3.2 洛必达法则

3.2 洛必达法则

3.2.1 $\frac{0}{0}$型未定式

3.2.2 $\frac{\infty}{\infty}$型未定式

3.2.3 其他类型未定式

在计算分式函数$\dfrac{f(x)}{g(x)}$的极限时，常常会存在$f(x)$与$g(x)$同时趋向于零或同时趋向于无穷大的情形，此时$\dfrac{f(x)}{g(x)}$的极限可能存在，也可能不存在，通常把这种极限称为未定式，并分别记为$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型.

本节给出一种运用导数来求形如$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$未定式极限的方法——洛必达法则.

$0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$等形式的未定式，可先化为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型，再运用洛必达法则求极限.

3.2.1 $\frac{0}{0}$型未定式

定理1 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足

（1）$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0;$ $\frac{0}{0}$

（2）在点 x_0 的某去心邻域内，$f(x)$ 与 $g(x)$ 都可导，且 $g'(x) \neq 0;$

（3）$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或为无穷大），

那么

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.}$$

证明 因为极限 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 是否存在与 $f(x_0)$ 和 $g(x_0)$ 无关，所以可以修改或补充定义 $f(x_0) = g(x_0) = 0,$

于是由条件（1）、（2）可知，$f(x)$与$g(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内是连续的.

设 x 是该邻域内任意一点$(x \neq x_0)$，则在以 x 和x_0 为为端点的区间上，柯西中值定理的条件均满足，从而存在ξ (ξ介于 x 和 x_0之间），使得

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

令$x \to x_0$，并对上式两端取极限，又因为当$x \to x_0$时有$\xi \to x_0$，所以

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

定理1给出的这种在一定条件下通过对分子和分母分别先求导再求极限来确定未定式的值的方法称为洛必达（L’ Hospital）法则.

注:

（1）定理1中的 $x \to x_0$ 换成 $x \to x_0^+, x \to x_0^-, x \to \infty,$ $x \to +\infty, x \to -\infty$ 等，结论同样成立.

（2）如果 $\lim\limits_{x\to\square} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍属于 $\dfrac{0}{0}$ 型，且 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 仍然满足洛必达法则的条件，继续使用洛必达法则，即

$$\lim_{x\to\square} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\square} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\square} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

以此类推. 洛必达法则可多次使用，因此，步步整理、步步判别.

（3）洛必达法则是充分条件，当 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在时不能判定原极限不存在，只能说洛必达失效

（4）洛必达法则是求未定式极限的一种有效方法，可与求极限的其他方法结合使用，比如等价无穷小替换或两个重要极限等，效果会更好.

例1 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan mx}{nx}\ (n\neq 0).$ $\dfrac{0}{0}$型

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan mx}{nx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{m\sec^2 mx}{n}=\dfrac{m}{n}.$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan mx}{nx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{mx}{nx}$

例2 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}.$ $\dfrac{0}{0}$型

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}$ $\dfrac{0}{0}$型

$$=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}$$

不再满足洛必达

$$=\frac{3}{2}.$$

例3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\sin^3 x}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\left(\frac{0}{0}\right) \quad =\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

例4 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x - x\sin x\cos x}{x^4}$. $\dfrac{0}{0}$型

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x - x\sin x\cos x}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3}$

重要极限 $\dfrac{0}{0}$型

$= 1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - \cos x + x\sin x}{3x^2}$

$= \dfrac{1}{3}.$

例5 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x\sin^2 x}$. $\dfrac{0}{0}$ 型

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^3}$ $\dfrac{0}{0}$ 型

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{3x^2} \quad \frac{0}{0}\text{型} \quad =\lim_{x\to 0}\frac{-\tan^2 x}{3x^2}=-\frac{1}{3}.$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sec^2 x\tan x}{6x}$$

$$=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sec^2 x$$

$$=-\frac{1}{3}.$$

例6 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1.$

例7求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$. $\dfrac{0}{0}$型

解 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}}{\cos x}$不存在,

故不能应用洛必达法则.

此极限的正确求法为:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

3.2.2 $\frac{\infty}{\infty}$型未定式

$\frac{\infty}{\infty}$

定理2 设函数 $f(x)$与 $g(x)$满足

（1）$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$;

（2）存在 $N>0$，使得$|x|>N$时，$f(x)$与 $g(x)$都可导，且$g'(x)\neq 0$;

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在（或为无穷大），

那么

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$$

例8 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}\ (n>0)$. $\dfrac{\infty}{\infty}$型

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{nx^n}=0.$

例9 求极限 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\ln\tan\frac{\pi}{2}x}{\ln(1-x)}$. $\dfrac{\infty}{\infty}$型

解 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\ln\tan\frac{\pi}{2}x}{\ln(1-x)}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{2}x}\cdot\sec^2\frac{\pi}{2}x\cdot\frac{\pi}{2}}{-\dfrac{1}{1-x}}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\pi(x-1)}{\sin\pi x}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\pi}{\pi\cos\pi x}=-1.$

$\overset{?}{=}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\pi(x-1)}{\pi x}$

补充：求：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$.

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{e^x}=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n!}{e^x}=0.$

结论： $x\to+\infty$时，

$\ln x$， $x^n\ (n>0)$， $\mathrm{e}^{\lambda x}\ (\lambda>0)$

后者比前者趋于$+\infty$速度更快.

前者和后者比值的极限为$0(x\to+\infty)$.

练习:

1、求: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{(e^x - 1)(\sqrt[3]{1-x^2} - 1)}$. $\quad (\frac{0}{0})$

解: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{(e^x - 1)(\sqrt[3]{1-x^2} - 1)} \underline{\underline{\text{等价无穷小代换}}} \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x\cdot(-\frac{x^2}{3})}$

$\underline{\underline{\text{洛必达}}} \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{-x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{-x^2} = -1.$

2、求 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x}$. $\quad (\frac{\infty}{\infty})$

解: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\sin 3x}$

非零极限

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-3\sin 3x}{-\sin x}\cdot\frac{1}{-1} = 3$

3.2.3 其他类型未定式　（转化为 $\frac{0}{0}$ 型 或者 $\frac{\infty}{\infty}$ 型）

$$0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$$

（1） $0\cdot\infty$ 型：某一项取倒数化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型.

例10 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$. $0\cdot\infty$ 型

解 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}$　　$\frac{\infty}{\infty}$ 型

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

（2）$\infty-\infty$ 型：通分化为 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型.

例11 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$. $\infty-\infty$ 型

解 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\cdot\ln x}$ $\dfrac{0}{0}$ 型

$$=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{\ln x+1-\dfrac{1}{x}} \quad \frac{0}{0}\text{型}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

例12 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$ $\infty-\infty$型

解 $$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}\right]\quad \frac{0}{0}\text{型}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\right]\quad \frac{0}{0}\text{型}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{-x}{2x(1+x)}\right]=-\frac{1}{2}$$

3. $0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型——幂指函数类 $x = e^{\ln x}$

步骤：$\left.\begin{array}{l} 0^0 \\ 1^\infty \\ \infty^0 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} e^{0\cdot\ln 0} \\ e^{\infty\cdot\ln 1} \\ e^{0\cdot\ln\infty} \end{array}\right. \Rightarrow e^{0\cdot\infty}$

例13 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$. (0^0)

$0\cdot\infty$ 型

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)} = e^0 = 1.$$

例14 求 $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{1-x}}$　(1^{∞})

解　原式 $= \lim\limits_{x\to1} e^{\frac{1}{1-x}\ln x} = e^{\boxed{\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}}} \frac{0}{0} = e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}} = e^{-1}.$

例15 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$　∞^{0} 型

解　$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}}$

$= e^{\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}}$ $\frac{\infty}{\infty}$ 型 $= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}} = e^{0} = 1$

例16 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{x}}$. ∞^0 型

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{x}}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\boxed{\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}}}\quad \frac{\infty}{\infty}\text{型}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}=e^0=1.$$

例17　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x}$.

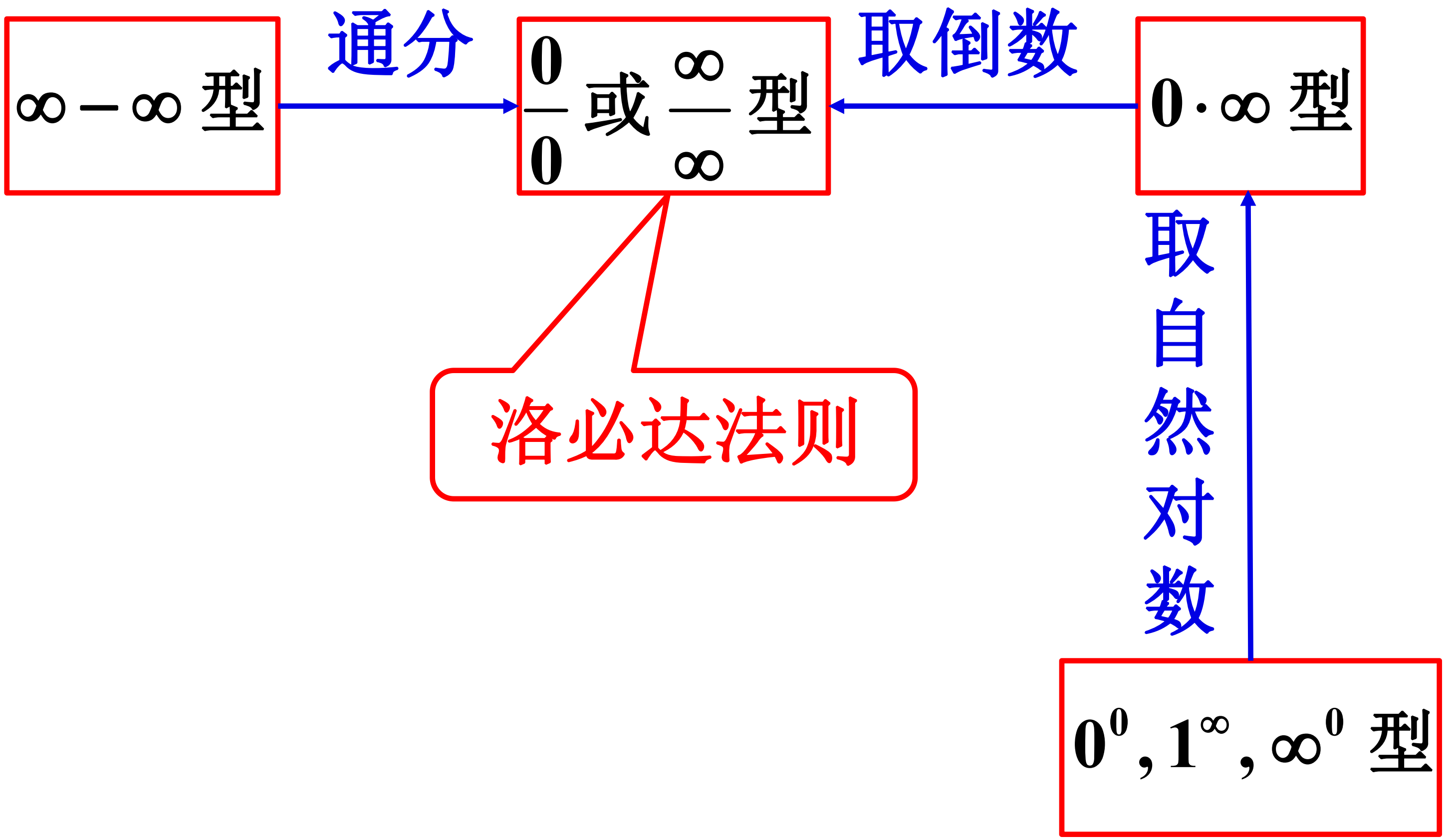
极限振荡不存在

解　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\sin x}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\sin x)$.

故洛必达法则失效. 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x}\cos x)=1$.

注意：洛必达法则的使用条件：充分条件，不必要.

内容小结



$\infty-\infty$ 型
通分
$\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型
取倒数
$0\cdot\infty$ 型
洛必达法则
取自然对数
$0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型