第二节　数量积　向量积

一、两向量的数量积

二、两向量的向量积

三、小结

一、数量积

1、定义

(1)实例　一物体在常力$\vec{F}$作用下沿直线从点M_1移动到点M_2，以 $\vec{s}$ 表示位移，则力$\vec{F}$所作的功为 $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

$$W = |\vec{F}||\vec{s}|\cos\theta$$ （其中θ为$\vec{F}$与$\vec{s}$的夹角）

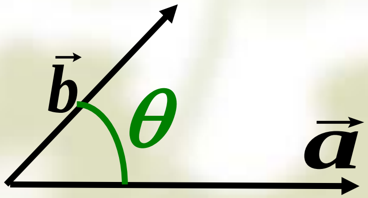
启示　两向量作这样的运算，结果是一个数量.

(2)定义　向量 $\vec{a}$ 与$\vec{b}$ 的数量积为 $\vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$ （其中θ为$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角）

数量积也称为“点积”、“内积”.

$\because\ |\vec{b}|\cos\theta = \mathrm{Pr\,j}_a\vec{b},\quad |\vec{a}|\cos\theta = \mathrm{Pr\,j}_b\vec{a},$



$$\therefore\ \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|\,\mathrm{Pr\,j}_b\vec{a} = |\vec{a}|\,\mathrm{Pr\,j}_a\vec{b}.$$

【结论】两向量的数量积等于其中一个向量的模和另一个向量在这向量的方向上的投影的乘积.

2、两个性质:

(1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$.

证 $\because \theta=0,\quad \therefore \vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos\theta=|\vec{a}|^2$.

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftarrow\Rightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$.

证 ($\Rightarrow$) $\because \vec{a}\cdot\vec{b}=0,\quad |\vec{a}|\neq 0,\quad |\vec{b}|\neq 0,$

$$\therefore \cos\theta=0,\quad \theta=\frac{\pi}{2}\quad \therefore \vec{a}\perp\vec{b}.$$

($\Leftarrow$) $\because \vec{a}\perp\vec{b},\quad \therefore \theta=\frac{\pi}{2}\quad \therefore \cos\theta=0,$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0.$$

3、运算法则 数量积符合下列运算规律：

(1) 交换律： $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

(2) 分配律： $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$;

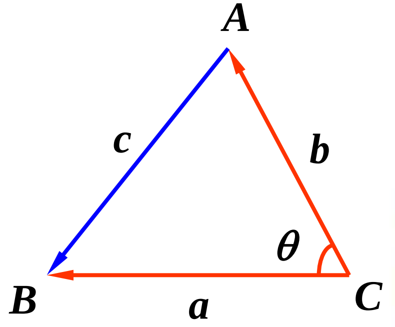
(3) 结合律：

若λ为数： $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$,

若λ,μ为数： $(\lambda\vec{a})\cdot(\mu\vec{b})=\lambda\mu(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

【注】 $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}\neq\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$.

【教材例1】 试用向量证明三角形的余弦定理.



【证】 设在ΔABC中$\angle BCA=\theta$, $|BC|=a$, $|CA|=b$, $|AB|=c$, 要证: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$.

记$\overrightarrow{CB}=\vec{a}, \overrightarrow{CA}=\vec{b}, \overrightarrow{AB}=\vec{c}$, 则有$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$,

从而$|\vec{c}|^2=\vec{c}\cdot\vec{c}=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$$=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}).$$

$\therefore \quad c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta.$

4、坐标表示式

(1)数量积的坐标表示式

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

$\because \vec{i}\perp\vec{j}\perp\vec{k}$, $\therefore \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$,

$\because |\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$, $\therefore \vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

(2) 两向量夹角余弦的坐标表示式

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|},$$

$$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

由此可知两向量垂直的充要条件为

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Longleftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$$

$$\Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

【例2】 已知 $\vec{a}=(1,1,-4)$, $\vec{b}=(1,-2,2)$. 求

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$； (2) $\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角； (3) $\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影.

【解】 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1+1\cdot(-2)+(-4)\cdot2=-9.$

(2) $$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\therefore\theta=\frac{3\pi}{4}.$$

(3) $\mathrm{Prj}_b\vec{a}=|\vec{a}|\cos\theta=-3.$

【例 3】证明向量$\vec{c}$与向量$(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$垂直.

【证】 $[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}]\cdot\vec{c}$

$$=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}\cdot\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{c})-(\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{c})$$

$$=0$$

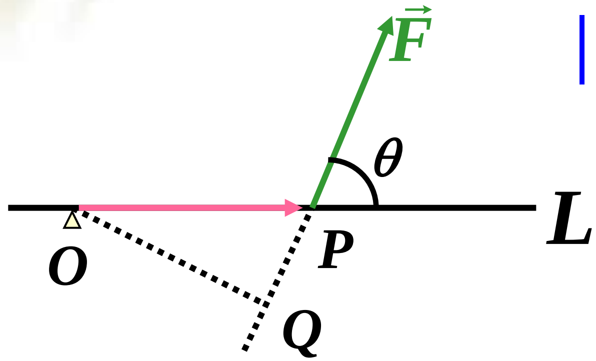
$$\therefore[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}]\perp\vec{c}$$

二、 向量积

1、定义

(1)实例 设O为一根杠杆L的支点，有一力$\vec{F}$作用于这杠杆上P点处 .力$\vec{F}$与$\overrightarrow{OP}$的夹角为θ.由力学规定 ,力$\vec{F}$对支点O的力矩是一向量$\vec{M}$，它的模

$$|\vec{M}| = |OQ||\vec{F}| = |\overrightarrow{OP}||\vec{F}|\sin\theta$$



$\vec{M}$的方向垂直于$\overrightarrow{OP}$与$\vec{F}$所决定的平面，指向符合右手系.

(2)定义 向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的向量积为 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$ （其中θ为$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角）

$\vec{c}$的方向既垂直于$\vec{a}$，又垂直于$\vec{b}$，$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$符合右手系.

向量积也称为“叉积”、“外积”.

2、两个性质

(1) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}.\qquad (\because \theta=0\Rightarrow \sin\theta=0)$

(2) $\vec{a}\,//\,\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}.\quad (\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0})$

【证】($\Leftarrow$) $\because \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0},\quad |\vec{a}|\neq 0,\quad |\vec{b}|\neq 0,$

$\therefore \sin\theta=0,\quad \theta=0$或$\pi\quad \therefore \vec{a}\,//\,\vec{b}$

($\Rightarrow$) $\because \vec{a}\,//\,\vec{b}\quad \therefore \theta=0$或$\pi\quad \therefore \sin\theta=0$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=0.$$

3、运算法则

向量积符合下列运算规律：

(1)负交换：$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}.$

(2)分配律：$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}.$

(3)结合律：若λ 为数，$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b}).$

补充：三阶行列式

二阶行列式：$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

三阶行列式：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

如 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-4-3) - 2\cdot(8+6) + 3\cdot(2-2) = -35$

4、坐标表示式

(1)向量积的坐标表达式

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

$\because\ \vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$,

$\because\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$,

$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$, $\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$, $\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$.

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

向量积还可用三阶行列式表示 $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$

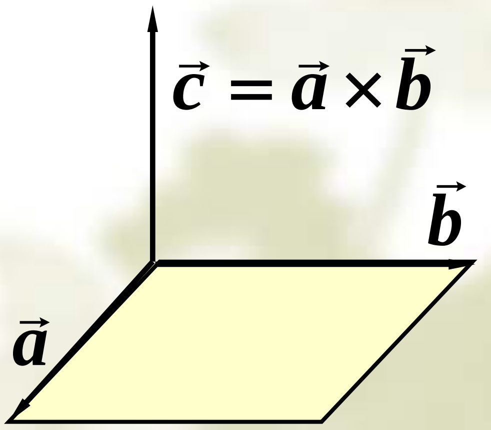
由上式可推出 $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b}$

b_x、b_y、b_z不能同时为零，但允许两个为零，

例如， $\dfrac{a_x}{0} = \dfrac{a_y}{0} = \dfrac{a_z}{b_z} \quad \Rightarrow a_x = 0,\ a_y = 0$

【补充】

$|\vec{a} \times \vec{b}|$表示以$\vec{a}$和$\vec{b}$为邻边的平行四边形的面积.



【例 4】 求与$\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$都垂直的单位向量.

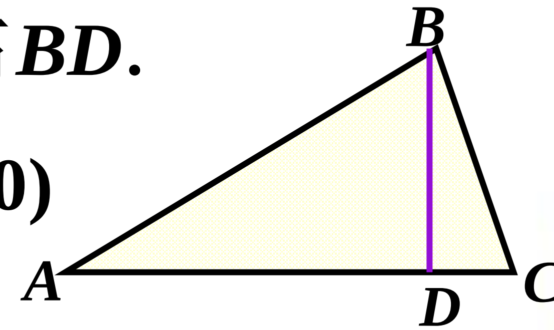
【解】

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=10\vec{j}+5\vec{k},$$

$$\because |\vec{c}|=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5},$$

$$\therefore \vec{e}=\pm\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\pm\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k}\right).$$

【例 5】 已知顶点为$A(1,-1,2)$、$B(5,-6,2)$和$C(1,3,-1)$的三角形，求AC边上的高BD.



【解】 $\overrightarrow{AC}=(0,4,-3)$ $\overrightarrow{AB}=(4,-5,0)$

三角形ABC 的面积为

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|$$

$$=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 4 & -3\\ 4 & -5 & 0\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}|(-15,-12,-16)|$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{15^2+12^2+16^2}=\frac{25}{2},$$

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|\cdot BD$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5,$$

$$\frac{25}{2}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot BD$$

$$\therefore BD=5.$$

【小结】

一、两向量的数量积

二、两向量的向量积