高　等　数　学

高等数学课程体系

高等数学

函数

极限

连续性

可微性

可积性

常微分方程

向量代数与空间解析几何

无穷级数

函数 — 研究对象
极限 — 研究方法
连续 — 研究桥梁

高等数学的重要性

1.数学内容的重要性

（1）是学习后继课程的基础，是考研成功的一个重要保障；

（2）是参加数学建模竞赛和数学竞赛的基础.

2.数学思想的重要性

隐含在《高等数学》中的数学思想方法是学生今后走上工作岗位，进行自我学习，自我创造不可缺少的一种能力.

《高等数学》学习方法

1.大学数学课堂教学与中学数学课堂教学不同之处

（1）课堂大；（2）时间长；

（3）进度快、容量大；

（4）难度大；（5）授课方式改变.

2.大学数学的学习方法

（1）课前预习；（2）认真听讲；

（3）课后复习，消化、巩固知识点；

（4）参加答疑.

成绩的考核方式：

平时成绩10%+阶段性上机考核30%

+期末考试60%

平时成绩100×10%=

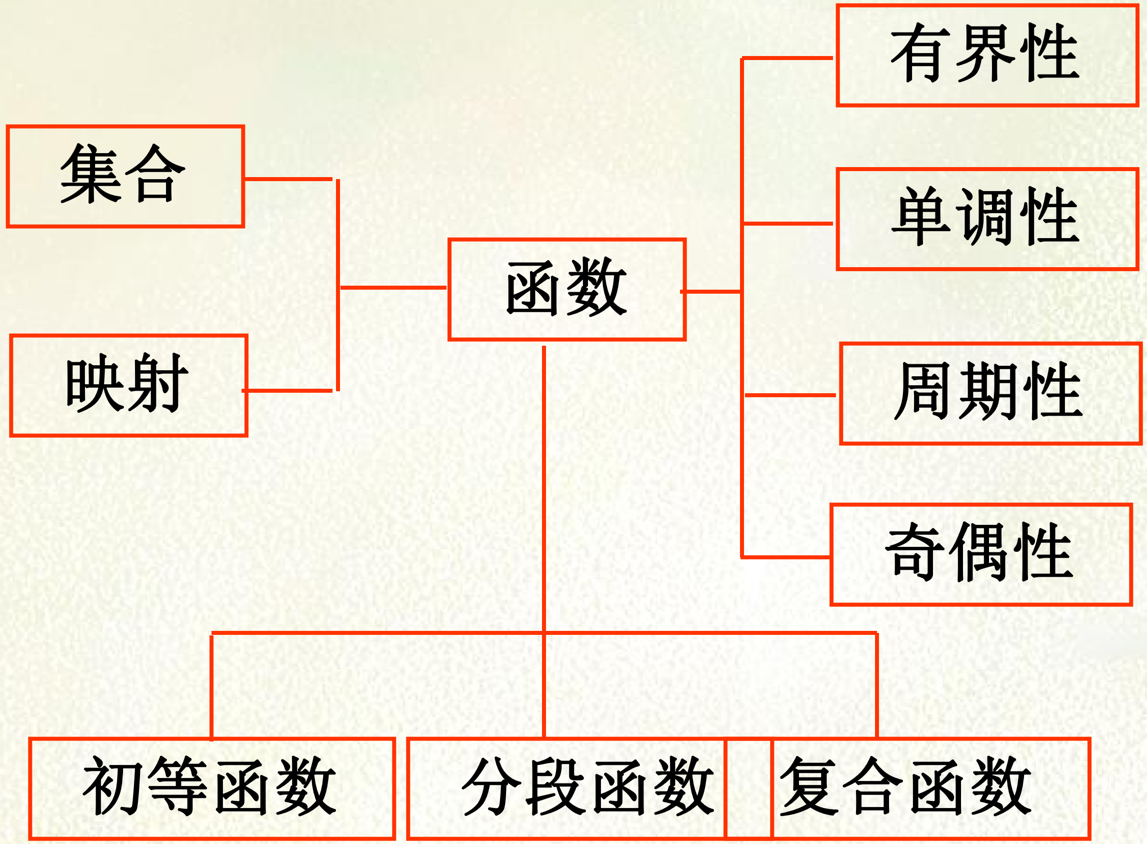
- 出勤：点名
- 线上、线下作业
- 课堂表现

期末考试(全部为计算、综合、证明题；无选择、填空、判断题；考试时长90分钟)

第一章　函数

一、集合

二、函数


集合
映射
函数
有界性
单调性
周期性
奇偶性
初等函数
分段函数
复合函数

一、集合

1. 集合

定义 具有某种特定性质的事物或对象的总体称为集合，

通常用大写字母 A、B、C、… 表示.

组成集合的事物或对象称为集合的元素，通常用大写字母 a、b、c、… 表示. $A=\{a,b,c,\cdots\}$

a是集合A的元素，记作：$a \in A$，读作“a属于A”.

a不是集合A的元素，记作：$a \notin A$，读作“a不属于A”.

表示方法:

(1) 列举法: 把集合的元素一一列举出来.

例如，集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$.

(2) 描述法：$A=\{x\mid x\text{具有性质}P\}$.

例如，集合 $A=\{x\mid x^2-x-2<0\}$.

集合的分类:

有限集：集合中元素个数是有限个；

无限集：集合中元素个数是无限个；

空集：不含有任何元素，记作：Φ.

常见的数集：

自然数集：$N=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$;

正整数集：$N^{+}=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$;

整数集：$Z=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots,\pm n,\cdots\}$;

有理数集：$Q=\left\{\frac{p}{q}\middle| p\in Z,q\in N^{+},\text{且}p\text{与}q\text{互质}\right\}$;

实数集：$R=\{x\mid x\text{为有理数或无理数}\}$;

C:复数集

2. 区间:是指介于某两个实数之间的全体实数.

这两个实数叫做区间的端点.

开区间 $(a, b)=\{x \mid a<x<b\}$

闭区间 $[a, b]=\{x \mid a \leq x \leq b\}$

半开区间 $[a, b)=\{x \mid a \leq x<b\}$

$(a, b]=\{x \mid a<x \leq b\}$

无限区间 $[a,+\infty)=\{x \mid a \leq x\}$

$(-\infty, b]=\{x \mid x \leq b\}$

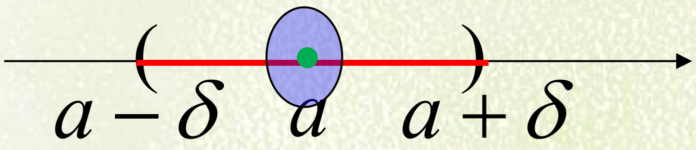
$(-\infty,+\infty)=\{x \mid x \in R\}$

3. 邻域----常用特殊的开区间

(1)点 a 的 δ 邻域: 到点 a 的距离小于 δ 的所有点的集合

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta, \delta>0\}$$

$$=(a-\delta,\ a+\delta)$$



其中, a 称为邻域中心, δ 称为邻域半径 .

(2) 点 a 的去心 δ 邻域

$$\overset{\circ}{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$$

左 δ 邻域 : $(a-\delta, a)$, 记作: $\overset{\circ}{U}_{-}(a,\delta)$.

右 δ 邻域 : $(a, a+\delta)$. 记作: $\overset{\circ}{U}_{+}(a,\delta)$.

二、函数

1. 函数的概念

定义 设 x, y 是两个变量，数集 $D \subset R$，如果对于每个 $x \in D$，变量 y 按照对应法则 f 总有唯一确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$\underbrace{y}_{\text{因变量}} = f(\underbrace{x}_{\text{自变量}}),\ x \in \underbrace{D}_{\text{定义域}}$$

值域：$R_f = f(D) = \left\{ y \mid y = f(x), x \in D \right\}$

定义' 设 x, y 是两个变量, 数集 $D \subset R$, 如果对于每个 $x \in D$, 变量 y 按照一定法则总有确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y = f(x), x \in D$$

y 不总是唯一

习惯上称种函数为多值函数. 例如: $x^2 + y^2 = r^2$

在此基础上，附加 $y \geq 0$,满足函数的定义，即确定了一个函数.如: $x^2 + y^2 = r^2 且 y \geq 0$

——称多值函数的单值分支

•函数的三要素：定义域、对应法则、值域

- 定义域—— 使表达式或实际问题有意义的自变量集合.

求函数定义域需注意：

（1）自变量在分母，要求分母$\neq 0$;

（2）自变量在偶次根号下，要求根号下≥ 0;

$y=\sqrt{x}, x\geq 0.$

（3）自变量在对数的真数上，要求真数> 0;

$y=\log_a x, x>0.$

（4）函数有多个式子，取交集.

例1 求$f(x)=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$的定义域.

例1　求$f(x)=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$的定义域.

解　$\frac{1}{x}$满足要求：$x\neq 0$;

$\sqrt{1-x^2}$满足要求：$1-x^2\geq 0\Rightarrow -1\leq x\leq 1$;

交集

所求函数的定义域为　$[-1,0)\cup(0,1]$.

思考：函数$f(\ln x)$的定义域.

答案：$f(\ln x)$的定义域$[\frac{1}{e},1)\cup(1,e]$

- 函数相同

例2：判断函数是否相同

x不为0

x>0

$(1)\ f(x)=\lg x^2,\ g(x)=2\lg x;$ 否

x取R

$(2)\ f(x)=x,\ g(x)=\sqrt{x^2};$ 否 $=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0 \end{cases} = |x|$

$(3)\ f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3},\ g(x)=x\sqrt[3]{x-1};$ 是

$(4)\ f(x)=1,\ g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x;$ 否 $\sec^2 x=1+\tan^2 x$

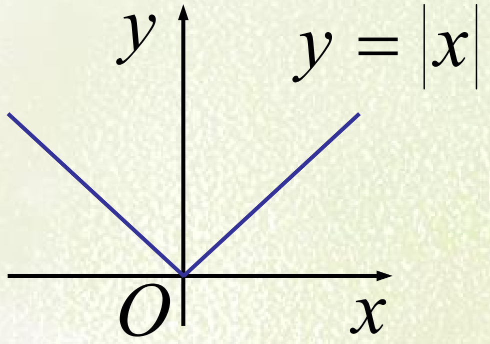
正割：$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ 余割：$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$

说明：在判断两个函数是否相同时，只需要判断函数的定义域和对应关系是否一致即可.

•函数的表示方法: 解析法(表达式法)、图像法和表格法.

例3 绝对值函数

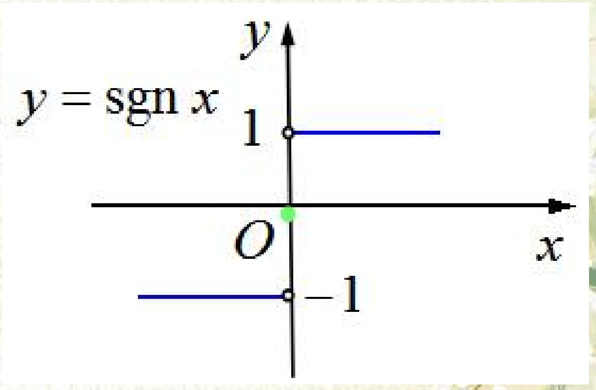
$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$



定义域 $D=\mathbf{R}$ 值域 $f(D)=[0,+\infty)$

例4 符号函数

$$\boldsymbol{y}=\mathbf{sgn}\,\boldsymbol{x}=\begin{cases} \mathbf{1}, & \boldsymbol{x}>\mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{x}=\mathbf{0} \\ -\mathbf{1}, & \boldsymbol{x}<\mathbf{0} \end{cases}$$

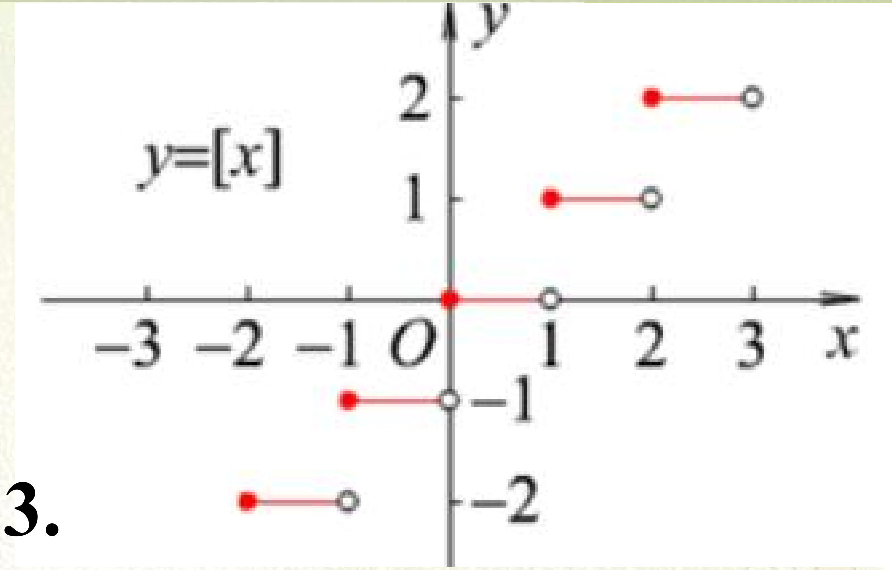


定义域 $D=(-\infty,+\infty)$, 值域 $R_f=\{-1,0,1\}$.

分段函数: 分段点

例5 取整函数 $y=[x]$:

x为任一实数，y 的取值不超过 x 的最大整数.



$$\left[\frac{5}{7}\right]=0,\quad [1.5]=1,\quad [\pi]=3.$$

即当 $n \le x < n+1 \ (n \in \mathrm{Z})$时， $y=[x]=n.$

此函数的定义域为 R, 值域为Z.

2. 函数的几种特性

$$\begin{cases}\text{有界性}\\\text{单调性}\\\text{奇偶性}\\\text{周期性}\end{cases}$$

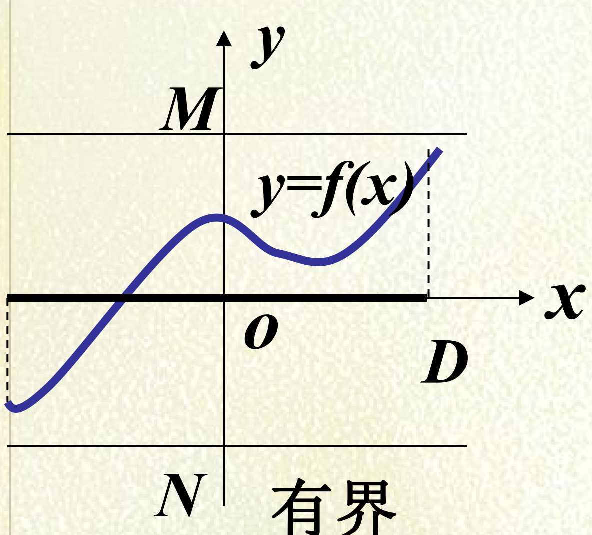
设函数 $y = f(x)$, $x \in D$,

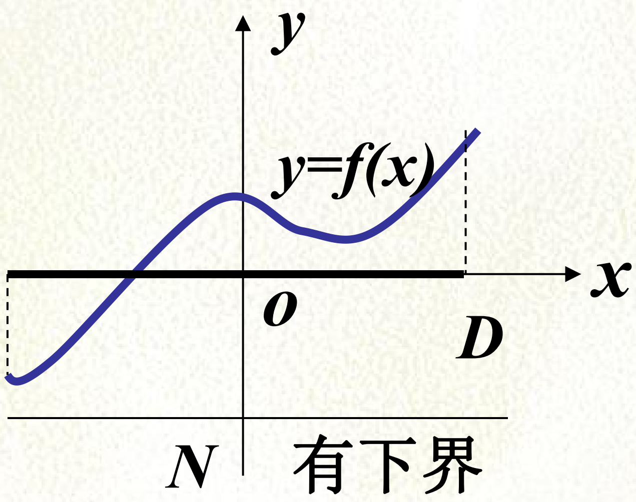
(1)有界性

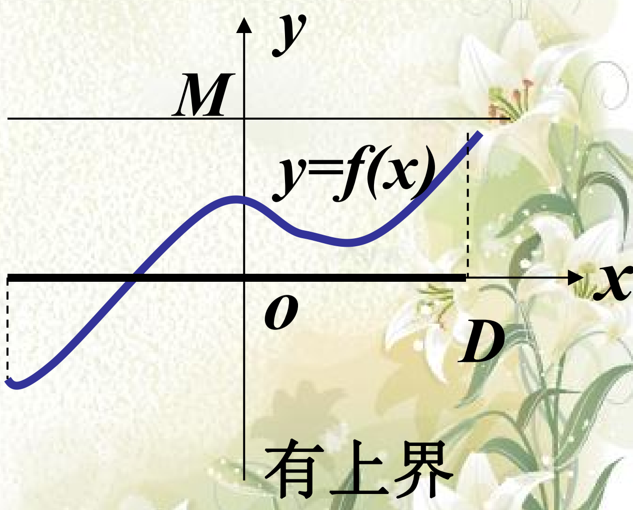
$\exists$常数N, M,且$N \le M$,$\forall x \in D$,有$N \le f(x) \le M$,称$f(x)$在D上有界.

$\exists$常数N,对$\forall x \in D$,有$N \le f(x)$,称$f(x)$在D上有下界.

$\exists$常数M,对$\forall x \in D$,有$f(x) \le M$,称$f(x)$在D上有上界.





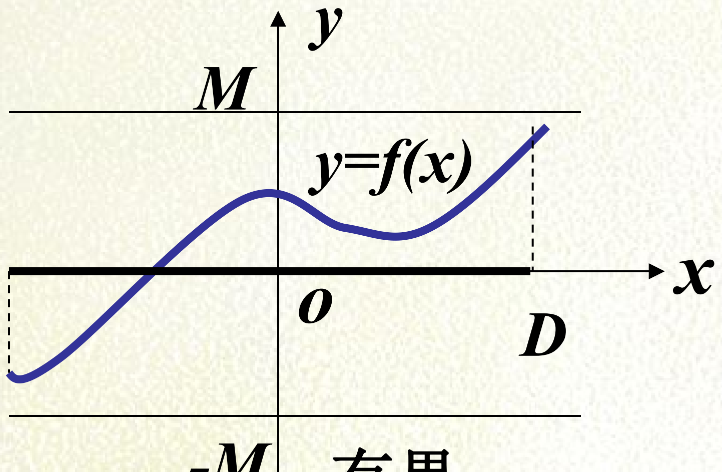


设函数 $y=f(x)$, $x\in D$,

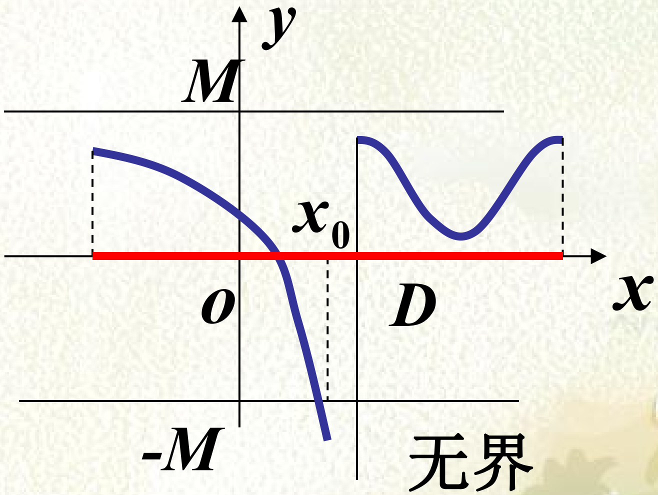
$\exists M>0, \forall x\in D$, 使 $|f(x)|\le M$, 称 $f(x)$ 在D上有界.

无界性

$\forall M>0, \exists x_0\in D$, 使 $|f(x_0)|>M$, 称 $f(x)$ 在D 上无界.



有界



无界

无界：$\forall M>0, \exists x_0 \in X$, 使 $|f(x_0)|>M$.

例6：

1、证明函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

2、函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界，在 $(0,1]$ 上无界.

证明：$\forall x\in[1,+\infty)$, $|f(x)|=\dfrac{1}{x}\le 1$

$\therefore$ 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界.

$\forall M>0$, $\exists x_0=\dfrac{1}{M+1}\in(0,1)$ 使 $|f(x_0)|=\dfrac{1}{x_0}=M+1>M$

$|f(x_0)|=\dfrac{1}{x_0}>M \Rightarrow x_0<\dfrac{1}{M}$

$\therefore$ $y=\dfrac{1}{x}$ 在 (0, 1] 上无界.

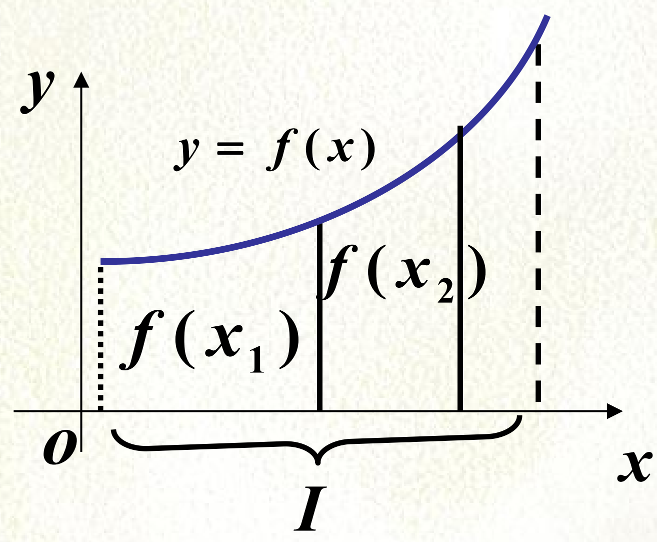
(2) 函数的单调性

设函数$f(x)$的定义域为D, 区间 $I \subset D$,

如果对于区间I上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有

$$f(x_1) \le f(x_2), \ (f(x_1) < f(x_2))$$

则称函数$f(x)$在区间I上是(严格)单调增加的;

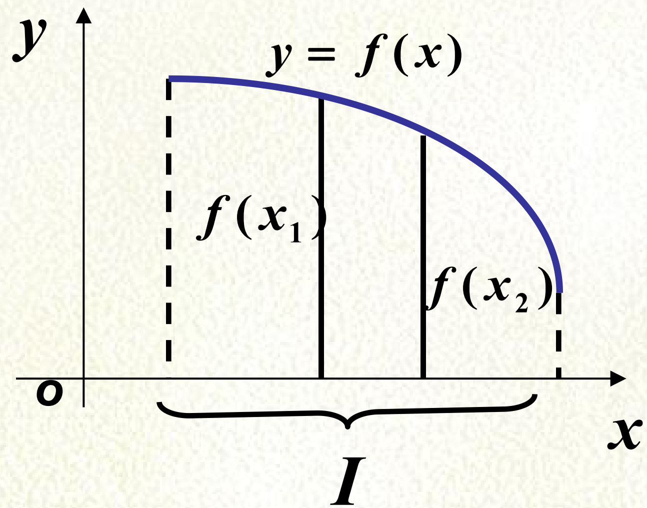


如果对于区间I上任意两点x_1及x_2,当$x_1 < x_2$时,恒有

$$f(x_1) > f(x_2), \quad f(x_1) \geq f(x_2),$$

单调减少

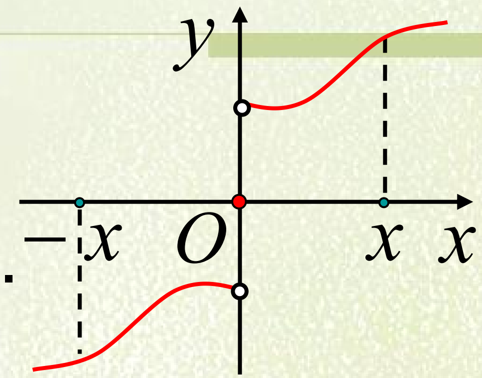
则称函数$f(x)$在区间I上是严格单调减少的.



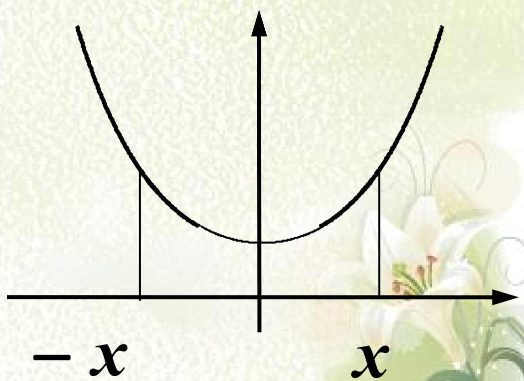
(3)奇偶性

$\forall x \in D$, 且有 $-x \in D$,

若 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.



若 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数;



奇函数的图形关于原点对称.

偶函数的图形关于y轴对称.

说明: 若函数在 $x=0$ 有定义 ,则当函数为奇函数时,

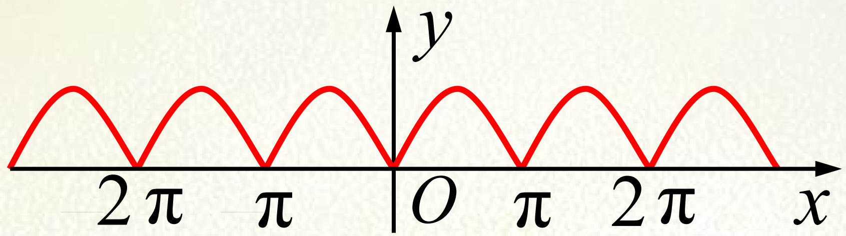
必有函数在零点值为零.

1. 定义域是否关于原点对称 2. f(x)与f(-x)的关系

(4) 周期性

$\forall x \in D, \exists l > 0,$ 且 $x \pm l \in D,$ 若 $f(x \pm l) = f(x)$

则称 $f(x)$为周期函数，称l为周期 (一般指最小正周期).



最小正周期为 π

注：周期函数不一定存在最小正周期 .

例如, 常量函数 $f(x) = C$ 任何常数都是其周期

3. 反函数

(1) 反函数的概念及性质

若函数 $f: x \to y, x \in D$ 为单射,则存在一新映射

$$f^{-1}: y \to x,$$

称此映射 f^{-1} 为 f 的反函数 .

原函数: $y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y) \Rightarrow y = f^{-1}(x)$

反函数

注: 定义域值域交换;

例7 $y = \sqrt[3]{x+1}$, 求其反函数. $x = y^3 - 1$

$$y = x^3 - 1$$

2）性质:

1) $y=f(x)$ 单调递增(减), 其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 存在,

且也单调递增（减）.

2) 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于

直线 $y=x$ 对称 .

例如 指数函数 $y=\mathrm{e}^{x}, x\in(-\infty,+\infty)$

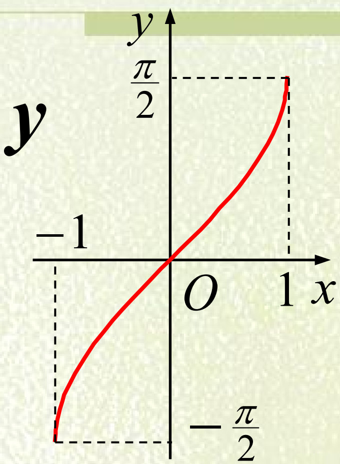
对数函数 $y=\ln x\ , x\in(0,+\infty)$

$\left.\begin{matrix} y=\mathrm{e}^{x}, x\in(-\infty,+\infty) \\ y=\ln x, x\in(0,+\infty) \end{matrix}\right\}$ 互为反函数 ,

它们都单调递增, 其图形关于直线 $y=x$ 对称 .

例8 反正弦函数 $y=\arcsin x$, $\leftarrow x=\sin y$

定义域 $[-1,1]$ 值域 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

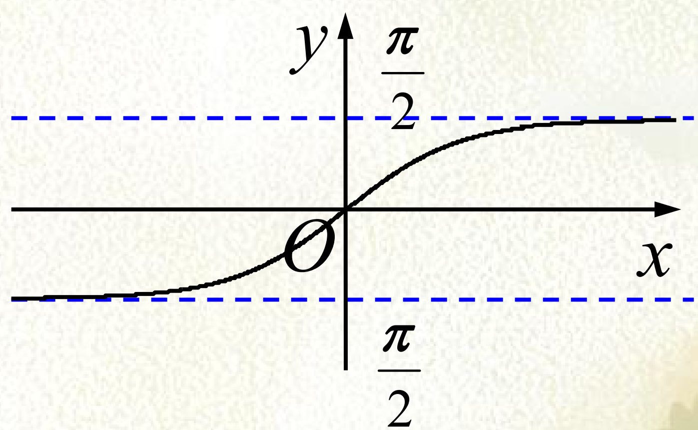


$y=\arcsin x$

反正切函数 $y=\arctan x$ $\leftarrow x=\tan y$

定义域 $(-\infty,+\infty)$

值域 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$



$y=\arctan x$

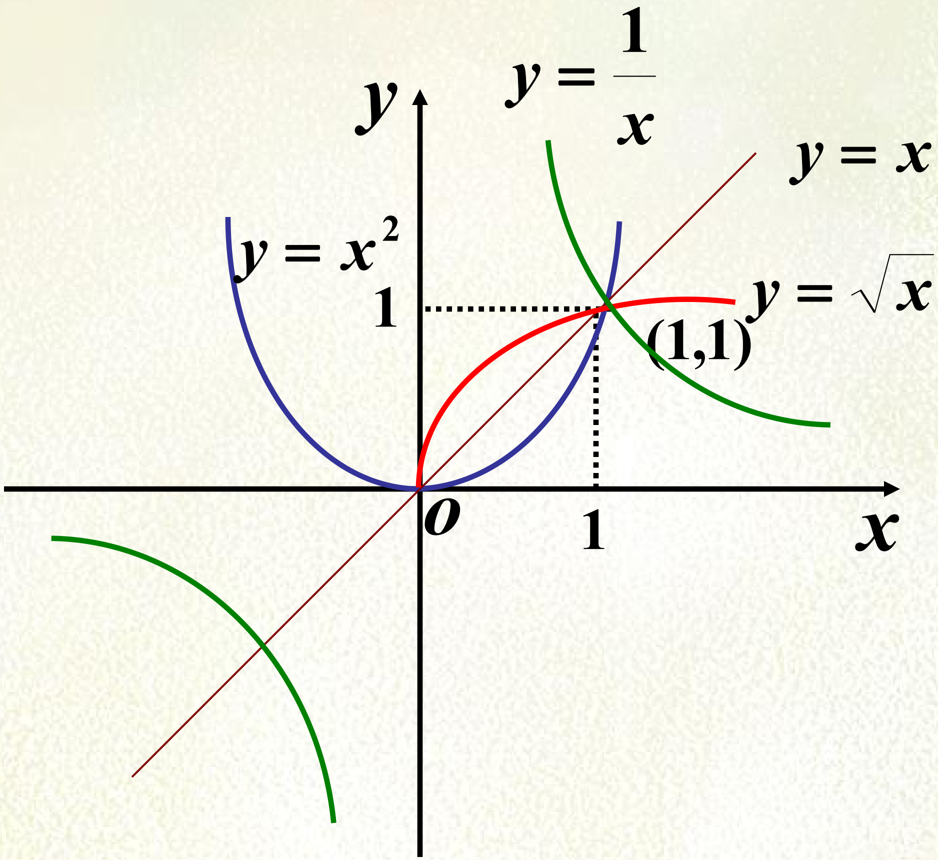
4. 基本初等函数

$$\begin{cases} \text{幂函数} & y = x^{\mu} \quad \mu \in R \text{ 是常数} \\ \text{指数函数} & y = a^{x} \quad (a > 0, a \neq 1) \\ \text{对数函数} & y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1) \\ \text{三角函数} & \sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x \\ \text{反三角函数} & \end{cases}$$

$\arcsin x, \arccos x, \arctan x, arc\cot x$

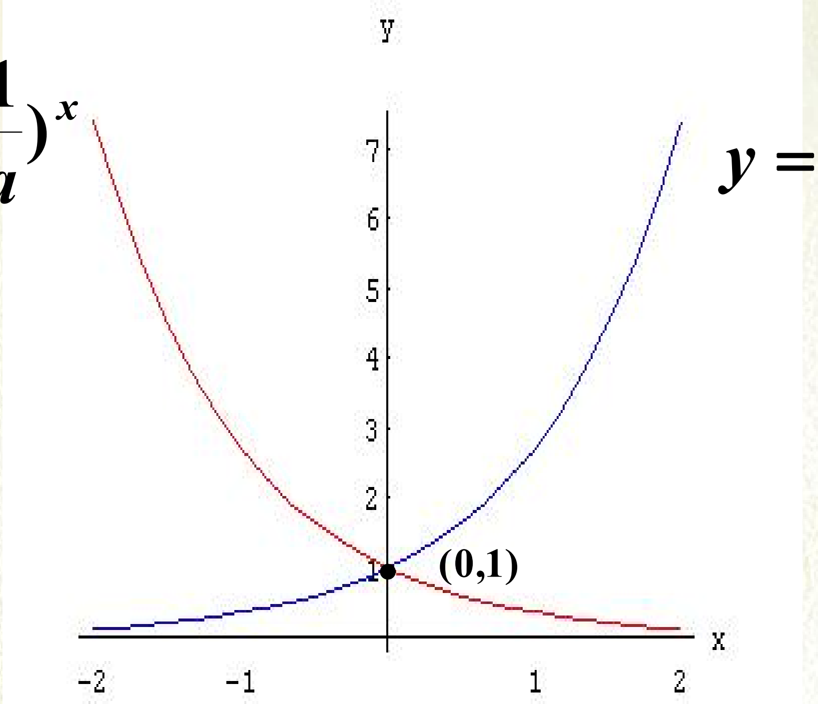
正割 $\sec x = 1/\cos x$, 余割 $\csc x = 1/\sin x$.

(1)幂函数 $y=x^{\mu}$ $\mu\in R$ 是常数



(2) 指数函数 $y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1) \quad y = e^x$

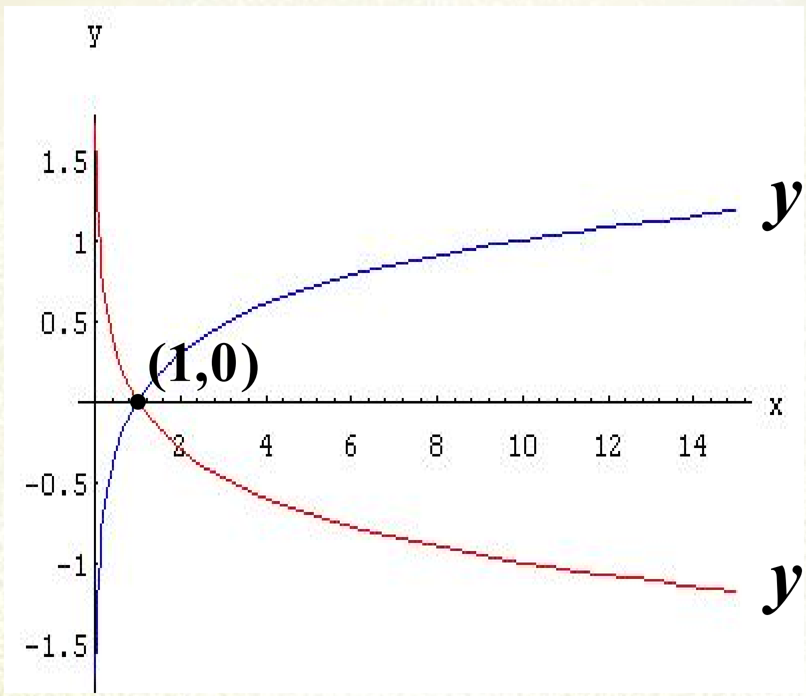
$y = (\frac{1}{a})^x$



$y = a^x$

$(a > 1)$

(3) 对数函数 $y=\log_a x \quad (a>0, a\neq 1) \qquad y=\ln x$



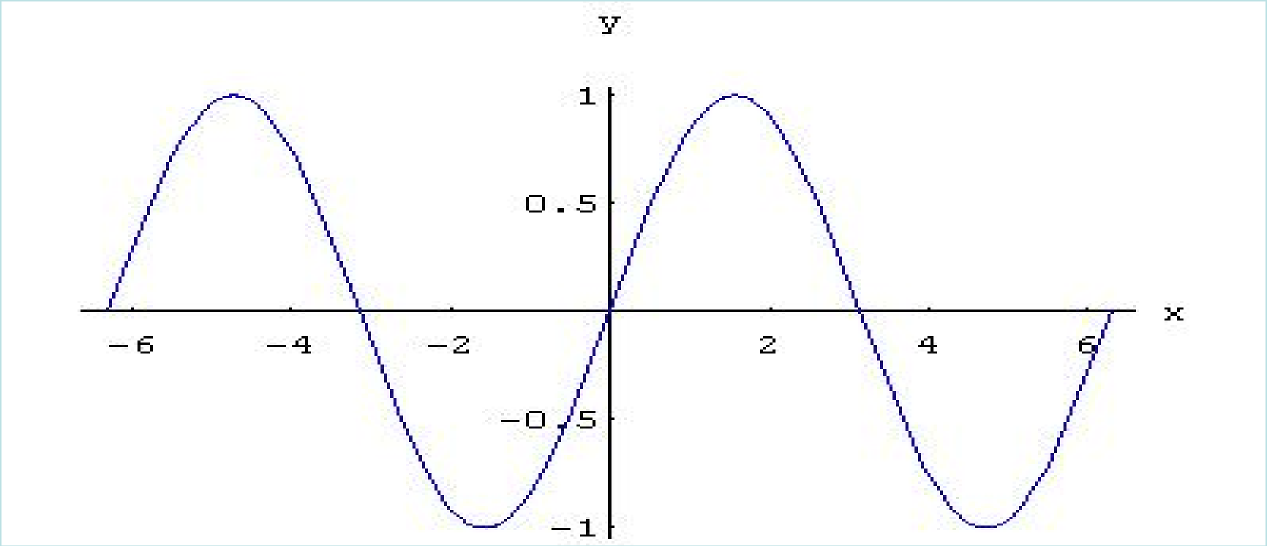
$y=\log_a x$

$(a>1)$

$y=\log_{\frac{1}{a}} x$

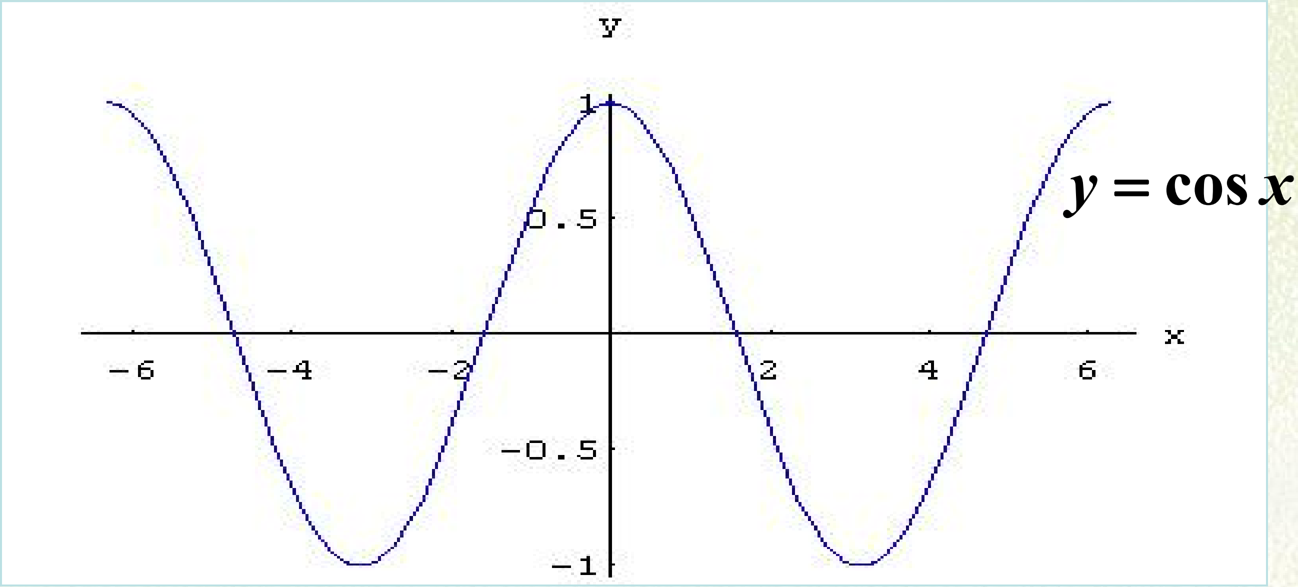
(4) 三角函数 $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$

正弦函数 $y = \sin x$

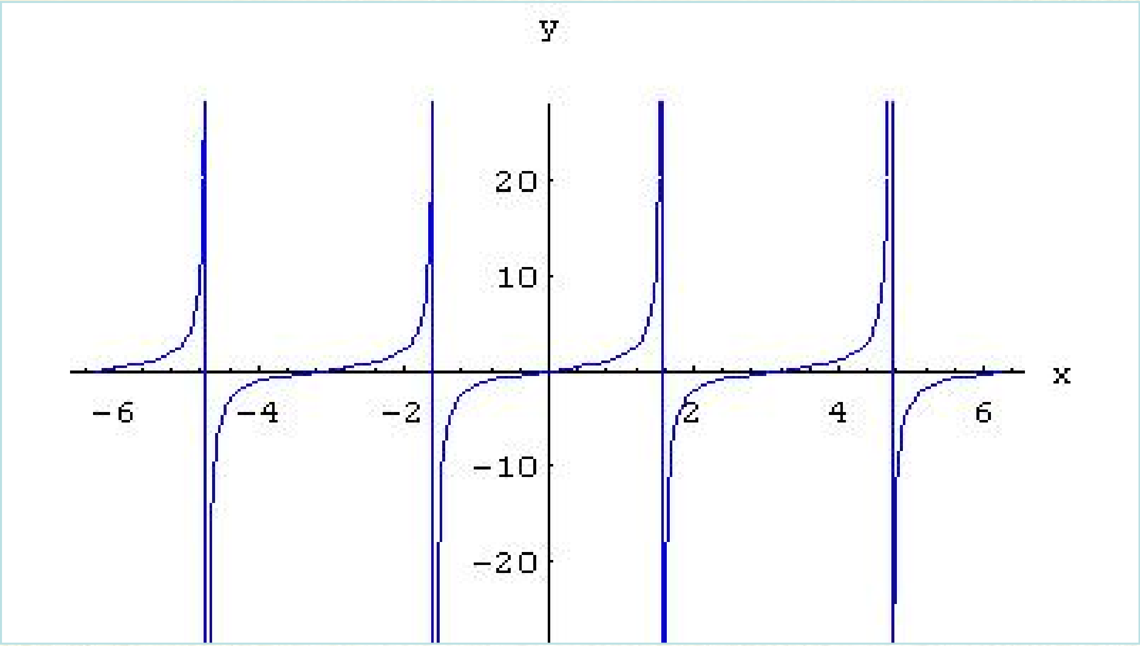


正割 $\sec x = 1/\cos x$, 余割 $\csc x = 1/\sin x$.

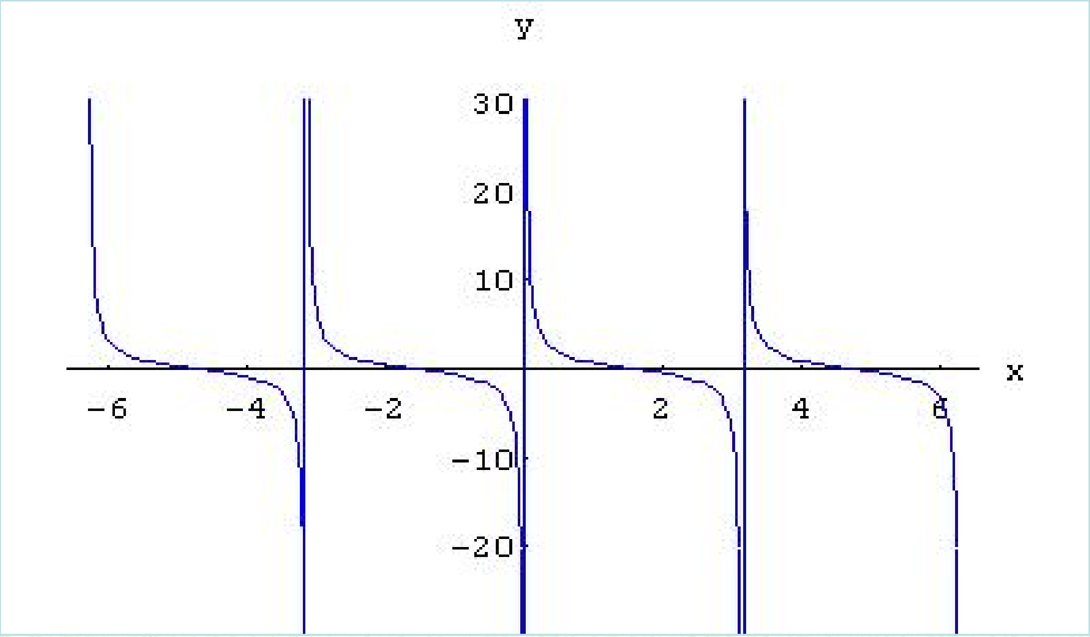
余弦函数 $y = \cos x$



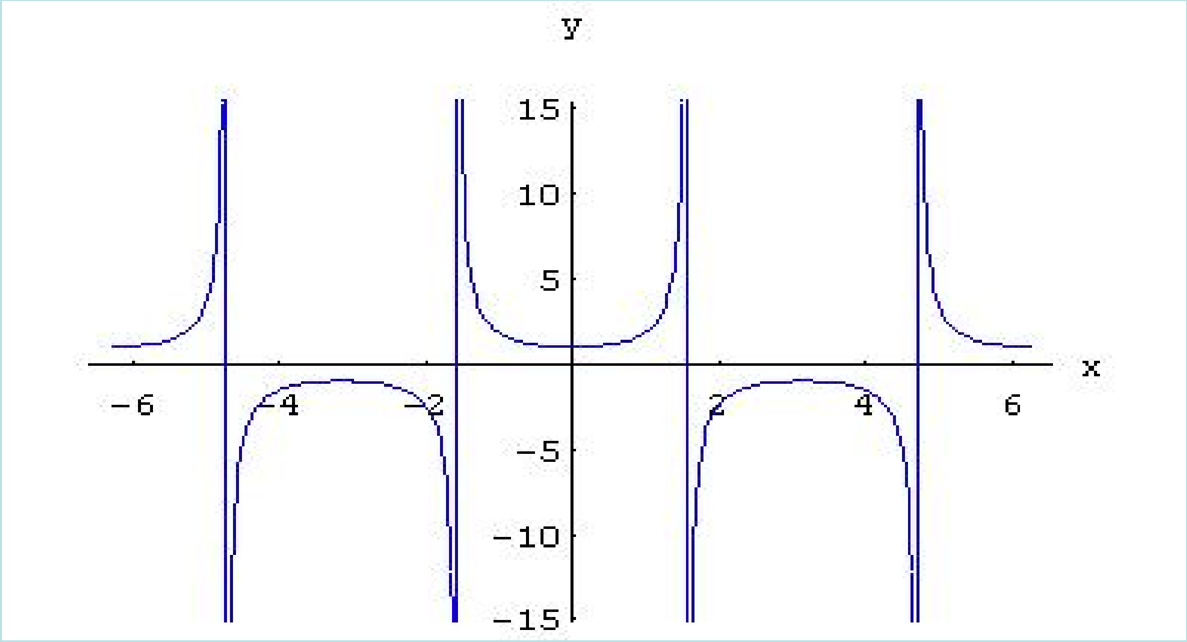
正切函数 $y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$



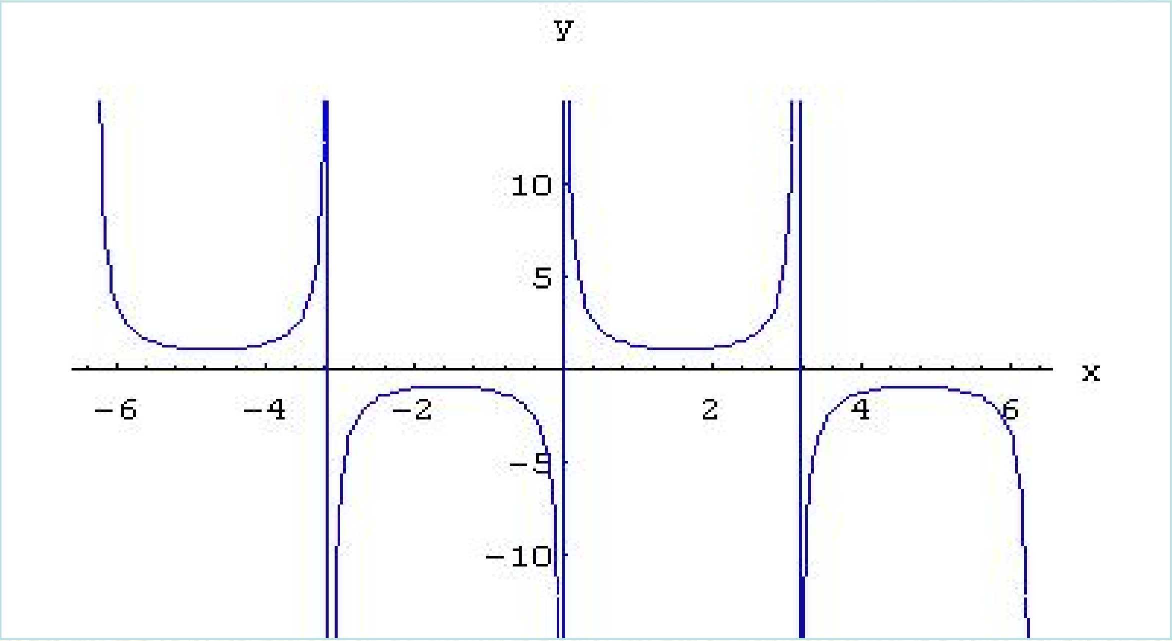
余切函数 $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$



正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$



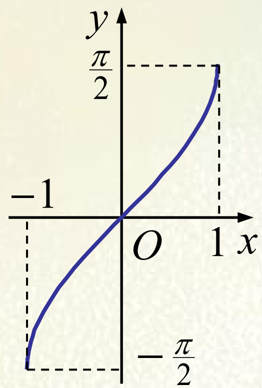
余割函数 $y = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$



有界函数。

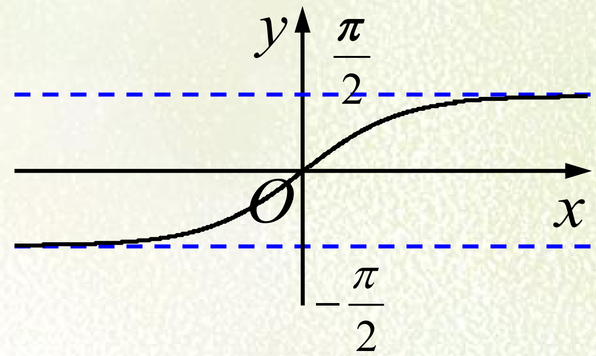
(5) 反三角函数 $\arcsin x, \arccos x, \arctan x, arc\cot x$

反正弦函数



$y = \arcsin x$

反正切函数



$y = \arctan x$

定义域：[-1,1]

值域：$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

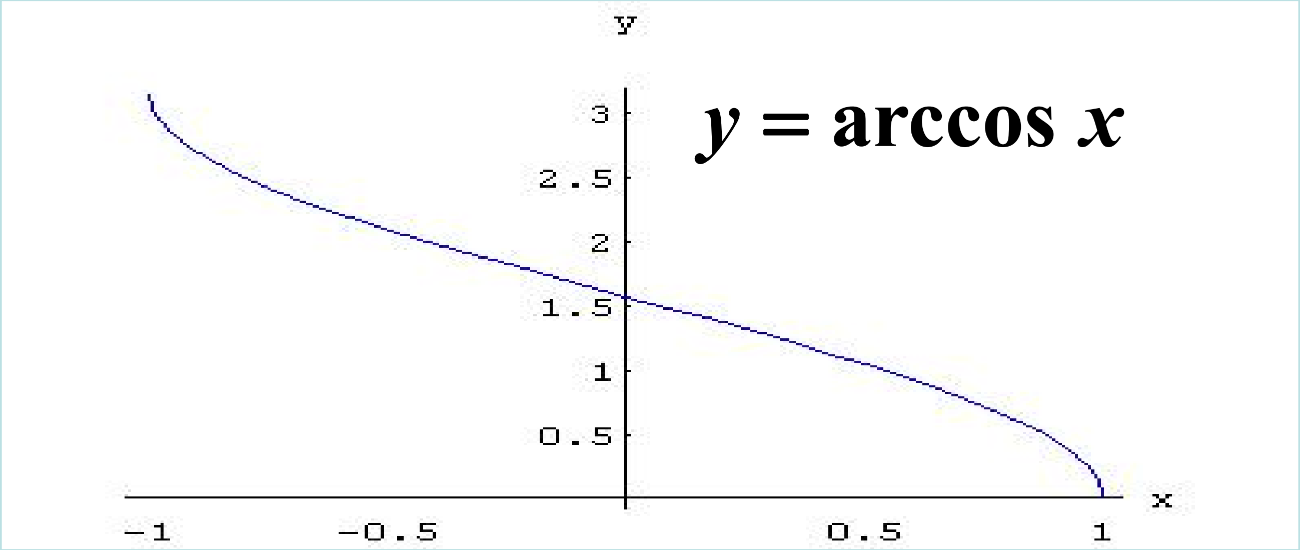
定义域：$(-\infty, +\infty)$

值域：$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

反余弦函数$y = \arccos x$

定义域：[-1,1]

值域： $[0, \pi]$



反三角函数,对数函数,幂函数,三角函数和指数函数,

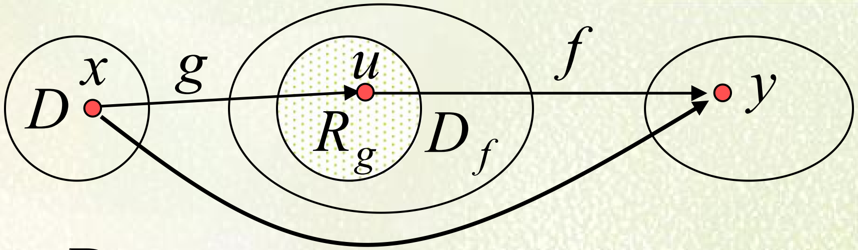
统称为**基本初等函数**.

5. 复合函数

设有函数链

$y = f(u),\ u \in D_f$

$u = g(x),\ x \in D,$ 且 $R_g \subset D_f$



则 $y = f[g(x)],\ x \in D$

称为由函数$u=g(x)$和函数 $y = f(u)$构成的复合函数,它的定义域为D,变量u称为中间变量.

通常也可记为 $f \circ g$

注意:构成复合函数的条件: u=g(x)的值域或部分值域在D_f中.

如: $y = \arcsin u$, $u = 2 + x^2$; 不能复合

即不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的:

注意:构成复合函数的条件 $R_g \subset D_f$ 不可少.

例:$y = u^2$, $u = \sin x$;

$D_f = R \quad R_g = [-1,1]$

$y = (\sin x)^2$

复合函数分解原则:

从外向里，分解为 $\Rightarrow \begin{cases} \text{基本初等函数} \\ \text{基本初等函数的四则运算} \end{cases}$

例2 $y=\sin(2x+1)$分解.

解：$y=\sin(2x+1)$由$y=\sin u, u=2x+1$复合而成.

例3 $y=e^{\tan\frac{1}{x}}$分解.

解：$y=e^{\tan\frac{1}{x}}$由$y=e^{u}, u=\tan v, v=\frac{1}{x}$复合而成.

6. 初等函数

由常数及基本初等函数经过有限次四则运算和复合步骤所构成，并可用一个式子表示的函数，称为初等函数．否则称为非初等函数．

例如，$y=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$ 可表为 $y=\sqrt{x^2}$，故为初等函数.

符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & 当\ x>0 \\ 0, & 当\ x=0 \\ -1, & 当\ x<0 \end{cases}$$

非初等函数

内容小结

1. 函数的定义及函数的二要素 $\begin{cases} \text{定义域} \\ \text{对应法则} \end{cases}$

2. 函数的特性—— 有界性， 单调性, 奇偶性， 周期性

3. 基本初等函数—— 反对幂三指

4. 复合函数及复合函数的分解

5. 初等函数的结构

补充

一、二倍角的正弦、余弦、正切

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$ (α为任意角)

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

二、两角和与差的三角函数

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

三、积化和差公式

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

四、和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},\ \arctan x+arc\cot x=\frac{\pi}{2}$$