第七章 习题课

一、一阶微分方程求解

二、两类二阶微分方程的解法

主要内容

基本概念

一阶方程

类　型

1. 可分离变量
2. 齐次方程
3. 线性方程
4. 伯努利方程

高阶方程

可降阶方程

线性方程解的结构

定理1；定理2
定理3；定理4

二阶常系数线性方程解的结构

特征方程法

特征方程的根及其对应项

待定系数法

$f(x)$ 的形式及其特解形式

一、一阶微分方程求解

1. 一阶标准类型方程求解

$$\text{三个标准类型}\begin{cases}\text{可分离变量方程}\\\text{齐次方程}\\\text{线性方程}\end{cases}$$

关键: 辨别方程类型，掌握求解步骤

（1）可分离变量的微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

$$\Big\downarrow \text{转化}$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad \left(g(y) \neq 0\right)$$ 解分离变量方程

（2）齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad u=\frac{y}{x}, \quad \text{则 } y=ux, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

代入原方程得 $u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)$

分离变量: $\dfrac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

例如 $(x^3+y^3)dx-3xy^2dy=0$ 多项式各项幂次相同。

$$\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^3\right)dx-3\left(\frac{y}{x}\right)^2dy=0$$

（3）一阶线性微分方程

（i）一阶齐次线性微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$

通解 $y=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

（ii）线性非齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

通解 $y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\mathrm{d}x+C\right]$

先解齐次方程，再用常数变易法.

（4）伯努利（ Bernoulli ）方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n$$

解法: 令 $z=y^{1-n}$，则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$$ （线性方程）

例**1.** 求下列方程的通解

$$(1)\ y' + \frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{y^3+x} = 0; \qquad (2)\ y' = \frac{3x^2+y^2}{2xy};$$

$$(3)\ xy' = \sqrt{x^2-y^2}+y; \qquad (4)\ y' = \frac{1}{2x-y^2}.$$

提示**:** (1)因 $\mathrm{e}^{y^3+x} = \mathrm{e}^{y^3}\mathrm{e}^{x}$, 故为分离变量方程:

$$-y^2\mathrm{e}^{-y^3}\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$$

通解 $$\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-y^3} = \mathrm{e}^{x}+C$$

(2) 这是一个齐次方程 ,令 $y = u\,x$,化为分离变量方程:

$$\frac{2u\,\mathrm{d}u}{3-u^2} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

(3) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$

方程两边同除以 x 即为齐次方程，令 $y = u\,x$，化为分离变量方程.

$x > 0$ 时, $y' = \sqrt{1 - (\frac{y}{x})^2} + \frac{y}{x} \Longrightarrow xu' = \sqrt{1 - u^2}$

$x < 0$ 时, $y' = -\sqrt{1 - (\frac{y}{x})^2} + \frac{y}{x} \Longrightarrow xu' = -\sqrt{1 - u^2}$

(4) $y' = \dfrac{1}{2x - y^2}$

调换自变量与因变量的地位，化为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - 2x = -y^2$,

用线性方程通解公式求解 .

例3.设$F(x)=f(x)g(x)$,其中$f(x)$、$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$内满足

条件：$f'(x)=g(x)$, $g'(x)=f(x)$, 且 $f(0)=0$,

$f(x)+g(x)=2\mathrm{e}^{x}$.

(1) 求$F(x)$所满足的一阶微分方程；

(2) 求出$F(x)$ 的表达式 .

解: (1)$\because$ $F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$$=g^2(x)+f^2(x)$$

$$=[g(x)+f(x)]^2-2f(x)g(x)$$

$$=(2\mathrm{e}^{x})^2-2F(x)$$

$$F'(x)+2F(x)=4\mathrm{e}^{2x}$$

所以$F(x)$满足的一阶线性非齐次微分方程:

(2) 由一阶线性微分方程解的公式得

$$F(x)=\mathrm{e}^{-\int 2\,\mathrm{d}x}\left[\int 4\mathrm{e}^{2x}\cdot\mathrm{e}^{\int 2\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=\mathrm{e}^{-2x}\left[\int 4\mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=\mathrm{e}^{2x}+C\mathrm{e}^{-2x}$$

将 $F(0)=f(0)g(0)=0$ 代入上式，得 $C=-1$

于是 $F(x)=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}$

二、两类二阶微分方程的解法

1. 可降阶微分方程的解法 — 降阶法

- $$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = f(x) \longrightarrow \text{逐次积分求解}$$

- $$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = f\left(x, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \xrightarrow{\text{令 } p(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = f(x, p)$$

- $$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = f\left(y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \xrightarrow{\text{令 } p(y) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p)$$

2、二阶常系数齐次线性方程

特征方程　　　　微分方程

$r^2 + pr + q = 0$，　　$y'' + py' + qy = 0$

特 征 根	通解表达式
$r_1 \neq r_2$ 实根	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

3、二阶常系数线性非齐次微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x) \text{——} \quad \text{待定系数法}$$

(1) $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型

特解 $y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x} \quad (k = 0, 1, 2)$

(2) $f(x) = e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos \omega x + \tilde{P}_n(x)\sin \omega x\right]$ 型

特解 $y^* = x^k e^{\lambda x}\left[R_m \cos\omega x + \tilde{R}_m \sin\omega x\right]$

【例1】识别下列二阶微分方程的类型，并求解

1) $xy'' + 3y' = 0$

【解】 此方程为可降阶的、不显含 y 型.

令 $y' = p(x), y'' = \frac{dp}{dx}$, 通解为 $y = \frac{C_1}{x^2} + C_2$.

2) $yy'' + y'^2 = 0$

【解】 此方程为可降阶的、不显含x型.

令 $y' = p(y), y'' = p\frac{dp}{dy}$, 或 $(yy')' = 0$

通解为 $y^2 = C_1 x + C_2$.

3) $y'' - 2y' + 2y = e^x$

【解】此方程为二阶常系数线 性非齐次方程.

特征方程 $r^2 - 2r + 2 = 0 \quad \Rightarrow r = 1 \pm 2i,$

原方程的通解形式为

$$y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + Ae^x.$$

4) $y'' - 2y' + 3y = e^x \sin(\sqrt{2}x)$

【解】此方程为二阶常系数线 性非齐次方程.

特征方程 $r^2 - 2r + 3 = 0 \quad \Rightarrow r = 1 \pm \sqrt{2}i,$

原方程的通解形式为$y = e^x(C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x)$

$$+ xe^x(A\cos \sqrt{2}x + B\sin \sqrt{2}x).$$

例2 求以$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$为通解的微分方程 .

提示: 由通解式可知特征方程的根为 $r_1=1, r_2=2$,

故特征方程为 $(r-1)(r-2)=0$, 即 $r^2-3r+2=0$

因此微分方程为 $y''-3y'+2y=0$

3) 以$\boldsymbol{y=e^x(C_1\sin x+C_2\cos x)}$为通解的二阶常系数线性齐次方程，（$\boldsymbol{C_1}$、$\boldsymbol{C_2}$为任意常数）

【解】 特征方程的根为 $\boldsymbol{r}=1\pm \boldsymbol{i}$

特征方程为 $[\boldsymbol{r}-(1+\boldsymbol{i})][\boldsymbol{r}-(1-\boldsymbol{i})]=0$

即 $\boldsymbol{r^2-2r+2=0,}$

$\therefore$ 所求方程为 $\boldsymbol{y''}-2\boldsymbol{y'}+2\boldsymbol{y}=0.$

设二阶可微函数 $f(x)$ 满足方程

$f(x)=e^x-\cos x-\int_0^x(x-t)f(t)dt$，求 $f(x)$.

提示： $f(x)=e^x-\cos x-\int_0^x xf(t)dt+\int_0^x tf(t)dt$

$$=e^x-\cos x-x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t)dt$$

先后求导两次，有 $f'(x)=e^x+\sin x-\int_0^x f(t)dt,$

$$f''(x)=e^x+\cos x-f(x),$$

即 $y''+y=e^x+\cos x$ 且 $y(0)=0, y'(0)=1$

例**2.** 设 $f(x)$ 二阶导数连续, 且满足方程

$$f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

求 $f(x)$.

提示: $f(x)=\sin x-x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t$, 则

$$\underline{f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}-\cancel{x\,f(x)}+\cancel{x\,f(x)}$$

$$f''(x)=-\sin x-f(x)$$

问题化为解初值问题: $\begin{cases} f''(x)+f(x)=-\sin x \\ f(0)=0\,, \quad f'(0)=1 \end{cases}$

最后求得 $\quad f(x)=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{x}{2}\cos x$