第四节 一阶线性微分方程

一、一阶线性微分方程

1. 定义　形如

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad (1)$$

若未知函数和未知函数的导数都是一次有理式，

则称其为一阶线性微分方程.

例如 判下列微分方程是否为一阶线性微分方程?

(1) $3y' + 2y = x^2$

(2) $(y')^3 + xy = \sin(2x+1)$

(3) $y' = y^2 + x^2$

(4) $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = \sin x^2$

(5) $y\,y' + y = x$

(6) $y' + x\sin y = x^2 + 1$

2. 一阶线性微分方程的分类

当 $Q(x)\equiv 0$ 时，方程（1）称为一阶线性齐次微分方程.

当 $Q(x)\neq 0$ 时，方程（1）称为一阶线性非齐次微分方程.

二、一阶齐次线性微分方程的解法

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$$

分离变量 $\frac{dy}{y}=-P(x)dx$

两边积分，得 $\ln|y|=-\int P(x)dx+\ln|C|\quad(C\neq 0)$

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}.$$

由于$y=0$也是方程的解.

所以通解为

例1 求微分方程 $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x+1}y=0$ 的通解.

解：变量分离法：$\frac{1}{y}dy=-\frac{1}{x+1}dx,$

积分，得： $\ln|y|=\ln\frac{1}{|x+1|}+\ln|C|(C\neq 0),$

$$\Rightarrow y=\frac{C}{x+1},$$

$y=0$也是方程的解，与上式合并，

原方程的通解是 $y=\frac{C}{x+1}$(C为任意常数).

公式法：$P(x)=\dfrac{1}{x+1}$,

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}=Ce^{-\int\frac{1}{x+1}dx}$$

$$=Ce^{\ln\frac{1}{x+1}}=\frac{C}{x+1}\text{（}C\text{为任意常数）}$$

三、线性非齐次方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ (1)

分析：$\because \frac{dy}{y}=\left[\frac{Q(x)}{y}-P(x)\right]dx,$

两边积分 $\ln|y|=\int\frac{Q(x)}{y}dx-\int P(x)dx,$

设 $\int\frac{Q(x)}{y}dx=v(x)$, $\therefore \ln|y|=v(x)-\int P(x)dx,$

$\therefore y=\pm e^{v(x)-\int P(x)dx}=\pm e^{v(x)}\cdot e^{-\int P(x)dx}=$

与齐次方程通解相比：$y=$

常数变易法:

$$y = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \longrightarrow y = u(x)e^{-\int P(x)dx}$$

得 $\dfrac{dy}{dx} = u'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)u(x)e^{-\int P(x)dx}$

将y与y'代入原方程 $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

化简得 $u'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x), \Rightarrow u'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx},$

积分得 $u(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C,$

一阶线性非齐次微分方程的通解为:

即

$$y = \underbrace{Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}_{\text{对应齐次方程通解}} + \underbrace{e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}_{\text{非齐次方程特解}}$$

例1 求方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解.

解: 这是一个非齐次线性方程.

先求对应的齐次方程的通解.

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=0, \quad \Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{2dx}{x+1}$$

则 $\ln|y|=2\ln|x+1|+\ln|C|,$

即 $y=C(x+1)^2 \qquad (*)$

令 $y=u(x)\cdot(x+1)^2$,

则 $$y'=u'\cdot(x+1)^2+2u\cdot(x+1)$$

代入非齐次方程得 $u'=(x+1)^{\frac{1}{2}}$

解得 $$u=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C$$

故原方程通解为

$$y=(x+1)^2\left(\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right)$$

另解（直接代公式）：

求方程 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解.

解: $P(x)=-\dfrac{2}{x+1}$, $Q(x)=(x+1)^{\frac{5}{2}}$.

$$y=e^{\int\frac{2}{x+1}dx}\left(\int(x+1)^{\frac{5}{2}}.e^{-\int\frac{2}{x+1}dx}dx+C\right)$$

$$=(x+1)^2\left(\int(x+1)^{\frac{5}{2}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}dx+C\right)$$

$$= (x+1)^2\left(\int (x+1)^{\frac{1}{2}}dx + C\right)$$

原方程的通解为： $y = (x+1)^2\left(\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C\right)$

【例2】 求方程 $y' + \frac{1}{x} y = \frac{\sin x}{x}$ 的通解.

【解法 II 】 $P(x) = \frac{1}{x}$, $\quad Q(x) = \frac{\sin x}{x}$,

$$y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(\int \frac{\sin x}{x} \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right)$$

$$= e^{-\ln x} \left(\int \frac{\sin x}{x} \cdot e^{\ln x} dx + C \right)$$

$$= \frac{1}{x} \left(\int \sin x dx + C \right) = \frac{1}{x} (-\cos x + C).$$

例3 求方程$(y^2-6x)\frac{dy}{dx}+2y=0$的通解.

解：原方程化为 $\frac{dy}{dx}=-\frac{2y}{y^2-6x} \Rightarrow \frac{dx}{dy}=-\frac{y^2-6x}{2y}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy}=-\frac{y}{2}+\frac{3}{y}x \Rightarrow \frac{dx}{dy}-\frac{3}{y}x=-\frac{y}{2},$$

$$x=e^{\int\frac{3}{y}dy}\left(\int -\frac{y}{2}e^{-\int\frac{3}{y}dy}dy+C\right)=y^3\left(\int -\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{y^3}dy+C\right)$$

$$=y^3\left(-\frac{1}{2}\int\frac{1}{y^2}dy+C\right)=y^3\left(\frac{1}{2y}+C\right)=\frac{y^2}{2}+Cy^3.$$

四、伯努利方程

伯努利(**Bernoulli**)方程的标准形式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n \quad (n\neq 0,1)$$

当 $n=0,1$ 时， 方程为线性微分方程.

当 $n\neq 0,1$ 时， 方程为非线性微分方程.

【解法】需 … 量代换化为一阶线性微分方程.

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$$

以 y^n 除方程两边，得

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$

令 … ，则 $$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$$

求出此方程通解后,

$$\therefore\ y^{1-n}=z=e^{-\int(1-n)P(x)dx}\left(\int(1-n)Q(x)e^{\int(1-n)P(x)dx}dx+C\right).$$

例4. 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{y}{x}=a(\ln x)y^2$ 的通解.

解: 令 $z=y^{-1}$,则方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\dfrac{z}{x}=-a\ln x$

其通解为 $z=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(\int(-a\ln x)e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)$

$$=x\left(-a\int\ln x\cdot\frac{1}{x}dx+C\right)=x\left(C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right)$$

将 $z=y^{-1}$ 代入, 得原方程通解: $yx\left[C-\dfrac{a}{2}(\ln x)^2\right]=1.$

【例5】 求方程 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{4}{x}y=x^2\sqrt{y}$ 的通解.

【解】 两端除以 $\sqrt{y}$, 得 $\dfrac{1}{\sqrt{y}}\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{4}{x}\sqrt{y}=x^2$,

令 $z=\sqrt{y}$, 则 $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\dfrac{dy}{dx}$

化简得 $2\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{4}{x}z=x^2$,

解得 $z=x^2\left(\dfrac{x}{2}+C\right)$, 即 $y=x^4\left(\dfrac{x}{2}+C\right)^2$.

内容小结:

1. 一阶线性方程 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

方法1 先解齐次方程，再用常数变易法.

方法2 用通解公式

$$y=e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\mathrm{d}x+C\right]$$

2. 伯努利方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n \quad (n\neq 0,1)$

令 $u=y^{1-n}$，化为线性方程求解.

练习

1. 判别下列方程类型:

提示:

(1) $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ $\longrightarrow$ $\frac{y-1}{y}\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 可分离变量方程

(2) $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y(\ln y-\ln x)$ $\longrightarrow$ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$ 齐次方程

(3) $(y-x^3)\mathrm{d}x-2x\mathrm{d}y=0$ $\longrightarrow$ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{2x}y=-\frac{x^2}{2}$

(4) $2y\mathrm{d}x+(y^3-x)\mathrm{d}y=0$ $\longrightarrow$ $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{2y}x=-\frac{y^2}{2}$ 线性方程

(5) $(y\ln x-2)y\mathrm{d}x=x\mathrm{d}y$ $\longrightarrow$ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{2}{x}y=\frac{\ln x}{x}y^2$

【思考题】

求一连续可导函数 $f(x)$ 使其满足下列方程:

$$f(x)=\sin x-\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t$$

令 $u=x-t$

［提示］ $f(x)=\sin x-\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$

则有 $\begin{cases} f'(x)+f(x)=\cos x \\ f(0)=0 \end{cases}$

利用公式可求出

$$f(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x-e^{-x})$$