重 庆 大 学

学 生 实 验 报 告

实验课程名称　　　　　　数学实验

开课实验室　　　　　　DS1407

学　　　院　计算机学院　年级 2021 专业班

计卓 2 班，信安 1 班，计科 2 班

学 生 姓 名　文红兵　学　号 20214590

学 生 姓 名　高志朋　学　号 20214141

学 生 姓 名　张奎元　学　号 20214358

开 课 时 间　2022 至 2023 学年第　二　学期

总 成 绩	

实验 1：MATLAB 作图和迭代

开课学院、实验室： DS1407　　实验时间： 2023 年 3 月 5 日

课程名称	数学实验	实验项目名称	实验 1：MATLAB 作图和迭代	实验项目类型				
				验证	演示	综合	设计	其他
指导教师	肖剑	成绩		√				

题目 1

在同一个坐标下作出 $y_1=e^x$, $y_2=1+x$, $y_3=1+x+(1/2)x^2$, $y_4=1+x+(1/2)x^2+(1/6)x^3$ 这四条曲线的图形，要求在图上加各种标注，同时用 subplot 作出这四条曲线，为每幅图形加上标题。

程序

```
%实验1-1-2
x = -2 : 0.05 : 2 ;
y1 = exp(x) ;
y2 = 1 + x ;
y3 = 1 + x + 0.5 * (x.^2) ;
y4 = y3 + (1/6) * (x.^3) ;
%
subplot(2,2,1) ; plot(x , y1 , "-r") ;
legend("y1=e^x") ; xlabel("x轴") ; ylabel("y轴") ;
title("Figure 1") ; grid on ;
%
subplot(2,2,2) ; plot(x , y2 , "--b") ;
legend("y2=1+x") ; xlabel("x轴") ; ylabel("y轴") ;
title("Figure 2") ; grid on ;
%
subplot(2,2,3) ; plot(x , y3 , ":.m") ;
legend("y3 =1+x+0.5*(x^2)") ; xlabel("x轴") ;
ylabel("y轴") ; title("Figure 3") ; grid on ;
%
subplot(2,2,4) ; plot(x , y4 , "-.k") ;
legend("y4 =1+x+0.5*(x^2)+(1/6)*(x^3)") ; xlabel("x轴") ;
ylabel("y轴") ; title("Figure 4") ; grid on ;
```


```
%实验1-1-2
x = -2 : 0.05 : 2 ;
y1 = exp(x) ;
y2 = 1 + x ;
y3 = 1 + x + 0.5 * (x.^2) ;
y4 = y3 + (1/6) * (x.^3) ;
%
subplot(2,2,1) ; plot(x , y1 , "-r") ;
legend("y1=e^x") ; xlabel("x轴") ; ylabel("y轴") ;
title("Figure 1") ; grid on ;
%
subplot(2,2,2) ; plot(x , y2 , "--b") ;
legend("y2=1+x") ; xlabel("x轴") ; ylabel("y轴") ;
title("Figure 2") ; grid on ;
%
subplot(2,2,3) ; plot(x , y3 , ":.m") ;
legend("y3 =1+x+0.5*(x^2)") ; xlabel("x轴") ;
ylabel("y轴") ; title("Figure 3") ; grid on ;
%
subplot(2,2,4) ; plot(x , y4 , "-.k") ;
legend("y4 =1+x+0.5*(x^2)+(1/6)*(x^3)") ; xlabel("x轴") ;
ylabel("y轴") ; title("Figure 4") ; grid on ;
```

结果

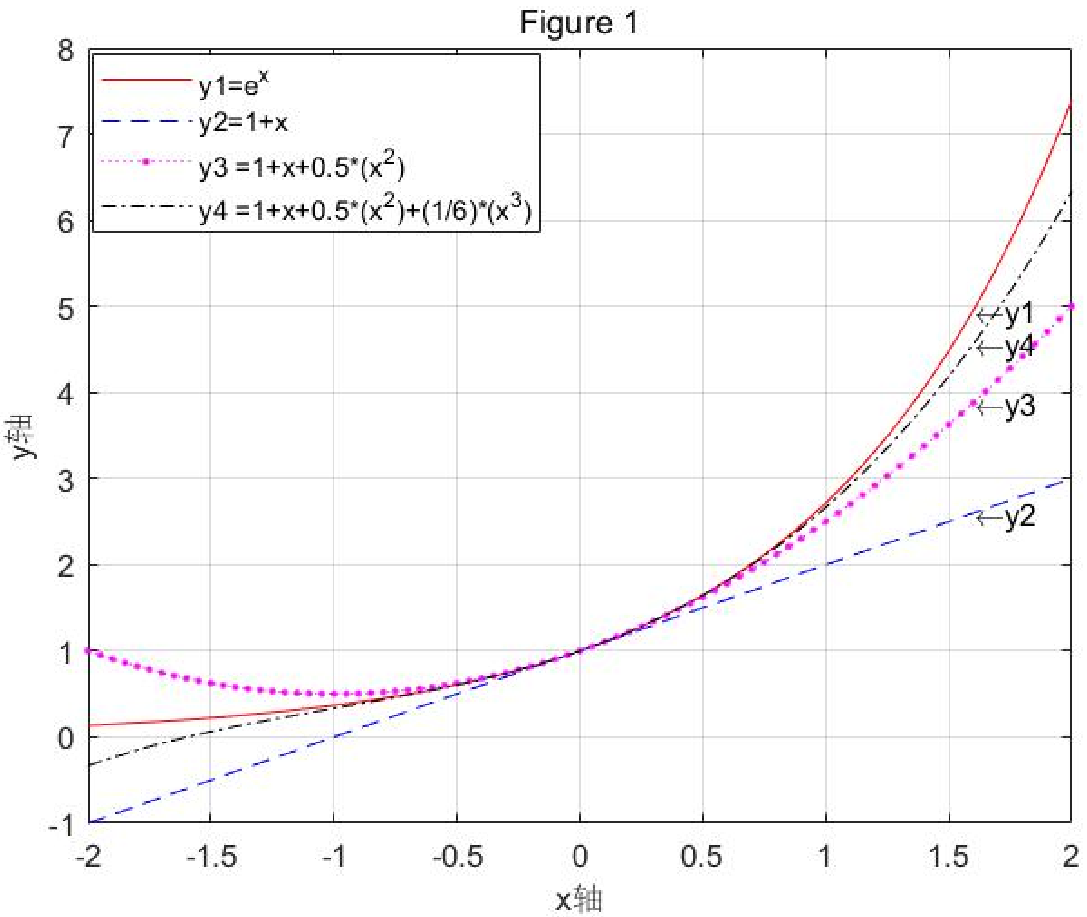


Figure 1
y1=e^x
y2=1+x
y3 =1+x+0.5*(x^2)
y4 =1+x+0.5*(x^2)+(1/6)*(x^3)
←y1
←y4
←y3
←y2
x轴
y轴

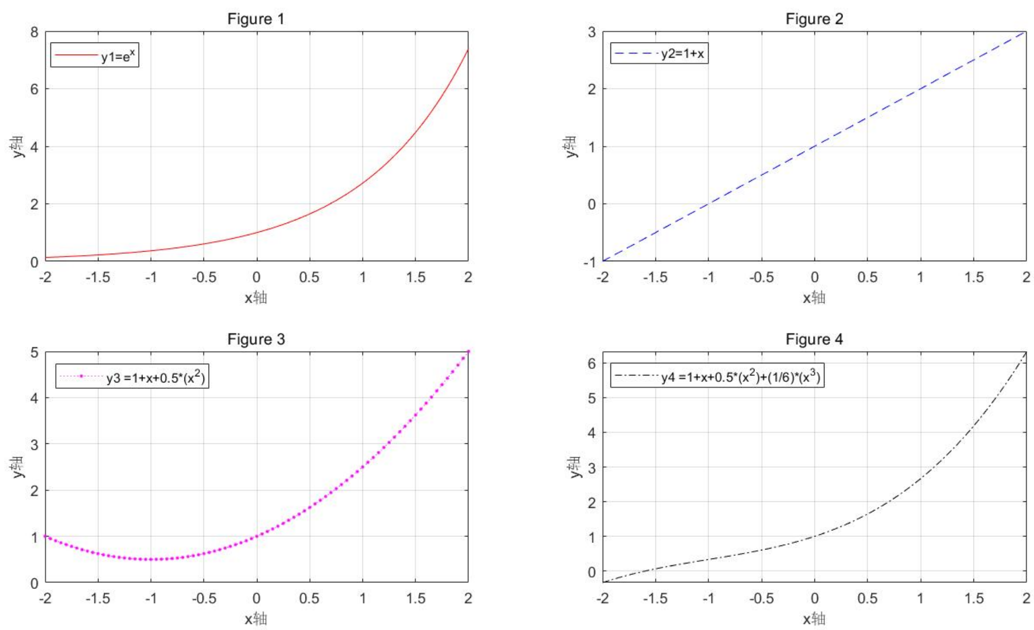


Figure 1
y1=e^x
Figure 2
y2=1+x
Figure 3
y3 =1+x+0.5*(x^2)
Figure 4
y4 =1+x+0.5*(x^2)+(1/6)*(x^3)
x轴
y轴

分析

该程序对四个函数进行了绘图，分别用到了 plot 和 subplot ，并且运用了各种标注使图像更加清晰。

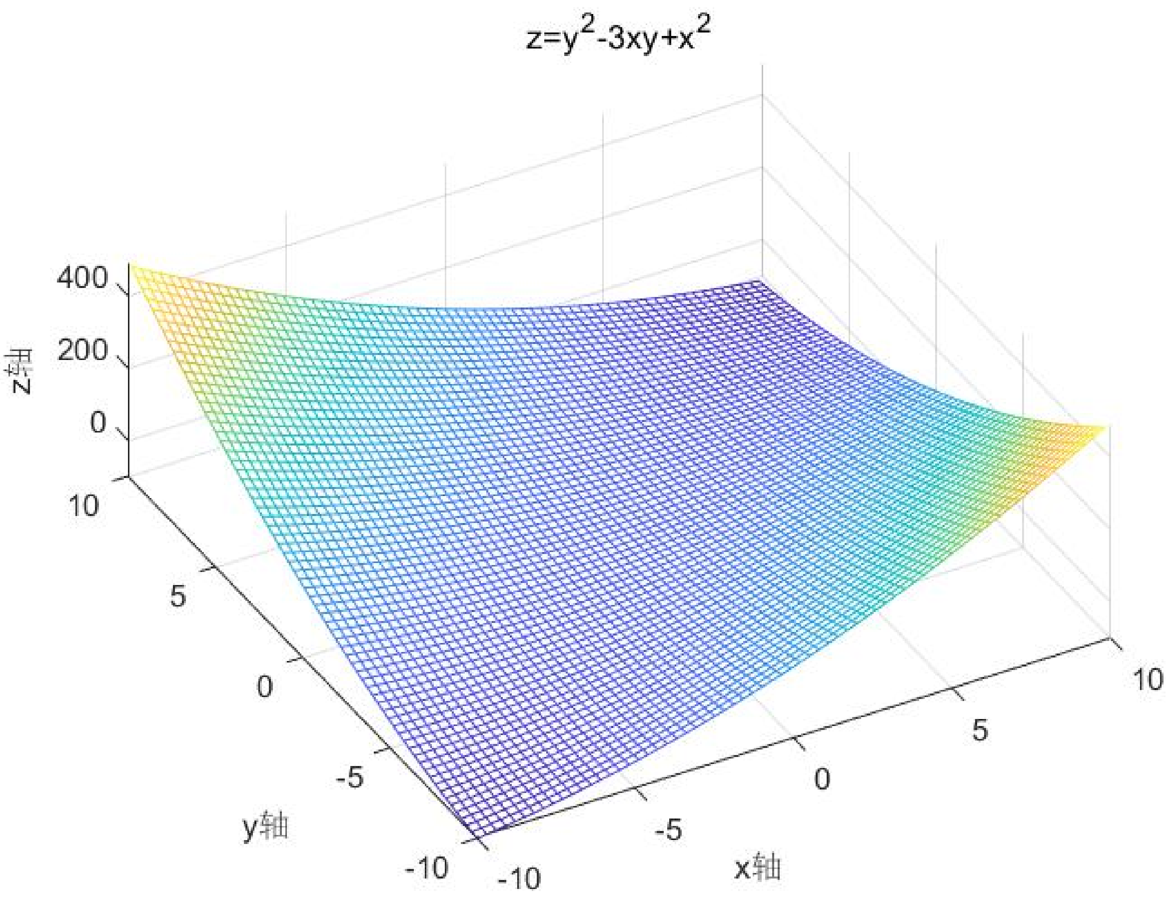
题目 2

绘制如下函数 $z = y^2 - 3xy + x^2$ 曲面图。

程序

```
%实验1-2
x = -10 : 0.3 : 10 ;
y = -10 : 0.3 : 10 ;
[X,Y] = meshgrid(x,y) ;
Z = Y.^2 - 3 .* X .* Y + X.^2 ;
mesh(X,Y,Z) ;
title("z=y^2-3xy+x^2") ;
xlabel("x轴") ; ylabel("y轴") ; zlabel("z轴") ;
view([-28.867955801105 62.6971962616822]);
```

结果



分析

该程序对这个多元函数进行了绘图，用 meshgrid 生成了网格，用 mesh 生成了较为清晰的图像，用 view 调整了视角，方便观看图像。

题目 3

3 编写函数 M-文件 sq.m：用迭代法求 $x=\sqrt{a}$ 的值。求平方根的迭代公式为

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})$$

迭代的终止条件为前后两次求出的 x 的差的绝对值小于 10^{-5}。

程序

```
%实验1-3
function f = sq(a)
x = 1 ;  % 初始值
eps = 1e-5 ; % 误差
while(abs(0.5 * (x + a / x) - x) >= eps)  % 点迭代
    x = 0.5 * (x + a / x) ;
end
f = x ;  % 返回值
```

结果

```
>> sq(5)

ans =

    2.2361
```

分析

该程序写了一个开根号的程序，用点迭代的方法，在误差允许的范围内结束迭代。

题目 4

将方程 $x^5+5x^3-2x+1=0$ 改写成各种等价的形式进行迭代，观察迭代是否收敛，并给出解释。

程序

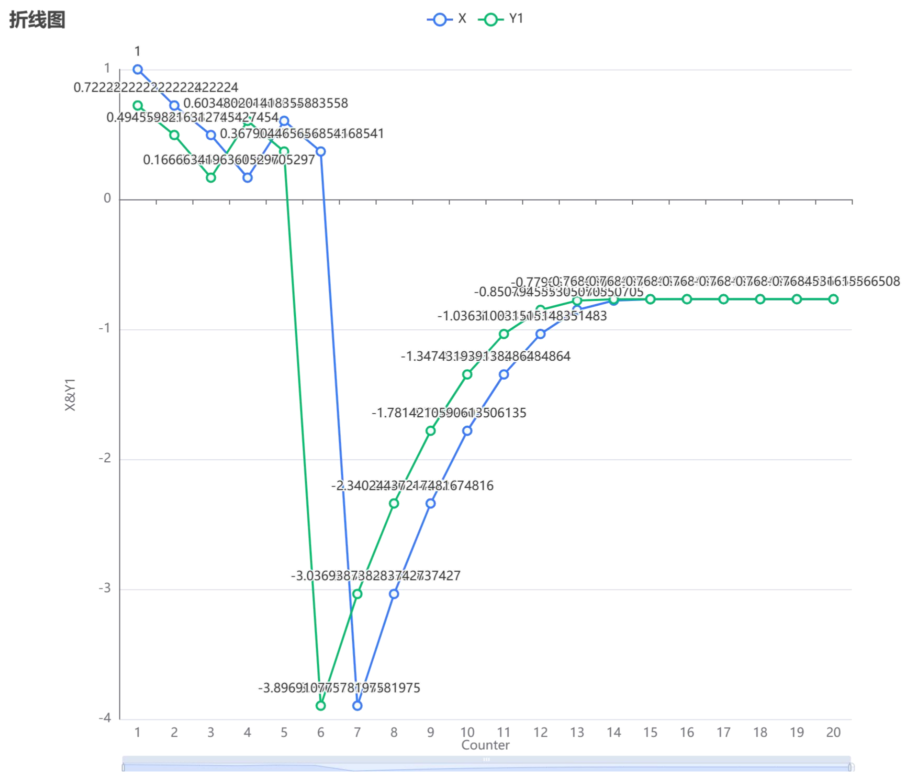
```
%实验1-4
x = 1 ;
iter_y1 = [[],[],[]] ; % 迭代过程的y1
iter_y2 = [[],[],[]] ; % 迭代过程的y2
iter_y3 = [[],[],[]] ; % 迭代过程的y3
for i = 1 : 1 : 20
    iter_y1(1,i) = i ;
    iter_y1(2,i) = x ;
    iter_y1(3,i) = y1(x) ;
    x = y1(x) ;
end
x = 1 ;
for i = 1 : 1 : 20
    iter_y2(1,i) = i ;
    iter_y2(2,i) = x ;
    iter_y2(3,i) = y2(x) ;
    x = y2(x) ;
end
x = 1 ;
for i = 1 : 1 : 20
    iter_y3(1,i) = i ;
    iter_y3(2,i) = x ;
    iter_y3(3,i) = y3(x) ;
    x = y3(x) ;
end

xlswrite("./iter_y1",iter_y1) ;
xlswrite("./iter_y2",iter_y2) ;
xlswrite("./iter_y3",iter_y3) ;
```

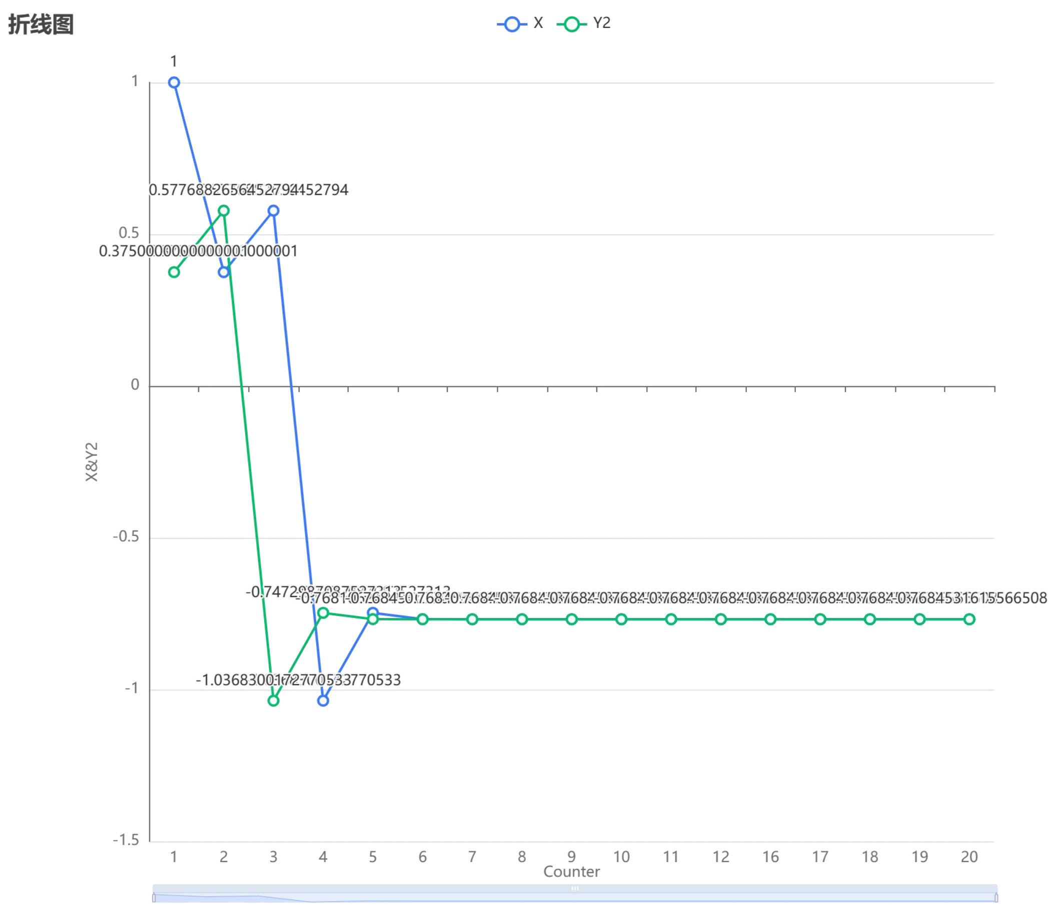
```
function f = y1(x)
x = x + eps ;
f = (-4*x^5-10*x^3+1)/(2-5*x^4-15*x^2) ;
```

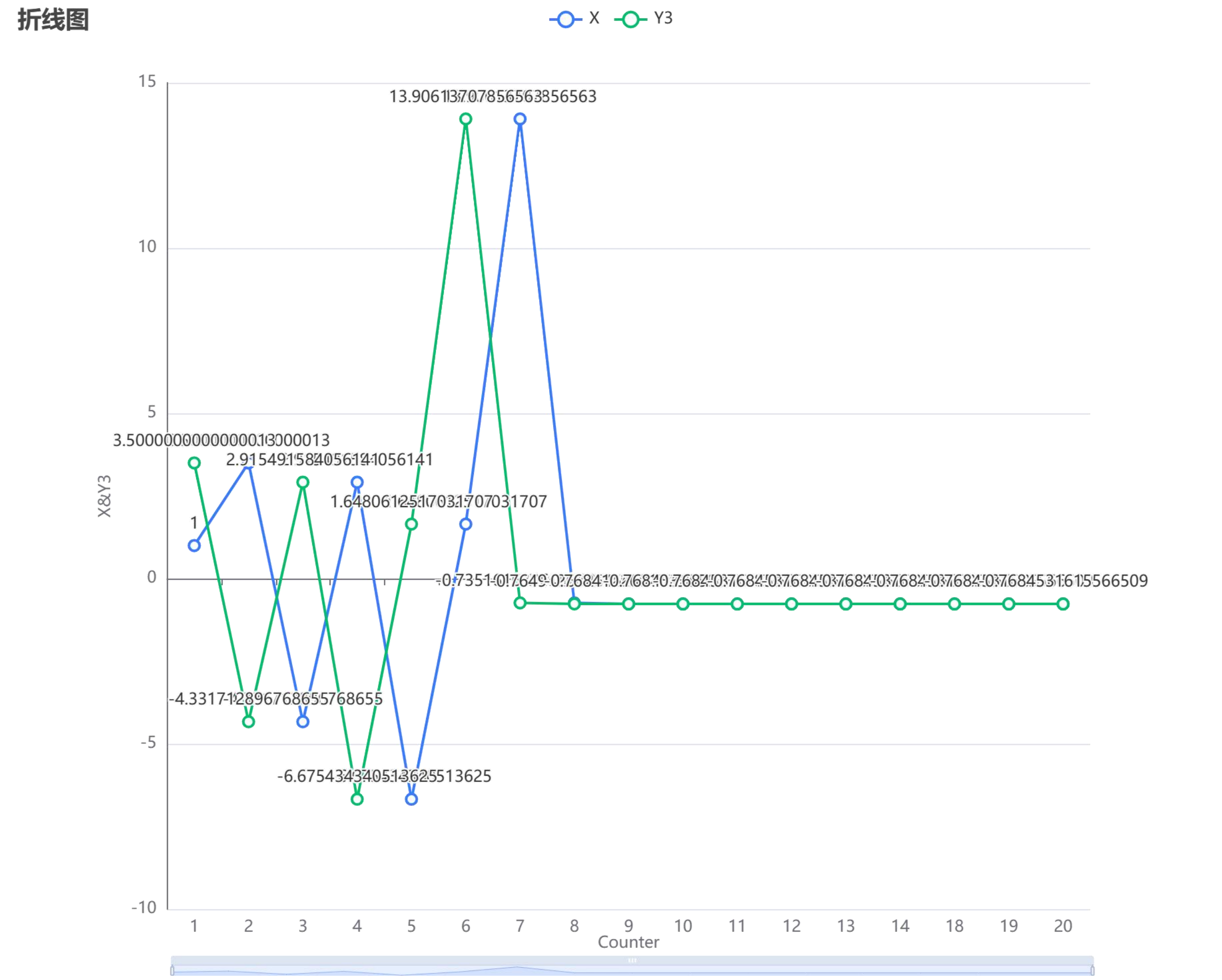
```
function f = y3(x)
x = x + eps ;
f = (-10*x^4+8*x^2-5*x)/(x^5-5*x^3+6*x-4);
```

```
function f = y2(x)
x = x + eps ;
f = (2*x^6+4*x^2-3*x)/(5*x^3+3*x^5+2*x-2) ;
```

结果


折线图
X
Y1
X&Y1
Counter
0.7222222222222222422224
0.6034802014418355883558
0.4945598216312745427454
0.3679044656568541685
0.1666634196360529705297
-3.8969107757819758197
-3.0369387382837427437427
-2.340244372174816748167
-1.781421059061350613506135
-1.347431939138486484864
-1.036310031515148351483
-0.8507945553050705
0.7684531615566508


折线图
X
Y2
X&Y2
Counter
0.5776882656452794452794
0.3750000000000001000001
-1.0368300172770533770533
0.7684531615566508



分析

分别选取了三个迭代函数，$x=\frac{x^5+5x^3+1}{2}$，$x=-\frac{1}{5}x^3+\frac{2}{5x}-\frac{1}{5x^2}$，$x=-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4}$，发现他们并不收敛，于是使用了他们的迭代加速函数，$\mathrm{x}=\frac{-4x^5-10x^3+1}{2-5x^4-15x^2}$，$x=\frac{2x^6+4x^2-3x}{5x^3+3x^5+2x-2}$，$x=\frac{-10x^4+8x^2-5x}{x^5-5x^3+6x-4}$，得到了三个迭代结果的折线图。由三个折线图可知第二个迭代加速函数收敛速度最快，在第五次迭代时候就已经收敛，而第第一个迭代加速函数迭代速度最慢，需要在第 14 次迭代才收敛。

实验 2：微分方程数值解与拟合

开课学院、实验室：　DS1407　实验时间：2023 年 3 月 11 日

课程名称	数学实验	实验项目名称	实验 2：微分方程数值解与拟合	实验项目类型				
				验证	演示	综合	设计	其他
指导教师	肖剑	成绩				√		

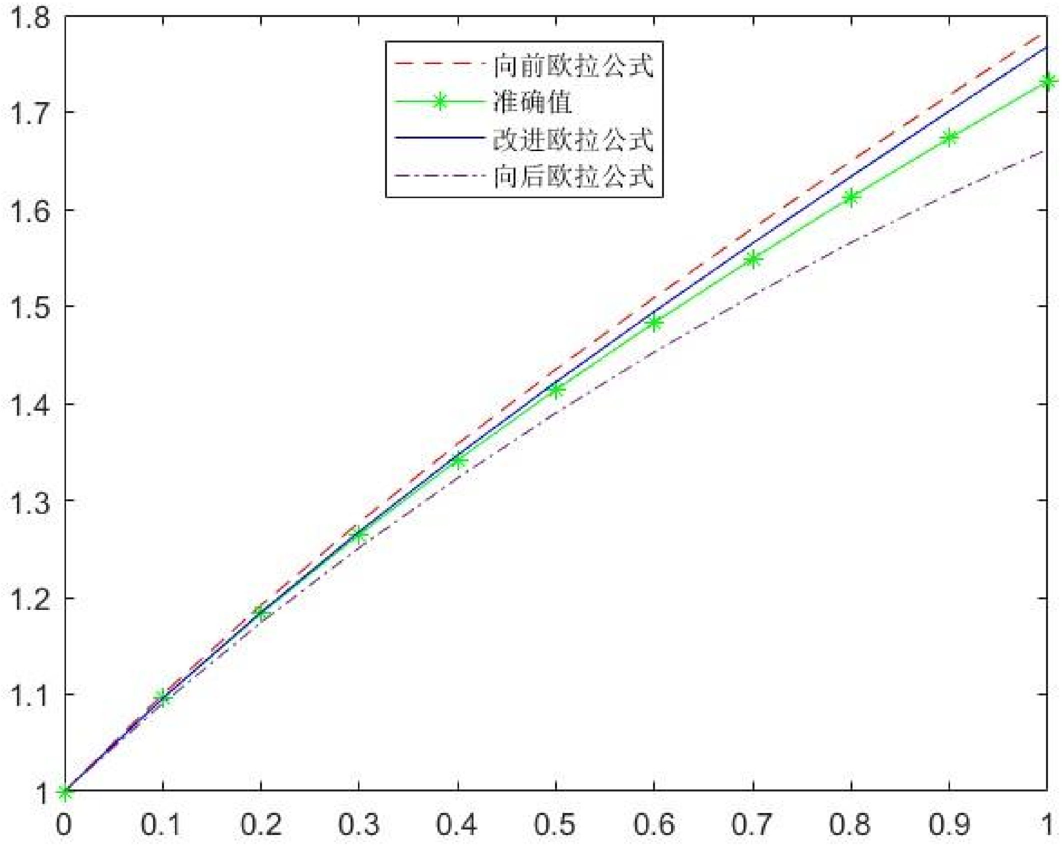
题目 1

用向前欧拉公式和改进的欧拉公式求方程 $y' = y - 2x/y$，$y(0)=1$，$0 \le x \le 1$，$h = 0.1$ 的数值解，要求编写程序，并比较两种方法的计算结果，说明了什么问题？

程序

```
x=[];%自变量
y=[];%向前欧拉公式
z=[];%向后欧拉公式
result=[];%改进欧拉公式
x(1)=0;
y(1)=1;
z(1)=1;
result(1)=1;
for n=1:10
x(n+1)=x(n)+0.1 ;
y(n+1)=y(n)+0.1*(y(n)-2*x(n)/y(n)) ;
z(n+1)=(z(n)+sqrt(z(n)*z(n)-4*(1-0.1)*(2*0.1*x(n+1))))/(2*(1-0.1));
k1=y(n)-2*x(n)/y(n);
k2=y(n)+0.1*k1-2*x(n+1)/(y(n)+0.1*k1);
result(n+1)=result(n)+0.1*0.5*(k1+k2);
end
x=[0:0.1:1];
precise_y=dsolve('Dy=y-2*x/y','y(0)=1','x');
py=eval(precise_y);%解析解
plot(x,y,"r--",x,py,"g*-",x,result,'b',x, z ,"-.") ;
legend("向前欧拉公式","准确值","改进欧拉公式","向后欧拉公式") ;
```

结果



分析

根据向前欧拉公式拟合的图像同函数解析解做出图像对比看出向前欧拉公式估计值偏大,因此考虑向后欧拉公式的估计，在做出图像后发现估计值是偏小的。为了更好的估计出更为准确的结果，采用改进欧拉公式进行估计，发现相比于向前或者向后欧拉公式，改进欧拉公式很好的中和降低了这两种方案的误差，做出的图像同解析解图像拟合的效果更好。因此，在对函数值进行估计时，选择改进欧拉公式是一种相对更优的方案。

题目 2

Rossler 微分方程组：

$$\begin{cases} x' = -y - z \\ y' = x + ay \\ z' = b + z(x - c) \end{cases}$$

当固定参数 b=2, c=4 时，试讨论随参数 a 由小到大变化（如 $a \in (0, 0.65)$）而方程解的变化情况，并且画出相图，观察相图是否形成混沌状？

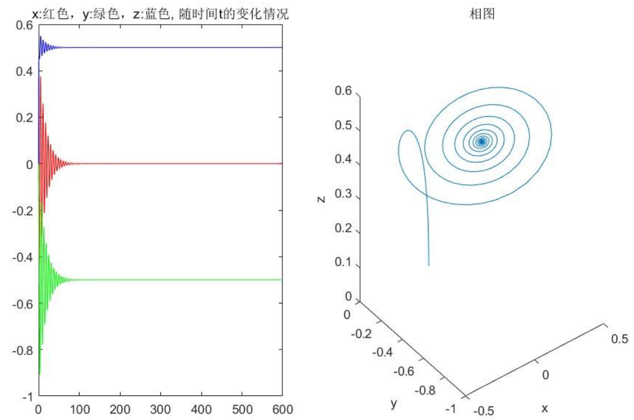
程序

```
% 建立 rossler.m 文件
function f = rossler(t, x)
    global a ;
    global b ;
    global c ;
    f = [
          -x(2) - x(3) ;
          x(1) + a * x(2) ;
          b + x(3) * (x(1) - c) ;
    ] ;


% 主程序
clear ;
global a ; global b ; global c ;
b = 2 ; c = 4 ;
t0 = [0, 600] ;
for a = 0 : 0.01 : 0.65
    [t, x] = ode45('rossler', t0, [0,0,0]) ;
    a
    subplot(1,2,1) ;
        plot(t,x(:,1),'r',t,x(:,2),'g',t,x(:,3),'b');
        title('x:红色，y:绿色，z:蓝色，随时间 t 的变化情况') ;
    subplot(1,2,2) ;
        plot3(x(:,1),x(:,2),x(:,3)) ;
        title('相图');
        xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z') ;
    pause
end
```

结果和分析

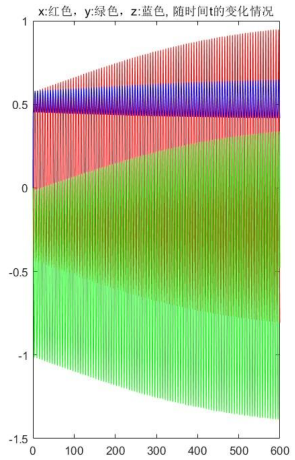
1、当 a = 0.00~0.12 时，　x,y,z 分别收敛于 0 0.5 0.5

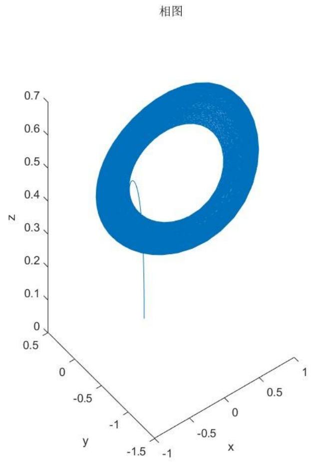
并且随着 a 的增大，收敛速度减小



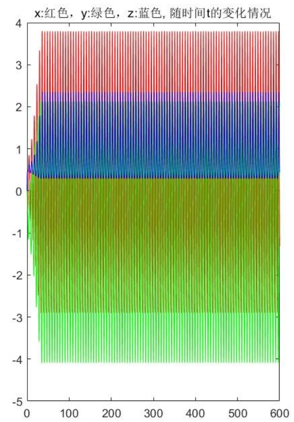
2、当 a 位于 0.13~0.33，随着 a 的不断变大，方程解 x,y,z 的相图也趋近于极限环

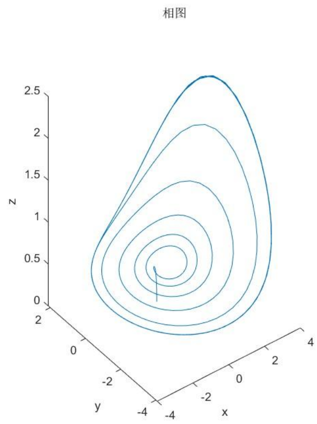
a = 0.13



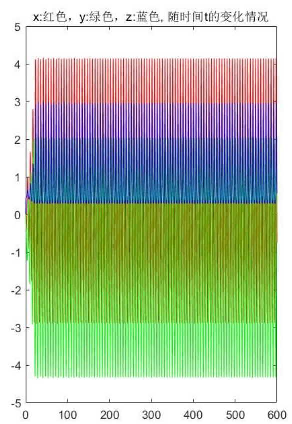


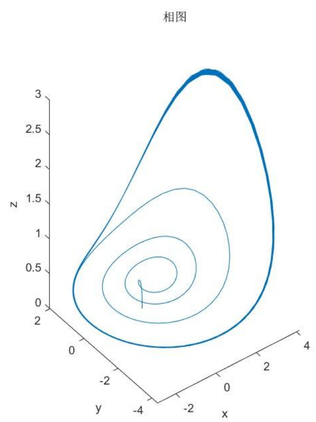
a = 0.26





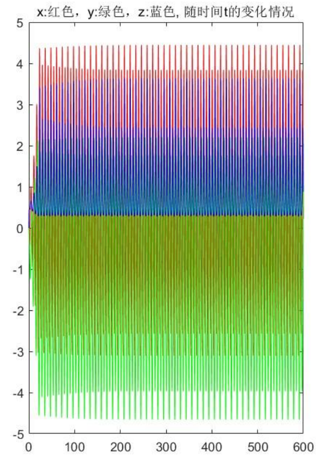
a = 0.33

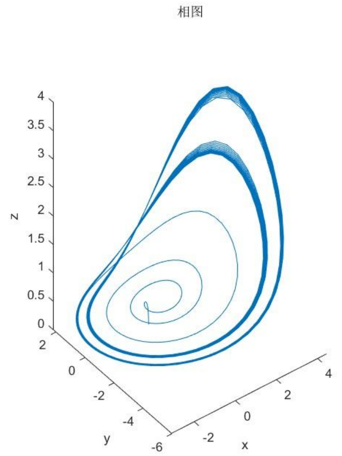




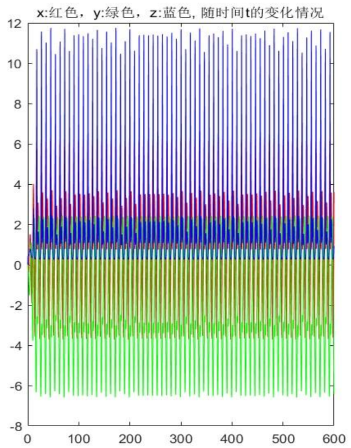
3、3、当 a 位于 0.34~0.65 之间,随着 a 的不断变大，方程解 x,y,z 的相图也趋近于混沌状态

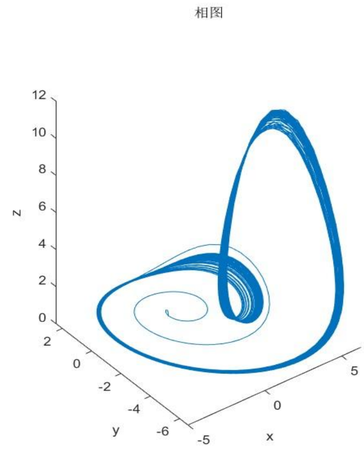
a = 0.34



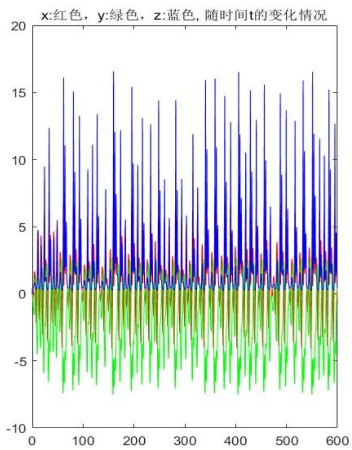


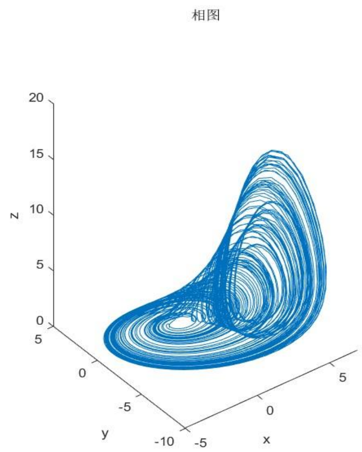
a = 0.51





a = 0.54





题目 3

增加生产、发展经济所依靠的主要因素有增加投资、增加劳动力以及技术革新等，在研究国民经济产值与这些因素的数量关系时，由于技术水平不像资金、劳动力那样容易定量化，作为初步的模型，可认为技术水平不变，只讨论产值和资金、劳动力之间的关系。在科学技术发展不快时，如资本主义经济发展的前期，这种模型是有意义的。

用 Q，K，L 分别表示产值、资金、劳动力，要寻求的数量关系 $Q(K,L)$。经过简化假设与分析，在经济学中，推导出一个著名的 Cobb-Douglas 生产函数：

$$Q(K,L) = aK^{\alpha}L^{\beta}, \quad 0<\alpha,\beta<1 \qquad (*)$$

式中α，β，a 要由经济统计数据确定。现有美国马萨诸塞州 1900—1926 年上述三个经济指数的统计数据，如下表，试用数据拟合的方法，求出式（*）中的参数α，β，a。

表 1

t	Q	K	L	t	Q	K	L
1900	1.05	1.04	1.05	1914	2.01	3.24	1.65
1901	1.18	1.06	1.08	1915	2.00	3.24	1.62
1902	1.29	1.16	1.18	1916	2.09	3.61	1.86
1903	1.30	1.22	1.22	1917	1.96	4.10	1.93
1904	1.30	1.27	1.17	1918	2.20	4.36	1.96
1905	1.42	1.37	1.30	1919	2.12	4.77	1.95
1906	1.50	1.44	1.39	1920	2.16	4.75	1.90
1907	1.52	1.53	1.47	1921	2.08	4.54	1.58
1908	1.46	1.57	1.31	1922	2.24	4.54	1.67
1909	1.60	2.05	1.43	1923	2.56	4.58	1.82
1910	1.69	2.51	1.58	1924	2.34	4.58	1.60
1911	1.81	2.63	1.59	1925	2.45	4.58	1.61
1912	1.93	2.74	1.66	1926	2.58	4.54	1.64
1913	1.95	2.82	1.68				

模型

$Q(K,L) = aK^{\alpha}L^{\beta}, \quad 0<\alpha,\beta<1$

程序

```
kldata =
[1.04,1.06,1.16,1.22,1.27,1.37,1.44,1.53,1.57,2.05,2.51,2.63,2.74,2.8
2,3.24,3.24,3.61,4.10,4.36,4.77,4.75,4.54,4.54,4.58,4.58,4.58,4.54;
1.05,1.08,1.18,1.22,1.17,1.30,1.39,1.47,1.31,1.43,1.58,1.59,1.66,1.68
,1.65,1.62,1.86,1.93,1.96,1.95,1.90,1.58,1.67,1.82,1.60,1.61,1.64];
qdata =
[1.05,1.18,1.29,1.30,1.30,1.42,1.50,1.52,1.46,1.60,1.69,1.81,1.93,1.9
5,2.01,2.00,2.09,1.96,2.20,2.12,2.16,2.08,2.24,2.56,2.34,2.45,2.58];

%a 是 a  a1 是阿尔法α  p 是β
x0 = [0.1,0.1,0.1];
x = lsqcurvefit('fThird',x0,kldata,qdata) ;

q = fThird(x,kldata) ;
figure(1);
hold on;
plot(q,'r');
plot(qdata,'b*');
```

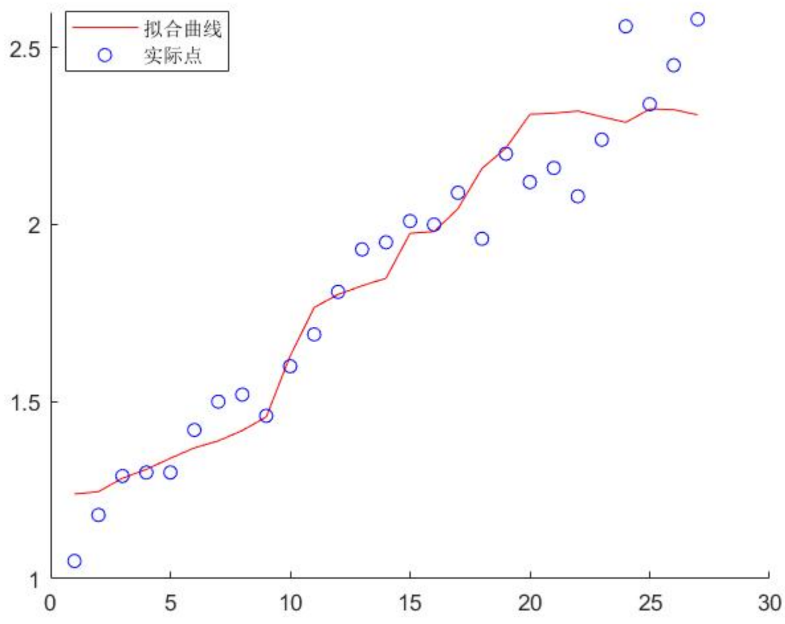
程序文件 fThird.m:

```
function f=fThird(x,kldata)
f=x(1)*kldata(1,:).^x(2).*kldata(2,:).^x(3);
```

结果

x =

1.2246　　0.4612　　-0.1277



分析

由于该题有两个自变量参数，所以需要有一个两行的矩阵来进行最小二乘法的运算，将 K 和 L 列成一个两行的矩阵。

该题并没有指出初值是什么，只能通过猜测该题的指标的影响，将参数初值设定为一个满足范围的数，于是就采取了三个相同的 0.1。

该结果通过验证和图像，选取答案 1.2246　　0.4612　　-0.1277。

题目 4

收集重庆市的人口数据，采用数据拟合预测 2030 年重庆市的人口数。

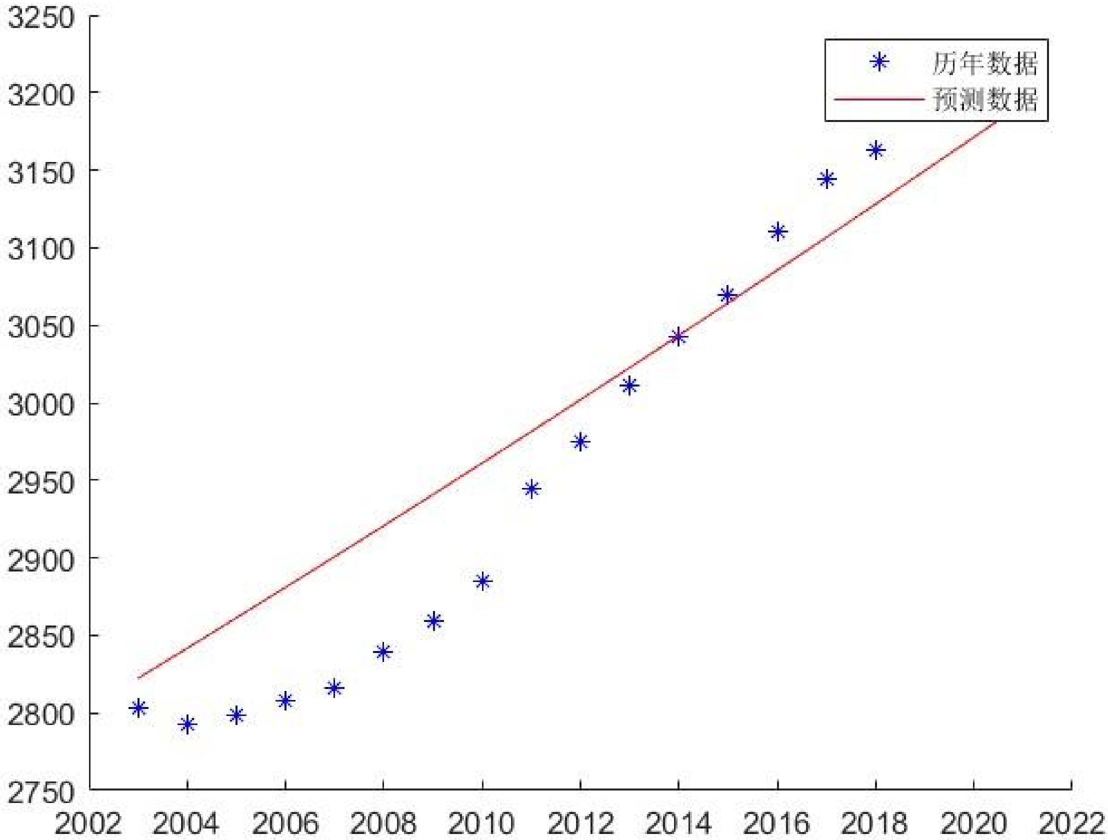
模型

人口增长阻滞模型
$$x(t)=\frac{x_m}{1+(\frac{x_m}{x_0}-1)e^{-rt}}$$

程序

```
clear ;
% 年份
xdata=[2003,2004,2005,2006,2007,2008,2009,2010,2011,2012,2013,2014,2015,2016,2017,2018,2019,2020,2021];
% 人口数据，万人
ydata=[2803,2793,2798,2808,2816,2839,2859,2885,2944,2975,3011,3043,3070,3110,3144,3163,3188,3209,3212];

xdata = xdata - 2002 ;
% 初值 人口增长率和峰值
x=[0.001,7000];
% 拟合参数
x = lsqcurvefit('ThirdFouthf',x,xdata,ydata) ;
y = ThirdFouthf(x,xdata) ;
% 画图
figure(1);
hold on;
plot(xdata+2002, ydata,"b*") ;
plot(xdata+2002, y, "r") ;
legend("历年数据","预测数据") ;
函数：
function f=fThird(x,kldata)
f=x(1)*kldata(1,:).^x(2).*kldata(2,:).^x(3);
```

结果



2030 年重庆市预测人口：3396.3 万人

分析

由于人口的增长并非是没有限制的无限增长，故选择阻滞增长模型来进行人口增长情况的模拟。阻滞增长模型本身是一种非线性方程，因此选择使用 lsqcurvefit 函数来求函数中未知参数。做出拟合图像如上图所示。由于重庆人口数据只能追溯得到 1993 年至今，时间跨度较小，且数据本身间隔只有一年，因此拟合效果并不够准确。但是追求过分拟合则会对预测值造成大的偏差。

实验 3：数学规划模型

开课学院、实验室： DS1407　　　　　实验时间 ： 2023 年 3 月 26 日

<table>
<tr><td rowspan="2">课程名称</td><td rowspan="2">数学实验</td><td rowspan="2">实验项目名　　称</td><td rowspan="2">实验 3：数学规划模型</td><td colspan="5">实验项目类型</td></tr>
<tr><td>验证</td><td>演示</td><td>综合</td><td>设计</td><td>其他</td></tr>
<tr><td>指导教师</td><td>肖剑</td><td>成　绩</td><td></td><td></td><td></td><td>√</td><td></td><td></td></tr>
</table>

题目 1

求解无约束优化

$$\min f(x_1,x_2) = -20e^{-0.2\sqrt{0.5(x_1^2+x_2^2)}} - e^{0.5(\cos(2\pi x_1)+\cos(2\pi x_2))} + 22.713$$
$$s.t. \quad -5 \le x_i \le 5, i = 1,2$$

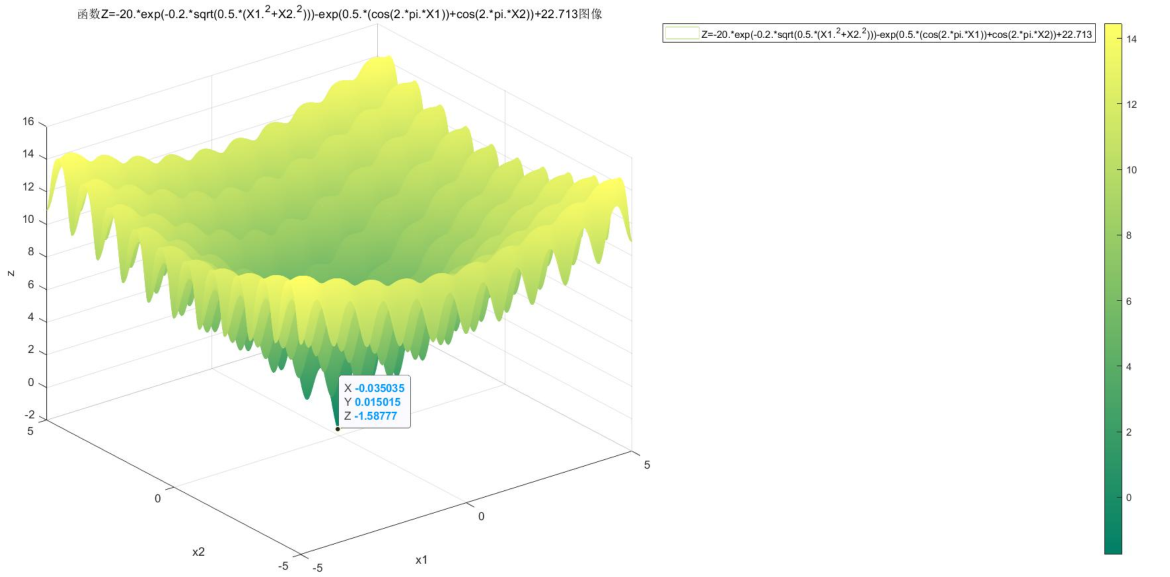
1） 画出该曲面图形，直观地判断该函数的最优解；

2） 使用 fminunc 命令求解，能否求到全局最优解？

程序 1.1

函数图像绘制代码：

```
%函数图像
x1=linspace(-5,5,1000);%自变量 x1
x2=linspace(-5,5,1000);%自变量 x2
[X1,X2]=meshgrid(x1,x2);%网格化
Z=-20.*exp(-0.2.*sqrt(0.5.*(X1.^2+X2.^2)))-exp(0.5.*(cos(2.*pi.*X1))+cos(2.*pi.*X2))+22.713;
mesh(X1,X2,Z);%目标函数
xlabel('x1');%横坐标标记
ylabel('x2');%纵坐标标记
zlabel('z');%竖坐标标记
title("函数
Z=-20.*exp(-0.2.*sqrt(0.5.*(X1.^2+X2.^2)))-exp(0.5.*(cos(2.*pi.*X1))+cos(2.*pi.*X2))+22.713 图像")
legend('Z=-20.*exp(-0.2.*sqrt(0.5.*(X1.^2+X2.^2)))-exp(0.5.*(cos(2.*pi.*X1))+cos(2.*pi.*X2))+22.713')
colormap summer
colorbar;
shading flat
```



结果 1.1

分析 1.1

通过做出三维图像不难发现该函数存在多个局部最优解，全局最优解位于坐标(-0.035035，0.015015，-1.58777）点附近.

程序 1.2

```
函数文件代码：
    function f=func1(x)%函数
    f=-20*exp(-0.2*sqrt(0.5*(x(1).^2+x(2).^2)))-exp(0.5*(cos(2*pi*x(1))+cos(2*pi*x(2)))
)+22.713;
命令代码：
    options=optimset('display', 'iter', 'tolfun',1e-10);%参数优化
    x0=[-1,-1];%初始位置
    [x,fval]=fminunc('func1',x0,options);%开始迭代
    x%迭代结果
```

结果 1.2

x = 0 0

Iteration	Func-count	f(x)	Step-size	First-order optimality
0	3	3.6201		1.64
1	66	-0.00528183	0.610701	2.83

分析 1.2

通过数学分析可以解出目标函数的全局最优解对应横纵坐标为（0，0），f（x）=-0.00528183，和优化工具函数 fminunc 得出结果一致，因此 fminunc 函数可以求出部分函数的全局最优解。但整个优化过程结果求解是否准确还和初始值存在一定的关系，恰当的初始值是得到正确结果的前提之一。

题目 2

请自行查询某商业银行的整存整取年利率，填入下表：

一年期	二年期	三年期	五年期
1.65%	2.15%	2.60%	2.65%

现有 1 笔本金，准备 30 年后使用，若此期间利率不变，问应该采用怎样的存款方案？

模型 2

设 S 是利润，P 是本金， $x_1,\cdots,x_n$ 是该利率出现的年数， $r_1,\cdots,r_n$ 是所选年份的年利率 n=4，1 是 1 年限，4 是五年限。

下面是所构建的模型：

$$S=P*(1+r_1)^{x_1}*(1+r_2)^{x_2}*(1+r_3)^{x_3}*(1+r_4)^{x_4}$$

约束如下：

$$x_1+2*x_2+3*x_3+5*x_4=30$$

$$0<=x_1<=30,0<=x_2<=15,0<=x_3<=10,0<=x_4<=6$$

程序 2

LINGO 代码

```
max = 1000*(1+0.0165)^x1*(1+0.0215*2)^x2*(1+0.0260*3)^x3*(1+0.0265*5)^x4;
x1+2*x2+3*x3+5*x4=30;
x1<=30;
x2<=15;
x3<=10;
x4<=6;
```

结果 2

```
Local optimal solution found.
Objective value:                              2119.276
Infeasibilities:                              0.000000
Extended solver steps:                               5
Total solver iterations:                            25

Model Class:                                       NLP

Total variables:                    4
Nonlinear variables:                4
Integer variables:                  0

Total constraints:                  6
Nonlinear constraints:              1

Total nonzeros:                    12
Nonlinear nonzeros:                 4

                              Variable           Value        Reduced Cost
                                    X1        0.000000            18.05658
                                    X2        0.000000            16.25454
                                    X3        10.00000            0.000000
                                    X4        0.000000            0.000000

                                   Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                     1        2119.276            1.000000
                                     2        0.000000            52.73929
                                     3        30.00000            0.000000
                                     4        15.00000            0.000000
                                     5        0.000000           0.9556357
                                     6        6.000000            0.000000
```

分析 2

因为本金如果是未知数的话解不出来，所以给本金一个初始值：1000

从结果上看，因为五年期的利率和三年期的利率相差很小，而三年期限比五年期限的年份多，这个年份的差距可以超过利率的差距，所以三年期限是最优解。

题目 3

A 公司面临破产，只余下 100 种物品，表 1 中给出了每种物品的数量，现有 1000 名公司债权人，表格中给出了债权人对不同物品的偏好（数值越大越喜欢），要求你们对这些资产进行处置，应该如何安排呢？

模型 3

主要的模型是最大费用最大流模型。

合理假设：

1、假设偏好值可以看作每位债权人对该物品的价值。

2、假设每位债权人最大只能获得 NUM_OF_CREDIT 件物品。

建模（建图）过程：

1、建立一个超级源点，向每位债权人连接一条 流量为 NUM_OF_CREDIT，费用为 0 的边。

2、建立一个超级汇点，每件物品向超级汇点连接一条 流量为 物品数目，费用为 0 的边。

3、每位债权人向每件物品连接一条 流量为 1，费用为偏好值 的边。

4、该问题就转化为了最大费用最大流模型。

5、对该图使用最大费用最大流算法即可解决。

程序 3

程序在 附件 1 ：

附件1： code.cpp　　2023/3/26 11:58　　CPP 文件

程序说明 ：

1、NUM_OF_CREDIT 是每位债权人最大能获得的物品数目，可以调节不同的数值查看不同情况结果。

```
const int NUM_OF_CREDIT = 4 ;  // 每位债权人可以获得的最大物品数量
```

2、three.in 文件是附件 1 程序的输入文件。

3、输出结果位于同目录下面的 three.txt 文件，编码格式为 ANSI。

结果与分析 3

由于输出结果过多，只选择前五个进行结果分析：

被选择的物品数量

债权人总共的偏好值

选择的物品编号

数量

选择的第二件物品的编号和数量

第三件

```
3007 23390
第1位债权人选择的物品情况:        41:1 85:1 7:1
第2位债权人选择的物品情况:        38:1 10:1 28:1 96:1
第3位债权人选择的物品情况:        51:1
第4位债权人选择的物品情况:        41:1 81:1 14:1 87:1
第5位债权人选择的物品情况:        63:1 41:1
```

1、当 NUM_OF_CREDIT = 1 时的情况

```
1000 9297
第1位债权人选择的物品情况:        85:1
第2位债权人选择的物品情况:        28:1
第3位债权人选择的物品情况:        51:1
第4位债权人选择的物品情况:        14:1
第5位债权人选择的物品情况:        41:1
```

2、当 NUM_OF_CREDIT = 2 时的情况

```
2000 17303
第1位债权人选择的物品情况:        7:1 85:1
第2位债权人选择的物品情况:        96:1 28:1
第3位债权人选择的物品情况:        90:1 51:1
第4位债权人选择的物品情况:        87:1 14:1
第5位债权人选择的物品情况:        63:1 41:1
```

3、当 NUM_OF_CREDIT = 3 时的情况

```
3000 22717
第1位债权人选择的物品情况:          41:1 85:1 7:1
第2位债权人选择的物品情况:          38:1 28:1 96:1
第3位债权人选择的物品情况:          32:1 51:1 50:1
第4位债权人选择的物品情况:          41:1 14:1 87:1
第5位债权人选择的物品情况:          34:1 41:1 63:1
```

4、当 NUM_OF_CREDIT = 4 时的情况

```
3007 23390
第1位债权人选择的物品情况:      41:1 85:1 7:1
第2位债权人选择的物品情况:      38:1 10:1 28:1 96:1
第3位债权人选择的物品情况:      51:1
第4位债权人选择的物品情况:      41:1 81:1 14:1 87:1
第5位债权人选择的物品情况:      63:1 41:1
```

当 NUM_OF_CREDIT＞5 以后的情况和 NUM_OF_CREDIT＝4 的情况一致，因为总共的物品数量只有 3007 件，继续增加 NUM_OF_CREDIT 已经没有意义了。

实验 4：插值

开课学院、实验室： DS1407　　　　实验时间 ： 2023 年 4 月 2 日

课程名称	数学实验	实验项目名　称	实验 4：插值	实验项目类型				
				验证	演示	综合	设计	其他
指导教师	肖剑	成　绩				√		

题目 1

火车行驶的路程、速度数据如表 1，计算从静止开始 20 分钟内走过的路程。

表 1

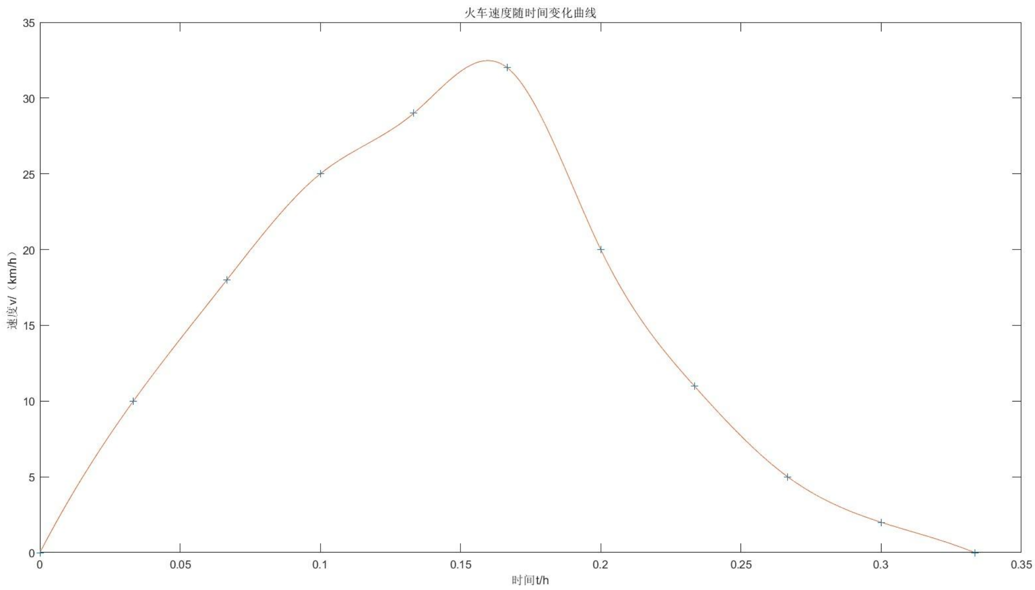
t(分)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
v(km/h)	10	18	25	29	32	20	11	5	2	0

程序 1

```
clear;
t=[0,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20];%原始数据
t = t ./ 60 ;
v=[0,10,18,25,29,32,20,11,5,2,0];
t1= 0 : 0.001 : 20 / 60 ;%插值
y=interp1(t,v,t1,"spline");%绘图
plot(t,v,'+',t1,y);
xlabel('时间 t/h');
ylabel('速度 v/（km/h）');
title('火车速度随时间变化曲线');
sum=0;%梯形积分求和
for i=1 : 1 : 333
    sum=sum+(y(i)+y(i+1))*0.001*(1/2);
end
sum
```

结果 1

绘制得到图像



输出结果

sum =   5.1066

分析 1

在得到初始数据后，由于自变量数据间隔过大，先用插值法将间距缩小以减小实验误差，此处插值选取的方法是三次样条插值。接着画出函数图像进行分析，根据图像选取梯形积分求和的方式算出最终结果火车运行的总距离为 5.1066。

题目 2

确定地球与金星之间的距离

天文学家在 1914 年 8 月份的 7 次观测中，测得地球与金星之间距离（单位：米），并取其常用对数值，与日期的一组历史数据如表 2。

表 2

日　期（号）	18	20	22	24	26	28	30
距离对数	9.9617724	9.9543645	9.9468069	9.9390950	9.9312245	9.9231915	9.9149925

由此推断何时金星与地球的距离（米）的对数值为 9.9351799?

模型 2

观察 9.9351799，可以看到 24 号的距离大于它，而 26 号的距离小于它

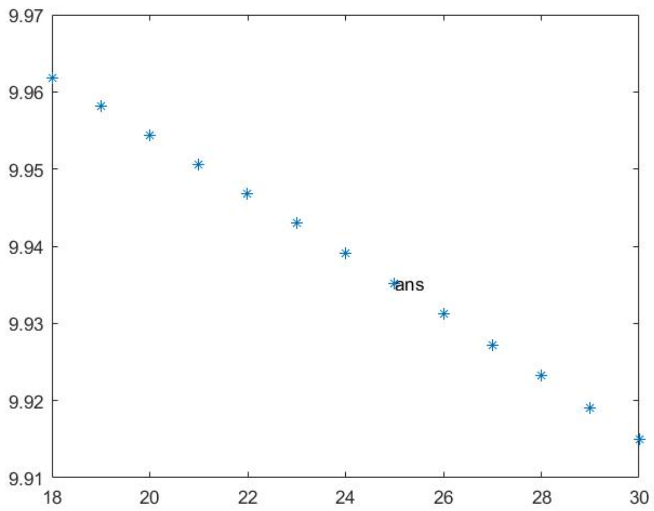
初步猜测实在 24-26 之间。

程序 2

```
x=[18,20,22,24,26,28,30];
y=[9.9617724 9.9543645 9.9468069 9.9390950 9.9312245 9.9231915
9.9149925];
u=9.9351799;
x1=[18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30];
y1=interp1(x,y,x1,"cubic");
plot(x1,y1,"*")
text(25,y1(8),"ans")
y1(8) - u
```

结果 2

这个是插值后的图像



这个是 x=25 的点对应的函数值与所要求的 9.9351799 的误差

```
ans =

  -8.1250e-08
```

分析 2

误差足够小，所以可以看作 x=25 时，地球和金星的距离为：9.9351799 且采用 cubic 三次插值，精确度高。

题目 3

山区地貌图　在某山区（平面区域（0，2800）×（0，2400）内，单位：米）测得一些地点的高程（单位：米）如表 3，试作出该山区的地貌图和等高线图。

表 3

2400	1430	1450	1470	1320	1280	1200	1080	940
2000	1450	1480	1500	1550	1510	1430	1300	1200
1600	1460	1500	1550	1600	1550	1600	1600	1600
1200	1370	1500	1200	1100	1550	1600	1550	1380
800	1270	1500	1200	1100	1350	1450	1200	1150
400	1230	1390	1500	1500	1400	900	1100	1060
0	1180	1320	1450	1420	1400	1300	700	900
Y/X	0	400	800	1200	1600	2000	2400	2800

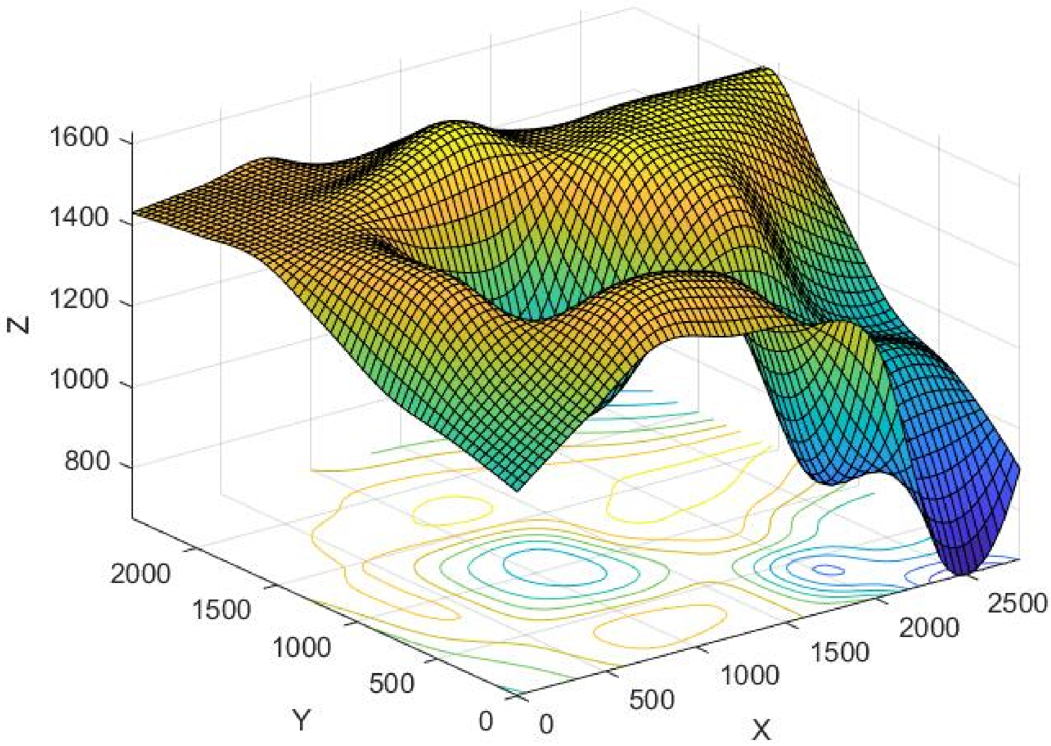
模型 3

插值

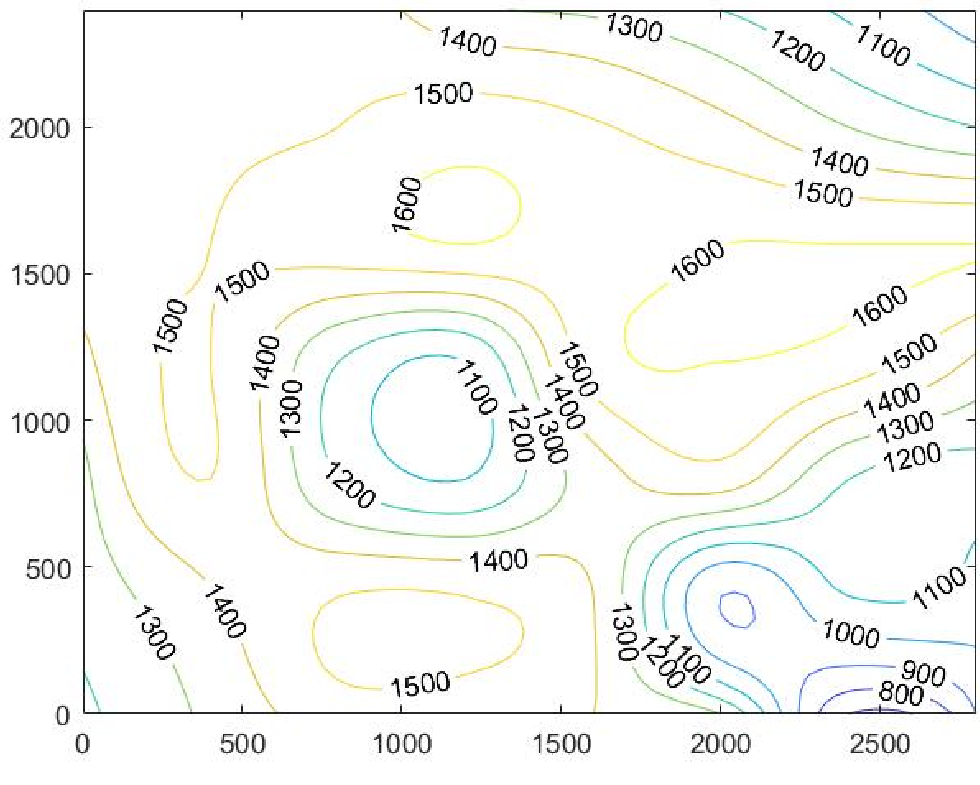
程序 3

```
X = 0 : 400 : 2800 ;
Y = 0 : 400 : 2400 ;
Z = [
1180 1320 1450 1420 1400 1300 700 900 ;
1230 1390 1500 1500 1400 900 1100 1060 ;
1270 1500 1200 1100 1350 1450 1200 1150 ;
1370 1500 1200 1100 1550 1600 1550 1380 ;
1460 1500 1550 1600 1550 1600 1600 1600 ;
1450 1480 1500 1550 1510 1430 1300 1200 ;
1430 1450 1470 1320 1280 1200 1080 940 ;
] ;
xi = 0 : 40 : 2800 ;
yi = 0 : 40 : 2400 ;
figure(1)
zi=interp2(X, Y, Z,xi ,yi' ,'cubic');
surfc(xi,yi,zi)
xlabel('X'),ylabel('Y'),zlabel('Z')
figure(2)
contour(xi,yi,zi,'ShowText','on') ;
```

结果 3



1600
1400
1200
1000
800
Z
2000
1500
1000
500
0
Y
0
500
1000
1500
2000
2500
X



1400
1300
1200
1100
1500
1400
1500
1600
1600
1500
1500
1600
1500
1400
1300
1200
1500
1400
1300
1100
1200
1300
1200
1400
1100
1000
900
800
1300
1400
1300
1200
1100
1500
2000
1500
1000
500
0
0
500
1000
1500
2000
2500

分析 3

直接调用函数画图就行了，插值进行可以加密，等高线可以标注上高度，更加直观

实验 5：回归模型

开课学院、实验室： DS1407 实验时间 ： 2023 年 4 月 9 日

课程名称	数学实验	实验项目名 称	实验 5：回归模型	实验项目类型				
				验证	演示	综合	设计	其他
指导教师	肖剑	成 绩				√		

题目

汽车销售商认为汽车销售量与汽油价格、贷款利率有关，两种类型汽车（普通型和豪华型）18 个月的调查资料如下表，其中 y_1 是普通型汽车销售量（千辆），y_2 是豪华型汽车销售量（千辆），x_1 是汽油价格（美元/加仑），x_2 是贷款利率（%）

序号	y_1	y_2	x_1	x_2
1	22.1	7.2	1.89	6.1
2	15.4	5.4	1.94	6.2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
18	44.3	15.6	1.68	2.3

（1）对普通型和豪华型汽车分别建立如下模型：

$$y_1=\beta_0^{(1)}+\beta_1^{(1)}x_1+\beta_2^{(1)}x_2,\quad y_2=\beta_0^{(2)}+\beta_1^{(2)}x_1+\beta_2^{(2)}x_2$$

给出 β 的估计值和置信区间，决定系数 R^2，F 值及剩余方差等.

（2）用 $x_3=0,1$ 表示汽车类型，建立统一模型：$y=\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_3$，给出 β 的估计值和置信区间，决定系数 R^2，F 值及剩余方差等. 以 $x_3=0,1$ 代入统一模型，将结果与（1）的两个模型的结果比较，解释二者的区别.

（3）对统一模型就每种类型汽车分别作 x_1 和 x_2 与残差的散点图，有什么现象，说明模型有何缺陷？

（4）对统一模型增加二次项和交互项，考察结果有什么改进.

完整数据如下表：

序号	y_1	y_2	x_1	x_2
1	22.1	7.2	1.89	6.1
2	15.4	5.4	1.94	6.2
3	11.7	7.6	1.95	6.3
4	10.3	2.5	1.82	8.2
5	11.4	2.4	1.85	9.8
6	7.5	1.7	1.78	10.3
7	13	4.3	1.76	10.5
8	12.8	3.7	1.76	8.7
9	14.6	3.9	1.75	7.4
10	18.9	7	1.74	6.9
11	19.3	6.8	1.7	5.2
12	30.1	10.1	1.7	4.9
13	28.2	9.4	1.68	4.3
14	25.6	7.9	1.6	3.7
15	37.5	14.1	1.61	3.6
16	36.1	14.5	1.64	3.1
17	39.8	14.9	1.67	1.8
18	44.3	15.6	1.68	2.3

第一小问

模型 1.1

$$y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

程序 1.1

```
clc; clear ;
y1=[22.1,15.4,11.7,10.3,11.4,7.5,13,12.8,14.6,18.9
,19.3,30.1,28.2,25.6,37.5,36.1,39.8,44.3]';
y2=[7.2,5.4,7.6,2.5,2.4,1.7,4.3,3.7,3.9,7,6.8,10.1
,9.4,7.9,14.1,14.5,14.9,15.6]';
x1=[1.89,1.94,1.95,1.82,1.85,1.78,1.76,1.76,1.75,1
.74,1.7,1.7,1.68,1.6,1.61,1.64,1.67,1.68]';
x2=[6.1,6.2,6.3,8.2,9.8,10.3,10.5,8.7,7.4,6.9,5.2,
4.9,4.3,3.7,3.6,3.1,1.8,2.3]';
X = [ones(size(x1)) x1 x2] ;
[b,bint,r,rint,stats] = regress(y1,X) ;

rcoplot(r,rint) ; % 残差图
```

```
%去除反常数据后代码

clc; clear ;
y1=[22.1,15.4,11.7,10.3,11.4,7.5,13,12.8,14.6,18.9
,30.1,28.2,37.5,36.1,39.8]';
x1=[1.89,1.94,1.95,1.82,1.85,1.78,1.76,1.76,1.75,1
.74,1.7,1.68,1.61,1.64,1.67]';
x2=[6.1,6.2,6.3,8.2,9.8,10.3,10.5,8.7,7.4,6.9,4.9,
4.3,3.6,3.1,1.8]';

X = [ones(size(x1)) x1 x2] ;
[b,bint,r,rint,stats] = regress(y1,X) ;

rcoplot(r,rint) ; % 残差图
```

结果 1.1

原始数据

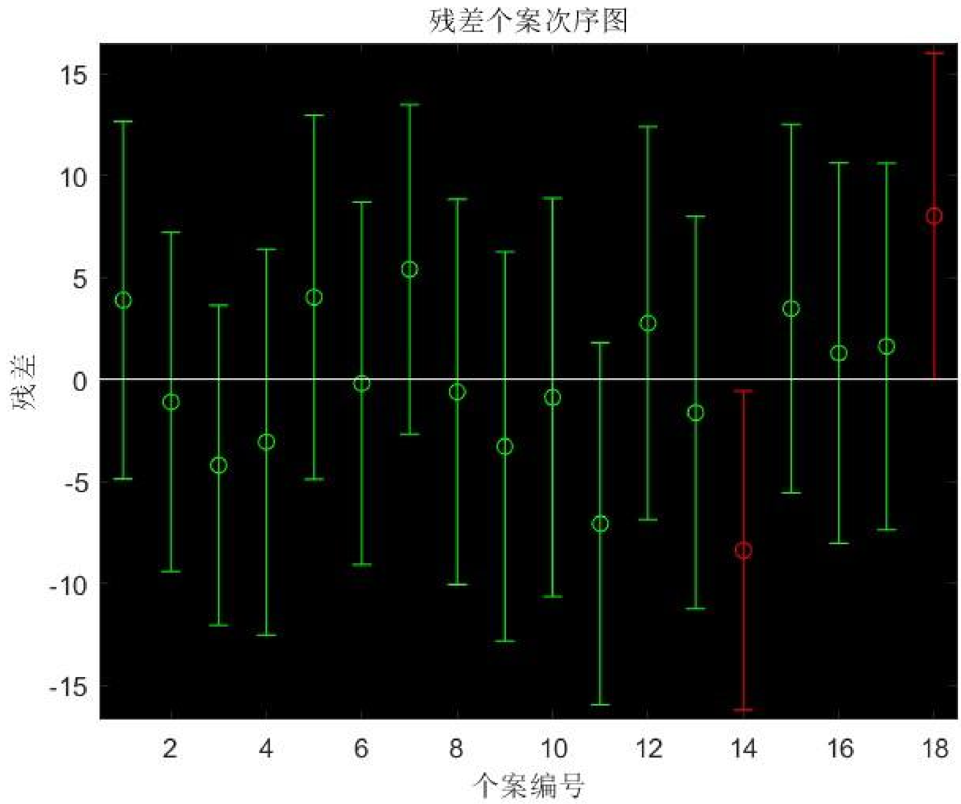
参数估计结果

	估计值	置信区间
β_1	90.1814	[46.1971 ,134.1656]
β_2	-27.6588	[-54.5542 ,-0.7634]
β_3	-3.2283	[-4.2747 ,-2.1819]

显著性分析

	估计值
R^2	0.8593
F	45.7992
σ^2	20.7910
P	0.0000

残差图



剔除反常数据后

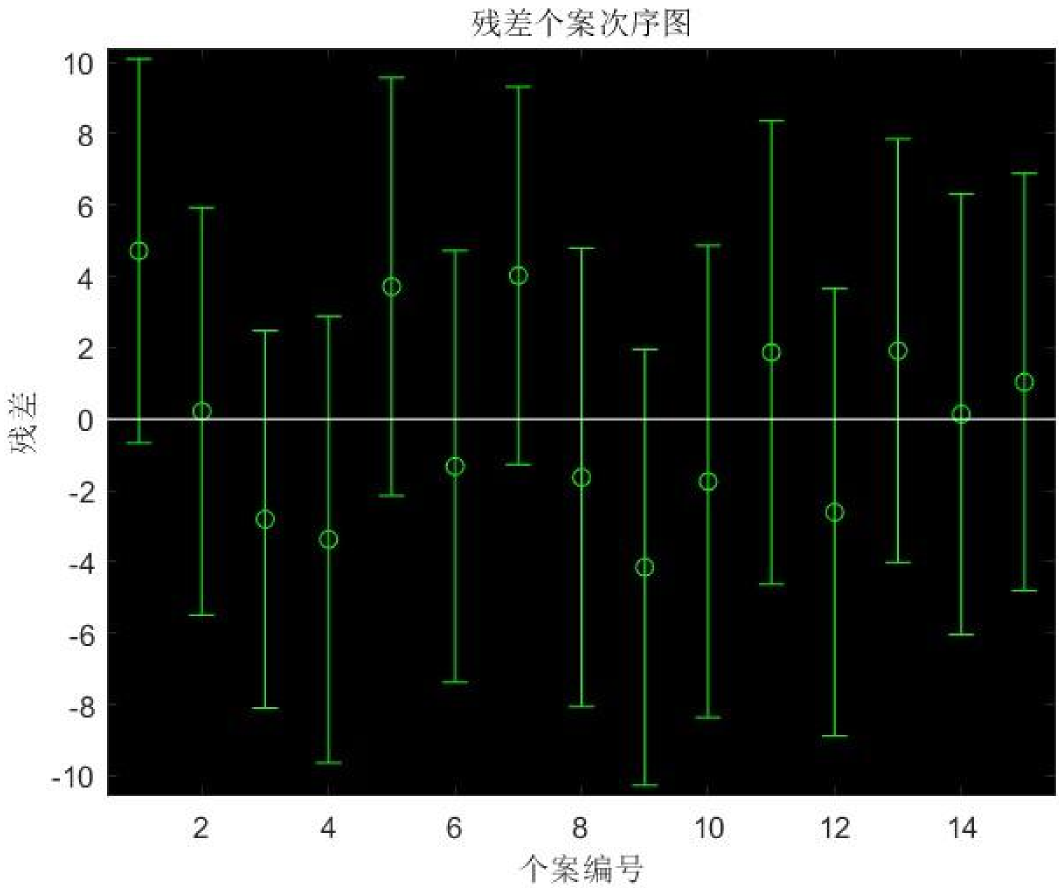
参数估计结果

	估计值	置信区间
β_1	107.5601	[75.3160,139.8042]
β_2	-37.9283	[-57.2842,-18.5723]
β_3	-3.0314	[-3.7862,-2.2767]

显著性分析

	估计值
R^2	0.9334
F	84.0758
σ^2	9.2746
P	0.0000

残差图



分析 1.1

通过对已知数据进行线性回归分析，对参数进行估计得到的结果如上述表格所示

其中 R 方的值为 0.8593，解释程度较高，F 估计值为 45.7992，远大于所设定置信度下的目标值，p 为 0，模型与被解释变量相关性较大。且参数置信区间中不含零点，因此该回归模型合适。

模型 1.2

$$y_2 = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

程序 1.2

```
clc; clear ;%导入数据
y2=[7.2,5.4,7.6,2.5,2.4,1.7,4.3,3.7,3.9,7,6.8,10.1
,9.4,7.9,14.1,14.5,14.9,15.6]';
x1=[1.89,1.94,1.95,1.82,1.85,1.78,1.76,1.76,1.75,1
.74,1.7,1.7,1.68,1.6,1.61,1.64,1.67,1.68]';
x2=[6.1,6.2,6.3,8.2,9.8,10.3,10.5,8.7,7.4,6.9,5.2,
4.9,4.3,3.7,3.6,3.1,1.8,2.3]';
X = [ones(size(x1)) x1 x2] ;
[b,bint,r,rint,stats] = regress(y2,X);
rcoplot(r,rint) ; % 残差图
```

```
% 剔除反常数据后
clc; clear ;
y2=[7.2,5.4,7.6,2.5,2.4,1.7,3.7,3.9,7,10.1,9.4,14.
1,14.5,14.9,15.6]';
x1=[1.89,1.94,1.95,1.82,1.85,1.78,1.76,1.75,1.74,1
.7,1.68,1.61,1.64,1.67,1.68]';
x2=[6.1,6.2,6.3,8.2,9.8,10.3,8.7,7.4,6.9,4.9,4.3,3
.6,3.1,1.8,2.3]';
X = [ones(size(x1)) x1 x2] ;
[b,bint,r,rint,stats] = regress(y2,X) ;
rcoplot(r,rint) ; % 残差图
```

结果 1.2

原始数据

参数估计

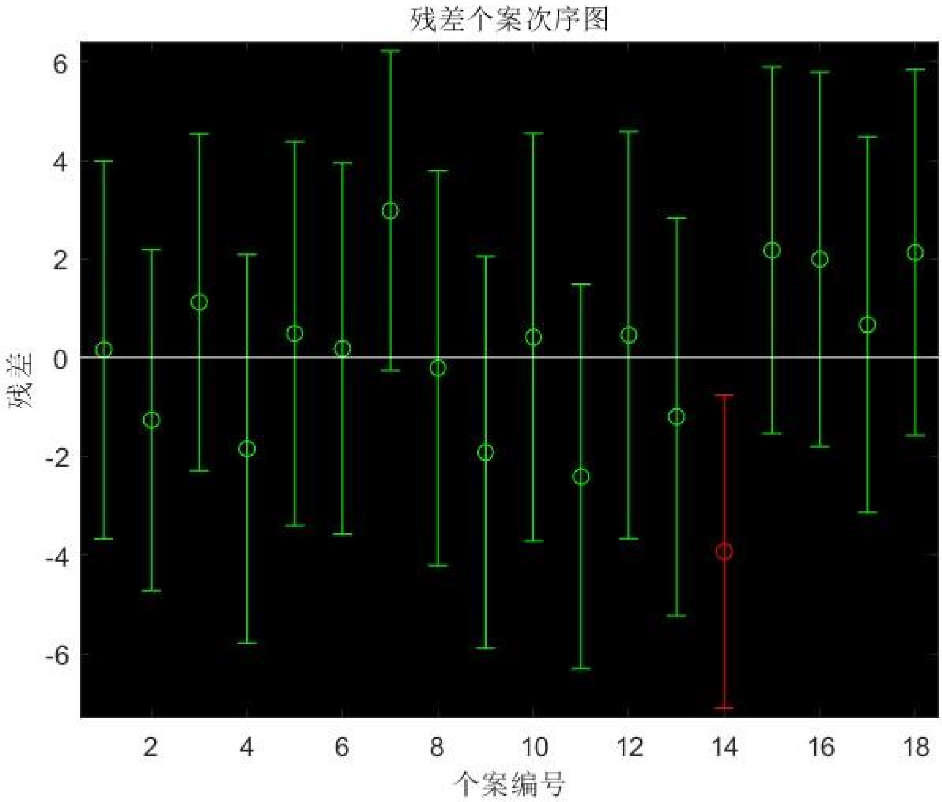
	估计值	置信区间
β_1	24.5471	[5.9501,43.1740]
β_2	-4.6285	[-16.0184,6.7615]

β_3	-1.4360	[-1.8792,-0.9929]

显著性分析

	估计值
R^2	0.8402
F	39.4474
σ^2	3.7288
P	0.0000

残差图



剔除反常数据后

参数估计结果：

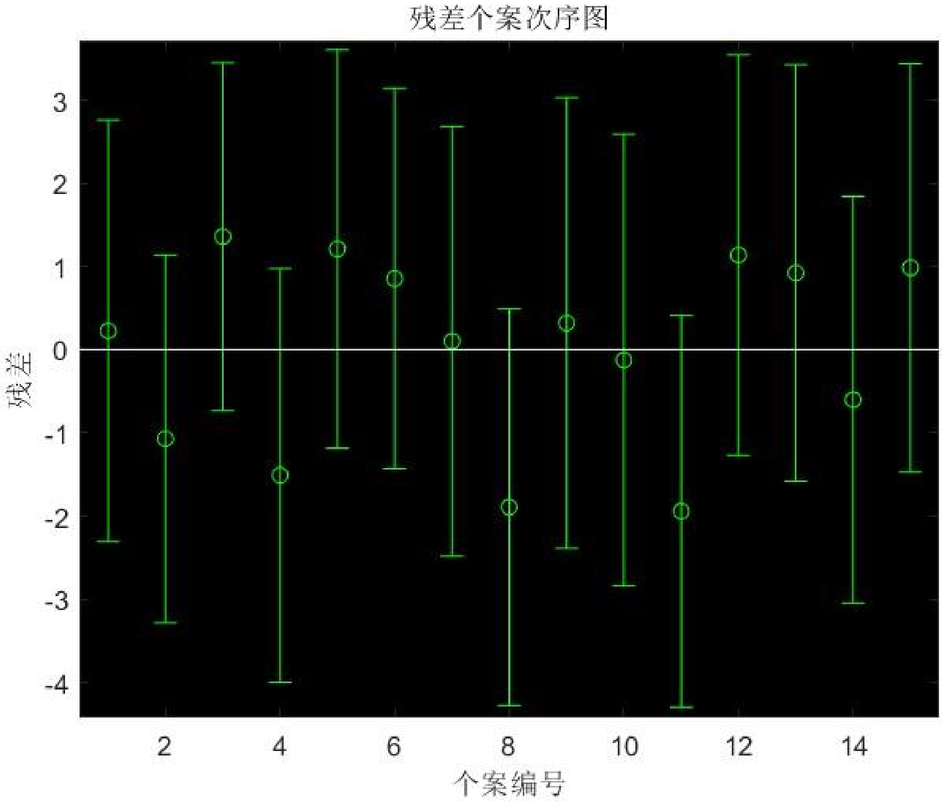
	估计值	置信区间
β_1	29.7583	[16.2864,43.2303]
β_2	-6.7738	[-14.9774 ,1.4299]

β_3	-1.6367	[-1.9680 ,-1.3054]

显著性分析结果：

	估计值
R^2	0.9450
F	103.1152
σ^2	1.5413
P	0.0000

残差图:



分析 1.2

通过对已知数据进行线性回归分析，对参数进行估计得到的结果如上述表格所示

其中 R 方的值为 0.8402，解释程度较高，F 估计值为 39.4474，远大于所设定置信度下的目标值，p 为 0，模型与被解释变量相关性较大。且参数置信区间中不含零点，因此该回归模型合适。

第二小问

模型 2

$$y_2 = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3$$

程序 2

```
clc ; clear ;
n = 18 ;
%开始插入数据
y=[22.1,15.4,11.7,10.3,11.4,7.5,13,12.8,14.6,18.9,19.3,30.1,28.2,25.6,37.5,36.1,39.8,44.3,7.2,5.4,7.6,2.5,2.4,1.7,4.3,3.7,3.9,7,6.8,10.1,9.4,7.9,14.1,14.5,14.9,15.6]';
x1 =
[1.89,1.94,1.95,1.82,1.85,1.78,1.76,1.76,1.75,1.74,1.7,1.7,1.68,1.6,1.61,1.64,1.67,1.68,1.89,1.94,1.95,1.82,1.85,1.78,1.76,1.76,1.75,1.74,1.7,1.7,1.68,1.6,1.61,1.64,1.67,1.68]';
x2 =
[6.1,6.2,6.3,8.2,9.8,10.3,10.5,8.7,7.4,6.9,5.2,4.9,4.3,3.7,3.6,3.1,1.8,2.3,6.1,6.2,6.3,8.2,9.8,10.3,10.5,8.7,7.4,6.9,5.2,4.9,4.3,3.7,3.6,3.1,1.8,2.3]';
x3 = [zeros(1,n) ones(1,n)]' ;
X = [ones(size(x1)) x1 x2 x3] ;
[b,bint,r,rint,stats] = regress(y,X) ;
rcoplot(r,rint) ; % 残差图
```

结果 2

参数估计：

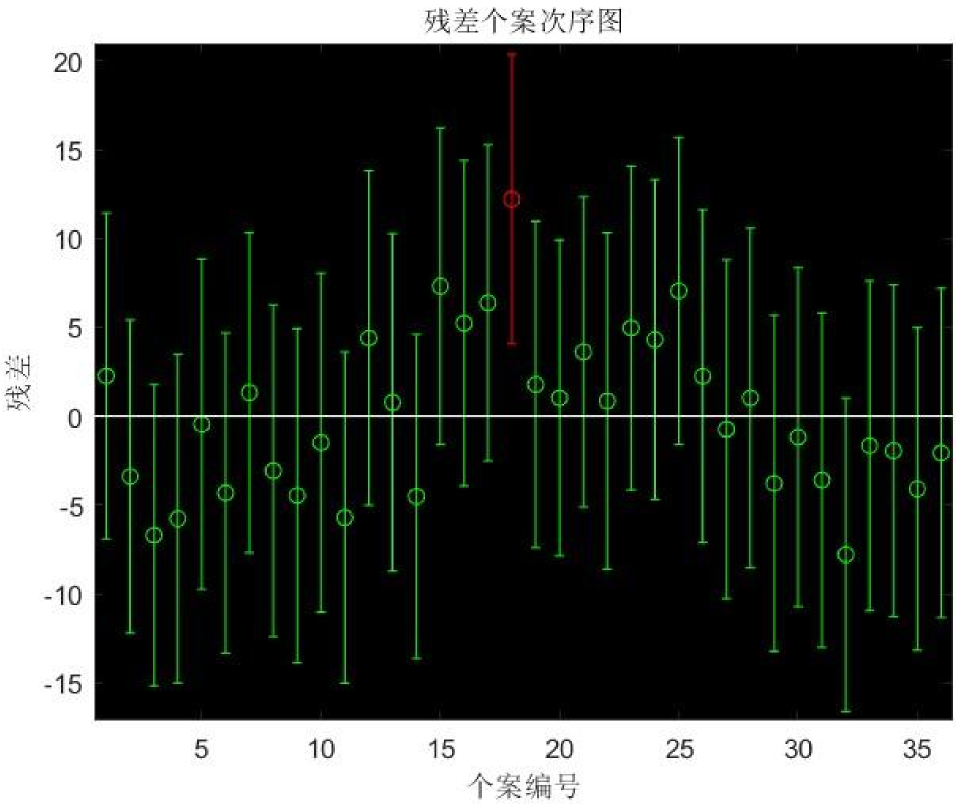
	估计值	置信区间
β1	64.5753	[33.5007,95.6499]
β2	-16.1436	[-35.1193 ,2.8320]
β3	-2.3322	[-3.0705 ,-1.5939]
β4	-14.4222	[-17.6546,-11.1898]

显著性分析：

	估计值

R^2	0.8366
F	54.6111
σ^2	22.6642
P	0.0000

残差图



分析 2

显著性分析：R 方的值为 0.8366，解释程度较高，F 估计值为 54.6111，远大于所设定置信度下的目标值，p 为 0，模型与被解释变量相关性较大。但参数置信区间中 x2 参数区间中含有零点，这也为后面对交互项的分析留下原因，但是总体而言该回归模型相对合适。

加入 x3 变量后，线性回归得到的结果与原独立模型下结果并不一致。统一模型中的参数估计接近原独立模型中参数的平均值。分析原因如下

1、 基于分析问题的不同，独立模型使用数据集中样本数为 18，统一模型数据集中样本数则为 36，且样本维度不同，因此结果会有较大的差异。
2、 回归分析的原理是基于最小的误差平方和，从宏观上来看统一模型所用的正是两个独立模型的平均式，因此 x1 与 x2 的系数在统一模型中会相互接近。
3、 回归分析的结果本身是一个随机变量，因此在自变量相同的情况下，问题不同，所得到的模型就不会完全相同。

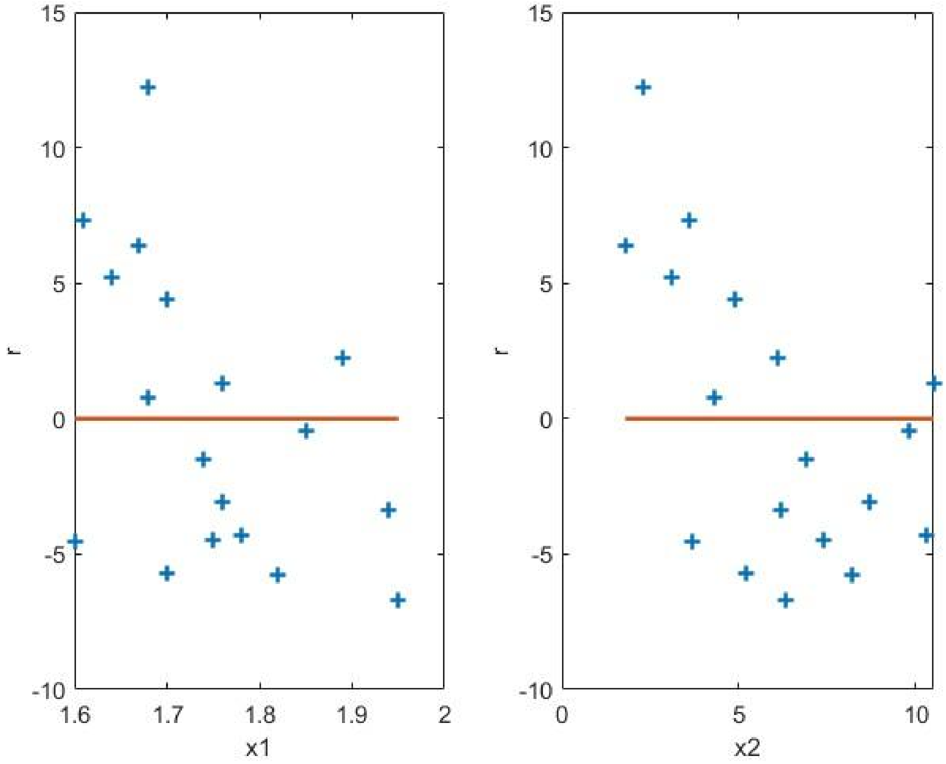
第三小问

程序 3

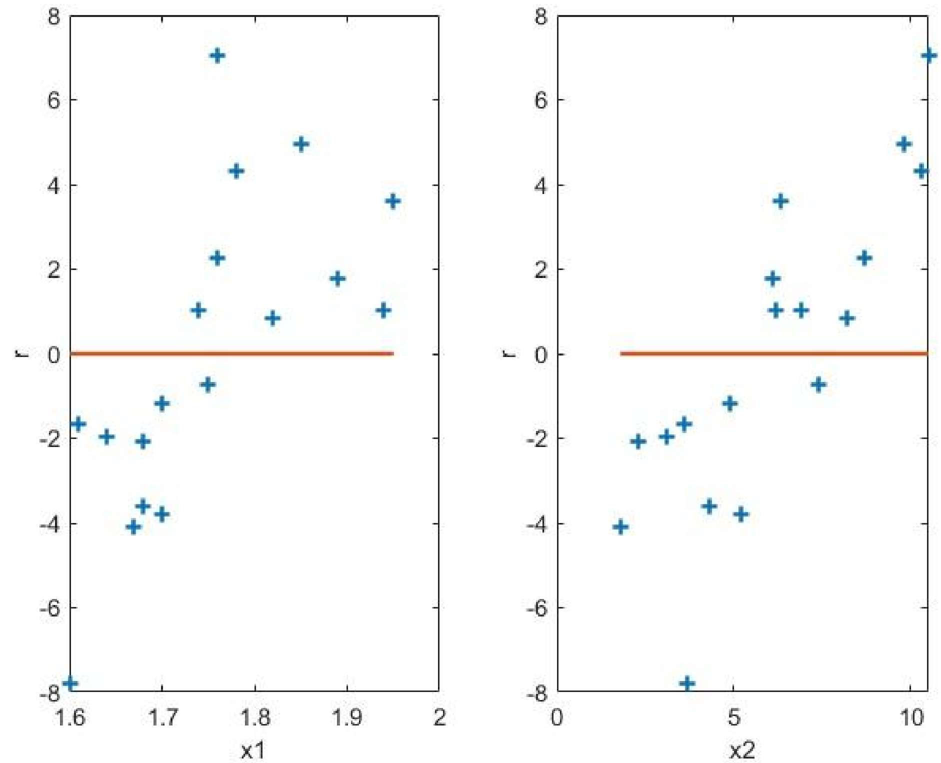
```
clc; clear ;
n = 18 ;
%数据的导入
y=[22.1,15.4,11.7,10.3,11.4,7.5,13,12.8,14.6,18.9,19.3,30.1,28.2,25.6,37.5,36.1,39.8,44.3,7.2,5.4,7.6,2.5,2.4,1.7,4.3,3.7,3.9,7,6.8,10.1,9.4,7.9,14.1,14.5,14.9,15.6]';
x1 =
[1.89,1.94,1.95,1.82,1.85,1.78,1.76,1.76,1.75,1.74,1.7,1.7,1.68,1.6,1.61,1.64,1.67,1.68,1.89,1.94,1.95,1.82,1.85,1.78,1.76,1.76,1.75,1.74,1.7,1.7,1.68,1.6,1.61,1.64,1.67,1.68]';
x2 =
[6.1,6.2,6.3,8.2,9.8,10.3,10.5,8.7,7.4,6.9,5.2,4.9,4.3,3.7,3.6,3.1,1.8,2.3,6.1,6.2,6.3,8.2,9.8,10.3,10.5,8.7,7.4,6.9,5.2,4.9,4.3,3.7,3.6,3.1,1.8,2.3]';
x3 = [zeros(1,n) ones(1,n)]' ;
X = [ones(size(x1)) x1 x2 x3] ;
[b,bint,r,rint,stats] = regress(y,X) ;
figure(1) ;%普通汽车残差图像

title('普通汽车') ;
subplot(1,2,1) ; z = 0 * x1 ;
plot(x1(1:18), r(1:18),'+',x1,z,'LineWidth',1.5) ;
xlabel('x1') ; ylabel('r') ;
subplot(1,2,2) ;
plot(x2(1:18), r(1:18),'+',x2,z,'LineWidth',1.5) ;
xlabel('x2') ; ylabel('r') ;
figure(2) ;%豪华汽车残差图像

title('豪华汽车') ;
subplot(1,2,1) ; z = 0 * x1 ;
plot(x1(19:36), r(19:36),'+',x1,z,'LineWidth',1.5) ;
xlabel('x1') ; ylabel('r') ;
subplot(1,2,2) ;
plot(x2(19:36), r(19:36),'+',x2,z,'LineWidth',1.5) ;
xlabel('x2') ; ylabel('r') ;
```

结果 3

普通车残差图像：



豪华车残差图像：



分析 3

理想情况下的残差分析应该服从均值为零的同方差正态分布。残差点应该比较均匀的分布在 y=0 直线两侧，且数值接近 0 的点应该占据多数。而得到的独立模型结果却与理想假设差别较大。利用统一模型做出的结果同样不够理想，说明原假设 x1 与 x2 独立对 y 作用是不合适的，两个变量之间存在相互作用，且在 x1 与 x2 固定的情况下，x3 取值的不同也会得到不一样的残差结果，这同样说明汽车类型对油价，贷款利率等有相互作用。

第四小问

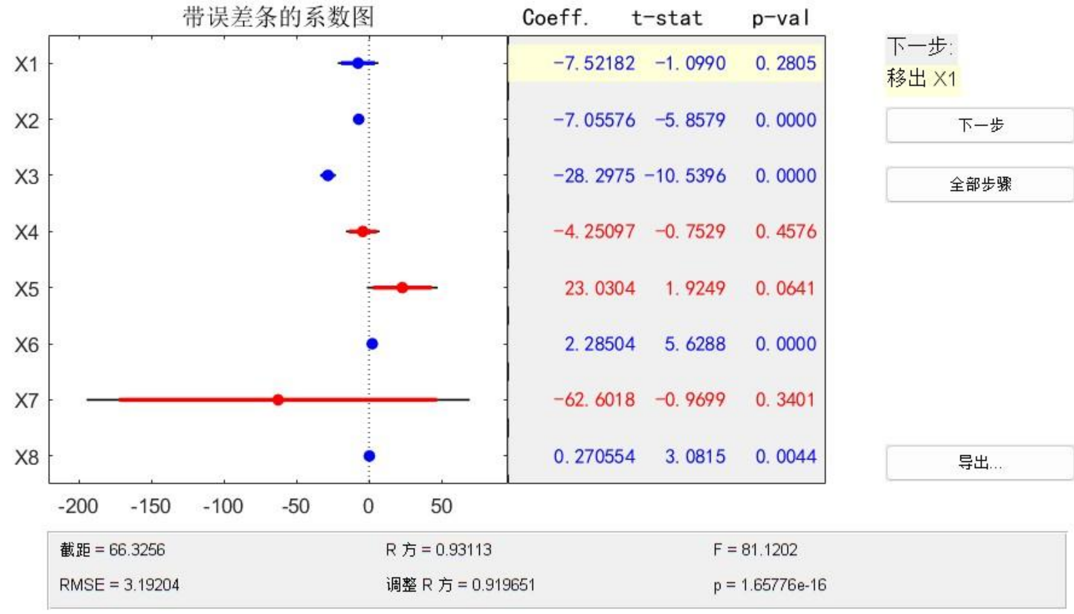
模型 4

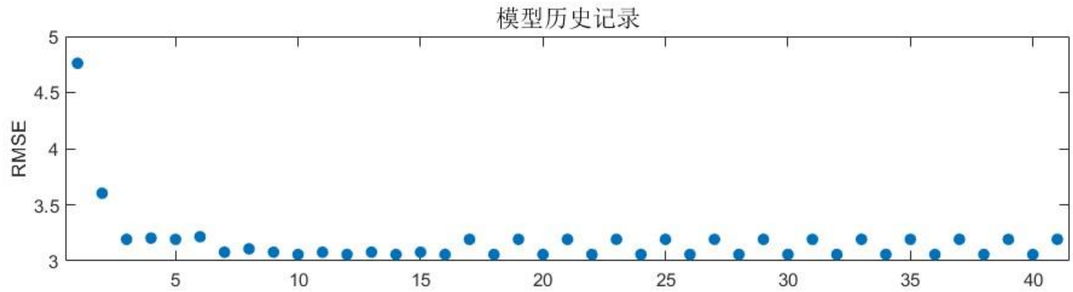
$$y=-1.099x_1-5.8579x_2-10.5396x_3+5.6288x_2x_3+3.0815{x_2}^2$$

程序 4

```
clc; clear ;
n = 18 ;
y =
[22.1,15.4,11.7,10.3,11.4,7.5,13,12.8,14.6,18.9,19.3,30.1,
28.2,25.6,37.5,36.1,39.8,44.3,7.2,5.4,7.6,2.5,2.4,1.7,4.3,
3.7,3.9,7,6.8,10.1,9.4,7.9,14.1,14.5,14.9,15.6]';
x1 =
[1.89,1.94,1.95,1.82,1.85,1.78,1.76,1.76,1.75,1.74,1.7,1.7
,1.68,1.6,1.61,1.64,1.67,1.68,1.89,1.94,1.95,1.82,1.85,1.7
8,1.76,1.76,1.75,1.74,1.7,1.7,1.68,1.6,1.61,1.64,1.67,1.68
]';
x2 =
[6.1,6.2,6.3,8.2,9.8,10.3,10.5,8.7,7.4,6.9,5.2,4.9,4.3,3.7
,3.6,3.1,1.8,2.3,6.1,6.2,6.3,8.2,9.8,10.3,10.5,8.7,7.4,6.9
,5.2,4.9,4.3,3.7,3.6,3.1,1.8,2.3]';
x3 = [zeros(1,n) ones(1,n)]' ;
x4 = x1 .* x2 ;
x5 = x1 .* x3 ;
x6 = x2 .* x3 ;
x7 = x1 .^ 2 ;
x8 = x2 .^ 2 ;
X = [x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8] ;
stepwise(X, y, [1,2,3]) % [1,2,3]表示 x1 x2 x3 均保留在模型中
```

结果 4





分析 4

在保留 x1 x2 x3 的情况下通过调整变量的加入和清除使得 F 的值变大， p 变小以得到非劣解的情况下最终得到的回归方程是：$y = -1.099x_1 - 5.8579x_2 - 10.5396x_3 + 5.6288x_2x_3 + 3.0815x_2^2$

相比于没有加入交互项和二次项后 F 值为 81.1202，p 值为 0，相比于独立模型和原统一模型均有所优化，方差减小，模型的精度得以显著提高。因此对交互项和二次项的分析和调整是有必要的。