《高等数学》（上）模拟试题（三）答案

一、填空题（本题满分 32 分，每题 4 分）

1、1   2、$\dfrac{1}{e}$ 3、$dy = (x+1)e^x dx$ 4、$(1,-3)$

5、2   6、0   7、$\dfrac{1}{3}$ 8、$\sin x - \dfrac{1}{3}\sin^3 x + C$

二、选择题（本题满分 15 分，每题 3 分）

1. C 2. D 3. C 4. B 5. D

三、求极限（本题满分 14 分，每题 7 分）

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ 3 分

$$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{2x} \quad (\ \text{或} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}\ ) \qquad 6 \text{ 分}$$

$$= \dfrac{1}{2} \qquad\qquad\qquad 7 \text{ 分}$$

2. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}$ 2 分

$$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} \qquad\qquad 4 \text{ 分}$$

$$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{2x} = \dfrac{1}{2} \qquad\qquad 7 \text{ 分}$$

四、求下列导数（本题满分 14 分，每题 7 分）

1.解：方程 $xy + 1 = e^{x+y}$ 两边对 x 求导得：$y + xy' = e^{x+y}(1 + y')$ 3 分

把 $x = 0$ 代入 $xy + 1 = e^{x+y}$ 得：$y = 0$ 5 分

$(0,0)$ 代入得：$f'(0) = -1$ 7 分

2 解： $x'_t = 1 + 3t^2$ 　　　 $y'_t = 2te^{t^4} + 2$ 　　　　　　　　　 2 分

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2te^{t^4} + 2}{1 + 3t^2} =$ 　　　　　　　　　　　　　 4 分

$\therefore \dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=0} = 2$ 　　　　　　　　　　　　　　　 6 分

$\therefore y = 2(x - 1)$ 　　　　　　　　　　　　　　　　 7 分

五、求下列积分（本题满分 16 分，每题 8 分）

1. 解：令 $\sqrt{x} = t$ ，则 $x = t^2$ ， $dx = 2t\,dt$ ， 　　　　　 2 分

$\qquad$ 则原式 $= 2\displaystyle\int \dfrac{t}{t+1}dt$ 　　　　　　　　　 4 分

$\qquad\qquad = 2\displaystyle\int \dfrac{t+1-1}{t+1}dt$ 　　　　　　　 6 分

$\qquad\qquad = 2[t - \ln(t+1)] + C =$ 　　　　　　 7 分

$\qquad\qquad = 2[\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x} + 1)] + C$ 　　　　 8 分

2 解： $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 (1+x)dx + \dfrac{1}{2}\int_1^2 x^2 dx$ 　　　 4 分

$\qquad\qquad = (x + \dfrac{1}{2}x^2)\Big|_0^1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{3}x^3\Big|_1^2$ 　　　　 7 分

$\qquad\qquad = \dfrac{8}{3}$ 　　　　　　　　　　　　　　 8 分

六、解答题（本题满分 8 分）

解：（1） $V_x = \pi\displaystyle\int_0^a x^{\frac{2}{3}}dx = \dfrac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}$ 　　　　　 3 分

（2） $V_y = 2\pi\displaystyle\int_0^a x x^{\frac{1}{3}}dx = \dfrac{6}{7}\pi a^{\frac{7}{3}}$ 　　　　 6 分

（3） $\because V_y = 10V_x$ 　　　　 $\therefore \dfrac{6}{7}\pi a^{\frac{7}{3}} = 10 \cdot \dfrac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}$

得： $a = 7\sqrt{7}$ 　　　　　　　　　　　　　　　 9 分