第二节 常数项级数的审敛法

一、正项级数及其审敛法

二、交错级数及其审敛法

三、绝对收敛与条件收敛

四、小结　思考题

一、正项级数及其审敛法

1.【定义】 若 $u_n \geq 0$, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数 .

2. 正项级数收敛的充要条件:

【基本定理1】

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 部分和数列 $\{s_n\}$ 有界 $(n=1,2,\cdots)$.

【证】 "$\Longrightarrow$" 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\{s_n\}$ 收敛，故有界.

"$\Longleftarrow$" $\because u_n \geq 0$， $\therefore$ 部分和数列 $\{s_n\}$ 单调递增,

又已知 $\{s_n\}$ 有界，故 $\{s_n\}$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

注：如果正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，部分和数列$s_n \to +\infty$.

即$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty$.

3. 【定理2】比较审敛法

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$均为正项级数，且 $u_n \le v_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$

则 (1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，必有 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，必有 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

【推论】 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，

若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛(发散)，

且 $u_n \le kv_n \ (n \ge N, k > 0)$ (或 $u_n \ge kv_n$)

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 (发散).

欲证收敛，则放大；欲证发散，则缩小

比较审敛法的不便: 须有参考级数（比较对象）.

【教材例 1】 讨论 p–级数

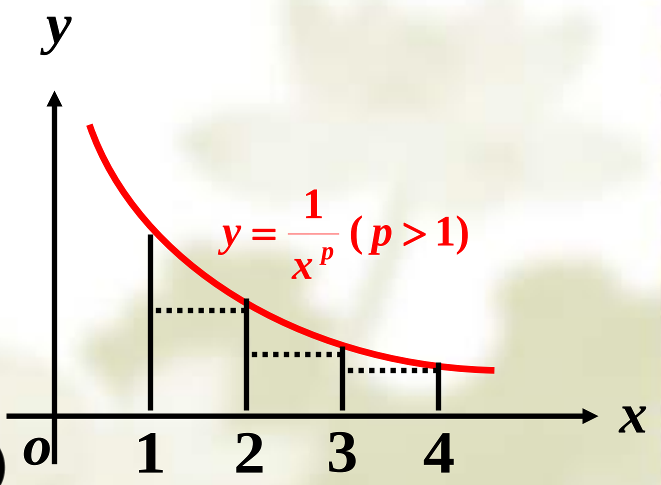
$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$ 的收敛性. $(p>0)$

【解】 设 $p\le 1$, $\therefore\ n^p\le n\ \Rightarrow \dfrac{1}{n^p}\ge\dfrac{1}{n}$, p—级数发散

设 $p>1$, 由图可知

$n-1\le x\le n$ 时, $\dfrac{1}{n^p}\le\dfrac{1}{x^p}$,

$$\frac{1}{n^p}=\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{n^p}<\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x^p}\quad (n=2,3,\cdots)$$



$$s_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}$$

$$< 1 + \int_1^2 \frac{dx}{x^p} + \int_2^3 \frac{dx}{x^p} + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{dx}{x^p}$$

$$= 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^p} = 1 + \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{n^{p-1}}\right) < 1 + \frac{1}{p-1}$$

即$\{s_n\}$有界，则$p-$级数收敛.

【结论】

$$p-\text{级数}\begin{cases}\text{当}p>1\text{时，收敛}\\ \text{当}p\le 1\text{时，发散}\end{cases}$$

［重要参考级数］ 几何级数，p— 级数，调和级数.

【教材例 2】 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$是发散的.

【证明】 因为 $n(n+1)\le(n+1)^2$

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\ge\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}=\frac{1}{n+1}\quad(n=1,2,\cdots)$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}$ 发散

根据比较审敛法可知，所给级数发散.

4. 【定理3】比较审敛法的极限形式

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，如果 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$,

则(1) 当 $0<l<+\infty$ 时，二级数有相同的敛散性; [同敛散]

(2) 当 $l=0$ 时，若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(3) 当 $l=+\infty$ 时，若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

【教材例 3】 判定下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-n}$; (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})$

【解】 (1) $\because \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1,$ 原级数发散.

(2) $\because \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3^n-n}}{\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{n}{3^n}}=1,\quad \because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$收敛, 故原级数收敛.

(3) $\because \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}=1,$ 故原级数收敛.

若将正项级数与等比级数比较，则得到两个实用中很方便的比值判别法和根值判别法.

6.【定理4】比值审敛法（达朗贝尔判别法）：

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是正项级数, 如果$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$ (ρ为数或$+\infty$)

则 (1)$\rho<1$时级数收敛; (2)$\rho>1$时级数发散;

(3)$\rho=1$时失效.

【两点注意】

1.当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1$ 时, 级数可能收敛也可能发散.

【例】 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散， 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛， $(\rho=1)$

事实上，对 p—级数， $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1/(n+1)^p}{1/n^p}=1$

$$\text{但}\begin{cases} p>1,\ \text{级数收敛}; \\ p\le 1,\ \text{级数发散}. \end{cases}$$

2.比值审敛法的条件是充分的，而非必要.

【教材例 4】 判别下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$.

【解】 (1) $\because \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\frac{1}{n+1}\to 0 \quad (n\to\infty)$,

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛.

(2) $\because \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{n!}=\frac{n+1}{10}\to\infty \quad (n\to\infty)$,

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$ 发散.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$

$$\because \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)\cdot 2n}{(2n+1)\cdot(2n+2)} = 1,$$

比值审敛法失效，改用比较审敛法

$\because \frac{1}{(2n-1)\cdot 2n} < \frac{1}{n^2}$， $\because$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\cdot(2n-1)}$ 收敛.

7. 根值审敛法【定理 5】(柯西判别法):

设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, 若$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$ (ρ为数或$+\infty$),

则 (1) $\rho<1$ 时级数收敛; (2) $\rho>1$ 时级数发散;

(3) $\rho=1$时失效.

【例如】 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^n}$,

$$\because \sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty)$$ 故级数收敛.

【说明】

(1) 根值法条件同样是充分条件，不必要.

(2) 根值法常用于一般项u_n中含有指数为n次幂的级数的判别.

(3) 比值法较根值法更常用，但也有例外.

【教材例5】判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 敛散性.

【解】

$$\because \sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}=\frac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2}$$

当n为偶数时，$\sqrt[n]{u_n}=\frac{\sqrt[n]{3}}{2}\to\frac{1}{2}$

当n为奇数时，$\sqrt[n]{u_n}=\frac{\sqrt[n]{1}}{2}=\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{2}$ 即原级数收敛.

【教材例5】判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 敛散性.

【解】 而若用比值法来求 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{2+(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}$

当n为偶数时，$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{6}$ 当n为奇数时，$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 不存在，从而比值法失效,

且此例告诉我们收敛级数未必满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1.$

二、交错级数及其审敛法

【定义】 正、负项相间的级数称为交错级数.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \text{ 或 } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n \quad (\text{其中} u_n > 0)$$

【定理7】（莱布尼兹定理）

(Leibnitz 交错级数 判别法) 若交错级数满足条件:

1) $u_n \geq u_{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots);$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0,$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛, 且其和 $s \leq u_1$, 其余项满足

$$|r_n| \leq u_{n+1}.$$

【注意】条件(1)是充分条件，不必要 .

即使不满足条件(1)，交错级数仍有可能收敛.

条件(2)是任何级数收敛的必要条件.

【快速练习】用Leibniz 判别法判别下列级数的敛散性:

1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$ 收敛

2) $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}+\cdots$ 收敛

3) $\frac{1}{10}-\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}-\frac{4}{10^4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{10^n}+\cdots$ 收敛

上述级数各项取绝对值后所成的级数是否收敛 ?

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}$.

发散 收敛 收敛

三、绝对收敛与条件收敛

【定义】 正项和负项任意出现的级数称为任意项级数.

【定义】 若$\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|$收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为绝对收敛.

若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散, 而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛, 则称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为条件收敛.

【例如】 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 为条件收敛

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{10^n}$$

为绝对收敛

【定理】 若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

证明 $0 \le u_n + |u_n| \le 2|u_n|$

根据比较审敛法 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n + |u_n|$ 收敛,

$$u_n = (u_n + |u_n|) - |u_n| \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛.}$$

【说明】(1) 上定理的作用: $\boxed{\text{任意项级数}} \Rightarrow \boxed{\text{正项级数}}$

(2) 逆命题不成立.

如 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

(3) 上例也说明 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 未必发散. 但若

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\rho>1 \text{ 或 } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\rho>1, \text{ 则 } \sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{ 必发散.}$$

【教材例6】证明下列级数绝对收敛 ：

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^4};\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{e^n}.$$

【证】 (1) 此为变号级数（任意项级数）

$$\because \left|\frac{\sin n\alpha}{n^4}\right| \le \frac{1}{n^4},\quad \text{而} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \text{ 收敛 ，}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^4}\right| \text{ 收敛}$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^4}$ 绝对收敛 .

(2) 令 $u_n = \dfrac{n^2}{e^n}$，

$$\because \quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^2}{e^{n+1}}}{\dfrac{n^2}{e^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{e} < 1$$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{n^2}{e^n}\right|$ 收敛，因此 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{e^n}$ 绝对收敛.

四、小结

常数项级数审敛

1. 利用部分和数列的极限判别级数的敛散性(定义)

2. 正项级数审敛法

3. 交错级数审敛法（Leibniz判别法）

4. 任意项级数审敛法

绝对收敛　条件收敛

级数审敛法表格一览

	正项级数	交错级数	任意项级数
审敛法	1. 若 $s_n \to s$,则级数收敛; 2. 当 $n \to \infty$, $u_n \not\to 0$, 则级数发散; 3. 按基本性质；（数乘、加减、有限项、括号）		
	4. 充要条件 5. 比较法 6. 比值法 7. 根值法	4. Leibnitz定理	4. 绝对收敛 5. 条件收敛

【思考与练习】

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，能否推出 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛？

[提示] $\because \lim_{n\to\infty} \dfrac{u_n^2}{u_n} = \lim_{n\to\infty} u_n = 0$

由比较审敛法极限形式可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛.

【注意】反之不成立. 例如,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 收敛}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ 发散}.$$

[思考] 若将上述正项级数改为一般项级数,还成立吗?

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \text{ 收敛}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ 发散}.$$