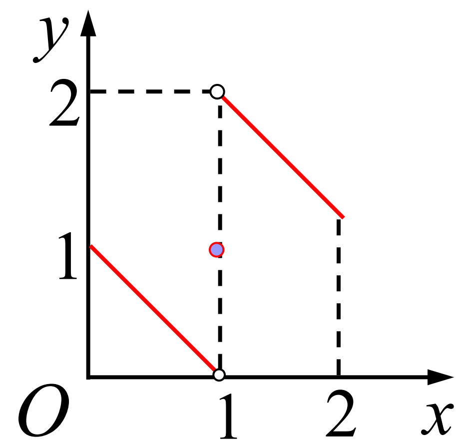
例如, $y = x, x \in (0,1)$



在(0,1)无最大值和最小值;

又如,

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -x+3, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$



[0,2]有间断点，无最大值和最小值

推论：闭区间上连续函数在该区间上有界.

二、介值定理 若论证函数为零，用连续函数介值定理

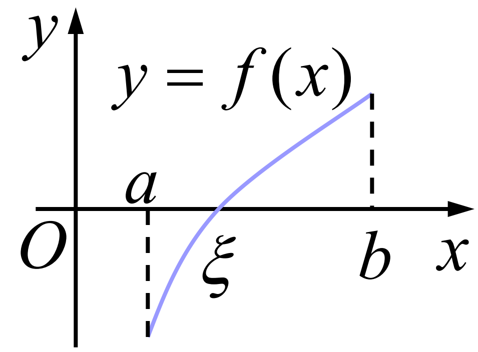
定理2.（零点定理） $f(x)\in C[a,b]$,

且$f(a)f(b)<0 \Longrightarrow$ 至少有一点$\xi\in(a,b)$,

使$f(\xi)=0$.

曲线两端点位于x轴两侧

曲线与x轴至少有一个交点.



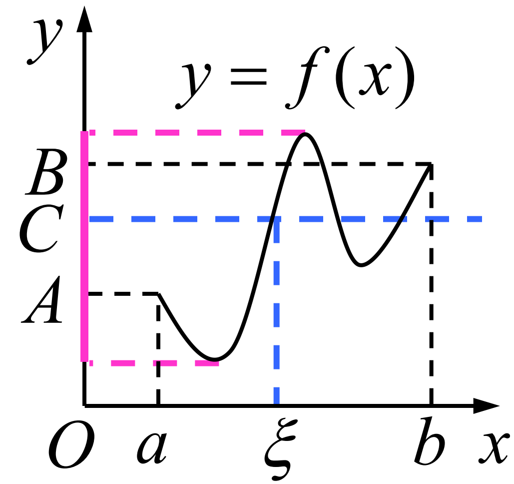
定理3.（介值定理） 设$f(x)\in C[a,b]$，且$f(a)=A$,

$f(b)=B$, $A\neq B$, 则对A与B之间的任一数C, 至少有一点$\xi\in(a,b)$，使$f(\xi)=C$.

若论证函数为零，用连续函数介值定理

证： 作辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-C$$



则 $\varphi(x)\in C[a,b]$，且

$$\varphi(a)\,\varphi(b)=(A-C)(B-C)<0$$

故由零点定理知，至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使 $\varphi(\xi)=0$，

即 $f(\xi)=C$.

推论：在闭区间上的连续函数必取得介于最小值与最大值之间的任何值 .

例1 证明方程 $x^5-2x^2-1=0$ 在区间$(1,2)$内至少有一个根.

证明 令$f(x)=x^5-2x^2-1$, $f(x)\in C[1,2]$,

而$f(1)=-2<0$, $f(2)=23>0$,

故据零点定理, 至少存在一点$\xi\in(1,2)$, 使 $f(\xi)=0$,

即 $x=\xi$ 是$x^5-2x^2-1=0$的一个根.

例2 设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$f(a)<a$，

$f(b)>b$. 证明$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\xi$.

证明 令 $F(x)=f(x)-x$，则$F(x)$在$[a,b]$上连续，

而 $F(a)=f(a)-a<0$， $F(b)=f(b)-b>0$,

由零点定理，$\exists\xi\in(a,b)$， 使$F(\xi)=0$,

即：$f(\xi)-\xi=0$， $f(\xi)=\xi$.

注： 在应用零点定理时，一定要注意检验函数是否满足定理使用的条件.

例3 证明方程$x = a\sin x + b(a > 0, b > 0)$, 至少有一个正根，且它不超过$a + b$.

证明: 令$f(x) = x - a\sin x - b$, 在$[0, a+b]$ 上连续,

$$f(0) = -b < 0,\ f(a+b) = a(1 - \sin(a+b)),$$

若$\sin(a+b)=1$,则 $f(a+b)=0$, $a+b$即为根.

若$\sin(a+b) < 1$,则 $f(a+b) > 0$, 由零点定理 ，

$\exists \xi \in (0, a+b)$,使$f(\xi) = 0$. ξ为方程的根. 它不超过$a+b$.