第三节 高阶导数

一、高阶导数的概念

二、高阶导数的运算法则

一、高阶导数的概念

定义1 若函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在点 x 可导，则称 $f'(x)$ 在点 x 的导数为函数 $y=f(x)$ 在点 x 的二阶导数，记作

$$f''(x),\ y'',\ \frac{d^2 f(x)}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right),\ \frac{d^2 y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

即

$$f''(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}.$$

这时也称 $y=f(x)$ 在点 x 二阶可导.

如果函数 $y=f(x)$的二阶导数$f''(x)$ 仍可导，那么可定义三阶导数：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f''(x+\Delta x)-f''(x)}{\Delta x},$$

记作

$$f'''(x),\ y''',\ \frac{d^3 f(x)}{dx^3},\ \frac{d^3 y}{dx^3}.$$

如果函数 $y=f(x)$的 $n-1$阶导数仍可导，那么可定义

n 阶导数：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x)-f^{(n-1)}(x)}{\Delta x},$$

记作

$$f^{(n)}(x),\ y^{(n)},\ \frac{d^n f(x)}{dx^n},\ \frac{d^n y}{dx^n}.$$

习惯上，称 $f'(x)$ 为 $f(x)$的一阶导数，二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数．有时也把函数 $f(x)$ 本身称为 $f(x)$的零阶导数，即 $f^{(0)}(x)=f(x)$.

高阶导数求法:

1. 直接法: 由高阶导数的定义逐步求高阶导数.

例1 设 $y = x^n$, 求$y^{(n)}$.

解 $y' = nx^{n-1}$, $y'' = n(n-1)x^{n-2}$,

$$y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3},$$

$$y^{(4)} = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}, \quad \cdots$$

$$y^{(n)} = n!.$$

$$\left(x^n\right)^{(n)} = n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\cdots 2\cdot 1 = n!. \qquad \left(x^n\right)^{(n+1)} = 0.$$

例2 设 $y=2x^3-5x^2+3x-7$, 求 $y^{(4)}$.

解 $y'=6x^2-10x+3,\quad y''=12x-10,\quad y'''=12,\quad y^{(4)}=0.$

例3 设 $y=a^x\left(a>0,a\neq1\right)$,求 $y^{(n)}$.

解 $y'=a^x\ln a,\qquad y''=a^x\ln^2 a,$

$y'''=a^x\ln^3 a,\qquad y^{(4)}=a^x\ln^4 a,\quad\cdots,$

由归纳法可得 $\left(a^x\right)^{(n)}=a^x\ln^n a.$

例4. 设 $y=\mathrm{e}^x$, 求 $y^{(n)}$.

解 $y'=\mathrm{e}^x,\quad y''=\mathrm{e}^x,\quad y'''=\mathrm{e}^x,\cdots,\quad y^{(n)}=\mathrm{e}^x.$

例5 设 $y = x^4 + 3x^2 - 4 + e^{5x}$,求 $y^{(n)}\left(n > 4\right)$.

解 $y^{(n)} = \left(x^4 + 3x^2 - 4 + e^{5x}\right)^{(n)}$

$$= \left(x^4 + 3x^2 - 4\right)^{(n)} + \left(e^{5x}\right)^{(n)}$$

$$= 5^n e^{5x}.$$

二、高阶导数的运算法则

设函数 $u=u(x)$及 $v=v(x)$都有 n 阶导数，则

1. $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$;

2. $(Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}$ (C为常数);

3. $(uv)^{(n)}=?$

$$(uv)^{(n)} = C_n^0 u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + C_n^2 u^{(n-2)} v'' + \cdots + C_n^n u v^{(n)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^k$$ ——莱布尼茨(Leibniz) 公式

定理 如果函数 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$ 都在点 x 处具有 n 阶导数，那么

(1) $\left(u\pm v\right)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$.

(2) $\left(u\cdot v\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}\cdot v^{(k)}$,

其中 $C_n^k=\dfrac{n\left(n-1\right)\cdots\left(n-k+1\right)}{k!}=\dfrac{n!}{k!\cdot\left(n-k\right)!}$.

特别地，$\left(Cu\right)^{(n)}=Cu^{(n)}$ （C为常数）.

例6 设 $y = e^{2x}x^2$, 求 $y^{(4)}$.

解 设 $u = e^{2x}, v = x^2$，则

$$u' = 2e^{2x}, u'' = 2^2 e^{2x}, u''' = 2^3 e^{2x}, u^{(4)} = 2^4 e^{2x},$$

$$v' = 2x, v'' = 2, v''' = v^{(4)} = 0,$$

由莱布尼兹公式，可得

$$y^{(4)} = C_4^0 u^{(4)} v + C_4^1 u''' v' + C_4^2 u'' v'' + \cdots + C_4^4 u v^{(4)}$$

$$= 2^4 e^{2x} \cdot x^2 + 4 \cdot 2^3 e^{2x} \cdot 2x + \frac{4 \cdot 3}{2!} \cdot 2^2 e^{2x} \cdot 2$$

$$= 2^4 e^{2x} \left(x^2 + 4x + 3 \right).$$

内容小结

1、高阶导数的求法

(1) 逐阶求导法 (2) 利用归纳法 (3) 利用莱布尼茨公式

2、高阶导数的运算法则

如果函数 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$ 都在点 x 处具有 n 阶导数，那么

$$(1)\ (u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}.$$

$$(2)\ (u\cdot v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}\cdot v^{(k)},$$

其中 $C_n^k=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}=\dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$