§12.4. 尤拉法求微分方程组数值解

12.4.1. 一般介绍:

在(x,y)平面上,对于一常微分方程,

$$dy/dx=f(x,y) \qquad (12.17)$$

若 $y=F(x)$ (12.20)

满足此方程，则微分方程的通解可表示为 $y=F(x)+C$。 C为任意常数。

若再规定 $y(x_0)=y_0$ (12.19)，

初值，常数C将被确定，得微分方程的一个特解。

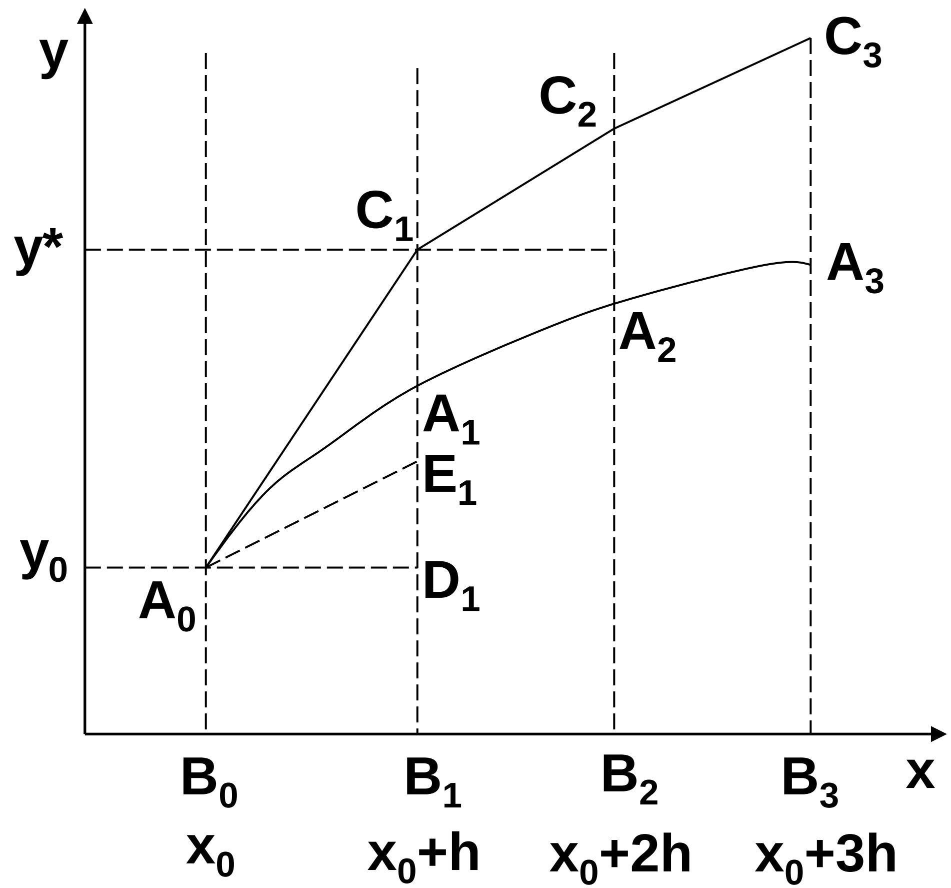
这是数学分析法，计算机无法应用此法，而且，对于大多数情况，F(x)无法找到，只能求其数值解(近似解)，也就是在一系列x值：x_1， x_2， x_3……时, 式12.20中y的近似值y_1,y_2,y_3, ……这相当于接近特解曲线的一组点列。

求解时方法很多，尤拉法在原理上最简单。

12.4.2. 尤拉法的算法

设待求解的微分为12.17式,初始条件12.19式.如图12—7:

A_0点为初始条件相应的点(x_0,y_0)，曲线$A_0A_1A_2$特解曲线.预先给定一个小距离h，称为步长，在x轴上标出x_0，x_0+h，x_0+2h… 即B_0，B_1，B_2…各点。自B_1做x轴垂线，与特解曲线相交于A_1。从A_0点做特解曲线的切线与B_1A_1交于C_1点。当h足够小时，C_1点即与特解曲线上的A_1点足够接近。C_1点的y值看成A_1点y的一次近似值，用y*表示：



$$y^* = \overline{B_1C_1}$$

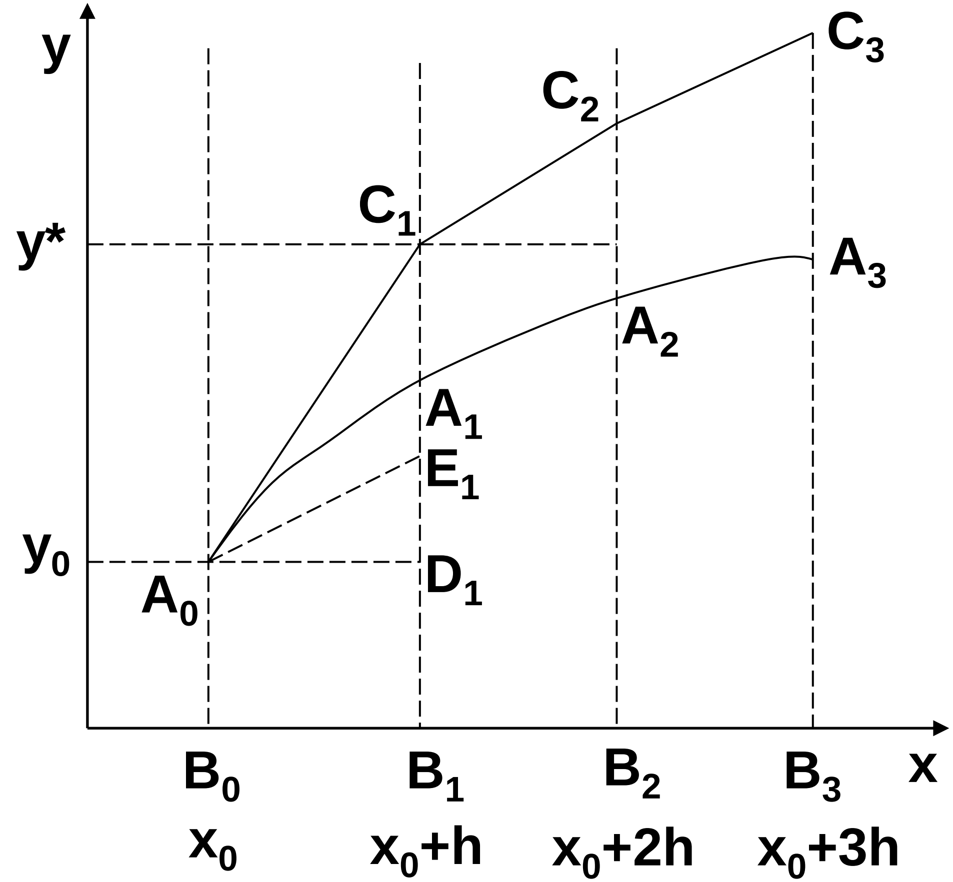
下面我们求y*的表达式。

延长Y_0A_0交B_1A_1于D_1点

$$y^* = \overline{B_1C_1} = \overline{B_1D_1} + \overline{D_1C_1}$$

$$= y_0 + \overline{A_0D_1} tg(\angle C_1A_0D_1)$$

$$= y_0 + h \cdot tg(\angle C_1A_0D_1)$$



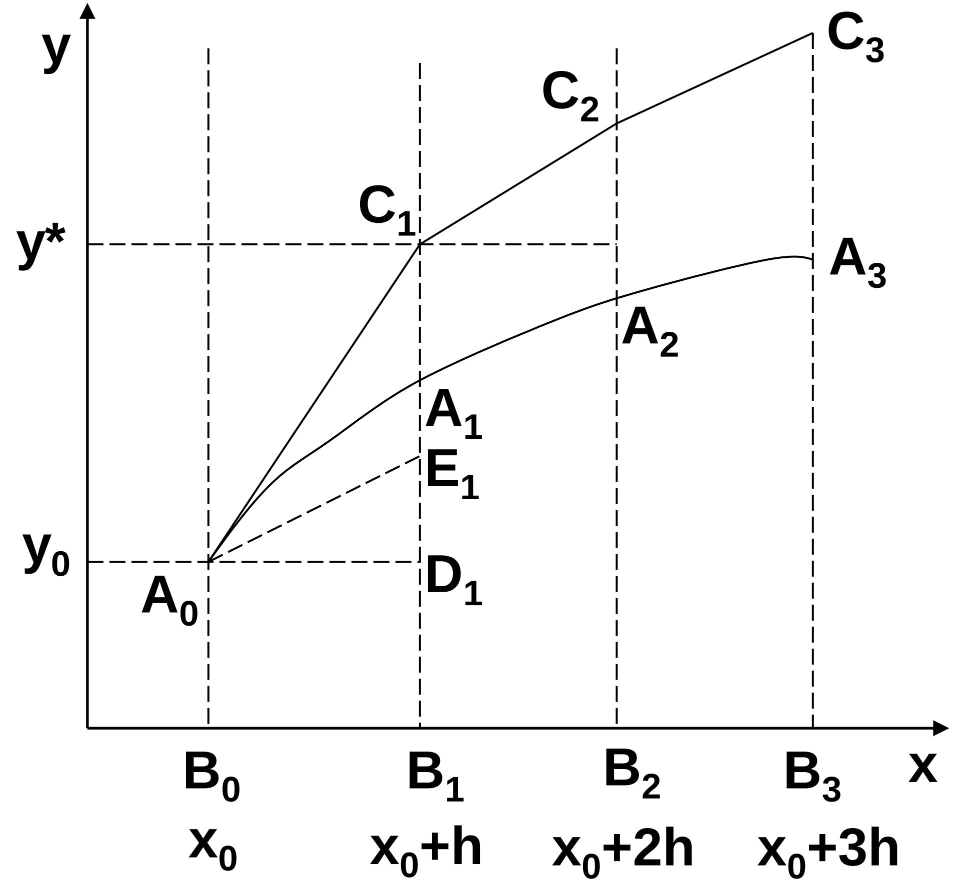
由12.17式和12.19式知，A_0点切线的斜率为：

$$(dy/dx)_{x0,y0} = f(x_0, y_0)$$

所以：$y^* = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$ (12.26)

这样求出y*后，又可自C_1（x_1，y^*）点，求出$x=x_0+2h$处y的一次近似值，相应C_2点。依次类推，可不断求出x_0+3h，x_0+4h…处y的一次近似值。图中折线$A_0C_1C_2$……为什么不用A_1点求C_2？A_1点未知。

一次近似值误差逐渐累积，所以，一般来说，这样求出的近似值会越来越偏离特解曲线，误差会越来越大。为解决此问题，尤拉采用了以下的矫正方法：自A_0点作一平行于C_1C_2的直线，与B_1C_1相交于E_1。



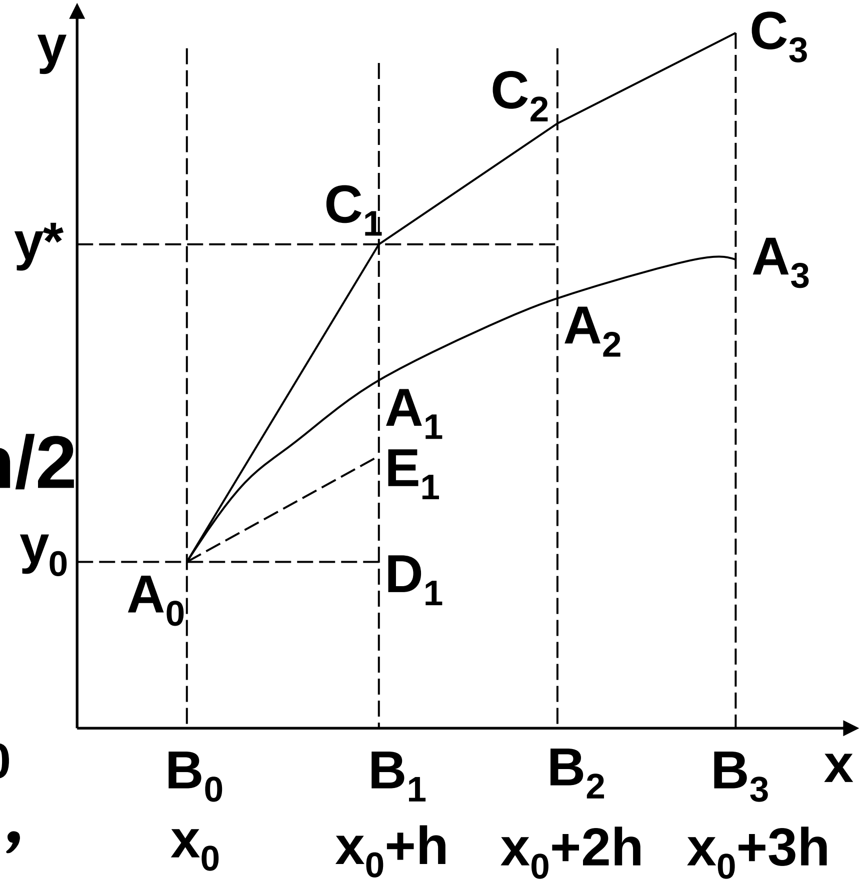
E_1，C_1一般位于特解曲线的两侧，以C_1与E_1的中点做A_1点的近似点，一般会得到更好的结果。由此所得的值称为$x=x_0+h$处y的二次近似值，用y表示：

$$y=(\overline{B_1C_1}+\overline{B_1E_1})/2=(\overline{B_1C_1}+\overline{B_1D_1}+\overline{D_1E_1})=(y^*+y_0+\overline{D_1E_1})/2$$

$D_1E_1=A_0D_1 \times tg(\angle E_1A_0D_1)$
$=hf(x_0+h，y^*)$

所以

$$y=y_0+[f(x_0，y_0)+f(x_0+h，y^*)]\cdot h/2 \qquad (12.27)$$



此式可用来自$x=x_0$时的函数值y_0计算$x=x_0+h$时函数值y的近似值，也就是自初始点A_0出发，

计算特曲线邻近点A_1的近似值。如果我们再以A_1的近似值为初始点重复以上步骤，又可求出下一个邻近点A_2的近似值。如此重复，就可近似求出整条特解曲线，也就是微分方程的数值解。

12.4.3. 一阶微分方程组的数值解：

对于一阶微分方程组

$$\left.\begin{aligned}
&dy_1/dx=f_1(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)\\
&dy_2/dx=f_2(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)\\
&\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\\
&dy_n/dx=f_n(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)
\end{aligned}\right\} \quad (12.28)$$

和初始条件

$$\left.\begin{aligned}
&y_1(x_0)=y_{10}\\
&y_2(x_0)=y_{20}\\
&\cdots\cdots\\
&y_n(x_0)=y_{n0}
\end{aligned}\right\} \quad \mathbf{(12.29)}$$

求此微分方程组，类似于 **(12.27)**式，直接写出公式 **(12.30)**：

$$y=y_0+[f(x_0,y_0)+f(x_0+h,y^*)]\cdot h/2 \qquad (12.27)$$

$$\left.\begin{aligned} y_1&=y_{10}+[f_1(x_0,y_{10},\dots,y_{n0})+f_1(x_0+h,y_1^*,\dots,y_n^*)]\cdot h/2\\ y_2&=y_{20}+[f_2(x_0,y_{10},\dots,y_{n0})+f_2(x_0+h,y_1^*,\dots,y_n^*)]\cdot h/2\\ &\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\\ y_n&=y_{n0}+[f_n(x_0,y_{10},\dots,y_{n0})+f_n(x_0+h,y_1^*,\dots,y_n^*)]\cdot h/2 \end{aligned}\right\} (12.30)$$

上式可以简写为：

$$y_i=y_{i0}+[f_i(x_0,y_{10},\dots,y_{n0})+f_i(x_0+h,y_1^*,\dots,y_n^*)]\cdot h/2 \quad (i=1,2,\dots n) \qquad (12.31)$$

这里x_0+h是邻近点上自变量, y_i*是邻近点上第i个应变量y_i的一次近似值：

$$y_i^*=y_{i0}+h\cdot f_i(x_0,y_{10},\dots,y_{n0}) \qquad (12.32)$$

首先按式12.32计算y_i* ,再按式12.31计算y_i。

12.4.4高阶微分方程与方程组的数值解：

对于具有如下形式的高阶微分方程：

$$\frac{d^k y}{dx^k} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{k-1} y}{dx^{k-1}}\right) \qquad (12.33)$$

和初始条件

$$\left.\begin{aligned} & y(x_0) = y_0 \\ & \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \\ & \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x_0} = \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \left(\frac{d^{k-1} y}{dx^{k-1}}\right)_{x_0} = \left(\frac{d^{k-1} y}{dx^{k-1}}\right)_0 \end{aligned}\right\} \qquad (12.34)$$

把**k**阶微分方程化为**k**个一阶微分方程组，直接用一阶微分方程组的方法即可求解。具体化法如下：

$$\frac{d^k y}{dx^k} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{k-1} y}{dx^{k-1}}\right)$$ **k阶微分方程**

$$\left.\begin{aligned} dy_1/dx &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ dy_2/dx &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ dy_n/dx &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}\right\}$$

(12.28)式，n个一阶微分方程组。

(12.35)

令

$$\left.\begin{aligned} y &= y_1 \\ dy/dx &= y_2 \\ d^2y/dx^2 &= y_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ d^{k-1}y/dx^{k-1} &= y_k \end{aligned}\right\}$$

则 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} = y_2$ $\qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy_2}{dx} = y_3$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^{k-1} y}{dx^{k-1}} = \frac{dy_{k-1}}{dx} = y_k$$

$$\frac{d^k y}{dx^k} = \frac{dy_k}{dx} = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_k)$$

即

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx}=y_2\\
&\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy_2}{dx}=y_3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}=\frac{dy_{k-1}}{dx}=y_k\\
&\frac{d^ky}{dx^k}=\frac{dy_k}{dx}=f(x,y_1,y_2,\ldots,y_k)
\end{aligned}\right\}\quad(12.36)$$

及初始条件

$$\left.\begin{aligned}
&y_1(x_0)=y_{10}\\
&y_2(x_0)=y_{20}\\
&\cdots\cdots\\
&y_k(x_0)=y_{k0}
\end{aligned}\right\}\quad(12.37)$$

式12.37中的y_{i0}代表式12.34右方的各个常数。

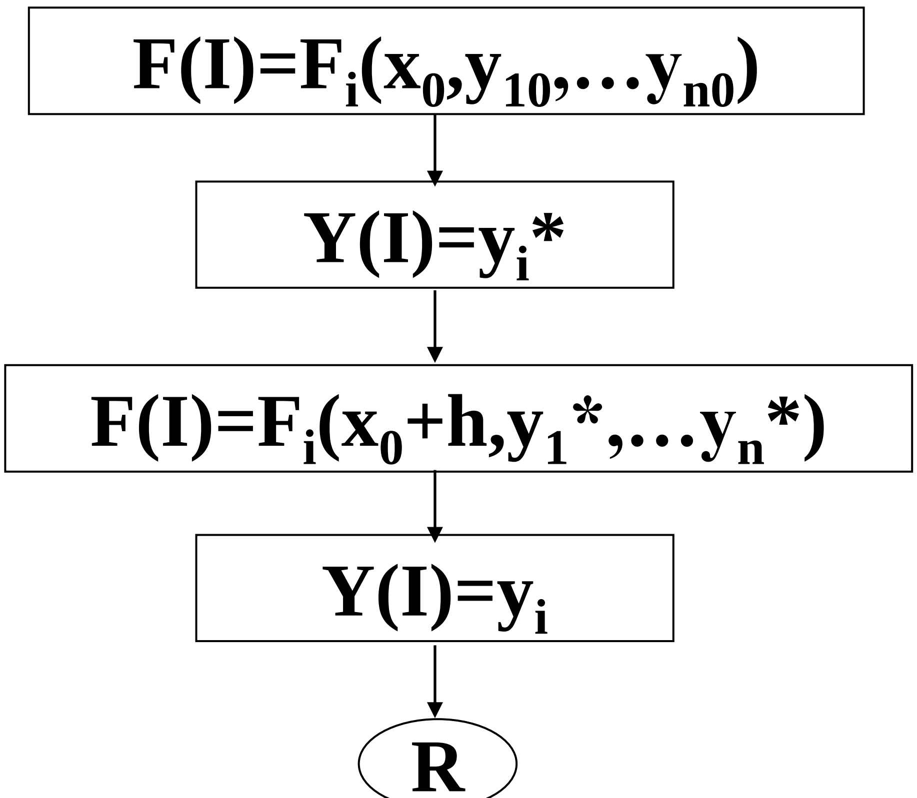
这样就把k阶微分方程化为了k个一阶微分方程组,直接用一阶微分方程组的方法即可求解。

对于高阶微分方程组也可用类似方法处理。例如由两个三阶微分方程组成的方程组,可化为由六个一阶微分方程所组成的方程组.

12.4.5. 尤拉法的框图和程序： 设有如**207**页式**12.28**所示微分方程组和**12.29**所示之初始条件，按式**12.31**求其数值解。框图**(209**页**)**：

$$y_i=y_{i0}+[f_i(x_0,y_{10},\ldots,y_{n0})+f_i(x_0+h,y_1^*,\ldots,y_n^*)]\cdot h/2 \qquad (12.31)$$

$$y_i^*=y_{i0}+h\cdot f_i(x_0,y_{10},\ldots,y_{n0}) \qquad (12.32)$$



子程序

```
12200 GOSUB 20000
12210 FOR I = 1 TO N
12220 YY(I)=Y(I)+H*F(I)/2
12230 Y(I)=YY(I)+H*F(I)/2
12240 NEXT I
12250 X = X + H
12260 GOSUB 20000
12270 FOR I = 1 TO N
12280 Y(I)=YY(I)+H*F(I)/2
12290 NEXT I
12295 RETURN
20000 F(1)=-(K1+K2)*Y(1)
20010 F(2) = K1 * Y(1)
20020 F(3) = K2 * Y(1)
20030 RETURN
```

输入量: N:微分方程组应变量个数n. X:自变量初始值X_0. Y(1), Y(n)----应变量初始值Y_{10} ,…Y_{n0} . H:步长h.

X和Y(I)在进入子程序前存放X_0与Y_{i0} ,出子程序时,存放X_0+h和Y_i .调用一次子程序,可自初始点求出其邻近点的近似值.为近似求出整条特解曲线,应在循环中反复调用此子程序.

$$y_i=y_{i0}+f_i(x_0,y_{10},\ldots,y_{n0})\cdot h/2$$

$$+f_i(x_0+h,\ y_1^*,\ \ldots,\ y_n^*)\cdot h/2$$

$$y_i^*=y_{i0}+h\cdot f_i(x_0,\ y_{10},\ \ldots,\ y_{n0})$$

12.4.6 应用示例:

设有放射性元素A，按右方方式衰变成B和C，

$$A \begin{array}{l} \xrightarrow{k_1} B \\ \xrightarrow{k_2} C \end{array}$$

在时间x，A、B和C的量分别为y_1、y_2和y_3，则有

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= -(k_1 + k_2)y_1 \\ \frac{dy_2}{dx} &= k_1 y_1 \\ \frac{dy_3}{dx} &= k_2 y_1 \end{aligned}\right\} \quad (12.38)$$

$k_1=1.25\times 10^{-2}$，
$k_2=4.78\times 10^{-3}$，

x=0时A的量为1，B、C为0。计算x=20，40，60，80，100时A、B、C的量，步长为1。

```
10 READ N, H, M, K1, K2
20 DIM Y(N), YY(N), F(N)
30 READ X
40 FOR I=1 TO N:READ Y(I):NEXT I
50 FOR J = 1 TO M
60 GOSUB 12200
70 IF J<>INT(J / 20)*20 THEN 120
80 PRINT "X="; X
90 FOR K = 1 TO N
100 PRINT "Y("; K; ")="; Y(K)
110 NEXT K
115 PRINT
120 NEXT J
130 END
```

步长为1

打印x=20，40，60，80，100时A、B、C的量

```
200 DATA 3,1,100,1.25E-2,4.78E-3
210 DATA 0,1,0,0
12200------12295
20000 F(1) = -(K1 + K2) * Y(1)
20010 F(2) = K1 * Y(1)
20020 F(3) = K2 * Y(1)
20030 RETURN
```

三个一阶微分方程的具体形式

运行结果：

有：115 PRINT

```
Y( 2 )= .2113658
Y( 3 )= .0808263

X= 40
Y( 1 )= .5009921
Y( 2 )= .3609722
Y( 3 )= .1380358

X= 60
Y( 1 )= .3546061
Y( 2 )= .4668649
Y( 3 )= .1785291

X= 80
Y( 1 )= .2509929
Y( 2 )= .5418165
Y( 3 )= .2071906

X= 100
Y( 1 )= .1776548
Y( 2 )= .5948679
Y( 3 )= .2274774

Press any key to continue
```

运行结果：

无：115 PRINT

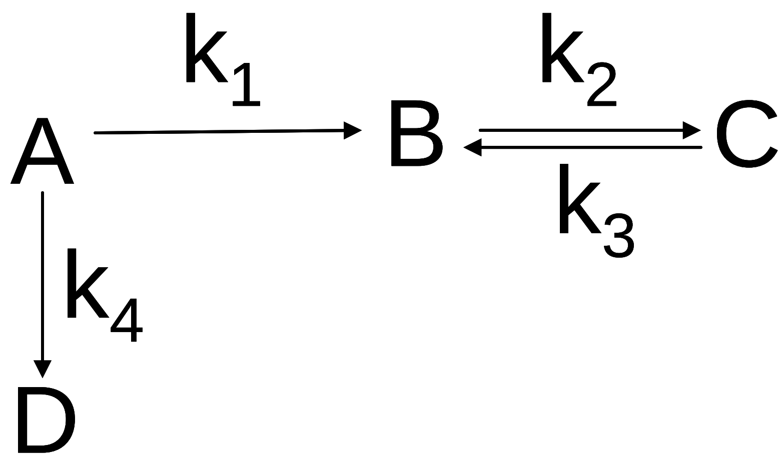
```
X= 20
Y( 1 )= .7078079
Y( 2 )= .2113658
Y( 3 )= .0808263
X= 40
Y( 1 )= .5009921
Y( 2 )= .3609722
Y( 3 )= .1380358
X= 60
Y( 1 )= .3546061
Y( 2 )= .4668649
Y( 3 )= .1785291
X= 80
Y( 1 )= .2509929
Y( 2 )= .5418165
Y( 3 )= .2071906
X= 100
Y( 1 )= .1776548
Y( 2 )= .5948679
Y( 3 )= .2274774

Press any key to continue
```

作业: 221页习题六。

步长 H=0.5

六、已知某反应是由以下基元反应组成，请列出相应的微分方程组，并计算t=20，40，60，80，100时A、B、C、D的浓度。



k_1=1.25×10^{-3}，k_2=2.6× 10^{-4}，k_3=8.6×10^{-2}，k_4=5.3× 10^{-3}，t=0时[A]=1，[B]=[C]=[D]=0。