齐鲁工业大学 17/18 学年第 2 学期《高等数学 II》期末考试试卷

（A 卷） （本试卷共 4 页）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

得分	
阅卷人	

一、选择（6 小题，共 24 分）

1、直线 $l:\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$ 与平面 $\pi:4x-2y-z-3=0$ 的位置关系是 （A）

A、l 与 π 平行　B、l 在 π 上　C、l 与 π 相交　D、l 与 π 垂直

2、函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ （A）

A、处处连续　B、处处有极限，但不连续

C、仅在(0,0)点连续　D、除(0,0)点外处处连续

3、根据二重积分的几何意义，$\iint\limits_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ （B）

（其中 D 为 $x^2+y^2\le a^2, x\ge 0, y\ge 0, a\ge 0$。提示：所求为球体在第一卦限部分体积）

A、$\dfrac{1}{2}\pi a^3$　B、$\dfrac{1}{6}\pi a^3$　C、$\dfrac{1}{15}\pi a^3$　D、$2\pi a^3$

4、设 $f(x,y)$ 是连续函数，交换二次积分 $\int_1^e dx\int_0^{\ln x}f(x,y)dy$ 积分次序的结果为（D）

A、$\int_1^e dy\int_0^{\ln x}f(x,y)dx$;　B、$\int_{e^y}^e dy\int_0^1 f(x,y)dx$;

C、$\int_0^{\ln x}dy\int_1^e f(x,y)dx$;　D、$\int_0^1 dy\int_{e^y}^e f(x,y)dx$.

5、下列级数中，绝对收敛的是 （D）

A、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{3n-1}$　B、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\ln(n+1)}$

C、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$　D、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2}$

6、微分方程 $y''-2yy'^3=0$ 满足条件 $y'(0)=-1, y(0)=1$ 的解是 （ ）

A、$\dfrac{y^3}{3}=x+\dfrac{1}{3}$　B、$\dfrac{x^3}{3}=y-1$　C、$\dfrac{y^3}{3}=-x+\dfrac{1}{3}$　D、$\dfrac{x^3}{3}=-y+1$

得分	
阅卷人	

二、填空（6 小题，共 24 分） $\vec{a}=\{-4x,-7x,4x\}$　$16x^2+49x^2+16x^2=81x^2=27^2$　$x=3$

1、已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}=\{4,7,-4\}$ 方向相反，且 $|\vec{a}|=27$，则 $\vec{a}=$ $\{-12,-21,12\}$

2、一椭球面的对称轴与坐标轴重合，三个半轴长分别为 2、3、4，则此椭球面的方程为

$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=1$

3、设 $u=\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{y}{x}$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=$ $\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{y}{x^2}$

$\begin{cases}2x+4y+6=0\\4x-2y-8=0\end{cases}$

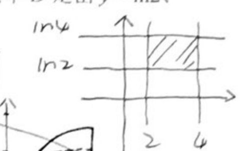
4、函数 $z=x^2+4xy-y^2+6x-8y+12$ 的驻点是 $(1,-2)$

5、收敛级数 $1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{32}+\cdots$ 的和是 $\dfrac{10}{7}$

6、微分方程 $y''+y=x\sin x$ 的一个特解应具有的形式是________

得分	
阅卷人	

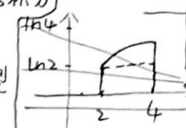
三、（本题 10 分）计算二重积分 $\iint\limits_D ye^{xy}dxdy$，其中 D 是由 $y=\ln 2$、$y=\ln 3$、$x=2$、$x=4$ 所围成的区域。



$\iint ye^{xy}d\sigma=\int_2^4dx\int_{\ln 2}^{\ln 4}y\cdot e^{xy}dy \Rightarrow$ 不好积分

$\int_2^4 dx\int_0^{\ln x}y\cdot e^{xy}dy$

$=\int_{\ln 2}^{\ln 4}dy\int_2^4 ye^{xy}dx \Rightarrow$ Y型



$=\int_2^4 dx\int_0^{\ln x}\frac{y}{x}d[e^{xy}]$

$=\int_{\ln 2}^{\ln 4}[e^{xy}|_2^4]dx$

$=\int_2^4 dx=\int_2^4[\frac{y}{x}e^{xy}|_0^{\ln x}-\int_0^{\ln x}e^{xy}\frac{1}{x}dy]dx$

$=\int_2^4\frac{\ln x}{x}e^{x\ln x}-\frac{e^{xy}}{x^2}|_0^{\ln x}$

$=\int_2^4[\frac{\ln x}{x}e^{x\ln x}-\int_0^{\ln x}\frac{e^{xy}}{x}dy]dx$

得分	
阅卷人	

四、（本题 10 分）求微分方程 $4y''+4y'+y=0$ 的通解。

$4r^2+4r+1=0 \Rightarrow (2r+1)=0 \Rightarrow r_1=r_2=-\frac{1}{2}$

通解 $y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{1}{2}x}$

得分	
阅卷人	

五、（本题 10 分）求函数 $f(x)=\dfrac{1}{2+2x+x^2}$ 在点 $x_0=-1$ 的泰勒级数展开式。

$$f(x)=\frac{1}{x^2+2x+2}=\frac{1}{(x+1)^2+1}=\frac{1}{1-[-(x+1)^2]}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}[-(x+1)^2]^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(x+1)^{2n} \qquad |x+1|^2<1$$

$$(-2<x<0)$$

得分	
阅卷人	

六、（本题 10 分）已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$，试求级数 $1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{8}+\cdots$ 的和（提示：$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$）。

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}=\frac{1}{10}-\frac{1}{12}$$

$$\therefore 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\frac{\ln 2}{2}.$$

得分	
阅卷人	

七（本题 12 分）函数设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

1 求 $f_x'(0,0)$、$f_y'(0,0)$；2 证明 $f(x,y)$ 在点(0，0)处连续且可微。

1. $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x^2}-0}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\frac{1}{x^2}=0$

由于对称性 $f_y(0,0)=f_x(0,0)=0$

2. 连续 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$

其中 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(x^2+y^2)=0$，$|\sin\frac{1}{x^2+y^2}|<1$

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)=0=f(0,0)$

则连续.

可微：$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$

则 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\\Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta z-f_x\cdot\Delta x-f_y\cdot\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$

$=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\\Delta y\to 0}}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-0-0}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

$=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\\Delta y\to 0}}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\cdot\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}=0$

$\therefore \Delta z=f_x\Delta x+f_y\Delta y+o(\rho)$

$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

$\therefore$ 可微.

得分	
阅卷人	

八（满分 15 分，试卷总分只计 100 分）

已知 $\sin^2 x,\cos^2 x$ 是方程(1)：$y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的解，

证明：（说明：n 阶微分方程的基本解组是指微分方程的 n 个线性无关的特解）

1. $\sin^2 x$、$\cos^2 x$ 构成微分方程（1）的基本解组；
2. 证明 1、$\cos 2x$ 也是微分方程（1）的基本解组；
3. 求 $p(x),q(x)$。

1. 方程为二阶齐次线性微分方程

则且 $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\neq k$（常数）

$\therefore \sin^2x$ 与 $\cos^2x$ 为两个线性无关特解

$\therefore$ 是基本解组.

2. $\sin^2x$、$\cos^2x$ 是方程解

则 $\sin^2x+\cos^2x=1$，$\cos^2x-\sin^2x=\cos 2x$

也是方程两个无关解

$\therefore$ 是基本解组.

3. 将 $\sin^2x$ 与 $\cos^2x$ 代回方程

$(\sin^2x)'=2\sin x\cos x=\sin 2x$

$(\sin^2x)''=(\sin 2x)'=2\cos 2x$

$(\cos^2x)'=-\sin 2x \qquad (\cos^2x)''=-2\cos 2x$

$\therefore\begin{cases}2\cos 2x+p(x)\cdot\sin 2x+q(x)\cdot\sin^2x=0 & ①\\ -2\cos 2x+p(x)\cdot(-\sin 2x)+q(x)\cos^2x=0 & ②\end{cases}$

$\therefore$ ①+② $q(x)\cdot 1=0$ 即 $q(x)=0$

$\therefore p(x)=\dfrac{-2\cos 2x}{\sin 2x}=-2\cot 2x$.