第三节 幂级数

一、函数项级数的概念

1.【定义】

设$u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x),\cdots$是定义在$I\subseteq R$上的函数，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$

称为定义在区间I上的(函数项)无穷级数.

【例如】 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots,(x<1)$

2.【收敛点与收敛域】

如果$x_0 \in I$, 常数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$收敛,

则称x_0为级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的收敛点, 否则称为发散点.

函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的所有收敛点的全体称为收敛域,

所有发散点的全体称为发散域.

【注意】函数项级数在某点 x 的收敛问题, 实质上是常数项级数的收敛问题.

3.【和函数】

在收敛域上, 函数项级数的和是 x 的函数 $s(x)$,
称 $s(x)$ 为函数项级数的和函数.

$$s(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$ (定义域是?)

函数项级数的部分和 $s_n(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)=s(x)$

余项 $r_n(x)=s(x)-s_n(x)$

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$$ (x在收敛域上)

【例 1】求级数$\sum \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+x}\right)^n$的收敛域.

【解】 由比值（达朗贝尔）判别法

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{|1+x|} \to \frac{1}{|1+x|} \quad (n \to \infty)$$

(1) 当 $\frac{1}{|1+x|} < 1, \quad \Rightarrow |1+x| > 1,$

即 $x > 0$或$x < -2$时， 原级数绝对收敛(必收敛).

(2) 当$\dfrac{1}{|1+x|} > 1, \quad \Rightarrow |1+x| < 1,$

即$-2 < x < 0$时，正项级数发散(原级数必发散).

(3) 当$|1+x| = 1, \quad \Rightarrow x = 0$或$x = -2,$

当$x = 0$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ 收敛；

当$x = -2$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散；

故级数的收敛域为 $(-\infty, -2) \cup [0, +\infty).$

二、幂级数及其收敛性

一般形式

1.【定义】 形如 $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n}$ 的级数称为幂级数.

当 $x_0 = 0$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 其中 a_n 为幂级数系数.

2.【收敛性】

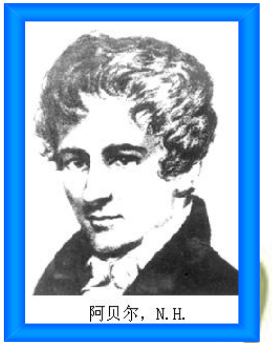
例如级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$,

当 $|x| < 1$ 时, 收敛于 $\dfrac{1}{1-x}$ 当 $|x| \geq 1$ 时, 发散;

收敛域 $(-1,1)$; 发散域 $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$;

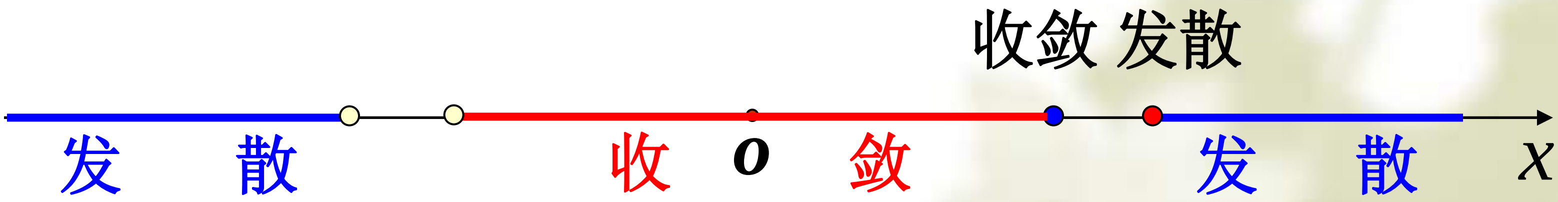
观察：有何特点？

【定理 1】(Abel 定理)



如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0 (x_0 \neq 0)$ 处收敛, 则它在满足不等式 $|x| < |x_0|$ 的一切 x 处绝对收敛;

如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ 处发散, 则它在满足不等式 $|x| > |x_0|$ 的一切 x 处发散.



证明 设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$收敛，则必有$\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$,

于是存在常数$M > 0$, 使$\left| a_n x_0^n \right| \le M \quad (n = 1, 2, \cdots)$

$$\left| a_n x^n \right| = \left| a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n} \right| = \left| a_n x_0^n \right| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \le M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

当$|x| < |x_0|$时，$\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$收敛，$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n x^n \right|$也收敛，

故原幂级数绝对收敛.

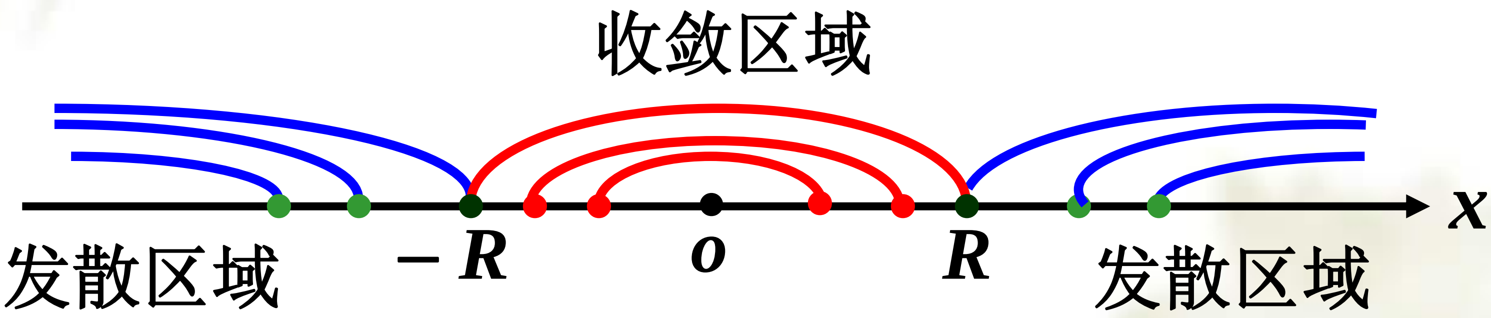
反之, 若当 $x = x_0$ 时该幂级数发散, (反证法)

假设有一点 x_1 满足 $|x_1| > |x_0|$ 且使级数收敛,

级数在点 x_0 也应收敛, 与所设矛盾,

则对一切满足不等式 $|x| > |x_0|$ 的 x, 原幂级数也发散.

【几何说明】



【推论】

如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$不是仅在$x = 0$一点收敛, 也不是在整个数轴上都收敛, 则必有一个完全确定的正数R存在, 它具有下列性质:

当$|x| < R$时, 幂级数绝对收敛; 即在 $(-R, R)$ 内收敛 ;

当$|x| > R$时, 幂级数发散; 即在$[-R, R]$外发散;

当$x = R$与$x = -R$时, 幂级数可能收敛也可能发散.

【定义】 正数 R 称为幂级数的收敛半径.

$(-R, R)$ 称为幂级数的收敛区间.

【收敛域】 $(-R, R)$ 加上收敛的端点称为收敛域.

$(-R, R)$, $[-R, R)$, $(-R, R]$, $[-R, R]$ 之一

【规定】(1) 幂级数只在 $x = 0$ 处收敛,

$R = 0$, 收敛域 $x = 0$;

(2) 幂级数对一切 x 都收敛,

$R = +\infty$, 收敛域 $(-\infty, +\infty)$.

【问题】 如何求幂级数的收敛半径 R ?

【定理 2】如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的所有系数 $a_n \neq 0$ ，

设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ （或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$）

1) 当 $\rho \neq 0$ 时， $R = 1/\rho$;

2) 当 $\rho = 0$ 时， $R = +\infty$;

3) 当 $\rho = +\infty$ 时， $R = 0$.

[说明] 据此, 满足该定理的条件, 则(充分性)

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ 的收敛半径为 } R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x| = \rho|x|$

(1) 若$\rho\neq 0$, 则根据比值审敛法可知:

当$\rho|x|<1$, 即$|x|<\dfrac{1}{\rho}$时, 原级数收敛

当$\rho|x|>1$, 即$|x|>\dfrac{1}{\rho}$时, 原级数发散

(2) 若 $\rho=0$, 对任意 x 原级数绝对收敛,

因此 $R=+\infty$;

(3) 若 $\rho=+\infty$, 则对除 $x=0$ 以外的一切 x 原级数都

发散, 因此 $R=0$.

【教材例2】求下列幂级数的收敛域:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n};\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-nx)^n;$$

$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!};\qquad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}(x-\frac{1}{2})^n.$$

【解】(1) $\because \rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1\quad \therefore R=1$

当$x=1$时，级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$，该级数收敛

当$x=-1$时，级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，该级数发散

故收敛域是$(-1,1]$

$$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-nx)^n;$$

$$\because \rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}n=+\infty,\qquad \therefore R=0,$$

级数只在$x=0$处收敛.

$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!};$$

$$\because \rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,\qquad \therefore R=+\infty,$$

收敛域$(-\infty,+\infty)$.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{\sqrt{n}}(x-\frac{1}{2})^n.$

$\because \rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 2 \qquad \therefore R = \frac{1}{2},$

即 $\left|x-\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ 收敛, $\qquad x \in (0,1)$ 收敛,

当 $x=0$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, 发散

当 $x=1$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 收敛

故收敛域为 $(0,1]$.

【例 3】求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}$的收敛域.

【解】 $\because$ 级数为$\frac{x}{2}+\frac{x^3}{2^2}+\frac{x^5}{2^3}+\cdots$ 缺少偶次幂的项

不能直接应用定理2，故直接由比值审敛法求收敛半径.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}/2^{n+1}}{x^{2n-1}/2^n}\right|=\frac{1}{2}|x|^2,$$

当$\frac{1}{2}x^2<1$, 即$|x|<\sqrt{2}$时, 级数收敛,

当$\frac{1}{2}x^2>1$, 即$|x|>\sqrt{2}$时, 级数发散,

$R=\sqrt{2}$.

当$x=\sqrt{2}$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}$，级数发散，

当$x=-\sqrt{2}$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{\sqrt{2}}$，级数发散，

原级数的收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

【注意】当幂级数缺少偶次项（或奇次项）时，不能应用定理2 求R，此时应利用比值法（达朗贝尔）来确定R.

三、幂级数的运算

1.【定理】 设幂级 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为数
R_1, R_2, 令 $R = \min\{R_1, R_2\}$, 则有 ：

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n \quad (\lambda\text{为常数}) \qquad |x| < R_1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n, \qquad |x| < R$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \qquad |x| < R$$

其中 $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

以上结论可用部分和的极限证明 .

2.【和函数的分析运算性质】

(1)幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在其收敛域$I$上连续.

(2)幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在其收敛域$I$上可积,

并有逐项积分公式

即 $\int_0^x s(t)dt = \int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n)dt$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad x \in I.$$

(3)幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在收敛区间$(-R,R)$内可导,并可逐项求导任意次.

即 $s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

【常用已知和函数的幂级数】

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$;　　(2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \dfrac{1}{1+x^2}$;

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \dfrac{1}{1-x^2}$;　　实际上就是等比级数求和

【例4】求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$的和函数 $s(x)$.

【解】 易求出幂级数的收敛半径为 1，$x=\pm 1$时级数发散，故当$x \in (-1, 1)$时，

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)'$$

$$= \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

【思考】求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n}$ 的和函数 $s(x)$.

【例5】求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的和函数.（拆项法）

【解】 设 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}2nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$=\cdots\cdots$$

【教材例6】求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$的和函数.

【解】 $\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} = 1$ $\therefore$ $R=1$

$x=-1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 收敛

$x=1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散

收敛域 [-1,1)

设 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ $x\in[-1,1)$

则 $xs(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\quad(x\neq 0)$ “先求导”

$$[xs(x)]'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}=\frac{1}{1-x}\qquad |x|<1$$

“再积分” $xs(x)-0s(0)=\int_0^x[ts(t)]'dt=\int_0^x\frac{dt}{1-t}$

$$=-\ln(1-t)\Big|_0^x=-\ln(1-x)\qquad x\in[-1,1)$$

$$x\neq 0\ \Rightarrow\ s(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x)\qquad s(0)=a_0=1$$

故

$$s(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x) & x\in[-1,0)\cup(0,1)\\ 1 & x=0\end{cases}$$

也可用连续性求得

【例7】求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 的和函数.

【解】 易求得收敛域为 $x\in(-1,1]$

$$\because s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},$$ 显然 $s(0)=0,$

求导 $s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^{n-1}=\frac{1}{1+x},\ (-1<x<1)$

两边再积分得 $\int_0^x s'(t)dt=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt\qquad(-1<x<1)$

即 $s(x)-s(0)=\ln(1+x)-\ln(1+0)\quad\therefore s(x)=\ln(1+x),$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x).\quad(-1<x\le 1)$$

四、小结

1. 求幂级数收敛域的方法

1) 对标准型幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ (a_n \neq 0)$

先求收敛半径，再讨论端点的收敛性 .

2) 对非标准型幂级数(通项为复合式或缺项)

求收敛半径时直接用比值法或根值法,

也可通过换元化为标准型再求 .

2. 幂级数的性质

1) 两个幂级数在公共收敛区间内可进行加、减与乘法运算.

2) 在收敛域内幂级数的和函数连续;

3) 幂级数在收敛区间内可逐项求导和逐项求积分.