第一节 定积分的概念和性质

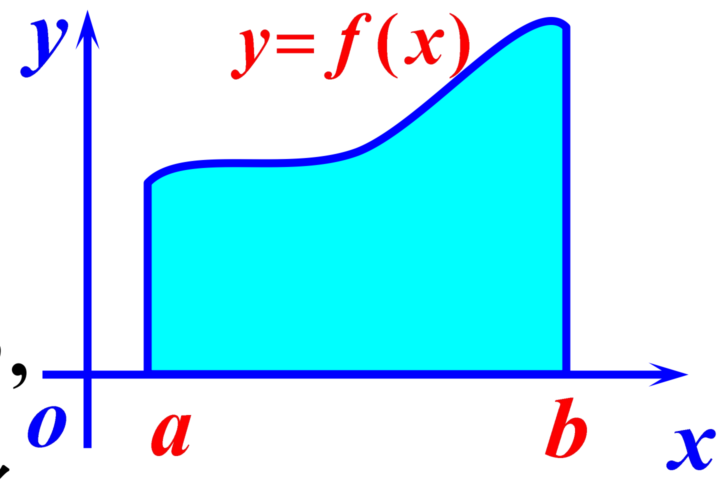
一、曲边梯形的面积

二、定积分的定义

三、定积分的性质

一、曲边梯形的面积

1. 曲边梯形的定义



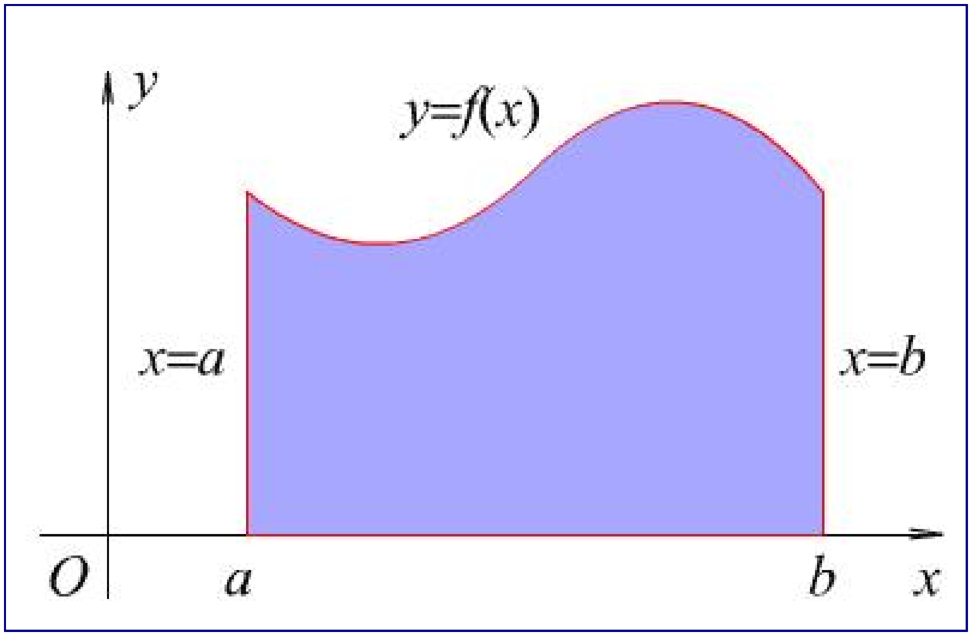
设$y=f(x)$在$[a,b]$上非负连续，

$y=f(x)$及直线 $x=a, x=b$,

x 轴围成的图形称为曲边梯形.

问题：如何求曲边梯形的面积？

- 观察与思考



用矩形面积近似取代曲边梯形面积

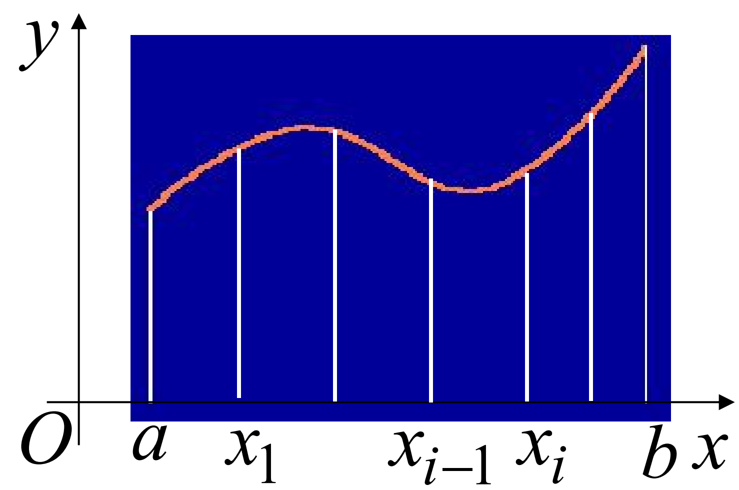
2）求曲边梯形面积的步骤

(1)分割　在区间$[a,b]$内插入若干个分点，

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

区间$[a,b]$分成n个小区间$[x_{i-1}, x_i]$，

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1};$$



(2)近似代替（以直代曲）

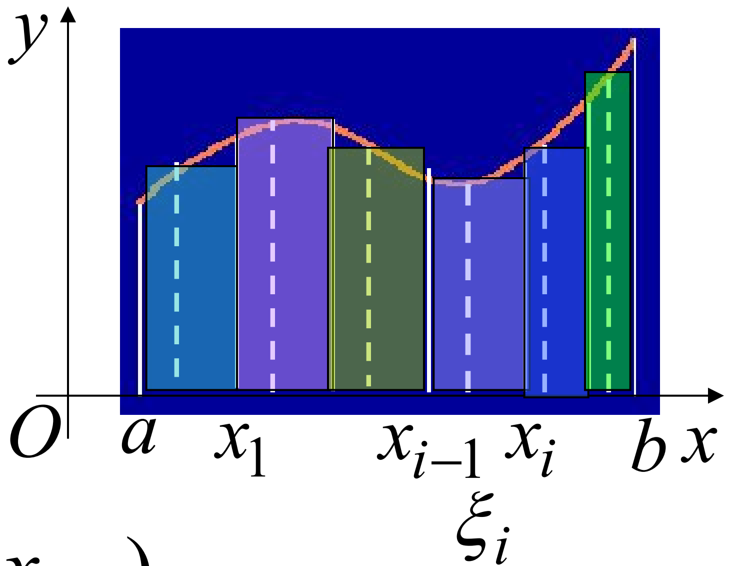
在第i个窄曲边梯形上任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

作以$[x_{i-1}, x_i]$为底，$f(\xi_i)$ 为高的小矩形,

并以此小矩形面积近似代替

相应窄曲边梯形面积ΔA_i,

得



$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

(3)求和 曲边梯形面积的近似值为

$$A=\sum_{i=1}^{n} A_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

(4)取极限 当分割无限加细，取小区间的最大长度

$$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots \Delta x_n\}$$

当$\lambda \to 0$时,即$n \to \infty$,

曲边梯形面积为 $\boxed{A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}$

2　求变速直线运动的路程

设某物体作直线运动，已知速度$v = v(t)$是时间间隔$[T_1, T_2]$上t的一个连续函数，且$v(t) \geq 0$，求物体在这段时间内所经过的路程.

思路：把整段时间分割成若干小段，每小段上速度看作不变，求出各小段的路程再相加，便得到路程的近似值，最后通过对时间的无限细分过程求得路程的精确值.

（1）分割 $T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2$

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1} \qquad \Delta s_i \approx v(\tau_i)\Delta t_i$$

部分路程值　　某时刻的速度

（2）求和 $s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$

（3）取极限 $\lambda = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n\}$

路程的精确值 $s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$

1. 解决问题的方法步骤：

(1) 分割　(2)近似代替　(3)求和　(4)取极限.

2. 极限形式　　——和式的极限

曲边梯形面积：　$A=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

二、定积分的概念

定义 设函数$f(x)$在$[a,b]$上有界，在$[a,b]$中任意插入若干个分点：$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

把区间$[a,b]$分成n个小区间，各个小区间的长度：

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ (i = 1,2,\cdots),$$

$\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i (i = 1,2,\cdots,n)$，

并作和$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，记$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots \Delta x_n\}$，

当$\lambda \to 0$时，$S \to I$，称I为$f(x)$在$[a,b]$上的定积分.

记作 $\int_a^b f(x)dx$，$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

记作 $\int_a^b f(x)dx$，即：

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中：$f(x)$ 被积函数，$f(x)dx$ 被积表达式，

x 积分变量，$[a,b]$ 积分区间，

a 与 b 分别是积分下限和积分上限.

说明：(1) 积分值仅与被积函数及积分区间有关，

与积分变量的字母无关.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

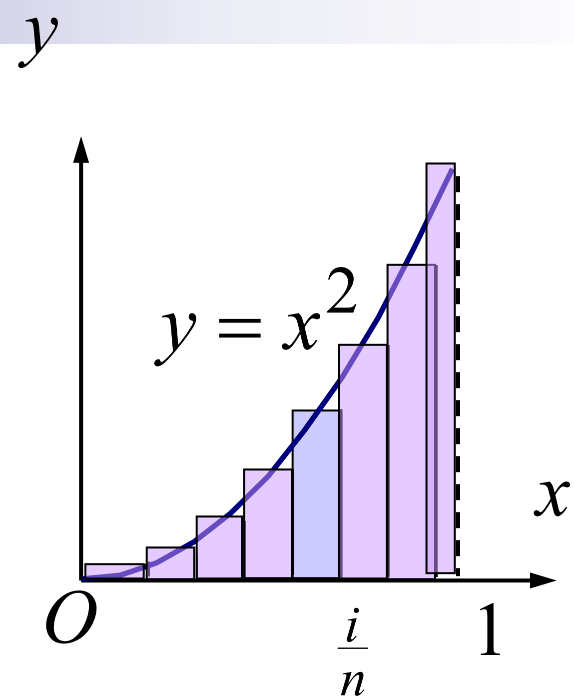
（2）积分值与区间的分法和 ξ_i 的取法无关.

(3) $\int_a^b f(x)dx$存在，称$f(x)$在$[a,b]$上可积.

如果积分存在，我们可以选某种方便的划分区间的方式，并选择方便的点。

一般采用等分区间的方法，然后取每个区间的端点或中点来计算定积分。

例1 利用定义计算定积分$\int_0^1 x^2 dx$.



解 将$[0,1]$ n等分，分点为$x_i = \frac{i}{n}$,

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

小区间$[x_{i-1}, x_i]$的长度$\Delta x_i = \frac{1}{n}$，$(i = 1, 2, \cdots, n)$

取$\xi_i = x_i$，$(i = 1, 2, \cdots, n)$ （取小区间右端点的函数值做高）

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Delta x_i = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$\boxed{=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2} = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right),$$

$$\lambda \to 0 \;\Rightarrow n \to \infty$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} \xi_i{}^2 \Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}.$$

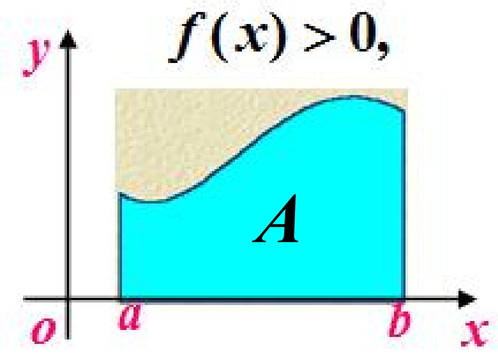
定积分存在定理:

定理1 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上可积；

定理2 $f(x)$在$[a,b]$上有界，且只有有限个间断点，则 $f(x)$在$[a,b]$上可积.

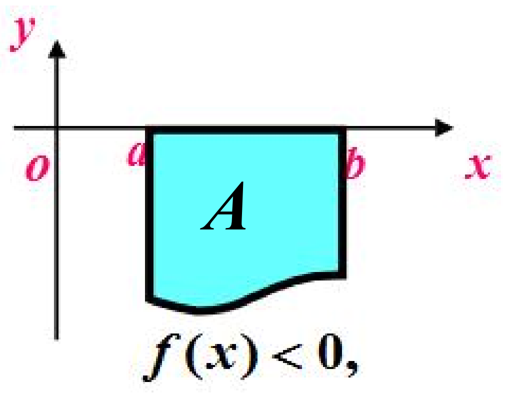
连续 $\longrightarrow$ 可积 **(充分条件)**

定积分的几何意义：曲边梯形面积的代数和.



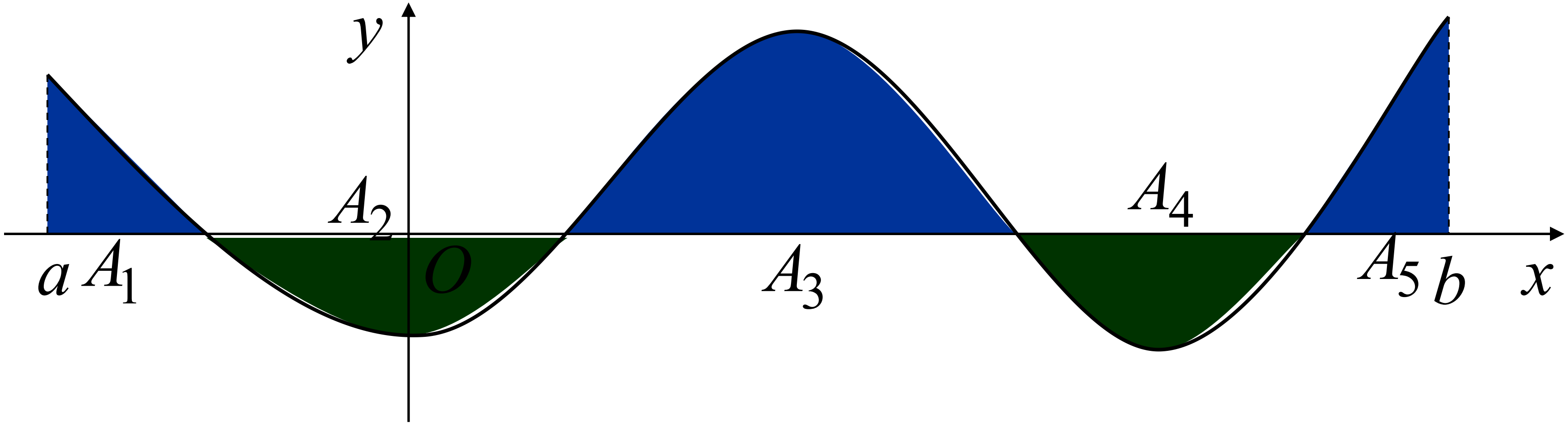
$$\int_a^b f(x)dx = A$$

曲边梯形面积



$$\int_a^b f(x)dx = -A$$

曲边梯形面积的负值

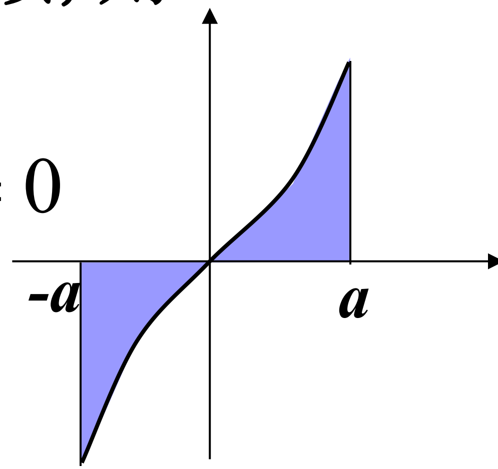


$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$$

各部分面积的代数和

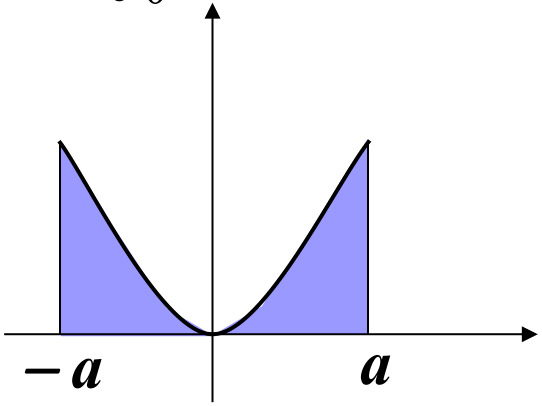
两个重要结论：设函数 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续, 则：

（1）若函数 $f(x)$ 是奇函数, 则 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$



（2）若函数 $f(x)$ 是偶函数, 则 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

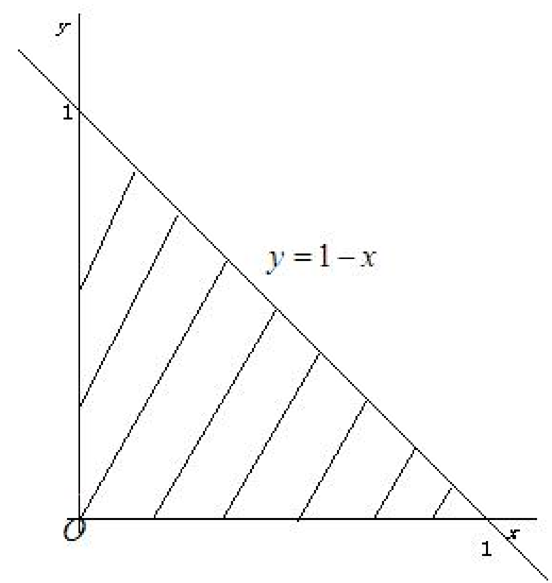
$$\int_{-1}^{1}(|x|\sin x + x^5)dx =$$



例2 利用定积分的几何意义，求 $\int_0^1 (1-x)dx$.

解 **被积函数** $y=1-x$，**在区间** $x\in[0,1]$ **上的定积分是如图所示的三角形的面积。**

$$\int_0^1 (1-x)dx = \frac{1}{2}.$$

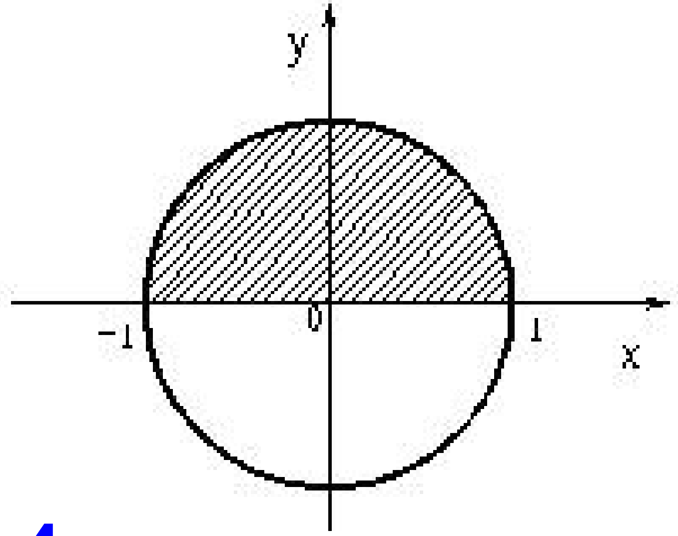


例3 利用定积分的几何意义，求 $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx.$

解 **被积函数** $y=\sqrt{1-x^2}$ **是上半圆** $x^2+y^2=1(y>0)$,

$x\in[-1,1]$,

第一、二象限二分之一圆周，



$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

$$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx=2\pi$$

练习：3，4

三、定积分的性质

对定积分的补充规定:

（1）当$a=b$时，$\int_a^b f(x)dx=0$；

（2）当$a>b$时，$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.

性质1 $\int_a^b \left(k_1 f(x)\pm k_2 g(x)\right)dx=k_1\int_a^b f(x)dx\pm k_2\int_a^b g(x)dx$;

性质2 区间可加性:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

注：a,b,c不分大小.

例: 设$\int_{-1}^{1}3f(x)dx=18, \int_{-1}^{3}f(x)dx=4, \int_{-1}^{3}g(x)dx=3.$

求(1)$\int_{-1}^{1}f(x)dx$　　(2)$\int_{1}^{3}f(x)dx$

(3)$\int_{3}^{-1}g(x)dx$　　(4)$\int_{-1}^{3}\frac{1}{5}[4f(x)+3g(x)]dx$

解: (1)$\int_{-1}^{1}3f(x)dx=3\int_{-1}^{1}f(x)dx=18 \quad \therefore \int_{-1}^{1}f(x)dx=6.$

(2)$\int_{1}^{3}f(x)dx=\int_{1}^{-1}f(x)dx+\int_{-1}^{3}f(x)dx=-6+4=-2.$

(3)$\int_{3}^{-1}g(x)dx=-\int_{-1}^{3}g(x)dx=-3.$

(4)$\int_{-1}^{3}\frac{1}{5}[4f(x)+3g(x)]dx=\frac{4}{5}\int_{-1}^{3}f(x)dx+\frac{3}{5}\int_{-1}^{3}g(x)dx=5.$

性质3 $\int_a^b 1\cdot dx=\int_a^b dx=b-a.\ \Rightarrow \int_a^b kdx=k(b-a)$

性质4（非负性）在区间$[a,b]$上，$f(x)\geq 0$，则

$$\int_a^b f(x)dx\geq 0\ (a<b).$$

推论1（保不等式性）在区间$[a,b]$上，$f(x)\geq g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx\geq \int_a^b g(x)dx.\quad (a<b)$$

推论2 $$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq \int_a^b |f(x)|dx.\quad (a<b)$$

性质5（估值定理） 设M及m分别是函数 $f(x)$在$[a,b]$上的最大值及最小值，则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

估计积分值$\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^4 dx$的大小.

解：$\because f(x)=x^4$在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上单调增加，

$\therefore f(\frac{1}{2}) \le f(x) \le f(1)$,　　即$\frac{1}{16} \le f(x) \le 1.$

由估值定理，　即$\frac{1}{16}(1-\frac{1}{2}) \le \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx \le 1\cdot(1-\frac{1}{2}).$

从而，$\frac{1}{32} \le \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^4 dx \le \frac{1}{2}.$

例4. 比较下列定积分的值:

$$(1) I_1=\int_0^1 x^2dx, I_2=\int_0^1 x^4dx. \quad I_1\geq I_2$$

$$(2) I_1=\int_1^e (\ln x)^2dx, I_2=\int_1^e \ln x dx. \quad I_1\leq I_2$$

$$(3) I_1=\int_0^1 xdx, I_2=\int_0^1 \ln(1+x)dx. \quad I_1\geq I_2$$

$$f(x)=x-\ln(1+x), x\in(0,1)$$

$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}, x\in(0,1) \quad f'(x)\geq 0, f(x)\nearrow$$

$$f(x)\geq f(0)=0, \quad \therefore x\geq \ln(1+x), \quad I_1\geq I_2$$

$$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x\,dx,\ N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)\,dx,\ P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)\,dx,$$

则有______.

(A) $N<P<M$　　(B) $M<P<N$　　(C) $N<M<P$　　(D) $P<M<N$

解　根据定积分的性质知

解　根据定积分的性质知：

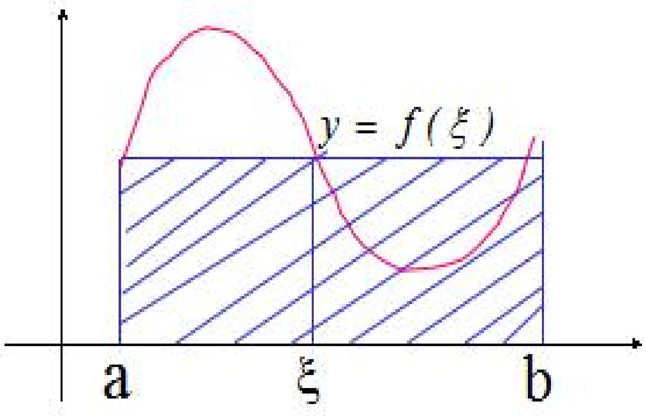
$$M=0,\quad N=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx>0,\quad P=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx<0.$$

所以 $P<M<N$.

故应选(D).

性质6（定积分中值定理）设$f(x)\in C[a,b]$,则在$[a,b]$上至少存在一点ξ,使得$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

几何解释：在$[a,b]$上至少存在一点, 使曲边梯形的面积等于以 $f(\xi)$ 为高的一个矩形面积.



内容小结：

1. 定积分的实质：和式的极限.

2. 定积分的思想和方法：

分割 → 近似代替 → 求和 → 取极限

分割 ⇓ 化整为零

近似代替 ⇓ 以直代曲

取极限 ⇓ 精确值 → 定积分

定积分定义求极限：　考研用

等分区间，取区间右端点，得到

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$$

有时候，反过来用定积分计算这种数列的极限.

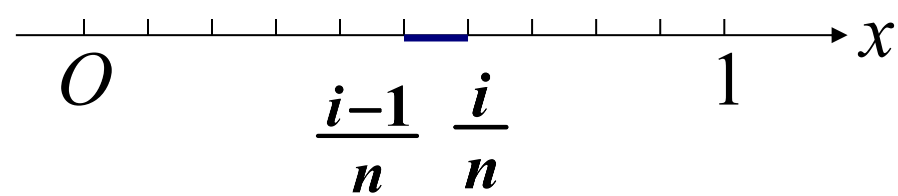
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$$

例5. 用定积分表示下列极限:

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}} \qquad (2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$$

解: (1)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\underbrace{\frac{i}{n}}_{\xi_i}}\cdot\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x_i}$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$$



(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Big(\underbrace{\boxed{\frac{i}{n}}}_{\xi_i}\Big)^p\underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{\Delta x_i}$$

$$=\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x$$

$$\text{解}: \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sqrt{n}+\sqrt{2n}+\cdots+\sqrt{n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right) \qquad f(x)=\sqrt{x}.$$

$$=\int_0^1\sqrt{x}dx$$

练习: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n^2}{n^2+i^2}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n+i}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+i/n}\cdot\frac{1}{n}$$

思考题

将和式极限：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$$

表示成定积分.

思考题解答

原式

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}+\sin\frac{n\pi}{n}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sin\underbrace{\boxed{\frac{i\pi}{n}}}_{\xi_i}\right)\cdot\underbrace{\boxed{\frac{\pi}{n}}}_{\Delta x_i}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx.$$