第九章

习题课

多元函数微分学
及其应用

一、关于多元函数极限的题类

二、关于多元函数连续、偏导数存在、可微的题类

三、关于偏导数、全微分计算的题类

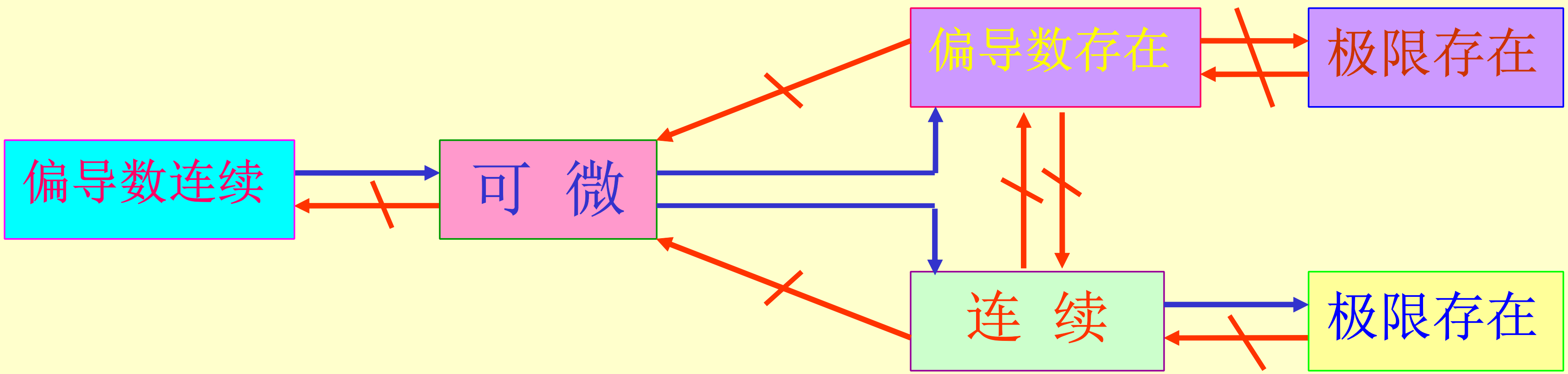
四、关于多元函数微分学应用的题类
- **1.**几何应用
- **2.**极(最)值

本章基本概念及其关系

1. 多元函数的定义、极限 、连续

- 定义域及对应规律
- 判断极限不存在及求极限的方法
- 函数的连续性及其性质

【必须熟练掌握本章以下几个概念之间的关系】



一、关于多元函数极限的题类

二元函数的极限比一元函数的极限要复杂得多，计算也更困难.通常从以下四个方面考虑：

(1)设法利用变换化为一元函数的极限再求……;无穷小性质；

(2)掌握绝对值不等式的放缩技巧，使用夹逼定理;

(3)通过观察，若大致估计所求极限不存在，可选择两条不同路径，求出不同的极限值，借以证明原式极限不存在;

(也可选取一条路径求得极限不存在,则原极限不存在)

(4)利用二元初等函数在内点处的连续性：$\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$

【例1】求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

【解】 取路径 $y=kx$，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$ 与k有关,故不存在.

【例2】求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^{1/3}y}{|x|+y^2}$

【解】取路径 $y=kx$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=kx}}\dfrac{x^{\frac{1}{3}}y}{|x|+y^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{kx^{4/3}}{|x|+k^2x^2}=0$

特别注意:尽管沿路径$y=kx$所得极限相同,但仍不能肯定原极限即为0，因若取曲线路径: $y=x^{\frac{1}{3}}$时

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=x^{1/3}}}\frac{x^{\frac{1}{3}}y}{|x|+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^{\frac{2}{3}}}{|x|+x^{\frac{2}{3}}}=1$$

故所求极限不存在.

【例3】计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

初等函数.(1,0)定义域内点.连续.　代入法

【例4】 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

换元,化为一元函数的极限

【阅读与练习】求下列极限

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} \dfrac{\sin(xy)}{x}\ (a\neq 0)$; (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+\sin xy)^{\frac{1}{xy}}$;

【提示】可以引用一元函数求极限的各种技巧

【解】 (1)原式 $=\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} \dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot y = a$

(2)原式 $=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left[(1+\sin xy)^{\frac{1}{\sin xy}}\right]^{\frac{\sin xy}{xy}} = e$

二、关于多元函数连续、偏导数存在、可微的题类

一般来说，讨论二元函数$z=f(x,y)$在某点的连续性、可偏导性以及可微性时，都要用相应的定义判定，尤其是分段函数在分界点处.

[连 续] $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

[可偏导] $f_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$ 包括高阶偏导数定义等

[可 微]

点(x_0,y_0)可微 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta z-[f_x'(x_0,y_0)\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\Delta y]}{\rho}=0$

其中$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$, $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

【例2】设$f(x,y)=(x+y)\varphi(x,y)$,其中$\varphi(x,y)$在$(0,0)$处连续,求$df(0,0)$.

【分析】因$\varphi(x,y)$在$(0,0)$处仅连续,则求$f(x,y)$在$(0,0)$处的偏导数就不能用求导的乘积法则,而只能用定义求.

【解】$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\varphi(x,0)}{x}=\varphi(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}$$

则 $$df(0,0)=\varphi(0,0)(dx+dy)$$

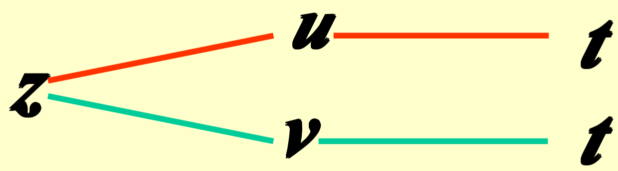
三、关于偏导数、全微分计算的题类

1. 【多元复合函数求导法则】

(1) 【可导充分条件】内层函数偏导存在，外层函数偏导连续

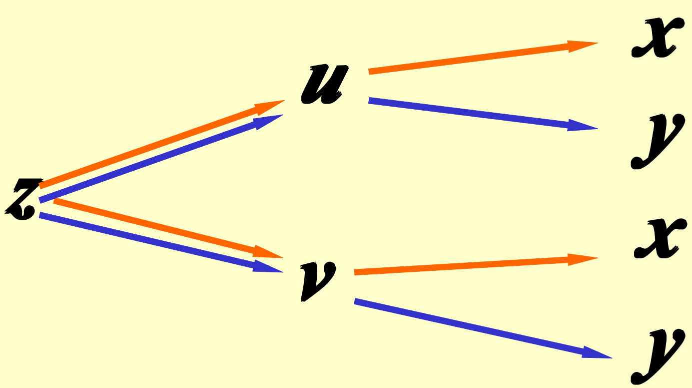
(2) 【复合函数求导链式法则】

①



$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}$$ 全导数

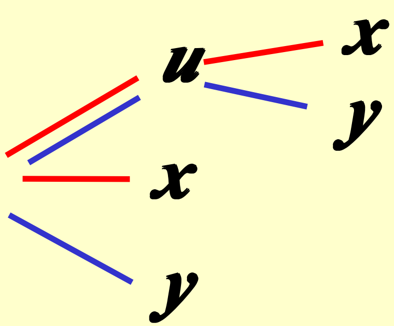
②



$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

③ $z=f(u,x,y)$



$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}$$

2.【全微分】 全微分＝各偏微分之和

形式不变性 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial u}du+\dfrac{\partial z}{\partial v}dv$ u,v是自变量或中间变量

3.【隐函数的求导法则】

(1)［公式法］ $\boxed{x、y、z\text{等各变量地位等同}}$

① $F(x,y)=0 \ \Rightarrow\ y=f(x)$ $\quad \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}$

② $F(x,y,z)=0 \ \Rightarrow\ z=z(x,y)$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}$

③ $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \Rightarrow\ u=u(x,y)\ ,\ v=v(x,y)$

公式不必记,要求掌握［直接法］

(2) 直接法——方法步骤

①搞清哪个(些)是因变量、中间变量、自变量;

②将方程(组)两边同时对某个自变量求(偏)导;

③解由②得到的方程(组), 解出要求的偏导数.

其余自变量的偏导数同理可求.

例1 已知 $w = f(x-y, y-z, t-z)$

求 $\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial t}$

解 $\dfrac{\partial w}{\partial x} = f_1'$ $\qquad \dfrac{\partial w}{\partial y} = -f_1' + f_2'$

$\dfrac{\partial w}{\partial z} = -f_2' - f_3'$ $\qquad \dfrac{\partial w}{\partial t} = f_3'$

$$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

【例2】 设 $z = x^3 f(xy, \frac{y}{x})$，($f$ 具有二阶连续偏导数)，

求 $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

【解】 $\frac{\partial z}{\partial y} = x^3(f_1' x + f_2' \frac{1}{x}) = x^4 f_1' + x^2 f_2'$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^4(f_{11}'' x + f_{12}'' \frac{1}{x}) + x^2(f_{21}'' x + f_{22}'' \frac{1}{x}) = x^5 f_{11}'' + 2x^3 f_{12}'' + x f_{22}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^4 f_1' + x^2 f_2')$$

$$= 4x^3 f_1' + x^4[f_{11}'' y + f_{12}''(-\frac{y}{x^2})] + 2x f_2' + x^2[f_{21}'' y + f_{22}''(-\frac{y}{x^2})]$$

$$= 4x^3 f_1' + 2x f_2' + x^4 y f_{11}'' - y f_{22}''.$$

【例3】 设 $x^2+z^2=yf(\frac{z}{y})$,其中f可微，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

【分析】隐函数，含抽象函数、复合函数.

【解Ⅰ】 [公式法] 令 $F(x,y,z)=x^2+z^2-yf(\frac{z}{y})$,

x, y, z. 地位等同

则 $F_z=2z-f'(\frac{z}{y})$,

$$F_y=-f(\frac{z}{y})+\frac{z}{y}f'(\frac{z}{y}),$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{yf(\frac{z}{y})-zf'(\frac{z}{y})}{2yz-yf'(\frac{z}{y})}.$$

【例3】 设 $x^2+z^2=yf(\frac{z}{y})$,其中f可微，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

【分析】隐函数，含抽象函数、复合函数.

【解 II】 [直接法] $x^2+z^2=yf(\frac{z}{y})$

z是x,y的函数

两边同时对y求导

$$2z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=f(\frac{z}{y})+yf'(\frac{z}{y})\cdot\frac{\frac{\partial z}{\partial y}\cdot y-z}{y^2},$$

解得 $$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{yf(\frac{z}{y})-zf'(\frac{z}{y})}{2yz-yf'(\frac{z}{y})}.$$

由方程组所确定的函数的导数

9-5：10(1). $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$

方程组对x求导：$\begin{cases} z_x - 2y\cdot y_x = 2x \\ 6z\cdot z_x + 4y\cdot y_x = -2x \end{cases}$

设$D = \begin{vmatrix} 1 & -2y \\ 6z & 4y \end{vmatrix} = 4y + 12yz \neq 0$情况下，

$$z_x = \frac{\begin{vmatrix} 2x & -2y \\ -2x & 4y \end{vmatrix}}{4y+12yz} = \frac{xy}{y+3yz},\quad y_x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2x \\ 6z & -2x \end{vmatrix}}{4y+12yz} = \frac{-x-6xz}{2y+6yz},$$

五、关于多元函数微分学应用的题类

1.【几何应用】

空间曲线 Γ	切向量 $\vec{T}$
$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$	$(x'(t), y'(t), z'(t))$
$y = y(x),\ z = z(x)$	$(1, y'(x), z'(x))$
$F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0$	$\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}, \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}, \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right)$

空间曲线 Γ 有切线和法平面

求曲线某点处的切线及法平面 (关键:抓住切向量)

空间曲面 Σ	法向量 $\vec{n}$
$F(x,y,z)=0$	(F_x,F_y,F_z)
$z=f(x,y)$	$(f_x,f_y,-1)$

空间曲面 Σ 有切平面和法线

求曲面某点处的切平面及法线（关键:抓住法向量）

【例1】求曲面$z=3x^2+2y^2$在点$M_0(2,-1,14)$处的切平面方程、法线方程和向上法线的方向余弦.

【解】

由$f(x,y)=3x^2+2y^2$　$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,-1)}=12$，　$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(2,-1)}=-4$，

切平面　$12(x-2)-4(y+1)-(z-14)=0$

法　线　$\dfrac{x-2}{12}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-14}{-1}$

向上法线方向与z轴正向夹角为锐角，故所求方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{-12}{\sqrt{12^2+(-4)^2+(-1)^2}}=\frac{-12}{\sqrt{161}}\quad \cos\beta=\frac{4}{\sqrt{161}}\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{161}}$$

【例2】 求$x^2+y^2+z^2=6$和平面$x+y+z=0$的交线在点$M(1,-2,1)$处的切线和法平面方程 .

【分析】 空间曲线方程为一般式，理论上化为参数式，再用隐函数求导的直接法求导.

【解】 曲线方程为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x \\ y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=0 \\ 1+\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(1,-2,1)}=\left.\dfrac{x-z}{z-y}\right|_{(1,-2,1)}=0, \\ \left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{(1,-2,1)}=\left.\dfrac{y-x}{z-y}\right|_{(1,-2,1)}=-1, \end{cases}$$

切　线：$x-1=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$ $\Longrightarrow$ $\begin{cases} x-1=1-z \\ y+2=0 \end{cases}$

法平面：$(x-1)-(z-1)=0$ $\Longrightarrow$ $x-z=0$

2.【极(最)值】 • 极值的必要条件与充分条件

• 求条件极值的方法（消元法, 拉格朗日乘数法）

【例3】求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $x + y - 2z = 2$ 之间的最短距离.

【解】 设 $P(x, y, z)$ 为抛物面 $z = x^2 + y^2$ 上任一点,则 P 到平面 $x + y - 2z - 2 = 0$ 的距离为 d,

$$d = \frac{1}{\sqrt{6}}\left|x + y - 2z - 2\right|.$$

【分析】 本题变为求一点 $P(x, y, z)$, 使得 x, y, z 满足 $x^2 + y^2 - z = 0$ 且使 $d = \frac{1}{\sqrt{6}}\left|x + y - 2z - 2\right|$

(即 $d^2 = \frac{1}{6}(x + y - 2z - 2)^2$) 最小.

用拉格朗日乘数法

$$L(x,y,z)=\frac{1}{6}(x+y-2z-2)^2+\lambda(z-x^2-y^2),$$ 得

$$\begin{cases} L'_x=\frac{1}{3}(x+y-2z-2)-2\lambda x=0, & (1)\\ L'_y=\frac{1}{3}(x+y-2z-2)-2\lambda y=0, & (2)\\ L'_z=\frac{1}{3}(x+y-2z-2)(-2)+\lambda=0, & (3)\\ z=x^2+y^2, & (4)\end{cases}$$

解此方程组得 $\boldsymbol{x=\frac{1}{4},y=\frac{1}{4},z=\frac{1}{8}}.$

即得唯一驻点 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)$,

根据题意距离的最小值一定存在，且有唯一驻点，故必在 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)$ 处取得最小值.

$$d_{\min}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left|\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2\right|=\frac{7}{4\sqrt{6}}.$$