# 第四节 反常积分

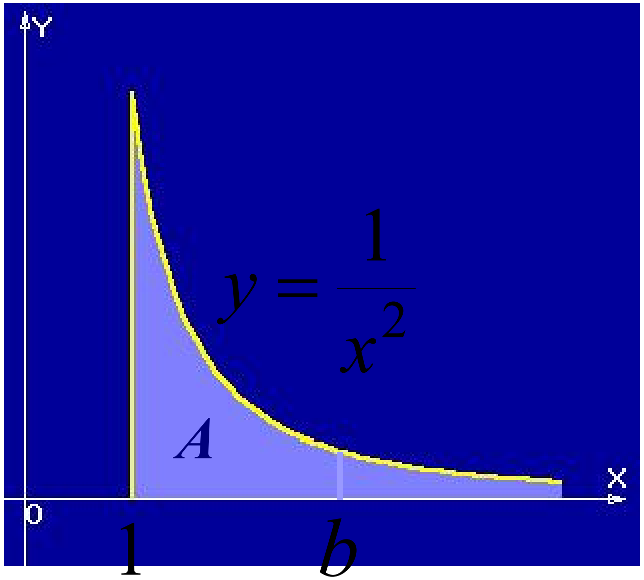
一、无穷限的反常积分

二、无界函数的反常积分

## 一、无穷限的反常积分

**引例.** 曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 和直线 $x=1$ 及 $x$ 轴所围成的开口曲边梯形的面积，可记作

$$A=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$




其含义可理解为

$$A=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right)=1.$$

## 1. 无穷限的反常积分定义

**定义** 设函数 $f(x)$在区间$[a,\ +\infty)$上连续,取$b>a$，如果极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$存在，则称此极限为函数 $f(x)$在无穷区间$[a,\ +\infty)$上的广义积分,记作$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ，

即 $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$

此时也称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 存在或收敛；如果极限不存在，就称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 不存在或发散。

类似的，可以定义$f(x)$在区间$(-\infty, b]$及$(-\infty, +\infty)$上的广义积分。

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} f(x)dx + \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} f(x)dx$$

注　广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$收敛的充分必要条件是上式右端的两个广义积分都收敛，若两个积分之一发散，则左端的广义积分发散。

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，引入记号

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x);\quad F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)$$

则有类似牛顿－莱布尼茨公式的计算表达式：

$$\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a);$$

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{b}=F(b)-F(-\infty);$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=F(+\infty)-F(-\infty).$$

例1. 计算反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=[\arctan x]\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=\pi$

例2 计算$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$ 发散

注意：对反常积分，只有在收敛的条件下才能使用“偶倍奇零”的性质.

例3 计算反常积分 $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin\frac{1}{x} dx.$

【解】 $$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin\frac{1}{x} dx = -\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \sin\frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} -\sin\frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right) = \left[\cos\frac{1}{x}\right]_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}$$

$$= 1 - \cos\frac{\pi}{2} = 1.$$

**例4** 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} te^{-pt}dt$ （$p$是常数，且$p>0$ ）

**解**

$$\int_0^{+\infty} te^{-pt}dt = -\frac{1}{p}\int_0^{+\infty} t\,de^{-pt}$$

$$= -\frac{1}{p}te^{-pt}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt$$

$$= \lim_{t\to+\infty}[-\frac{1}{p}te^{-pt}] + 0 - \frac{1}{p^2}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \lim_{t\to+\infty}[-\frac{1}{p^2}e^{-pt}] + \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2}$$

例5 证明 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}(a>0)$，当 $p>1$ 时收敛；$p\le 1$时发散.

证：当 $p=1$ 时，$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\left[\ln|x|\right]_a^{+\infty}=+\infty$

当 $p\ne 1$时，$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & p<1\\ \frac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1\end{cases}$

因此，$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\,(a>0)$ $\begin{cases}\text{当 } p>1 \text{ 时,收敛于 } \frac{a^{1-p}}{p-1}.\\ \text{当 } p\le 1 \text{ 时,发散.}\end{cases}$

【例】证明反常积分$\int_a^{+\infty} e^{-px}dx$当$p>0$时收敛，当$p<0$时发散.

【证】

$$\int_a^{+\infty} e^{-px}dx = \left[-\frac{e^{-px}}{p}\right]_a^{+\infty}$$

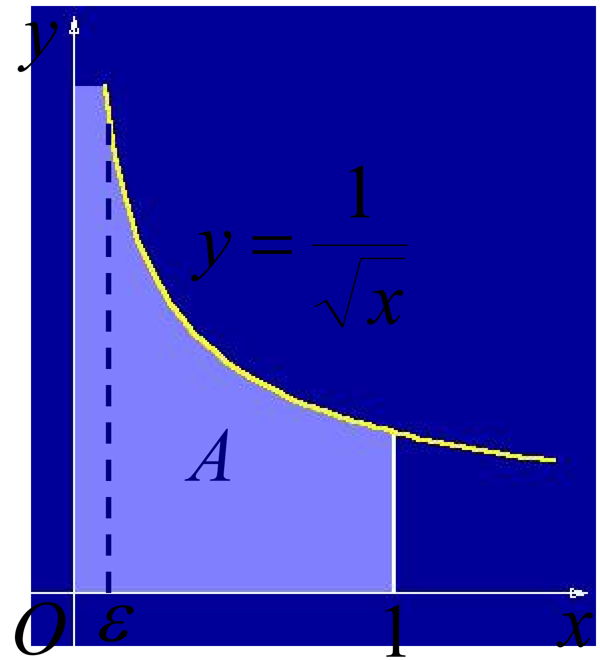
$$= \begin{cases} \dfrac{e^{-ap}}{p}, & p>0 \\ \infty, & p<0 \end{cases}$$

即当$p>0$时收敛，当$p<0$时发散.

## 二、无界函数的反常积分

**引例:** 曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 与 $x$ 轴, $y$ 轴和直线 $x=1$ 所围成的开口曲边梯形的面积可记作

$$A=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$$




其含义可理解为

$$A=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}2\sqrt{x}\,\Big|_\varepsilon^1$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}2(1-\sqrt{\varepsilon})=2$$

## 二、无界函数的反常积分

瑕点(奇点)

设函数$f(x)$ 在区间$(a, b]$上连续，而 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$，

取$\varepsilon>0$，如果极限$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$存在，则称此极限

为函数$f(x)$在区间$(a, b]$ 上的反常积分。记作$\int_a^b f(x)dx$.

即 $$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

此时也称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 存在或收敛；如果极限

不存在，就称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 不存在或发散。

类似的，可以定义$f(x)$在区间 $[a, b)$ 及$(a, b)$上的反常积分。

$$\int_{\boxed{a}}^{\boxed{b}} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

$$\int_{\boxed{a}}^{\boxed{b}} f(x)dx = \int_{\boxed{a}}^{c} f(x)dx + \int_c^{\boxed{b}} f(x)dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)dx + \lim_{\varepsilon'\to 0^+}\int_c^{b-\varepsilon'} f(x)dx$$

其中 $c \in (a, b)$.

左端收敛 $\longleftrightarrow$ 右端两个都收敛.

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除点 $c\,(a<c<b)$ 外连续，且 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$，则定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

无界函数的反常积分又称作瑕积分，无界点常称为**瑕点(奇点)**.

**说明:** 若被积函数在积分区间上仅存在有限个第一类间断点，则本质上是常义积分，而不是反常积分.

例如，$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^2-1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}(x+1)\,\mathrm{d}x$

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，

则有类似牛顿－莱布尼茨公式的计算表达式：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{a^+}^{b} = F(b) - \lim_{x\to a^+} F(x);$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{a}^{b^-} = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a);$$

若瑕点 $c \in (a, b)$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{x\to c^-} F(x) - F(a) + F(b) - \lim_{x\to c^+} F(x)$$

$$F(c^-) - F(a) + F(b) - F(c^+)$$

若$a, b$都为瑕点则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b^-) - F(a^+)$$

$$= \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(a).$$

**例6** 计算反常积分 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a > 0)$

**解:** $a$为瑕点,

所以$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{a-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \arcsin \frac{x}{a} \Big|_0^{a-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \arcsin \frac{a-\varepsilon}{a} - \arcsin \frac{0}{a}$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

发散.

**例7** 讨论反常积分 $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ 的敛散性. **(0为瑕点)**

**解** $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}$,

因 $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\left(-\frac{1}{\mathrm{x}}\bigg|_{-1}^{0-\varepsilon}\right)$

$=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)-1$

$=+\infty$ 发散.

**例8** 证明 $\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{x^q}$ 当 $q<1$ 时收敛; $q \geq 1$ 时发散.

**证:** 当 $q=1$ 时, $\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \left[\ln|x|\right]_{0^+}^{b} = +\infty$ 发散.

当 $q \neq 1$ 时,

$$\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{x^q} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[ \frac{x^{1-q}}{1-q} \right]_{0+\varepsilon}^{b}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[ \frac{b^{1-q}}{1-q} - \frac{(\varepsilon)^{1-q}}{1-q} \right] = \begin{cases} \frac{b^{1-q}}{1-q}, & q<1 \\ +\infty, & q>1 \end{cases}$$

所以当 $q<1$ 时, 积分收敛, 其值为 $\frac{b^{1-q}}{1-q}$;

当 $q \geq 1$ 时, 积分发散.

例9 证明 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}$ 当 $q<1$ 时收敛; $q\geq 1$ 时发散.

证: 当 $q=1$ 时, $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \left[\ln|x-a|\right]_{a^+}^{b} = +\infty$ 发散.

当 $q\neq 1$ 时,

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{(x-a)^{1-q}}{1-q}\right]_{a+\varepsilon}^{b}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{(b-a)^{1-q}}{1-q} - \frac{(\varepsilon)^{1-q}}{1-q}\right] = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q<1 \\ +\infty, & q>1 \end{cases}$$

所以当 $q<1$ 时, 积分收敛 , 其值为 $\frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}$;

当 $q\geq 1$ 时, 积分发散 .

## 内容小结

1. 反常积分 $\begin{cases} \text{积分区间无限} \\ \text{被积函数无界} \end{cases}$

2. 两个重要的反常积分

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \, (a > 0) \begin{cases} \dfrac{a^{1-p}}{p-1}. & p > 1 \\ +\infty, & p \le 1 \end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q} = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q < 1 \\ +\infty, & q > 1 \end{cases}$$