第一节 不定积分的概念与性质

一、 原函数与不定积分的概念

二、 基本积分表

三、不定积分的性质

一、原函数与不定积分的概念

1.原函数定义

若在区间 I 上定义的两个函数 $F(x)$ 及 $f(x)$,

满足 $F'(x)=f(x)$ 或 $dF(x)=f(x)dx$,

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

例如，在定义区间内，

$$(x^3)'=3x^2. \quad (\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}.$$

在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上

$(\sin x)'=\cos x$ $\quad$ $\sin x$ 是 $f(x)=\cos x$ 的一个原函数

$(\sin x+2)'=\cos x$ $\quad$ $\sin x+2$ 是 $\cos x$ 的一个原函数

$(\sin x + C)' = \cos x, \forall C$常数

$\sin x + C$是$\cos x$的任一个原函数

（1）什么样的函数存在原函数?

（2）函数若存在原函数，那么会有几个，原函数之间有什么关系?

（3）怎么求函数的原函数?

定理1　（原函数存在定理）

若函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则 $f(x)$ 在 I 上存在原函数 .

即：连续函数一定有原函数.

反之不成立，即具有原函数的函数并不一定是连续的。

例 函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 的导函数

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$ 在 $x=0$ 点不连续

2. 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的所有原函数可表示为 $F(x)+C$ （C 为任意常数）.

证：（1） $\because (F(x)+C)' = f(x)$

$(x^3+C)' = 3x^2$

故 $F(x)+C$ 为 $f(x)$ 的原函数.

$(\arctan x + C)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

(2) 设 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的任一原函数，即 $\Phi'(x) = f(x)$

由于 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F'(x) = f(x)$,

于是 $\Phi'(x) = F'(x)$, 则 $\Phi(x) - F(x) = C$,

故 $\Phi(x) = F(x) + C$（C 为任意常数）.

2. 不定积分的概念

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，

则 $F(x)+C$（C为任意常数）称为 $f(x)$ 在该区间上的

不定积分，记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$,

即 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$,

其中符号 $\int$ 称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，

$f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，x 称为积分变量.

注：1、函数的不定积分不是一个数，也不是一个函数, 而是一族函数.

2、求不定积分的时候，必须要“ +C” 否则结果只是一个原函数，而不是不定积分.

例1 求下列不定积分

(1) $\int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C$； (2) $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$；

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$；

(4) $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = e^x + C$.

例2 求不定积分 $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x.$

解 被积函数 $\frac{1}{x}$ 的定义域为 $x \neq 0.$

当 $x > 0$ 时，因为 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$，所以 $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x + C$；

当 $x < 0$ 时，因为 $[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$，

所以 $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(-x) + C$.

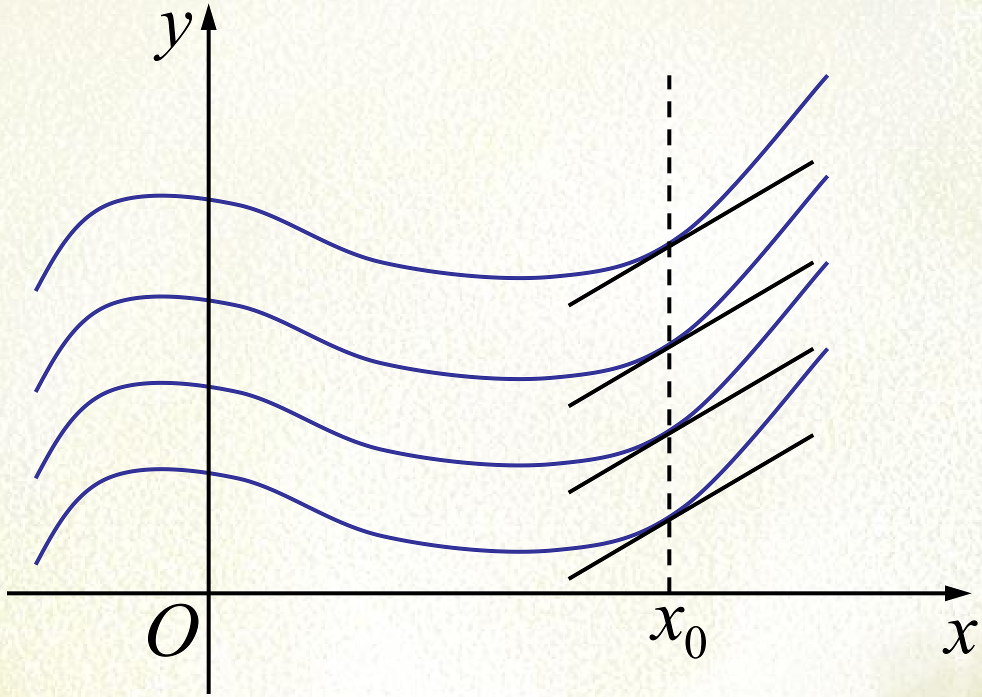
合并以上两种情况，当 $x \neq 0$ 时，得

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C.}$$

二、不定积分的几何意义

$f(x)$的原函数的图形称为$f(x)$的积分曲线.

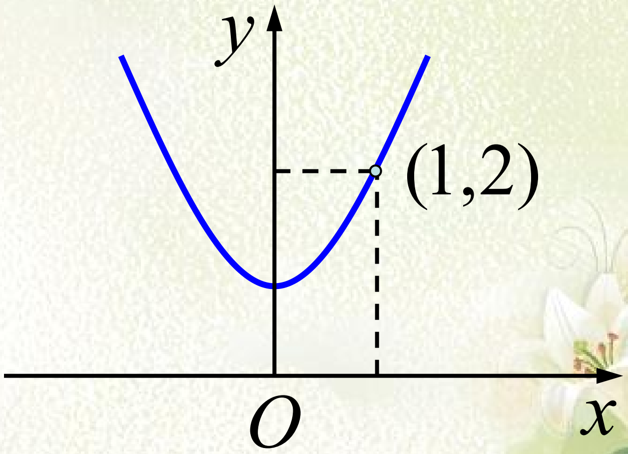
$\int f(x)\mathrm{d}x$ 的图形 —— $f(x)$的所有积分曲线组成的平行曲线族.



例3. 设曲线通过点(1, 2)，且其上任一点处的切线斜率等于该点横坐标的两倍，求此曲线的方程.

解: 设曲线 $y=f(x)$， $\because \quad y' = 2x$

$$\therefore \quad y = \int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C$$



所求曲线过点 (1, 2)，故有

$$2 = 1^2 + C \quad \therefore \quad C = 1$$

因此所求曲线为 $y = x^2 + 1$

三、 基本积分表（P188）

(1) $\int k dx = kx + C$ $(k$是常数);

(2) $\int x^{\mu} dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$ $(\mu \neq -1)$;

(3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

(4) $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$;

(5) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$;

(6) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

(7) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

(8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$;

(9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$;

(10) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$;

(11) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$;

(12) $\int e^x dx = e^x + C$;

(13) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;

例4. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x}}$.

解: 原式 $=\int x^{-\frac{4}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1} + C$

$$= -3x^{-\frac{1}{3}} + C$$

四、不定积分的性质

性质1 设函数 $f(x)$和 $g(x)$的原函数存在，则

$$\int [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x.$$

性质 1 可推广到有限多个函数代数和的情况.

性质2 设函数 $f(x)$的原函数存在，k为非零常数，则

$$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x,$$

性质3 积分与导数（或微分）互逆关系

(1) $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$ 或 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = f(x)\mathrm{d}x$

(2) $\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ 或 $\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C$

不定积分方法一：直接积分法（通过恒等变形直接利用基本积分表公式进行积分）。

例5. 求 $\int\left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$.

解: $\int\left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=3\int\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x-2\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

$=3\arctan x-2\arcsin x+C.$

例6. 求 $\int 2^x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

解: 原式 $=\int(2\mathrm{e})^x\,\mathrm{d}x=\frac{(2\mathrm{e})^x}{\ln(2\mathrm{e})}+C=\frac{2^x\,\mathrm{e}^x}{\ln 2+1}+C$

例7 求 $\int \frac{(1-x)^3}{x^2}\mathrm{d}x.$ ——分项积分

解 $\int \frac{(1-x)^3}{x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1-3x+3x^2-x^3}{x^2}\mathrm{d}x$

$$= \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 3 - x\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} - 3\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x + 3\int \mathrm{d}x - \int x\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{x} - 3\ln|x| + 3x - \frac{1}{2}x^2 + C.$$

例8. 求 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$. ——裂项积分

解:原式 $=\int \frac{x+(1+x^2)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$

$$=\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\arctan x+\ln|x|+C$$

例9. 求 $\int \frac{2x^4+x^2+3}{x^2+1}\mathrm{d}x$. ——多项式除法,配凑法

解:原式 $=\int \frac{2x^2(x^2+1)-x^2+3}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

$$=\int \frac{2x^2(x^2+1)-(x^2+1)+4}{x^2+1}\mathrm{d}x.$$

$$=\int\left(2x^2-1+\frac{4}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{3}x^3-x+4\arctan x+C.$$

例10：$\int \frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$． ——加项减项

解：原式 $= \int \frac{x^4-1+1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$= \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C$$

例11 求$\int \tan^2 x\mathrm{d}x$. ——利用三角公式

解 原式 $=\int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\int\sec^2 x\mathrm{d}x-\int\mathrm{d}x$

$$=\tan x - x + C$$

平方关系： $\sin^2 x+\cos^2 x=1,$

$1+\tan^2 x=\sec^2 x,$

$1+\cot^2 x=\csc^2 x;$

例12. 求$\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$.——二倍角

解：原式$=\int \frac{1}{2}\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos x + C$

倍角公式：$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin x,$

$$\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$$

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},$ $\qquad = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \cos x$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2};$

例13：求 $\int \sin^2 \frac{x}{2} \mathrm{d}x$. ——偶次降幂

解：原式$=\int \frac{1}{2}(1-\cos x)\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int \cos x dx$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C$$

例14 求不定积分$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

$$= \int \frac{dx}{\left(\frac{\sin x}{2}\right)^2}$$

$$= 4\int \csc^2 x dx$$

$$= -4\cot x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx$$

$$= -\cot x + \tan x + C$$

$$= -\cot x + \tan x + C$$

例15. 求 $\int \frac{1}{1+\sin x}dx$.

解: $\int \frac{1}{1+\sin x}dx = \int \frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\mathrm{d}x = \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$

$$= \int (\sec^2 x - \sec x \tan x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \tan x - \sec x + C$$

内容小结

1. 不定积分的概念

- 原函数与不定积分的定义
- 基本积分表

2. 直接积分法:

利用恒等变形, 积分性质 及基本积分公式进行积分 .

常用恒等变形方法: 分项积分; 加项减项;

利用三角公式