定积分在几何学上的应用

一、定积分的元素法

二、平面图形的面积

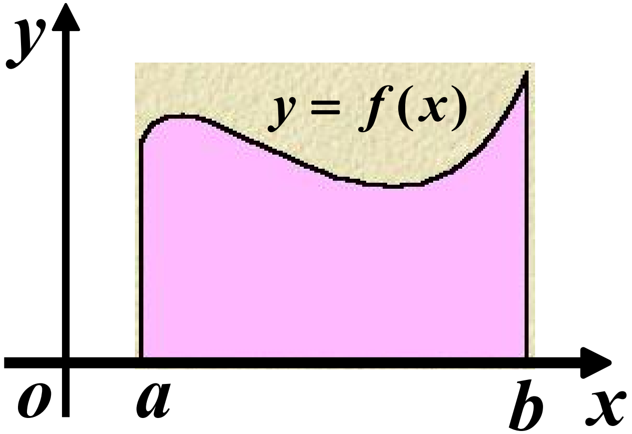
三、体积

四、平面曲线的弧长

一、定积分的元素法

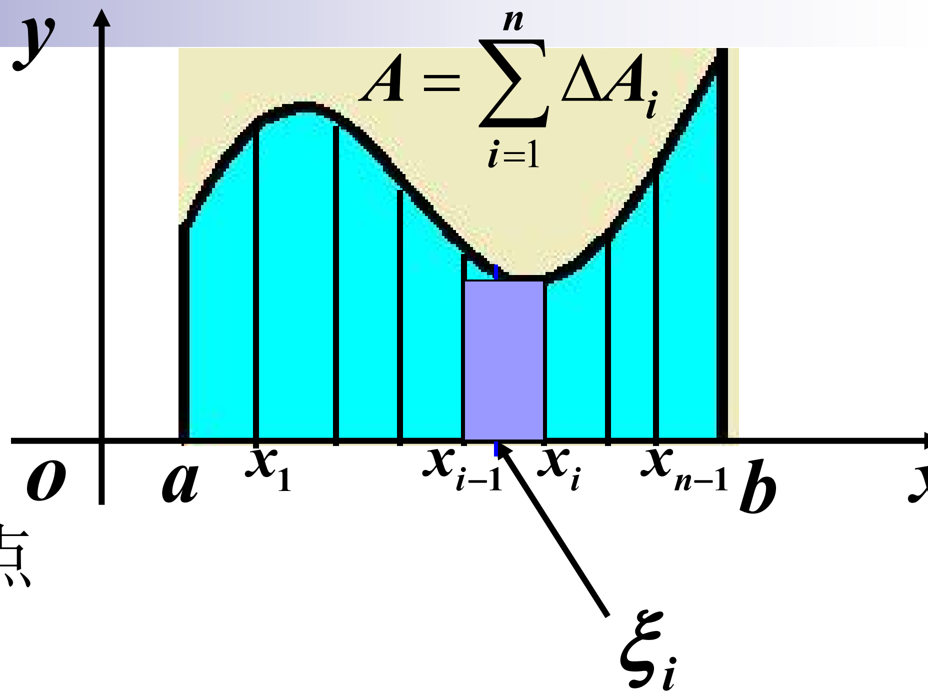
求曲边梯形面积.

曲边梯形由连续曲线 $y = f(x)(f(x) \geq 0)$、x轴与两条直线$x = a$、$x = b$所围成。



曲边梯形的面积：$A = \int_a^b f(x)dx$

求曲边梯形面积的步骤：



1. 分割：$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

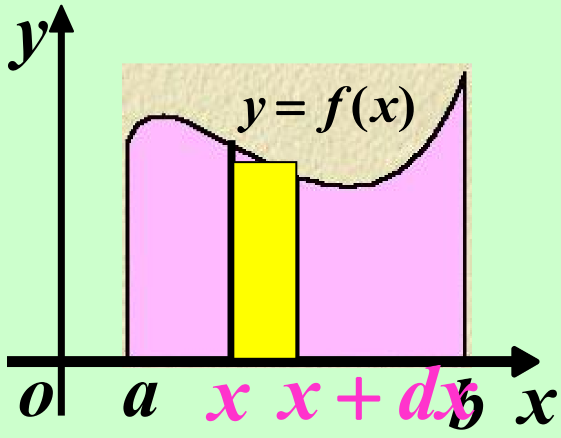
2. 近似：$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$

ξ_i为$[x_{i-1}, x_i]$上任一点

3. 求和：$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

4. 取极限： $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots \Delta x_n\}$,

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$



求面积A的方法：

(1)选取x为积分变量，

$a \le x \le b.$

(2)在典型区间$[x, x+dx]$上作近似 $\Delta A \approx f(x)dx$

即 $dA = f(x)dx$ ——积分元素

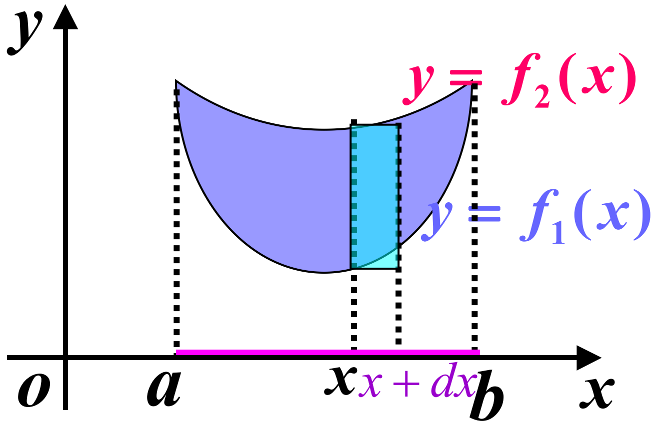
(3)对面积元素从a到b积分 $A = \int_a^b f(x)dx$

——定积分的元素法.

二、平面图形的面积

1.直角坐标系情形

(1) 选 x，区间为$[a, b]$



面积元素:

$$dA = [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

所求的图形的面积为

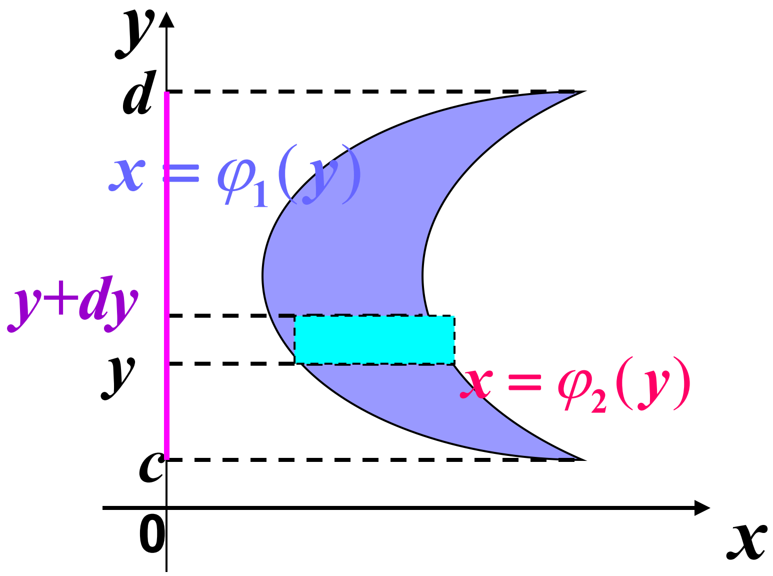
$$\boxed{A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx\ .}$$

(2) 选y，区间为[c，d]

面积元素：

$$dA = [\varphi_2(y) - \varphi_1(y)]dy$$

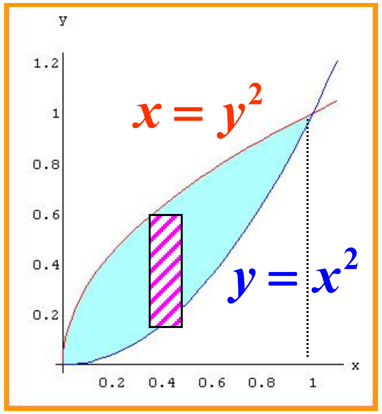
所求的曲边梯形的面积为



$$A = \int_c^d [\varphi_2(y) - \varphi_1(y)]dy$$

例1. 计算两条抛物线 $y^2 = x, y = x^2$ 所围图形的面积.

解 画草图如右



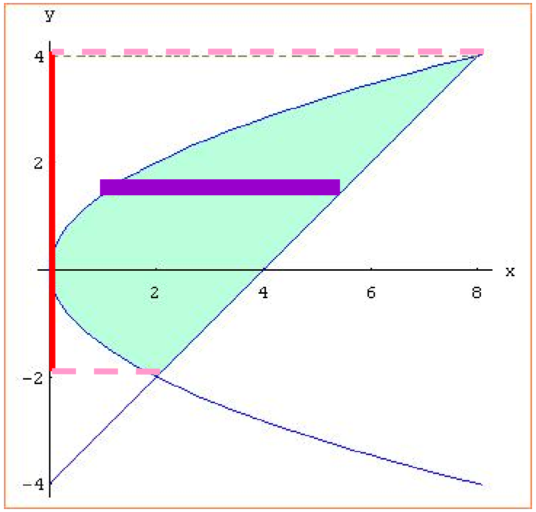
两曲线的交点 $(0,0)$ $(1,1)$

选 x 为积分变量 $x \in [0,1]$

面积元素 $dA = (\sqrt{x} - x^2)dx$

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

例2. 计算抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围图形的面积 .



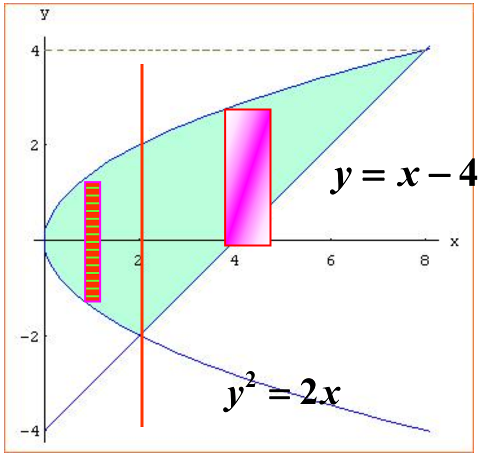
解: 由 $\begin{cases} y^2=2x \\ y=x-4 \end{cases}$ 交点 $(2,-2)$, $(8,4)$

选取 y 作积分变量, $y\in[-2,4]$,则有

$$\mathrm{d}A=\left(y+4-\frac{1}{2}y^2\right)\mathrm{d}y$$

$$A=\int_{-2}^{4}\left(y+4-\frac{1}{2}y^2\right)\mathrm{d}y=\left(\frac{y^2}{2}+4y-\frac{y^3}{6}\right)\Bigg|_{-2}^{4}=18$$

【说明】本题若选x为积分变量，则如下



$$x\in[0,2]\quad dA_1=[\sqrt{2x}-(-\sqrt{2x})]dx$$

$$x\in[2,8]\quad dA_2=(\sqrt{2x}-x+4)dx$$

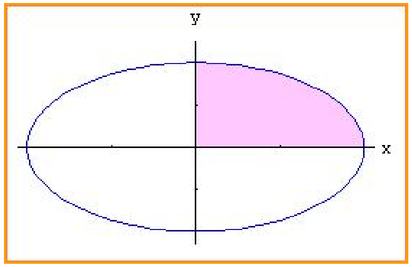
故

$$A=\int_0^2 2\sqrt{2x}dx+\int_2^8(\sqrt{2x}-x+4)dx$$

$$=\cdots=18.$$

积分变量选取适当，则可使计算简便.

例3 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的面积 .



解 椭圆的参数方程 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$

由对称性知总面积等于4倍第一象限部分面积.

$$A = 4\int_0^a y\,dx = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin t\,d(a\cos t)$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}dt$$

降幂

$$= 4ab\cdot\frac{\pi}{4} = \pi ab.$$

例4 求由 $x=0, x=\pi, y=\sin x, y=\cos x,$ 所围平面图形的面积．

解 两曲线的交点 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

选 x 为积分变量 $x \in [0, \pi]$

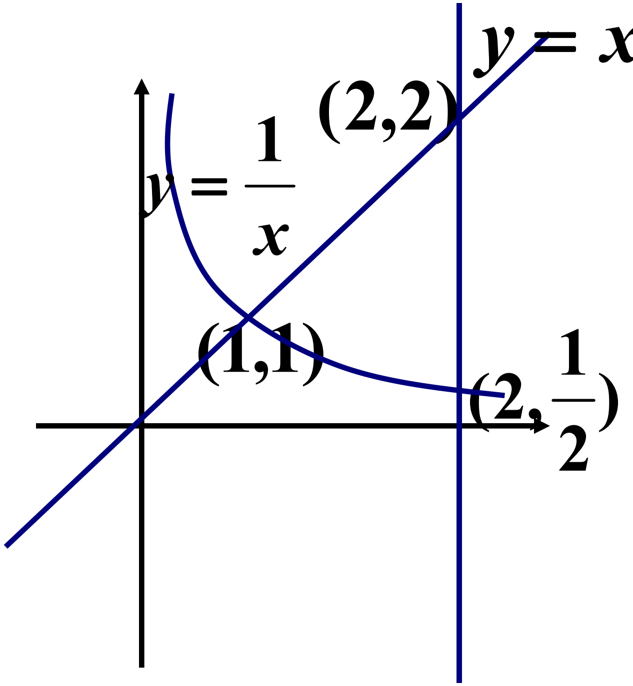
$$A=\int_0^{\pi}|\sin x-\cos x|dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx$$

$$=\left[\sin x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[-\cos x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}=2\sqrt{2}.$$

练习1. $y=\frac{1}{x}, y=x, x=2$ 围成的面积.

解　画草图如右



三条曲线的交点 $(1,1),\left(2,\frac{1}{2}\right),(2,2)$

选 x 为积分变量 $x\in[1,2]$

面积元素 $dA=(x-\frac{1}{x})dx$

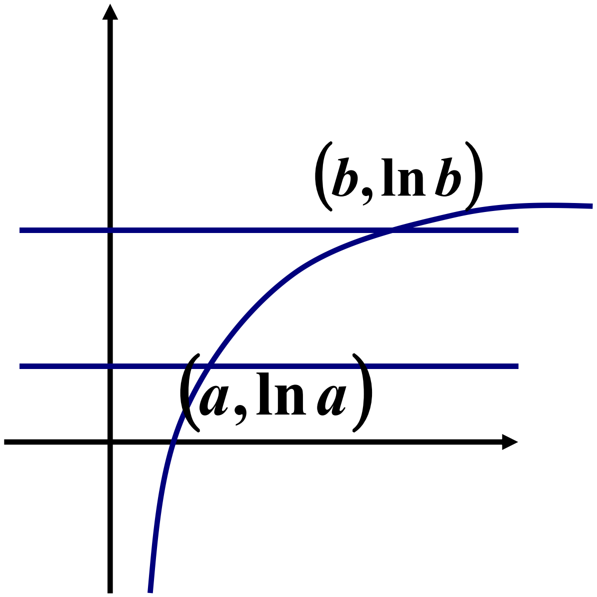
$$A=\int_1^2\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\ln x\right]_1^2=\frac{3}{2}-\ln 2.$$

练习2. $y=e^x, y=e^{-x}, x=1$ 围成的面积.

练习3. $y=\ln x, x=0, y=\ln a, y=\ln b$ 围成的面积 .

解　画草图如右

三条曲线的交点$(a, \ln a), (b, \ln b)$



选 y 为积分变量 $y \in [\ln a, \ln b]$

面积元素 $dA = e^y dy$

$$A = \int_{\ln a}^{\ln b} \varphi(y) dy = \int_{\ln a}^{\ln b} \left(e^y\right) dy = \left[e^y\right]_{\ln a}^{\ln b} = b - a.$$

2. 极坐标情形

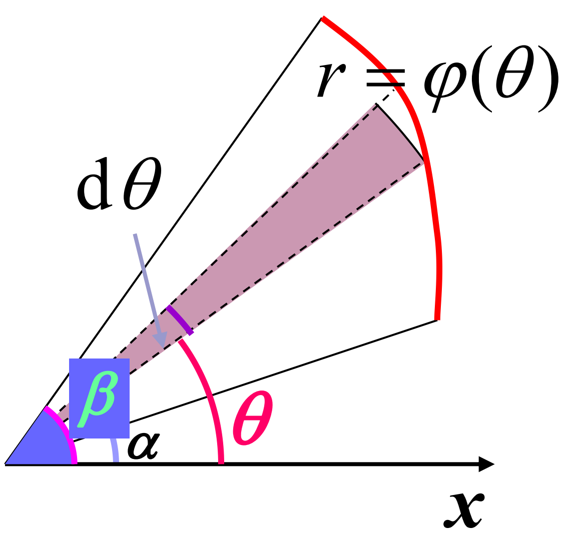
设$\varphi(\theta) \in C[\alpha, \beta]$, $\varphi(\theta) \geq 0$, 求由曲线 $r = \varphi(\theta)$ 及射线 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ 围成的曲边扇形的面积.

在区间$[\alpha, \beta]$上任取小区间 $[\theta, \theta + \mathrm{d}\theta]$

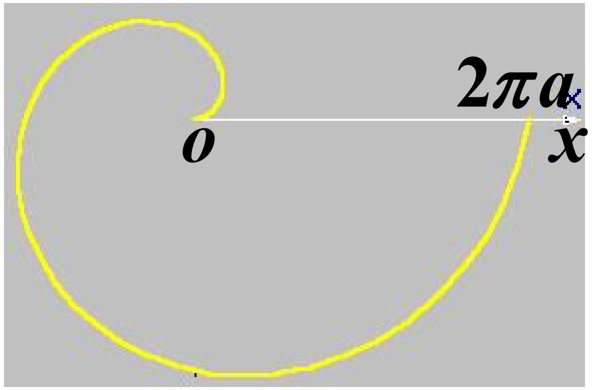
面积元素 $\mathrm{d}A = \dfrac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2 \mathrm{d}\theta$

曲边扇形的面积为

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \varphi^2(\theta) \mathrm{d}\theta$$



例7. 计算阿基米德螺线 $r = a\theta \ (a > 0)$ 对应 θ 从 0 变到 2π 所围图形面积 .



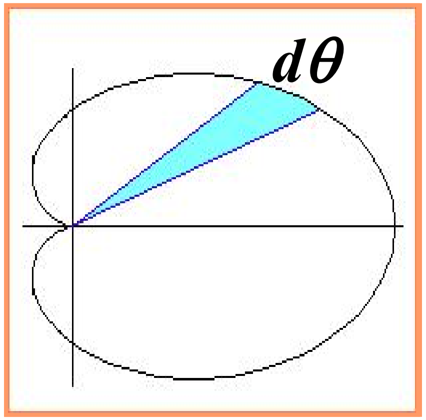
解: $$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\theta)^2 \,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{3}\theta^3\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{4}{3}\pi^3 a^2$$

例8. 计算心形线 $r = a(1+\cos\theta)\ \ (a>0)$ 面积 .

解 $dA = \frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta$



利用对称性知

$$A = 2\cdot\frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2 d\theta$$

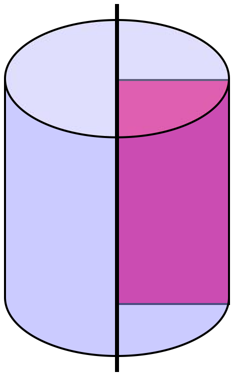
$$= a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$

$$= a^2\left[\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

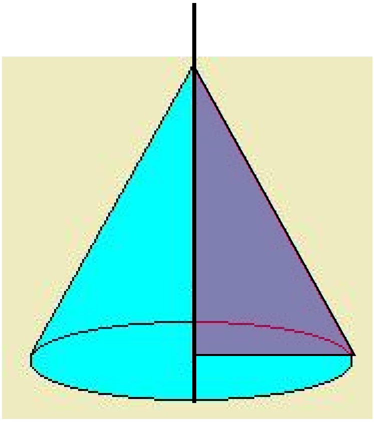
三、体积

1. 旋转体的体积

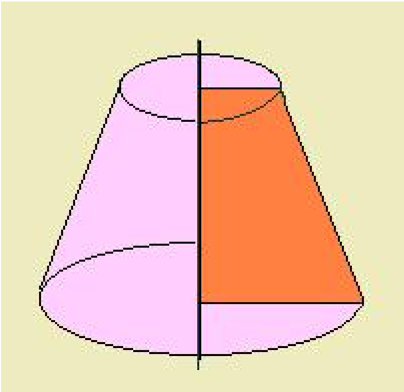
旋转体是由一个平面图形绕这平面内一条直线旋转一周而成的立体．这直线叫做旋转轴．



圆柱



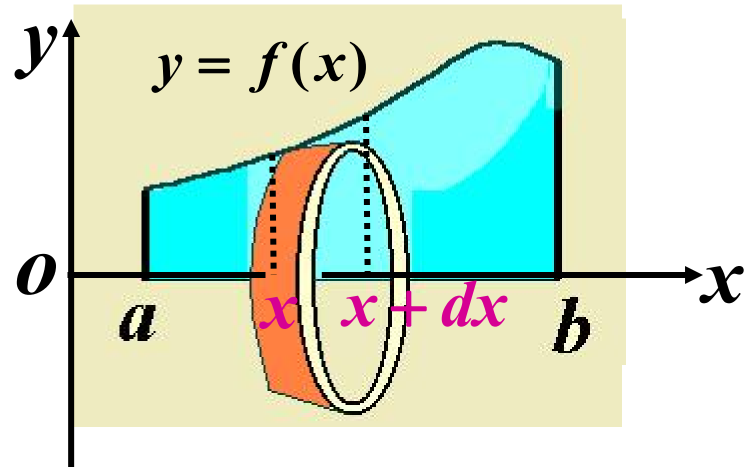
圆锥



圆台

2. 绕x轴旋转体的体积

连续曲线 $y=f(x)$,直线 $x=a$, $x=b$及 x轴所围成的曲边梯形, 绕 x轴旋转一周而成的旋转体.



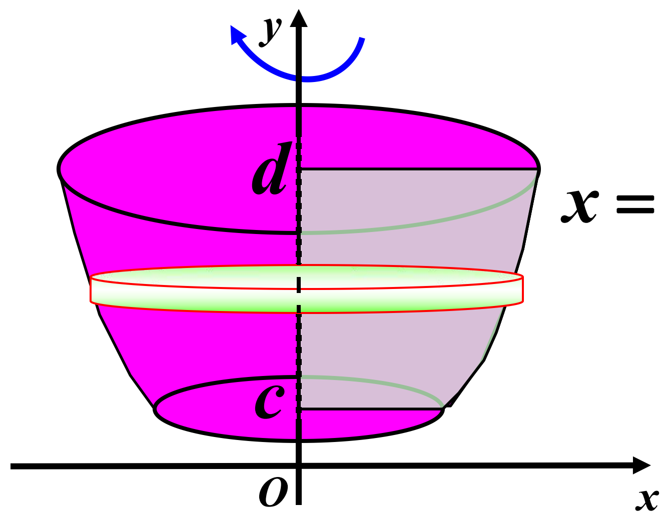
取积分变量为x，$x \in [a,b]$

体积元素: $\boxed{dV = \pi[f(x)]^2 dx}$

旋转体的体积: $\boxed{V = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx}$

3. 绕 y轴旋转体的体积

连续曲线$x=\varphi(y)$, 直线 $y=c, y=d$ 及 y 轴所围成的曲边梯形绕y 轴旋转一周而成的旋转体.



取积分变量y, $y\in[c,d]$

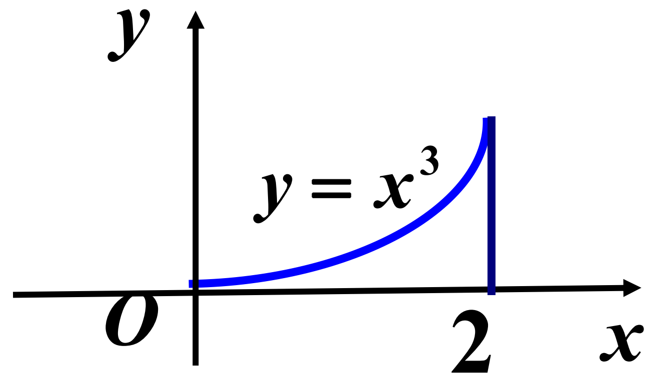
体积元素:

$$\mathrm{d}V = \pi[\varphi(y)]^2\mathrm{d}y$$

旋转体的体积:

$$V=\pi\int_c^d[\varphi(y)]^2\mathrm{d}y$$

例9　$y=x^3, x=2, y=0$ 所围成的图形绕x轴，y轴旋转一周而成的旋转体的体积.



解　体积元素为 $dV=\pi y^2 dx$，

$$V_x = \pi\int_0^2 y^2 \mathrm{d}x = \pi\int_0^2 x^6 \mathrm{d}x$$

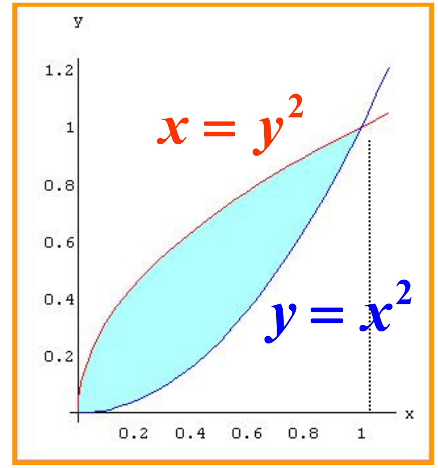
$$=\pi\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^2 = \frac{128}{7}\pi.$$

$$V_y = \pi\int_0^8 \left(2^2 - (\sqrt[3]{y})^2\right)\mathrm{d}y = \pi\int_0^8 \left(4 - y^{\frac{2}{3}}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2 2\pi x f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\pi\left[4x - \frac{3}{5}y^{\frac{5}{3}}\right]_0^8 = \frac{64}{5}\pi.$$

例10. 计算两条抛物线$y^2 = x, y = x^2$所围图形分别绕x轴，y轴旋转所形成的体积.



解 绕 x轴旋转的旋转体体积

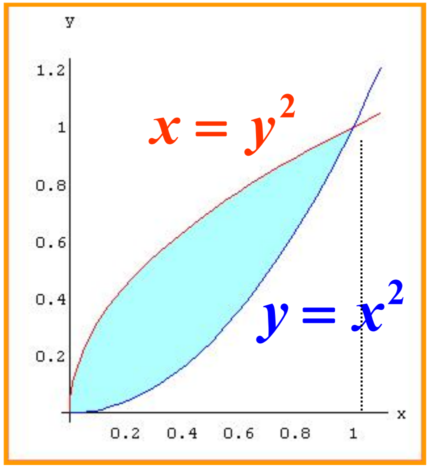
$$V_x = \pi\int_0^1 [f_1(x)]^2 dx - \pi\int_0^1 [f_2(x)]^2 dx$$

$$= \pi\int_0^1 [f_1(x)]^2 - [f_2(x)]^2 dx$$

$$= \pi\int_0^1 \left[(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2\right] dx$$

$$= \pi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{10}\pi$$

绕 y轴旋转的旋转体体积



$$V_y = \pi\int_0^1 [\varphi_1(y)]^2 dy - \pi\int_0^1 [\varphi_2(x)]^2 dy$$

$$= \pi\int_0^1 \left[(\sqrt{y})^2 - (y^2)^2\right] dy$$

$$= \pi\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{10}\pi$$

或者利用对称性质，图形围绕x轴旋转和围绕y轴旋转所形成的体积相同。

练习. 由 $x=0, y=0, y=\cos x, (0\le x\le \frac{\pi}{2})$

所围图形分别绕x轴，y轴旋转所形成的体积.

解 绕 x轴旋转的旋转体体积

$$V_x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos x]^2dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1+\cos 2x]dx$$

$$=\frac{\pi}{2}(x+\frac{\sin 2x}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

$$V_y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi x f(x)\mathrm{d}x=\pi^2-2\pi.$$

绕 y轴旋转的旋转体体积

$$V_y=\pi\int_0^1[\arccos y]^2dy$$

$$(t=\arccos y, y=\cos t, dy=-\sin tdt; y=0, t=\frac{\pi}{2}, y=1, t=0$$

$$V_y=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 t^2 d\cos t$$

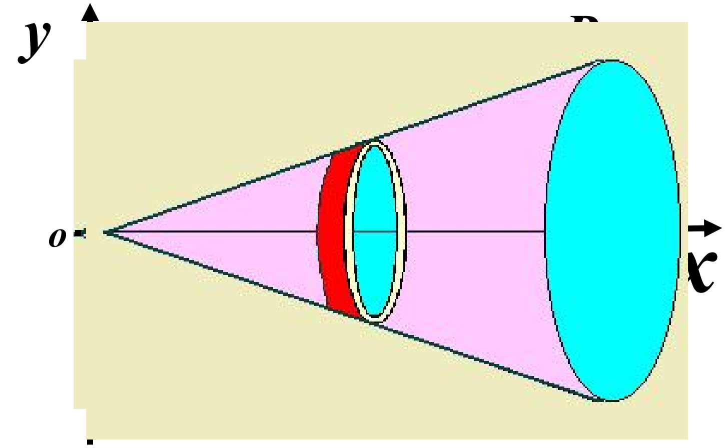
$$=\pi t^2\cos t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0}+\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}2t\cos tdt$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}2td(\sin t)=2\pi t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin tdt$$

$$=\pi^2+2\pi\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi^2-2\pi.$$

例11 连接坐标原点O及点$P(h,r)$的直线、直线$x=h$及x轴围成一个直角三角形，将它绕x轴旋转构成一个底半径为r，高为h的圆锥体，计算圆锥体的体积.

解 直线 OP 方程为 $y=\frac{r}{h}x$



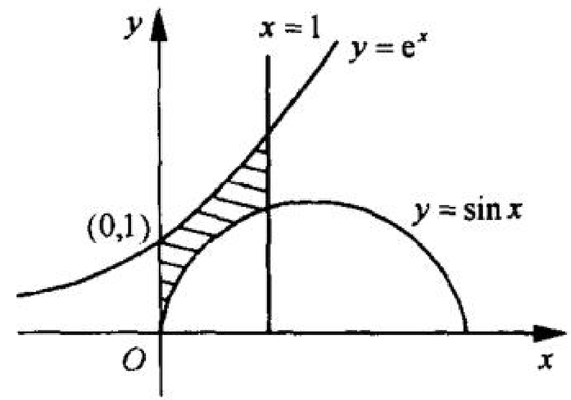
取积分变量为x，$x\in[0,h]$

圆锥体的体积

$$V=\int_0^h \pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2 dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\frac{\pi h r^2}{3}.$$

【614】 求曲线 $y=e^x$, $y=\sin x$, $x=0$ 和 $x=1$ 所围成的图形绕 x 轴旋转所成立体的体积.

解：$\mathrm{V}_x=\pi\int_a^b f^2(x)dx$



$$V_x=\pi\int_0^1(e^{2x}-\sin^2 x)dx$$

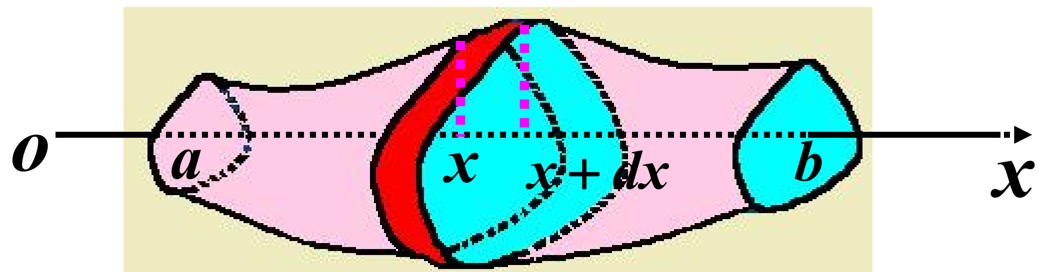
$$=\pi\int_0^1\left(e^{2x}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^1$$

4. 平行截面面积为已知的立体的体积

如果一个立体不是旋转体，但却知道该立体上垂直于一定轴的各个截面面积，那么，这个立体的体积也可用定积分来计算.

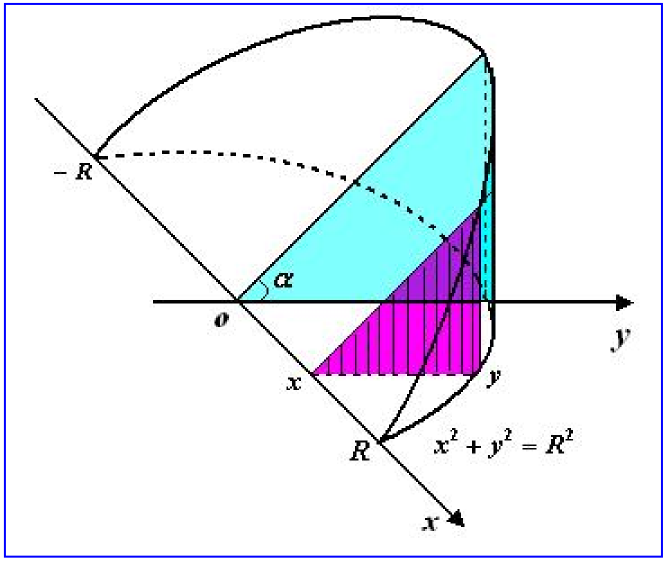
$A(x)$表示过点 x且垂直于x轴的截面面积，$A(x)$为x的已知连续函数



取积分变量x, $x \in [a,b]$,

体积元素：$dV = A(x)dx$, 立体体积 $\boxed{V = \int_a^b A(x)dx.}$

例14一平面经过半径为R的圆柱体的底圆中心，并与底面交成角，计算这平面截圆柱体所得立体的体积.



解 取坐标系如图

底圆方程为 $x^2+y^2=R^2$

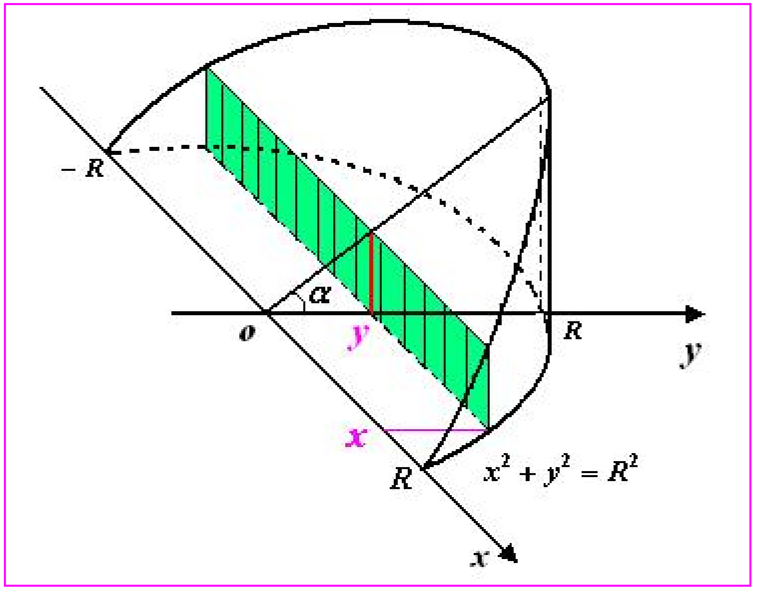
垂直于x轴的截面为直角三角形

截面面积 $A(x)=\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha,$

立体体积 $V=\frac{1}{2}\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\tan\alpha dx=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha.$

【解II】 如图

垂直于y 轴的截面为矩形



截面面积

$$A(y)=y\tan\alpha\cdot 2x$$

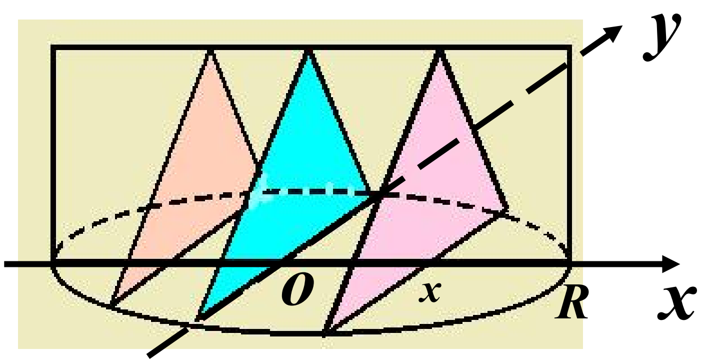
$$=y\tan\alpha\cdot 2\sqrt{R^2-y^2}$$

立体体积

$$V=2\tan\alpha\int_0^R y\sqrt{R^2-y^2}dy=\frac{2}{3}\tan\alpha\, R^3$$

【例 14】 求以半径为R的圆为底、平行且等于底圆直径的线段为顶、高为h的正劈锥体的体积.

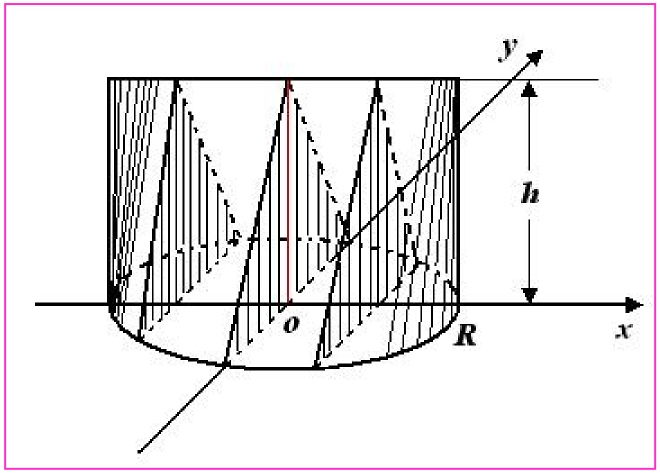
【解】取坐标系如图



底圆方程为

$$x^2+y^2=R^2,$$

垂直于x轴的截面为等腰三角形



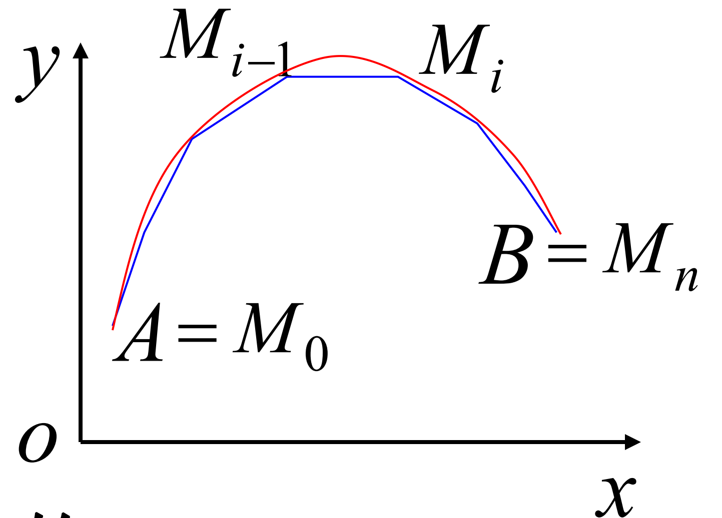
截面面积 $A(x)=\frac{1}{2}\cdot 2y\cdot h=h\sqrt{R^2-x^2}$

立体体积 $V=h\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx$

$$=\frac{1}{2}\pi R^2 h.$$

四、平面曲线的弧长

定义: 若在弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上任意作内接折线，当折线段的最大边长 $\lambda\to 0$ 时, 折线的长度趋向于一个确定的极限, 则称此极限为曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长，即



$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left|M_{i-1}M_i\right|$$

定理: 任意光滑曲线弧都是可求长的.

(1) 曲线弧由直角坐标方程给出

$$y = f(x) \quad (a \le x \le b)$$

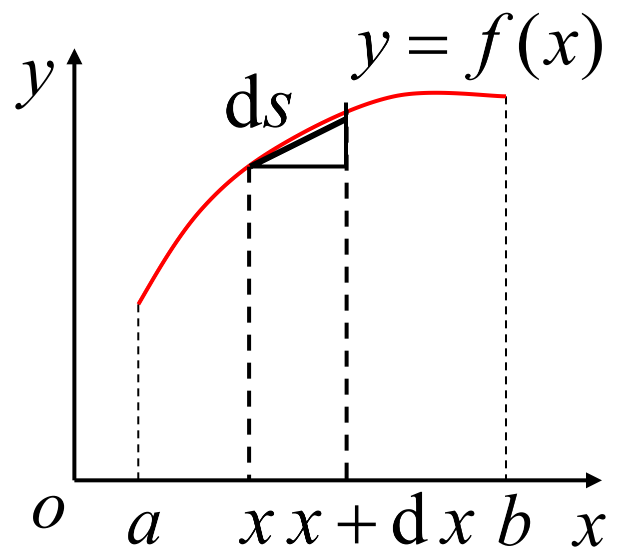
弧长元素(弧微分) :

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

$$= \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$$

因此所求弧长

$$\boxed{s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\ \mathrm{d}x}$$



(2) 曲线弧由参数方程给出

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

弧长元素(弧微分)：

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} \quad = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, d\, t$$

因此所求弧长

$$\boxed{s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\ \mathrm{d}\, t}$$

(3) 曲线弧由极坐标方程给出:

$$r = r(\theta) \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$$

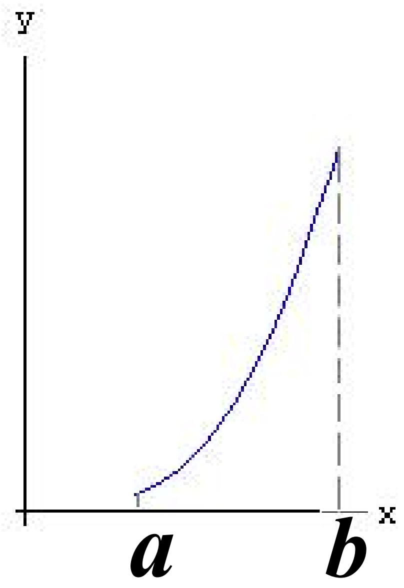
令 $x = r(\theta)\cos\theta,\ y = r(\theta)\sin\theta$， 则得

弧长元素(弧微分) : $\mathrm{d}s = \sqrt{[x']^2 + [y']^2}\,\mathrm{d}\theta$

$$= \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

因此所求弧长 $\boxed{s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta}$

例 13 计算曲线$y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$上相应于$x$从$a$到$b$的一段弧的长度.



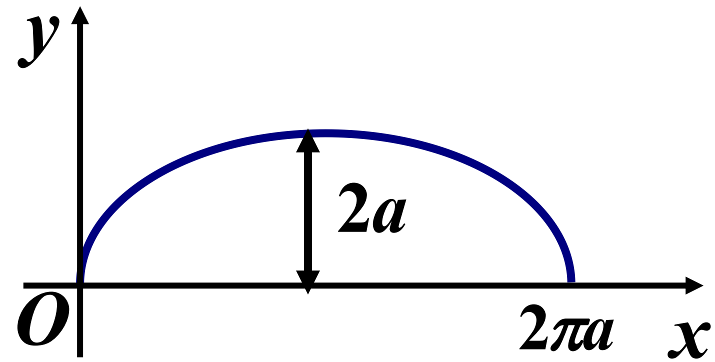
解 $\because y'=x^{\frac{1}{2}},$

$$\therefore ds=\sqrt{1+(x^{\frac{1}{2}})^2}dx=\sqrt{1+x}dx,$$

所求弧长为

$$s=\int_a^b\sqrt{1+x}dx=\frac{2}{3}[(1+b)^{\frac{3}{2}}-(1+a)^{\frac{3}{2}}].$$

例16. 计算摆线$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ $(a>0)$一拱 $(0 \le t \le 2\pi)$ 的弧长.



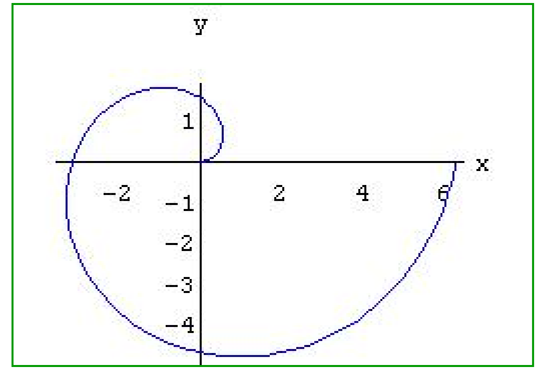
解: $\mathrm{d}s = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,\mathrm{d}t$

$= \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$

$= a\sqrt{2(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t = 2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t$

$\therefore \quad s = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t = 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a$

例 15 求阿基米德螺线$r = a\theta \quad (a > 0)$上相应于$\theta$从0到$2\pi$的弧长.



解 $\because \quad r' = a,$

$$\therefore \quad s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\theta^2 + a^2}\,d\theta = a\int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1}\,d\theta$$

$$= \frac{a}{2}\left[2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})\right].$$

内容小结

上下限按顺时针方向确定

1. 平面图形的面积

$$
\text{边界方程}\begin{cases}
\text{直角坐标方程} \\
\text{参数方程} \quad A=\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t \\
\text{极坐标方程} \quad A=\dfrac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\,\theta
\end{cases}
$$

2. 平面曲线的弧长

弧微分：$\mathrm{d}\,s=\sqrt{(\mathrm{d}\,x)^2+(\mathrm{d}\,y)^2}$

注意: 求弧长时积分上下限必须上大下小

$$
\text{曲线方程}\begin{cases}
\text{直角坐标方程} \\
\text{参数方程方程} \\
\text{极坐标方程} \quad \mathrm{d}\,s=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\,\theta
\end{cases}
$$

3. 已知平行截面面积函数的立体体积

$$V=\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$\Longrightarrow$ 旋转体的体积

$$y=y(x)\begin{cases}\text{绕 } x \text{ 轴：} & A(x)=\pi\, y^2 \\ \text{绕 } y \text{ 轴：} & A(x)=2\pi\,\phi(y)^2\end{cases}$$