第二节 换元积分法

一、第一类换元法

二、第二类换元法

第一类换元法

1. 利用 $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b), a \neq 0$

2. 当被积函数中各因式之间具有求导关系

3. 利用三角函数的恒等式

一、第一类换元法

问题 $\int \cos 2x dx \overset{?}{=} \sin 2x + C,$

解决方法 利用复合函数，设置中间变量.

过程 令 $t = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt,$

$$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin 2x + C.$$

一、第一类换元法

定理1 设 $\int f(u)du = F(u) + C,$

其中 $u=\varphi(x)$ 是可导函数。则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x)$$

$$\xlongequal{令\varphi(x)=u} \int f(u)du = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C$$

这种先凑微分式，再作变量代换的方法，叫第一类换元积分法，也称凑微分法.

--单个复合函数

1. 利用 $dx=\frac{1}{a}d(ax+b)\ \ (a\neq 0)$

例1 求 $\int \sin(3x+2)\,\mathrm{d}x.$

解 将 dx 写成 $dx=\frac{1}{3}d(3x+2)$,

$$\int \sin(3x+2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \sin(3x+2)\,\mathrm{d}(3x+2).$$

令 $3x+2=u$ ，则

$$原式=\frac{1}{3}\int \sin u\,\mathrm{d}u=-\frac{1}{3}\cos u+C$$

$$=-\frac{1}{3}\cos(3x+2)+C.$$

例 2 求 $\int (4x+5)^{99}\,\mathrm{d}x$.

解 将 dx 写成 $dx = \frac{1}{4}\mathrm{d}(4x+5)$, 那么

$$\int (4x+5)^{99}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int (4x+5)^{99}\,\mathrm{d}(4x+5),$$

令 $4x+5=u$,

$$\text{原式} = \frac{1}{4}\int u^{99}\mathrm{d}u = \frac{1}{400}u^{100}+C = \frac{1}{400}(4x+5)^{100}+C.$$

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

例3 求$\int \frac{1}{3+2x}dx.$

解

$$\int \frac{1}{3+2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{3+2x}\cdot d(3+2x)$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|3+2x| + C.$$

一般地 $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\left[\int f(u)du\right]_{u=ax+b}$

例4 求$\int \frac{x}{(1+x)^3}dx.$ $=\int \frac{x+1-1}{(1+x)^3}dx$

解

$$=\int [\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1+x)^3}]dx$$

$$=\int [\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1+x)^3}]d(1+x)$$

$$=-\frac{1}{1+x}+C_1+\frac{1}{2(1+x)^2}+C_2$$

$$=-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2(1+x)^2}+C.$$

练习： 2(1)(2)(3)(4)(5)

2. 当被积函数中各因式之间具有求导关系

例 5 求 $\int xe^{x^2}dx.$

解 被积函数中的 x 与 e^{x^2} 的内层函数 x^2 具有导数关系，

令 $xdx = \frac{1}{2}dx^2.$

则 $\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}d\left(x^2\right) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

注：被积函数中各因式之间具有导数关系，导数向后凑微分.

例6 求$\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}dx.$

解 令 $\frac{1}{x}dx = d(\ln x)$,

则$\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}dx = \int \frac{1}{1+2\ln x}d(\ln x)$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+2\ln x}d(1+2\ln x)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|1+2\ln x\right| + C.$$

常用的凑微分函数：

$$x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2+a),\qquad \sin x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}(\cos x),$$

$$\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin x),\qquad \sec^2 x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\tan x),$$

$$\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\ln x),\qquad \csc^2 x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}(\cot x),$$

$$\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right),\qquad \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\arctan x),$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\mathrm{d}(\sqrt{x}),\qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\arcsin x).$$

例7 求$\int x\sqrt{1-x^2}dx.$

解： 令 $x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}x^2.$

$$\int x\sqrt{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}d\left(x^2\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}d\left(1-x^2\right)$$

$$=-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C$$

例8 求$\int \tan x dx$.

解 $$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{1}{\cos x} d\cos x$$

$$= -\ln|\cos x| + C$$

类似的，可求$\int \cot x dx$.

例 9 求 $\int \sin^2 x \cos x \mathrm{d}x$.

解 $$\int \sin^2 x \cos x \mathrm{d}x = \int \sin^2 x \,\mathrm{d}\sin x = \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$$

例10 求 $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解 $$\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x = -\int \sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\frac{1}{x} = \cos\frac{1}{x} + C.$$

例 11　求 $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx.$

解 $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx = \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = \ln(e^x+1)+C.$

练习：(20) (21) (22)

开拓：

例12 求 $\int \frac{\ln\tan x}{\sin x\cos x}dx.$

解 $(\ln\tan x)' = \frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2 x = \frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$

$$= \frac{1}{\sin x\cos x}$$

$$\int \frac{\ln\tan x}{\sin x\cos x}dx = \int \ln\tan x\,d\ln\tan x = \frac{1}{2}(\ln\tan x)^2 + C$$