第八节　常系数非齐次线性微分方程

一、　$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型

二、　$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x$

$+P_n(x)\sin\omega x]$ 型

[二阶常系数线性非齐次微分方程]

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (p, q \text{ 为常数}) \qquad ①$$

[对应齐次方程]　$y'' + py' + qy = 0,$

根据解的结构定理，其通解为

[通解结构]　$y = Y + y^*$

非齐次方程特解

齐次方程通解

【难点】如何求特解？

【求特解的方法】— 待定系数法

根据 $f(x)$ 的特殊形式，给出特解 y^* 的待定形式，

代入原方程比较两端表达式以确定待定系数．

[$f(x)$常见类型]　$P_m(x)$,　$P_m(x)e^{\lambda x}$,

$$P_l(x)e^{\lambda x}\cos\omega x, \quad P_n(x)e^{\lambda x}\sin\omega x,$$

其中λ、ω为实数，$P_m(x)$, $P_l(x)$, $P_n(x)$,

分别为 m、l、n 次多项式．

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

一、$f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型

设特解为 $y^* = Q(x)e^{\lambda x}$，其中$Q(x)$为待定多项式

$$y^{*\prime} = e^{\lambda x}[Q'(x) + \lambda Q(x)]$$

$$y^{*\prime\prime} = e^{\lambda x}[Q''(x) + 2\lambda Q'(x) + \lambda^2 Q(x)]$$

代入原方程，得

$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_m(x)$$

(1) 若 λ 不是特征方程的根，即 $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$，则取 Q (x) 为 m 次待定系数多项式 $Q_m(x)$，从而得到特解形式为 $y^* = Q_m(x)e^{\lambda x}$.

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x)$$

(2) 若λ是特征方程的单根， 即

$$\lambda^2+p\lambda+q=0,\quad 2\lambda+p\neq 0,$$

则 $Q'(x)$ 为m 次多项式， 故特解形式为 $y^*=xQ_m(x)e^{\lambda x}$

(3) 若 λ 是特征方程的重根， 即

$$\lambda^2+p\lambda+q=0,\quad 2\lambda+p=0,$$

则 $Q''(x)$是 m 次多项式，故特解形式为 $y^*=x^2Q_m(x)e^{\lambda x}$

小结 对方程 $y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$

(1) 若 λ 不是特征方程的根, $y^* = e^{\lambda x} Q_m(x)$.

(2) 若λ 是特征方程的单根 , $y^* = x Q_m(x) e^{\lambda x}$

(3) 若 λ 是特征方程的重根 , $y^* = x^2 Q_m(x) e^{\lambda x}$

当λ是特征方程的 k 重根 时, 可设特解

$$y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x} \qquad k = \begin{cases} 0 & \lambda\text{不是根} \\ 1 & \lambda\text{是单根,} \\ 2 & \lambda\text{是重根} \end{cases}$$

【注意】

上述结论可推广到 n 阶常系数非齐次线性微分方程.

【教材例1】求方程 $y''-2y'-3y=\underline{2x+1}$的一个特解.

【解】 特征方程为 $r^2-2r-3=0$，$r_1=-1$, $r_2=3$.

而本题 $\underline{\lambda=0}$不是特征方程的根 .

设所求特解为 $y^*=b_0x+b_1$,代入方程 ：

$$-3b_0x-3b_1-2b_0=2x+1$$

比较系数，得

$$\begin{cases}-3b_0=2\\ -2b_0-3b_1=1\end{cases} \longrightarrow b_0=-\frac{2}{3},\ b_1=\frac{1}{9}$$

于是所求特解为 $y^*=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$.

【教材例2】求方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$ 的通解.

【解】特征方程为 $r^2-5r+6=0$，其根为

$$r_1=2,\quad r_2=3$$

对应齐次方程的通解为 $Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$

本题 $\lambda=2$，设非齐次方程特解为 $y^*=x(b_0x+b_1)e^{2x}$

代入方程得 $-2b_0x-b_1+2b_0=x$

比较系数，得 $\begin{cases}-2b_0=1\\ 2b_0-b_1=0\end{cases} \longrightarrow b_0=-\frac{1}{2},\ b_1=-1$

因此特解为 $y^*=x(-\frac{1}{2}x-1)e^{2x}$.

所求通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-(\frac{1}{2}x^2+x)e^{2x}$.

【例3】求解初值问题 $\begin{cases} y''' + 3y'' + 2y' = \underline{1} \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$

【解】特征方程为 $r^3 + 3r^2 + 2r = 0$, 其根为

$$\underline{r_1 = 0,}\quad r_2 = -1,\quad r_3 = -2$$

故对应齐次方程通解为 $Y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x}$

本题 $\underline{\lambda = 0,}$ 设非齐次方程特解为 $y^* = bx,$

代入方程得 $2b = 1,$ 故 $y^* = \frac{1}{2}x,$ 原方程通解为

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x} + \frac{1}{2}x$$

由初始条件得

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ -C_2 - 2C_3 = -\dfrac{1}{2} \\ C_2 + 4C_3 = 0 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} C_1 = -{}^3\!/_4 \\ C_2 = 1 \\ C_3 = -{}^1\!/_4 \end{cases}$$

于是所求解为

$$y = -\frac{3}{4} + e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}x$$

$$= \frac{1}{4}(-3 + 2x + 4e^{-x} - e^{-2x})$$

二、$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$型

［分析思路］

第一步 将 $f(x)$ 转化为

$$f(x)=P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}+\overline{P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}}$$

第二步 求出如下两个方程的特解

$$y''+py'+qy=P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}$$

$$y''+py'+qy=\overline{P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}}$$

第三步 利用叠加原理求出原方程的特解

第一步 利用欧拉公式将 $f(x)$ 变形

$$f(x)=e^{\lambda x}\left[P_l(x)\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2}+P_n(x)\frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2i}\right]$$

$$=\left[\frac{P_l(x)}{2}+\frac{P_n(x)}{2i}\right]e^{(\lambda+i\omega)x}$$

$$+\left[\frac{P_l(x)}{2}-\frac{P_n(x)}{2i}\right]e^{(\lambda-i\omega)x}$$

令 $m=\max\{n,l\}$,则

$$f(x)=P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}+\overline{P_m(x)}\,e^{(\lambda-i\omega)x}$$

$$=P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}+\overline{P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}}$$

第二步 求如下两方程的特解

$$y'' + py' + qy = P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x} \qquad ②$$

$$y'' + py' + qy = \overline{P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}} \qquad ③$$

设 $\lambda + i\omega$ 是特征方程的 k 重根 ($k = 0, 1$), 则 ② 有特解:

$$y_1^* = x^k Q_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x} \quad (Q_m(x)\text{为}m\text{次多项式})$$

故 $$(y_1^*)'' + p(y_1^*)' + q\,y_1^* \equiv P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}$$

等式两边取共轭 :

$$\overline{y_1^*}'' + p\,\overline{y_1^*}' + q\,\overline{y_1^*} \equiv \overline{P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}}$$

这说明 $\overline{y_1^*}$ 为方程 ③ 的特解 .

第三步 求原方程的特解

原方程

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x]$$

利用第二步的结果，根据叠加原理，原方程有特解：

$$y^* = y_1^* + \overline{y_1^*}$$

$$= x^k e^{\lambda x}[\,Q_m e^{i\omega x} + \overline{Q_m}\, e^{-i\omega x}\,]$$

$$= x^k e^{\lambda x}[\,Q_m(\cos\omega x + i\sin\omega x) + \overline{Q_m}(\cos\omega x - i\sin\omega x)\,]$$

$$= x^k e^{\lambda x}[\,R_m^{(1)}\cos\omega x + R_m^{(2)}\sin\omega x\,]$$

其中 $R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$ 均为 m 次实系数多项式．

小 结:

对非齐次方程

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x \right]$$

$(p, q$ 为常数$)$

$\lambda + i\omega$为特征方程的 k 重根 $(k = 0, 1)$,则可设特解:

$$y^* = x^k e^{\lambda x}\left[R_m^{(1)}\cos\omega x + R_m^{(2)}\sin\omega x \right]$$

其中$R_m^{(1)}(x), R_m^{(2)}(x)$是$m$次实系数多项式,$m = \max\{n, l\}$

上述结论也可推广到高阶方程的情形.

【教材例4】求方程 $y'' + y = x\cos 2x$ 的一个特解．

【解】 特征方程 $r^2 + 1 = 0$ $r = \pm i$

而本题 $\lambda = 0, \omega = 2,$ 则 $\lambda \pm i\omega = \pm 2i$

不是特征方程的根,

又因 $P_l(x) = x,\ P_n(x) = 0,$ 故设特解为

$$y^* = (ax + b)\cos 2x + (cx + d)\sin 2x$$

代入方程得

$$(-3ax-3b+4c)\cos 2x-(3cx+3d+4a)\sin 2x=x\cos 2x$$

比较系数，得 $\begin{cases} -3a=1 \\ -3b+4c=0 \\ -3c=0 \\ -3d-4a=0 \end{cases}$

$$\therefore\ a=-\frac{1}{3},\ d=\frac{4}{9}\qquad b=c=0$$

于是求得一个特解 $y^*=-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x$.

三、小结(待定系数法)

1. $y'' + p\,y' + q\,y = P_m(x)\,e^{\lambda x}$

λ 为特征方程的 $k\,(=0, 1, 2)$ 重根， 则设特解为

$$y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$$

2. $y'' + p\,y' + q\,y = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x]$

$\lambda \pm i\omega$ 为特征方程的 $k\,(=0, 1\,)$ 重根，则设特解为

$$y^* = x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x + R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$$

$$m = \max\{\,l\,, n\,\}$$

3. 上述结论也可推广到高阶方程的情形.

【思考题】

1.写出微分方程 $y'' - 4y' + 4y = 6x^2 + 8e^{2x}$

的待定特解的形式.

【解】设 $y''-4y'+4y=6x^2$ 的特解为 y_1^*

设 $y''-4y'+4y=8e^{2x}$ 的特解为 y_2^*

则所求特解为 $y^*=y_1^*+y_2^*$

$\because r^2-4r+4=0$ $\therefore$ 特征根 $r_{1,2}=2$

$\therefore y_1^*=Ax^2+Bx+C$ $y_2^*=Dx^2e^{2x}$ （重根）

$y^*=y_1^*+y_2^* =Ax^2+Bx+C+Dx^2e^{2x}.$

2. (填空) 设 $y'' + y = f(x)$

特征方程 $r^2 + 1 = 0 \quad r = \pm i$

1) 当 $f(x) = x\cos x$ 时可设特解为

$y^* = x[(ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x]$

2) 当 $f(x) = x\cos 3x + e^{2x}$ 时可设特解为

$y^* = (ax+b)\cos 3x + (cx+d)\sin 3x + ke^{2x}$

[提示] $f(x) = e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x\right]$

$$y^* = x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x + R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$$

$$m = \max\{n, l\}$$

【例5】求下列高阶常系数线性非齐次方程的特解形式:

$$(1)\quad y^{(4)}+2y''+y=\sin x$$

$$(2)\quad y^{(4)}+y''=\underline{x}+\underline{e^x}+\underline{3\sin x}$$

【解】(1) 特征方程 $r^4+2r^2+1=0$, 即 $(r^2+1)^2=0$,

有二重根 $r=\pm i$, 所以设非齐次方程特解为

$$y^*=x^2(a\cos x+b\sin x)$$

(2) 特征方程 $r^4+r^2=0$, 即 $r^2(r^2+1)=0$ 有根

$$r_{1,2}=\underline{0},\quad r_{3,4}=\pm i$$

利用叠加原理，可设非齐次方程特解为

$$y^*=x^2(ax+b)+ce^x+x(d\cos x+k\sin x)$$

设二阶可微函数 $f(x)$ 满足方程

$$f(x)=\mathrm{e}^x-\cos x-\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$$，求 $f(x)$.

提示： $$f(x)=\mathrm{e}^x-\cos x-\int_0^x xf(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$$

$$=\mathrm{e}^x-\cos x-x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$$

先后求导两次，有 $$f'(x)=\mathrm{e}^x+\sin x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

$$f''(x)=\mathrm{e}^x+\cos x-f(x),$$

即 $y''+y=\mathrm{e}^x+\cos x$ 且 $y(0)=0, y'(0)=1$