例10 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0 \\ x^2+ax+b, & x>0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处可导，求 a,b.

解 由于 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处必连续， 即

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0).=1,$$

因为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^x=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2+ax+b)=b,$$

所以 $b=1.$

$$f(x)=\begin{cases} e^{x}, & x\le 0 \\ x^{2}+ax+b, & x>0 \end{cases} \qquad b=1.$$

又因为$f(x)$在点$x=0$处可导，

$$f_{-}'(0)=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{e^{x}-1}{x}=1,$$

$$f_{+}'(0)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{x^{2}+ax+1-1}{x}=a.$$

则应有 $f_{-}'(0)=f_{+}'(0)$, 即 $a=1.$

所以，$f(x)$在点$x=0$处可导，则有$a=1, b=1.$

例 设 $f(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ \ln(1+x), & x\ge 0 \end{cases}$, 求$f'(x)$.

解 当$x<0$时, $f'(x)=1$,

当$x>0$时, $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$

当$x=0$时, $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1$,

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-0}{x}=1,$$

$\therefore f'(0)=1.$ $\quad \therefore f'(x)=\begin{cases} 1, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{1+x}, & x>0 \end{cases}$.

第二节 函数的求导法则

一、四则运算求导法则

二、反函数的求导法则

三、复合函数求导法则

一、导数的四则运算法则

定理1 若函数 $u(x)$和 $v(x)$在点 x 处均可导，则其和、差、积、商（分母不为零）都在点 x 处可导，

$$(1)\ [u(x)\pm v(x)]' = u'(x)\pm v'(x).$$

$$(2)\ [u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x).$$

特别地，$[C\cdot u(x)]' = C\cdot u'(x)$（$C$ 为常数）.

$$(3)\ \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}\ \ (v(x)\neq 0).$$

特别地，$\left[\dfrac{1}{v(x)}\right]' = -\dfrac{v'(x)}{v^2(x)}\ \ (v(x)\neq 0).$

注：

（1）法则（1）可以推广到有限个可导函数的和与差的求导．如

$$\left[u(x)\pm v(x)\pm w(x)\right]' = u'(x)\pm v'(x)\pm w'(x).$$

（2）法则（2）可以推广到有限个可导函数的积的求导．如

$$\left(u\cdot v\cdot w\right)' = u'\cdot v\cdot w + u\cdot v'\cdot w + u\cdot v\cdot w'.$$

例1 设$f(x)=x^2+e^x-3$，求$f'(x)$.

解 $$f'(x)=\left(x^2+e^x-3\right)'$$
$$=\left(x^2\right)'+\left(e^x\right)'-(3)'$$
$$=2x+e^x.$$

例2 设$f(x)=x^5+x^2-\dfrac{1}{x}$，求$f'(x)$.

解 $$f'(x)=\left(x^5+x^2-\frac{1}{x}\right)'$$
$$=\left(x^5\right)'+\left(x^2\right)'-\left(\frac{1}{x}\right)'$$
$$=5x^4+2x+\frac{1}{x^2}.$$

例3 $y = e^x(\sin x + \cos x)$, 求 y'.

解 $y' = (e^x)'(\sin x + \cos x) + e^x(\sin x + \cos x)'$

$= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x)$

$= 2e^x\cos x.$

例4 设 $f(x) = xe^x \ln x$, 求 $f'(x)$.

解 $f'(x) = \left(xe^x \ln x\right)'$

$= (x)' e^x \ln x + x\left(e^x\right)' \ln x + xe^x (\ln x)'$

$= e^x \ln x + xe^x \ln x + xe^x \dfrac{1}{x}$

$= e^x\left(1 + \ln x + x\ln x\right).$

例5 $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}$，求 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$. 先化简

解 $f(x)=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}=\cos x+\sin x$

$f'(x)=-\sin x+\cos x,$

$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1.$

例6 设 $f(x)=\tan x$，求 $f'(x)$.

解 $f'(x)=(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

即得正切函数的导数公式：

$$\boxed{(\tan x)'=\sec^2 x.}$$

类似可得余切函数的导数公式：

$$\boxed{(\cot x)'=-\csc^2 x.}$$

例7 设 $f(x)=\sec x$，求 $f'(x)$.

解 $f'(x)=(\sec x)'=\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'=-\dfrac{(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$$=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x.$$

即得正割函数的导数公式:

$$\boxed{(\sec x)'=\sec x\tan x.}$$

类似可得余割函数的导数公式:

$$\boxed{(\csc x)'=-\csc x\cot x.}$$

二、 反函数的求导法则

定理2 如果函数 $x = f(y)$ 在区间 I_y 内单调、可导且 $f'(y) \neq 0$， 那么它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 在区间 $I_x = \{x \mid x = f(y), y \in I_y\}$ 内也可导，且

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{f'(y)}.}$$

即反函数的导数等于原函数的导数的倒数.

思考

$f(x)=2x+\cos x$,其反函数$x=\varphi(y)$,求$\varphi'(1)$.

$$解:\frac{dx}{dy}=\varphi'(y)=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{2\text{-}\sin x}$$

$$\therefore \varphi'(1)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{2}$$

例8. 求函数 $y=\arcsin x$ 的导数.

解 $y=\arcsin x$, 则 $x=\sin y$, $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,

$\cos y>0$, 则 $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{(\sin y)'}=\dfrac{1}{\cos y}$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\boxed{(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad(-1<x<1).}$$

$$\boxed{(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad(-1<x<1).}$$

例9 求反正切函数 $y=\arctan x$ 的导数。

解 $y=\arctan x$ 是 $x=\tan y$ 的反函数，

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

$$\boxed{(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in (-\infty, +\infty)).}$$

$$\boxed{(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \quad (x \in (-\infty, +\infty)).}$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x \qquad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (arc\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

基本求导公式

$$C' = 0$$

$$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} (a > 0, a \neq 1)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

三、复合函数的求导法则

定理3 设函数 $u=g(x)$ 在点 x 处可导， 函数$y=f(u)$ 在点 $u=g(x)$ 处可导， 则复合函数 $y=f(g(x))$在点 x 处可导， 且其导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(u)\cdot g'(x)$$

—————链式求导法则

关键：搞清复合函数结构, 由外向内逐层求导.

设可导函数$y=f(u), u=g(v), v=\varphi(x)$构成复合函数，则 $y=f\left[g\left(\varphi\left(x\right)\right)\right]$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}=f'(u)\cdot g'(v)\cdot\varphi'(x).$$

例10 设 $y=\sin x^2$，求$\dfrac{dy}{dx}$.

解 因为 $y=\sin x^2$ 由 $y=\sin u, u=x^2$ 复合而成，所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=(\sin u)'\cdot\left(x^2\right)'=\cos u\cdot 2x=2x\cos x^2.$$

例11 求函数 $y=e^{x^5}$ 的导数.

解 $y=e^{x^5}$ 可以看作由$y=e^u$, $u=x^5$ 复合而成,

$$\therefore \frac{dy}{dx}=e^u\cdot 5x^4=e^{x^5}\cdot 5x^4$$

例12 设 $y=\ln\cos\left(e^{x}\right)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解 因为$y=\ln\cos\left(e^{x}\right)$ 由 $y=\ln u, u=\cos v, v=e^{x}$ 复合而成，所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}=(\ln u)'\cdot(\cos v)'\cdot\left(e^{x}\right)'$$

$$=\frac{1}{u}\cdot(-\sin v)\cdot e^{x}=-e^{x}\tan\left(e^{x}\right).$$

例13 设 $y=\ln\sin x$，求 y'.

解 $y'=\dfrac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'=\dfrac{1}{\sin x}\cdot\cos x=\cot x.$

例14 设 $y=\left(x^2-4x+3\right)^5$，求 y'.

解 $y'=5\left(x^2-4x+3\right)^4\cdot\left(x^2-4x+3\right)'$

$=10\left(x-2\right)\left(x^2-4x+3\right)^4$.

例15 $y=\sqrt[3]{1-2x^2}$, 求 y'.

解 $y'=\left((1-2x^2)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}(1-2x^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot(1-2x^2)'$

$=\frac{-4x}{3\sqrt[3]{(1-2x^2)^2}}$.

例16 $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$, 求 y'.

解 $y'=\left(e^{\sin\frac{1}{x}}\right)'=e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\left(\sin\frac{1}{x}\right)'=e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'$

$$=-\frac{1}{x^2}e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}.$$

例17. 设 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, 求 y'.

解 $y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot(x^2+1)'\right)$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

例18 设 $y=\ln|x|$, 求 y'.

解 因为

$$y=\ln|x|=\begin{cases}\ln x, & x>0\\ \ln(-x), & x<0\end{cases}$$

所以，当 $x>0$时，

$$(\ln|x|)'=(\ln x)'=\frac{1}{x};$$

当$x<0$时，

$$(\ln|x|)'=(\ln(-x))'=\frac{1}{-x}(-x)'=\frac{1}{x}.$$

综上可得 $$y'=(\ln|x|)'=\frac{1}{x}.$$

例19. $y = x\arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{4-x^2}$， 求$y'$.

解 $y' = \left(x\arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{4-x^2}\right)'$

$$= \left(x\arcsin\frac{x}{2}\right)' + \left(\sqrt{4-x^2}\right)'$$

$$= \arcsin\frac{x}{2} + x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\left(4-x^2\right)'$$

$$= \arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2}.$$

例20. $y=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$， 求$y'$.

$\boxed{\text{先化简后求导}}$

解$\because$ $y=\dfrac{2x-2\sqrt{x^2-1}}{2}=x-\sqrt{x^2-1}$

$$y'=\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)'=1-\left(\sqrt{x^2-1}\right)'$$

$$=1-\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left(x^2-1\right)'=1-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

内容小结:

1. 基本初等函数的导数公式

(1) $(C)'=0$（C 为常数）

(2) $\left(x^{\mu}\right)'=\mu x^{\mu-1}$

(3) $\left(a^{x}\right)'=a^{x}\ln a$

(4) $\left(e^{x}\right)'=e^{x}$

(5) $\left(\log_{a}x\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

(6) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

(7) $(\sin x)'=\cos x$

(8) $(\cos x)'=-\sin x$

(9) $(\tan x)'=\sec^{2}x$

(10) $(\cot x)'=-\csc^{2}x$

(11) $(\sec x)'=\sec x\tan x$

(12) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$

(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

(14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^{2}}$

(16) $(\operatorname{arc}\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^{2}}$

2. 导数的四则运算法则

设函数 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$都可导，则

(1) $\left(u\pm v\right)'=u'\pm v'$;

(2) $\left(u\cdot v\right)'=u'\cdot v+u\cdot v'$;

(3) $\left(C\cdot u\right)'=C\cdot u'$（$C$ 为常数）;

(4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}\ (v\neq 0)$; (5) $\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^2}\ \left(v\neq 0\right)$.

注意:1) $(uv)'\neq u'v'$, $\left(\dfrac{u}{v}\right)'\neq\dfrac{u'}{v'}$

2) 搞清复合函数结构，由外向内逐层求导.