第四节 无穷小与无穷大

一、 无穷小

二、 无穷大

三、 无穷小与无穷大的关系

四、 无穷小运算法则

一、 无穷小

定义1 若 $x \to x_0$ 时, 函数 $f(x) \to 0$,则称函数 $f(x)$

(或 $x \to \infty$)

为 $x \to x_0$ 时的无穷小(量) .

(或 $x \to \infty$)

例如：

$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$， 函数 $x-1$ 当 $x \to 1$ 时为无穷小;

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$， 函数 $\frac{1}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时为无穷小;

$\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1}{\sqrt{1-x}}=0$， $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 当 $x \to -\infty$ 时为无穷小.

判断下列函数何时为无穷小

$$(x-1)^2 \quad (x \to 1)$$

$$e^{x} \quad (x \to -\infty)$$

$$2^{\frac{1}{x}} \quad (x \to 0^-) \quad (\frac{1}{x} \to -\infty \Rightarrow x \to 0^-)$$

$$\frac{10n}{n^2+1} \quad (n \to \infty)$$

说明:（1）无穷小不是很小的数.

（2）描述一个函数是无穷小，一定要指明自变量的变化趋势.

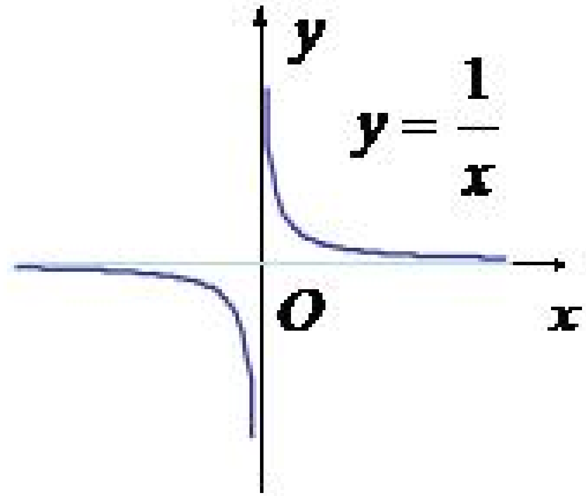
（3）0是唯一的无穷小常数.

二、无穷大

如果当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$ ）时，对应的函数值的绝对值$|f(x)|$无限增大，就称函数$f(x)$当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$ ）时为无穷大. 记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$)

例如，由于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$,



$\dfrac{1}{x}$为$x\to 0$时的无穷大.

从图形上看，当$x\to 0$时,曲线$y=\dfrac{1}{x}$无限接近于直线 $x=0$.

一般地，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, 则直线$x=x_0$为曲线$y=f(x)$的铅直渐近线.

在上例中，直线$x=0$是曲线$y=\dfrac{1}{x}$的铅直渐近线.

曲线$y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$的铅直渐近线是 $\underline{\quad x=1\quad}$.

$y=\dfrac{x}{x-1}$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}=\infty$

说明：1. 无穷大不是数, 不可与很大的数混为一谈.

2.当$x \to x_0$时，无穷大的函数 $f(x)$的极限不存在 .

3. 函数为无穷大, 必定无界. 但反之不真！

无穷大：$\forall M > 0, \exists X > 0, \forall x > X, |f(x)| > M.$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty.$

无界：$\forall M > 0, \exists x_0 \in D, |f(x_0)| > M.$

例如, 函数 $f(x) = x\cos x, x \in (-\infty, +\infty)$

取$x_0 = 2n\pi$ $f(2n\pi) = 2n\pi \to \infty$ (当 $n \to \infty$) 无界

函数$f(x)$在$x \to \infty$时，不是无穷大,

取$x_0 = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$ $f(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi) = 0$

思考: 当$x \to 0$时，$f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$无界但不是无穷大。

(1)存在一点 $x_0=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_0=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_0}\sin\frac{1}{x_0}=\lim_{n\to\infty}(2n\pi+\frac{\pi}{2})=\infty \qquad \therefore\ \boldsymbol{f(x)}\text{无界}.$$

(2)存在一点 $x_1=\dfrac{1}{2n\pi} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_1=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_1}\sin\frac{1}{x_1}=0\neq\infty$$

$\therefore\ \boldsymbol{f(x)}$**不是无穷大.**

三、无穷小与无穷大的关系

定理. 在自变量的同一变化过程中,

若 $f(x)$ 为无穷大, 则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；

若 $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x)\neq 0$, 则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

例如, 由于 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+x-1)=\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2+x-1}=0$.

说明: 据此定理 ,关于无穷大的问题都可转化为无穷小来讨论.

四、无穷小的性质

性质1(无穷小与函数极限的关系)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$$ 其中$\alpha(x)$ 为

$x \to x_0$ 时的无穷小量 .

分析:$f(x)$与A无限接近，$f(x) - A$ 记为$\alpha(x)$

则有 $f(x) = A + \alpha(x)$, 且 $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$

性质2 有限个无穷小的和是无穷小.

性质3 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

例1 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$.

解 由于 $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$ 是有界函数, 而 $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$,

由性质3知：$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$

推论1 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论2 有限个无穷小的乘积是无穷小.

练习：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}$ $\quad\lim\limits_{x\to 0} x\arctan x \quad = 0$