2014 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

承 诺 书

我们仔细阅读了《全国大学生数学建模竞赛章程》和《全国大学生数学建模竞赛参赛规则》(以下简称为“竞赛章程和参赛规则”,可从全国大学生数学建模竞赛网站下载)。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛章程和参赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛章程和参赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛章程和参赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们授权全国大学生数学建模竞赛组委会，可将我们的论文以任何形式进行公开展示（包括进行网上公示，在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等）。

我们参赛选择的题号是（从 A/B/C/D 中选择一项填写）: B

我们的报名参赛队号为（8 位数字组成的编号）:

所属学校（请填写完整的全名）: 中国人民解放军第三军医大学

参赛队员 (打印并签名) ：1. 王家瑞

2. 黄嘉诚

3. 邵辉

指导教师或指导教师组负责人 (打印并签名): 周彦

（论文纸质版与电子版中的以上信息必须一致，只是电子版中无需签名。以上内容请仔细核对，提交后将不再允许做任何修改。如填写错误，论文可能被取消评奖资格。）

日期： 2014 年 9 月 15 日

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

2014 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

编 号 专 用 页

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评阅人										
评分										
备注										

全国统一编号（由赛区组委会送交全国前编号）：

全国评阅编号（由全国组委会评阅前进行编号）：

基于几何关系的折叠桌设计优化方案

摘要

平板折叠桌造型美观，设计巧妙，深得广泛大众的喜爱，但是折叠桌的设计却很复杂，需要考虑折叠桌用料、加工方便程度、稳固性等一系列问题。因此如何根据客户的要求设计好折叠桌，来确定各设计加工参数是一个值得研究的数学问题。

对于问题 1，我们首先以长方形平板为中心，平板宽度为直径作一个圆与平板长相切，再根据木条宽度和平板宽度关系将平板切割成 20 等份，过每一根木条与圆同侧的两个交点连线的中点进行垂直切割，便得到一侧的桌腿，另一侧同理。由于桌腿的长度固定，故只需计算桌子折叠过程中每根木条与竖直方向夹角的动态变化即可。因此，利用三角函数找到最外侧木条与竖直方向夹角α和同侧其余木条与竖直方向夹角β_i之间的数学关系，用 Matllab7.0 计算出木条的开槽长度，因为同侧木条开槽长度是对称的，故只需计算最外侧到中间 10 根木条的开槽长度，它们依次为：0, 4.31, 7.04, 8.98, 11.29, 13.18, 14.68, 15.81, 16.61, 17.08（cm）。最后，以折叠桌下桌板中心为坐标原点，建立空间直角坐标系，通过数学关系的推导得到边缘线模型，并用 Matllab7.0 描点观察（见图 8），结果合理可信。

对于问题 2，分析折叠桌的参数可知，仅有r、h两个参数是已经给出的，故我们需要利用优化模型确定其他参数，即木条数、钢筋位置占桌腿比例、桌长的一半（n、k、b），从而计算出具体加工参数，即木条长度和开槽长度。考虑到折叠桌的稳固性、加工方便程度、用料等方面，我们构建了目标函数。进一步分析得到，稳固性的衡量包括重心位置和β_i正负角个数两个因素；而加工方便程度与木条根数和开槽总长度有关；用料与木板体积有关。我们对各分目标函数进行归一化处理，并相加得到总目标函数，建立折叠桌设计的优化模型，用 Matlab7.0 求解。最后得出：对于桌高 70cm，桌面直径 80cm 的情况，长方形平板尺寸为$162cm\times80cm\times3cm$，平板状态时桌面中心距离钢筋 40.5cm，同侧桌腿最外侧到中间木条的开槽长度依次为：0, 6.71, 10.69, 15.41, 19.39, 22.61, 25.12, 26.99, 28.28, 29.04（cm）结果合理可靠。

对于问题 3，我们综合第 1、2 题，采用了五种不同形状的桌面模型（包括圆形、椭圆、正六边形、正八边形、正四边形桌面）进行计算。合理给出初值高度和宽度，刻画桌面边缘函数，之后用优化搜索最佳参数，利用参数计算得开槽长度和木条长度，并用 Matlab7.0 建立动态模拟，进行评估，匹配效果较好（见图 14）。

关键词：折叠桌　开槽　动态模拟　优化　桌脚边缘曲线　目标设计

一、问题重述

某公司生产的一种圆形桌面的折叠桌，桌腿被分为两组，各组各用一根钢筋将木条连接，沿木条有空槽可使钢筋滑动，而钢筋两端分别固定在桌腿各组最外侧的两根木条上。折叠桌可由原来的一个平板经过动态变化变成一个稳定的木桌。

试建立数学模型讨论下列问题：

1. 给定长方形平板尺寸为$120\ cm \times 50\ cm \times 3\ cm$，每根木条宽 2.5 cm，连接桌腿木条的钢筋固定在桌腿最外侧木条的中心位置，折叠后桌子的高度为 53 cm。试建立模型描述此折叠桌的动态变化过程，在此基础上给出此折叠桌的设计加工参数（例如，桌腿木条开槽的长度等）和桌脚边缘线（图 4 中红色曲线）的数学描述。

2. 折叠桌的设计应做到产品稳固性好、加工方便、用材最少。对于任意给定的折叠桌高度和圆形桌面直径的设计要求，讨论长方形平板材料和折叠桌的最优设计加工参数，例如，平板尺寸、钢筋位置、开槽长度等。对于桌高 70 cm，桌面直径 80 cm 的情形，确定最优设计加工参数。

3. 公司计划开发一种折叠桌设计软件，根据客户任意设定的折叠桌高度、桌面边缘线的形状大小和桌脚边缘线的大致形状，给出所需平板材料的形状尺寸和切实可行的最优设计加工参数，使得生产的折叠桌尽可能接近客户所期望的形状。你们团队的任务是帮助给出这一软件设计的数学模型，并根据所建立的模型给出几个你们自己设计的创意平板折叠桌。要求给出相应的设计加工参数，画出至少 8 张动态变化过程的示意图。

二、问题分析

（一）对于问题 1：

已知折叠桌的折叠是一个动态变化过程，长方形平板的尺寸以及折叠后桌子高度均已给出，根据所给数据和信息，我们欲以最外侧一根木条为准，通过各木条与竖直方向夹角间的关系来描述折叠桌的动态变化过程，在此基础上即可求出折叠桌的设计加工参数。

我们以桌子的 1/4 为研究对象，再对称即得所有。

首先，求出每一条木条的长度。我们以长方形平板的中心为圆心，宽度为直径作圆内切与长方形平板。通过观察数据，我们发现长方形平板刚好可以被切割 20 次，即一共有 20 条木条，过木条与圆交点连线的中点作垂直方向切割，再利用几何关系和勾股定理依次算出每一条木条的长度。

然后，分别求出最外侧木条和同侧其余木条与竖直方向夹角之间的关系。由于折叠桌木条长度是确定的，只需确定出木条与竖直方向夹角，就可以描述折叠桌的动态变化过程。已知折叠后桌子高度和最外面木条的长度，利用三角函数可以得到最外面木条与竖直方向夹角，并根据几何关系找到最外侧木条和同侧其余木条与竖直方向夹角之间的

关系，以最外侧木条的角度为自变量，同侧其余木条的角度为因变量，建立方程以描述任意动态过程中木条的位置。

接下来要算出桌腿木条开槽长度。将桌面中心和每一根木条的垂直切割线中心、平板状态下钢筋位置向水平方向投影，将钢筋的理想运动轨迹和实际运动轨迹分别描画出来，找到折叠桌放置稳定后的状态，相邻轨迹之间的最大距离即为该根木条的开槽长度。

最后拟合出桌脚边缘线曲线方程。以折叠桌的中心为坐标原点，木条切割方向为x轴，垂直直径方向为y轴，建立空间直角坐标系，可通过几何关系找出桌角边缘线曲线方程，也可分别求出缘线上的点的坐标。

（二）对于问题 2：

问题 2 是一个优化问题，对于给定的折叠桌高度和圆形桌面直径的设计要求，依据相关限制条件，进行合理范围内的搜索最优，保证达到产品稳固性好、加工方便、用材最少三方面的要求。

（三）对于问题 3：

问题 3 是基于问题 1，对问题 2 进行的推广。根据客户给定的折叠桌高度、桌面边缘线的形状大小和桌脚边缘线的大致形状，确定桌面半径，和桌子高度，利用优化模型，确定其他参数，再进行计算，得最终的开槽长度和木棍长度，并用 Matlab7.0 进行模拟、分析，得出结果。此外，根据桌脚边缘线的形状，得到函数表达式也可以确定桌板的长度，因此我们利用这一点进行结果的评价，得到吻合度。

三、模型假设

1. 题目所给的数据真实可靠；
2. 木条质地均匀，表面平整，具有一定刚性，不会被轻易折断；
3. 所有木条接触紧密，且比较光滑，阻碍较小；
4. 客户任意给出的折叠桌相关要求符合实际，切实可行。
5. 忽略切割木条时损失的木料，即认为木条与木条间无缝隙。

四、定义与符号说明

L_i	第i根木条的长度
α	最外面那根木条与竖直方向的夹角
β_i	第i根木条与竖直方向的夹角，记$\beta_1=\alpha$
S_i	第i根木板留在圆桌上部分长度的一半
d_i	第i根木条的开槽长度

a	每根木条的宽度
b	长方形木板长度的一半
c	平板状态下中心至钢筋的距离
h	桌面的高度
D	稳定状态下两侧最外面木条边缘之间的距离
r	圆形桌面的半径或非圆时桌宽的一半
μ	每根木条的厚度
n	木条的根数
k	钢筋位置分桌腿的比例

五、模型的建立与求解

5.1 问题一：基于几何关系的折叠桌动态变化模型建立与求解

题目要求我们通过建立数学模型来描述折叠桌的动态变化过程，并给出创意平板折叠桌的设计加工参数，因此我们创新了一种新的切割方法得到圆形桌面，且能有效减少误差，并根据其几何关系，建立数学模型来解决问题。

5.1.1 作内切圆，将平板分成 20 根木条

题目没有具体给出长方形平板的切割方式，因此我们用最大内切圆的方法进行切割。我们以长方形木板的中心为圆心，木板宽度为直径，与木板的长边内切作圆，得到半径为 25cm 的内切圆。然后分析数据，我们发现长方形木板的宽度按正好是木条宽的 20 倍，所以我们将木板进行 20 等分切割。若由外向内依次切割，每一条切割线与其上一条切割线分别与圆各有一个交点，以两交点的中点作一条垂直于两条切割线的线，该条垂线即为该根木条的纵向切割线，纵向切割线至木板边缘即为木条，另一段至木板中心即为留在圆形桌面的部分，以此类推将长方形平板切割成一个圆形桌面，如图 1 所示：

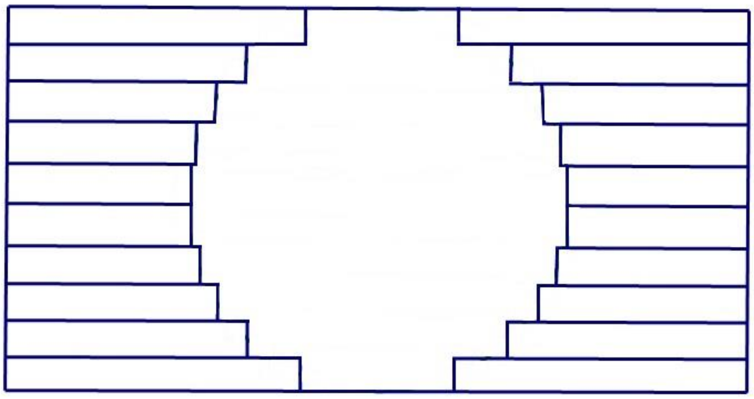


图 1 木板切割示意图

为了方便下文就行描述，我们在这里给出一个**定义：**

切割点：过相邻两条水平切割线与圆交点之间的连线中点，作一条垂直于两条水平切割线的垂线，该垂线与圆弧的交点为切割点。

5.1.2 求出每一根木条的长度

根据几何关系，利用勾股定理和三角函数求出每一根木条的长度。如图 2 所示：

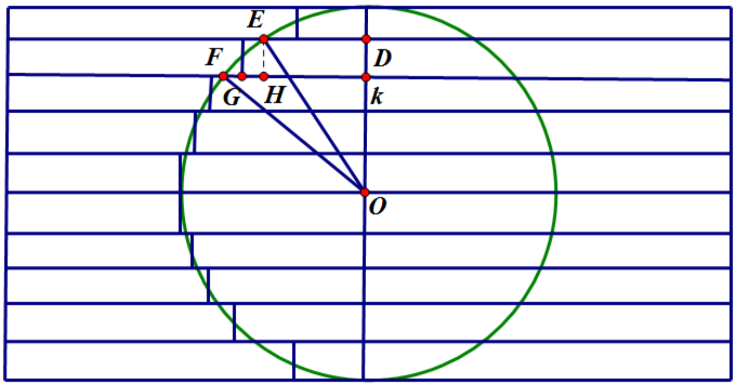


图 2 木条长度几何关系图

得到：

$$ED=\sqrt{OE^2-(OE-DK)^2}=\sqrt{25^2-(25-2.5)^2}$$

$$FK=\sqrt{OG^2-(OG-2DK)^2}=\sqrt{25^2-(25-2\times2.5)^2}$$

$$HK=\frac{FK-ED}{2}+ED=\frac{FK+ED}{2}$$

由此类推可得：

$$S_i=\frac{\sqrt{\left(625-(25-2.5i)^2\right)}}{2}+\frac{S_{i-1}}{2} \tag{1}$$

$$L_i=60-S_i \tag{2}$$

其中：

S_i为第i根木板留在圆桌上长度的一半；

L_i为第i根木条的长度。

记最外面的木条为第一根木条，按顺序进行类推。

根据上式算出每一根木条的长度，见表 1：

表 1 各根木条的长度

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
长度	54.55	49.78	45.96	42.98	40.66	38.88	37.51	36.51	35.82	35.41
编号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
长度	35.41	35.82	36.51	37.51	38.88	40.66	42.98	45.96	49.78	54.55

由上表得出最外面一根木条的长度为 54.55cm，而折叠桌的实际高度为折叠桌高减去木条的厚度，为 50cm，最外面木条长度是大于 50cm 的，故我们的切割方法是可行的。

5.1.3 建立折叠桌动态变化模型

由于桌子由两组木条支撑，每组用一根钢筋将木条连接，只要最外侧木条发生移动，就会带动其他的木条一起移动，因此折叠桌动态变化过程中木条与竖直方向的夹角α是变化的，而每一跟木条的长度是一定的，故我们只用研究角度的变化关系就可描述折叠桌的动态变化过程。所以我们以第一根木条与垂直方向的夹角α为自变量，第i根木条与竖直方向夹角β_i为因变量建立方程，从而描述动态变化过程。

根据图 3 所示，其中：B 点为最外侧木条的切割点，C、F 为另外两个切割点，G 点为钢筋所在位置，虚线平行于x轴，CD、FE 均垂直于x轴，$BC=k$，$MG=S$，$BM=h$，$BG=\frac{l}{2}$，$CG=\frac{l_i}{2}$，$DG=S-k$。

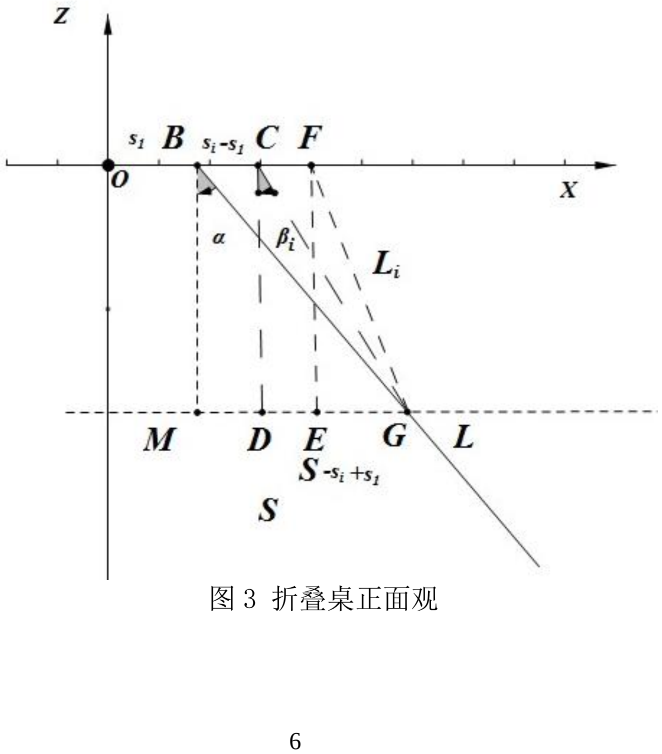


图 3 折叠桌正面观

利用几何关系找到：

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{h}{L/2} \\ \sin\alpha = \dfrac{S}{L/2} \\ \tan\beta_i = \dfrac{S-k}{h} \end{cases} \tag{3}$$

联立解得：

$$\beta_i = -\arctan\left(\tan\alpha - \frac{2\left(S_i - S_1\right)}{L\cos\alpha}\right) \tag{4}$$

在上述（2）式中α可以根据折叠桌的高度算得：

$$\cos\alpha = \frac{h}{L_1} \tag{5}$$

但是折叠桌的高度为53cm，而木条的厚度为3cm，故折叠桌的下表面距地面50cm。

在折叠桌的动态变化过程中，由于最外面木条长L_1是保持不变的，而随着高度的改变，α也在不断变化，从而可引起内部木条的β_i一起变化，所以（4）式可以描述出折叠桌的动态变化过程。

5.1.4 计算木条的开槽长度

根据题意可知，钢筋穿过最外面两侧木条的中心，从而起到固定的作用，而中间的木条由于存在开槽，便可以滑动，并且每一根木条的开槽长度是不一样的。

我们首先把钢筋的位置标出，再标记切割点，得到图4：

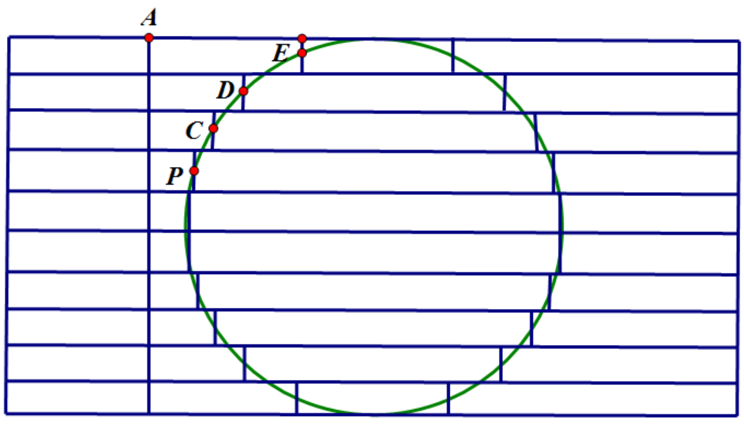


图4 木板示意图

然后将木板向水平方向投影，各切割点依次投影至水平线上，分别以这些切割点的投影点为圆心，投影点到钢筋的距离为半径作圆。此圆即为钢筋在不发生滑动情况下的理想运动路径。但实际上，钢筋固定在最外侧木条上，故其运动轨迹是由最外面木条来

决定的，所以相邻轨迹之间的最大距离（钢筋的最大位移）即为该木条的最小开槽长度。如图 5 所示：

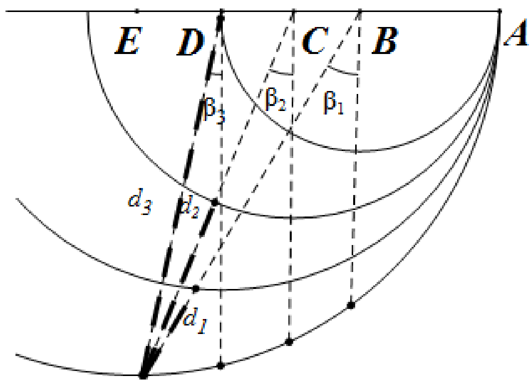


图 5 投影后折叠桌示意图

A 为钢筋起始位置，B,C,D 分别为第 1、2、3……根木条切割点。

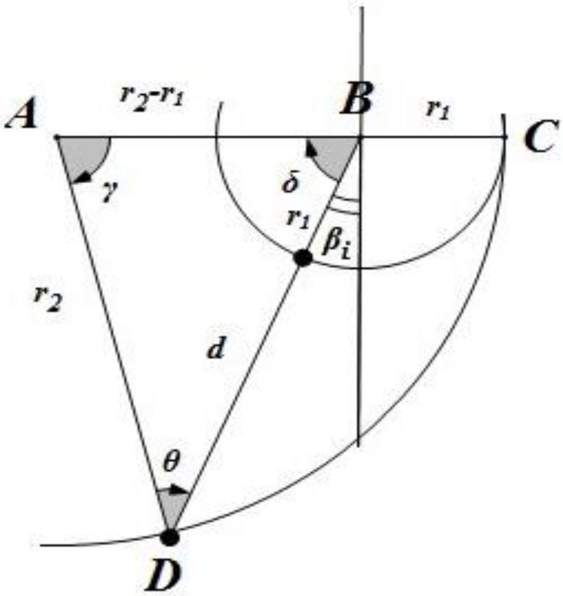


图 6 钢筋运动轨迹

如图 6 所示，C 为钢筋起始位置，A,B 分别为第 1、2 根木条切割点。用正弦定理可得：

$$\frac{r_2-r_1}{\sin\theta}=\frac{r_2}{\sin\delta}=\frac{d+r_1}{\sin\gamma} \tag{6}$$

而 β_i 在上文已求出，便可推导出开槽长度为：

$$d_i=\frac{(r_2-r_1)\cos(\beta_i)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta_i\right)}{r_2}+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta_i\right)\frac{r_2}{\cos\beta_i}\sqrt{\left(1-(\frac{r_2-r_1}{r_2}\cos\beta_i)^2\right)}-r_1$$

$$r_2=30-S_1$$

$$r_1=30-S_i \tag{7}$$

其中：d_i为第i根木条的开槽长度。

对（7）式求导，开槽长度的极值点为 0 和$\frac{\pi}{2}$，因此在求解相邻两圆间最大距离时要分两种情况。

① 当$0<\beta_i<\frac{\pi}{2}$时，开槽长度为折叠桌稳定状态下，相邻两圆之间的距离就是该木条的开槽长度；

② 当$\beta_i \ge \frac{\pi}{2}$时，木条的开槽长度为$\beta_i$取$\frac{\pi}{2}$时对应的相邻两圆间距离。

综上所述，每根木条的开槽长度如表 2 所示：

表 2 每根木条开槽长度

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
槽长	0	4.31	7.04	8.98	11.29	13.18	14.68	15.81	16.61	17.08
编号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
槽长	17.08	16.61	15.81	14.68	13.18	11.29	8.98	7.04	4.31	0

从上表我们观察到最外侧木条的开槽长度为 0，而最大开槽长度为 17.08cm，均符合实际情况，数据合理。

5.1.5 建立桌角边缘线模型

以折叠桌的中心为坐标原点，木条方向为x轴，垂直直径方向为y轴，建立空间直角坐标系，如图 6 所示。

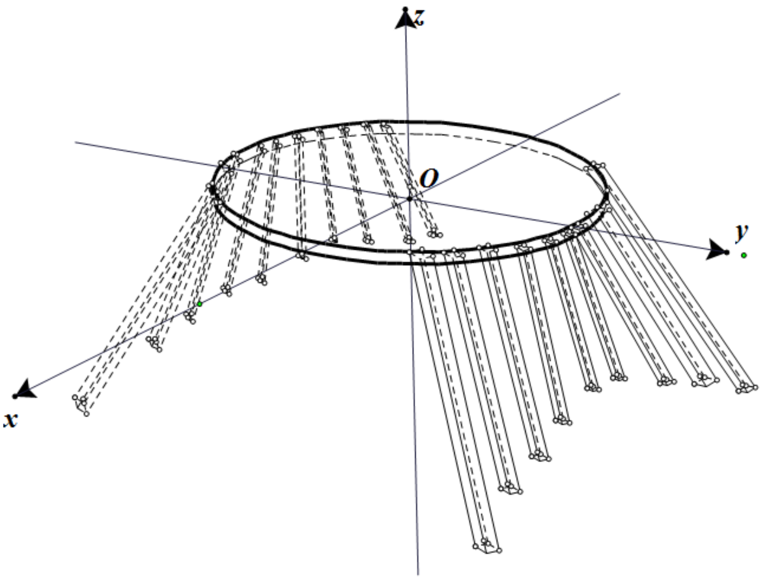


图 6 建立坐标系示意图

求出边缘线上点的坐标表达，并通过几何关系找出桌角边缘线曲线方程。以任意一根木条为例，如图 7 所示：

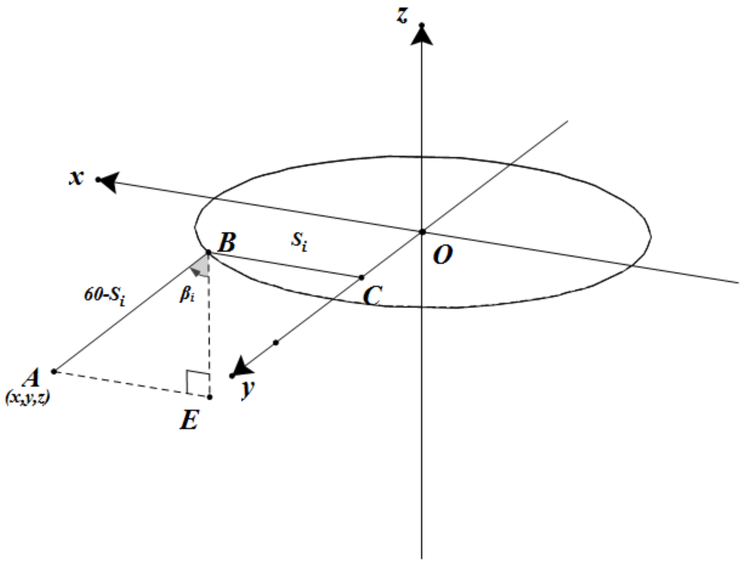


图 7 桌角边缘点坐标

B 点为第 i 根木条的切割点，AB 为其相对应的木条。根据几何关系，我们可以得到：

$$\begin{cases} z^2+(x-S_i)^2=(60-S_i)^2 \\ 25^2-y^2=S_i^{\ 2} \end{cases} \tag{10}$$

其中：S_i 为第 i 根木板留在圆桌上长度的一半；

联立可以得到桌角边缘线的曲面方程：

$$z^2=-120\sqrt{(25^2-y^2)}-x^2+2x\sqrt{25^2-y^2}+3600 \tag{11}$$

用 Matlab7.0 画出桌角边缘线的曲面方程图，如图 8 所示（代码见附录）：

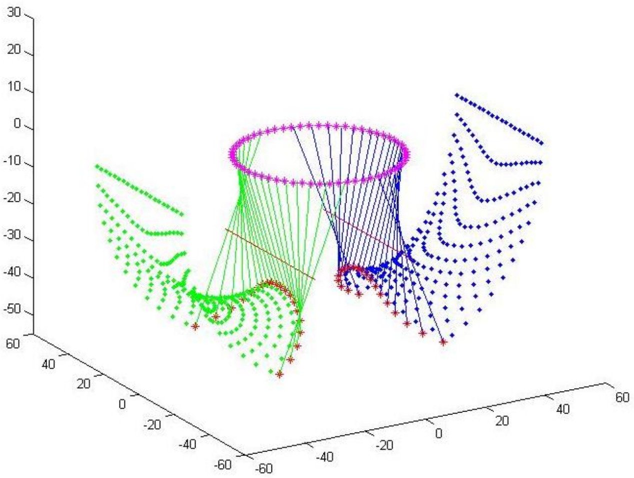


图 8 桌角边缘线曲面

图 8 两侧图形为桌角边缘线的运动轨迹，构成了一个曲面。但是这样的点是连续的，而桌角边缘的点是离散的，因此我们把折叠桌维持在稳定状态下，将最终曲面上的点分离，得到桌角边缘线的曲线图：

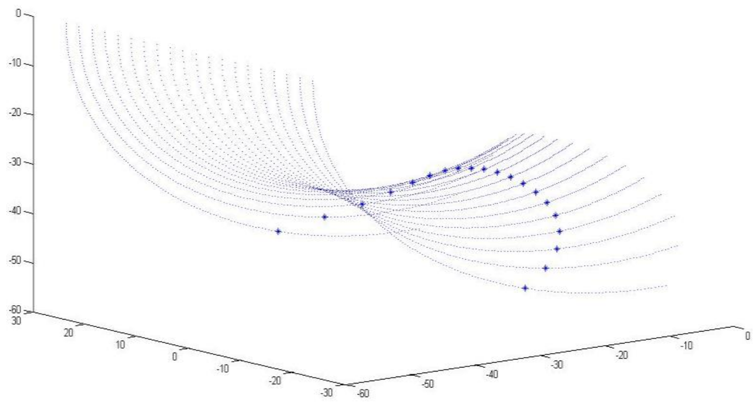


图 9 桌角边缘线曲线

通过以上模型的建立与求解，我们很好地描述了折叠桌的动态变化过程，求出每一根木条的开槽长度，并用函数关系描述出桌脚边缘线，结果均符合实际，具有合理性。

5.2 问题 2：折叠桌设计优化模型建立与求解

分析折叠桌的参数可知，仅有 r 、 h 两个参数是顾客给出的，故我们需要利用优化模型确定其他参数（ n 、 k 、 b ），从而计算出加工参数，即木条长度和开槽长度。

5.2.1 确定分目标函数

题目要求得出长方形平板材料和折叠桌的最优设计加工参数，因此我们的目标函数为产品的用材最少、加工方便、稳固性好。我们通过构造一个函数关系式，综合考虑用料、加工和稳固性三个因素，用优化模型得出产品最优设计加工参数。下图为各个几何参数的示意图。

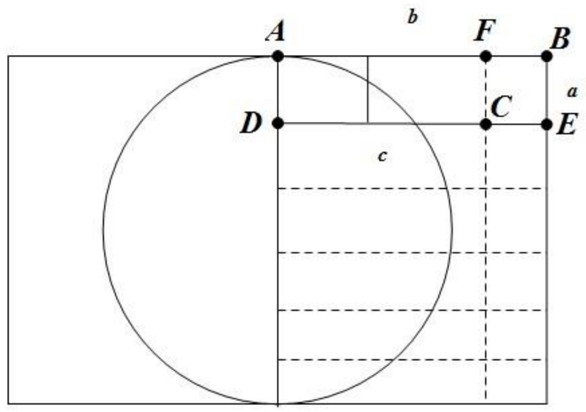


图 10 几何参数示意图

① 用料

木材的用料是由木板的长、宽、高来决定的，要使得用料最省，则在满足题目所给条件下，使木板的体积最小，即：

$$V = 4rb\mu \tag{12}$$

② 加工

1. 木条根数

根据经验得知，木条的根数越少，切割次数越少，加工过程越方便，即：

$$n=\frac{2r}{a},\left(n\in N^{*},n\geq 2\right) \tag{13}$$

2. 开槽长度

每一根木条的开槽长度是不一样的，将所有木条的开槽长度相加得到总开槽长度，当总开槽长度最小时，加工工程量最小，去皮也最少。由上文得出每一根木条的开槽长度为：

$$\begin{gathered} d_i=\frac{\left(r_2-r_1\right)\cos\left(\beta_i\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta_i\right)}{r_2}+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta_i\right)\frac{r_2}{\cos\beta_i}\sqrt{\left(1-(\frac{r_2-r_1}{r_2}\cos\beta_i)^2\right)}-r_1 \\ r_2=c-S_1 \\ r_1=c-S_n \\ S_i=\frac{\sqrt{r^2-\left(r-ai\right)^2}}{2} \end{gathered} \tag{14}$$

其中：d_i为第i根木条的开槽长度。

要使得总开槽长度最小，对d_i累加使总开槽长度最小。

③ 稳固性

1. 重心稳定

我们认为，当圆形桌面的投影恰好与四个桌脚连线构成的矩形外切时，折叠桌的稳固性最好，此时四个桌角正好是正方形的四个顶点。折叠桌的正面观如图 11 所示：

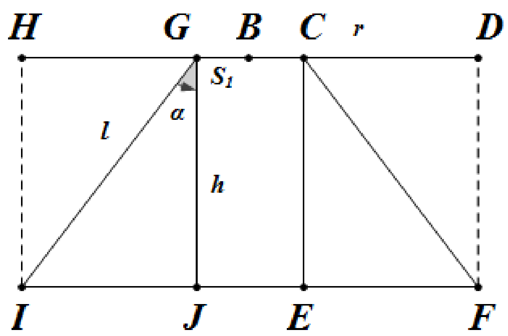


图 11 折叠桌正面观

根据几何关系可得到：

$$D=2\left(L_1\sin\alpha+S_1\right) \tag{15}$$

当折叠桌稳固性最好时：$D=2r$，但是不一定是最优解，因为还有其他因素来限制目标函数，故只需让$\left(D-2r\right)^2$的值趋近于 0 即可满足要求，即：

$$\left(D-2r\right)^{2}\to 0 \tag{16}$$

2.正负角个数平衡

对钢筋进行受力分析可知，钢筋的受力平衡与木条与钢筋之间夹角的正负有关，我们规定木条向里的角度为负，向外为正，当正角度和负角度的角度个数相近时，我们认为木条的稳固性较好，即：

$$N=N\left(\beta^{-}\right)-N\left(\beta^{+}\right) \tag{17}$$

5.2.2 分目标函数归一化处理

由于目标函数有三个分目标，每一个目标函数的量纲不同，故我们对分目标函数进行归一化处理。

对于样本数据 $x\left(n\right),n=1,2,\ldots\ldots,N,$ 归一化后的样本数据可以采用均值法，该法可将数据归一化到任意范围内。

$$y(k)=A\frac{x(k)}{\bar{x}},k=1,2,\cdots,N \quad , \quad \bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x(i) \tag{18}$$

5.2.3 确定总目标函数

将归一化处理过的三个分目标函数相加得到总目标函数，要满足产品稳固性好、加工方便、用料最少，即使总目标函数最小。

$$F=\sum_{j=1}^{3}f_j \tag{19}$$

5.2.4 折叠桌设计优化模型的建立与求解

确定了总目标函数后，通过寻找约束条件，建立折叠桌设计优化模型：

$$\min \quad F=\sum_{j=1}^{3}f_j \tag{20}$$

$$s.t.\quad \begin{cases} a,b,c>0, \\ n\in N^{*},n\geq 2, \\ d_i<l, \\ b>c>r, \\ \alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\beta_i\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \\ l\geq h, \\ c>d_i \end{cases} \tag{21}$$

用 Matlab7.0 进行求解得到：

$$a=4,b=81,c=40.5,n=20,u=3$$

所以长方形平板尺寸为 $162cm\times 80cm\times 3cm$，平板状态时中心到钢筋的距离为 40.5cm，每根木条开槽长度如表 3 所示：

表 3 每根木条开槽长度

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
开槽长	0	6.71	10.69	15.41	19.39	22.61	25.12	26.99	28.28	29.04
编号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
开槽长	29.04	28.28	26.99	25.12	22.61	19.39	15.41	10.69	6.71	0

最外侧的木条的开槽长度为 0，而最中间木条的开槽长度为 29.04cm，数值合理。折叠桌的模拟图为：

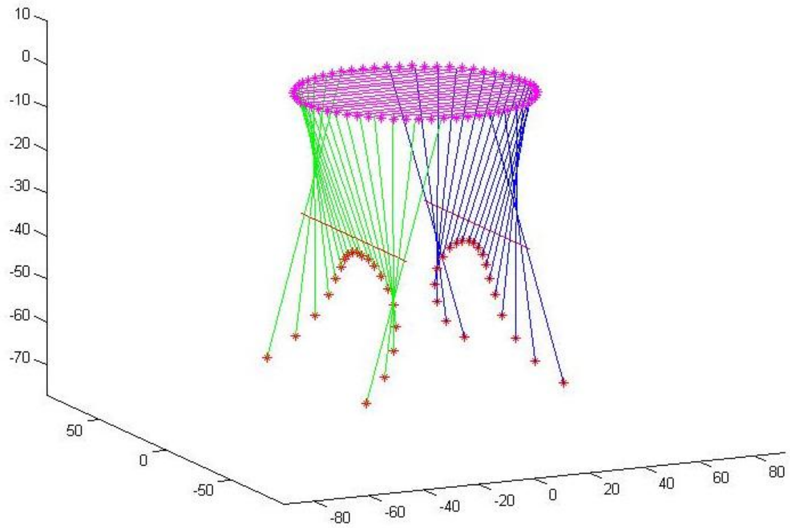


图 12 折叠桌最右设计方案示意图

桌脚边缘线的运动轨迹图为：

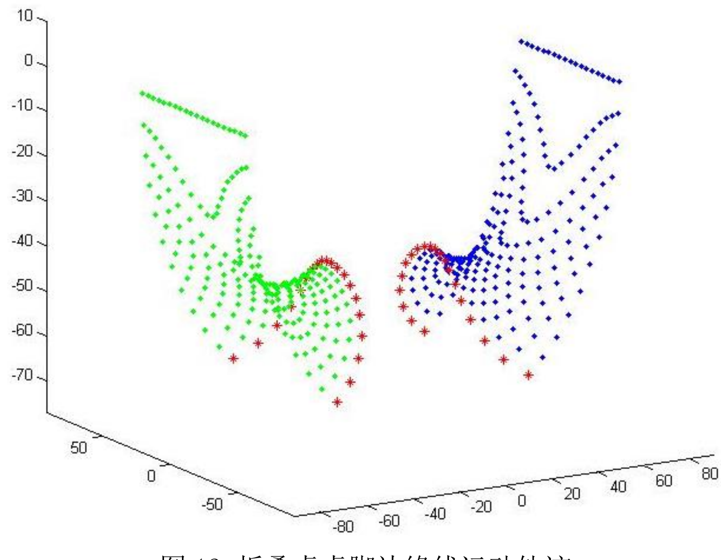


图 13 折叠桌桌脚边缘线运动轨迹

图 13 中边缘‘*’散点为折叠桌稳定状态下桌脚边缘位置，其他点为运动过程中的轨迹。

5.3 问题 3：任意给定条件的折叠桌设计优化模型

题目要求我们开发出一种折叠桌设计软件模型，对客户任意设定的折叠桌高度、桌面边缘线的形状大小和桌角边缘线的大致形状，从而求出折叠桌的最优设计方案。我们在第 1、2 问的基础上进行推广，对于任意桌面形状的折叠桌设计方案，通过建立桌面边缘线函数，寻找目标函数和约束条件在一定合理范围内搜索最优解，从而建立任意给定条件的折叠桌设计优化模型，给出设计方案。

我们设计的程序可以根据客户任意给定的桌面边缘线形状大小，通过r和桌面边缘线的特性，计算出桌面边缘线的函数。继而完成相关计算，最后呈现出的即为各木棍的长度和开槽位置及长度的参数，也会给出相应动态模拟图，增强视觉效果，以便形成直观评价。

我们分别选取圆、椭圆、正四边形、正六边形、正八边形 5 种桌面形状作为基本模板，根据客户的要求设计最优方案。

其中桌面边缘线的表达式分别为：

对于所有的桌面形状，y 的表达是一致的：

$$y(i)=\frac{a}{2}+ai$$

x 的表达方式如下：

圆：$\begin{cases} x(i)=\sqrt[2.5]{r^2-(r-ai)^2}, i=1 \\ x(i)=\sqrt[2.5]{r^2-(r-ai)^2}+\dfrac{x(i-1)}{2}, i\neq 1 \end{cases}$

椭圆：$x(i)=\sqrt{\dfrac{ab-by(i)^2}{a}}$

正四边形：$x(i)=\dfrac{2r}{ni}$

正六边形：$x(i)=\dfrac{2ri}{n}+\dfrac{r}{2}$

正八边形：$\begin{cases} x(i)=\sqrt{2}r\sin\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{i}{n}r\cos\left(\dfrac{\pi}{8}-\sin\dfrac{\pi}{8}\right), i<10-\dfrac{r\sin\frac{\pi}{8}-\frac{a}{2}}{a} \\ x(i)=r\cos\dfrac{\pi}{8}, i\geq 10-\dfrac{r\sin\frac{\pi}{8}-\frac{a}{2}}{a} \end{cases}$

5.3.1 建立任意给定要求的折叠桌设计优化模型

目标函数与第二问一致，限制条件也是一致的，我们仅改变了桌面外形函数表达式。得到相同的优化模型：

$$\min \qquad F=\sum_{j=1}^{3} f_j \tag{23}$$

$$s.t.\quad \begin{cases} a,b,c>0, \\ n\in N^*, n\geq 2, \\ d_i<l, \\ b>c>r, \\ \alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right], \beta_i\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ l\geq h, \\ c>d_i \end{cases} \tag{24}$$

5.3.2 优化方案与客户要求的吻合度

分析函数表达式得，桌脚边缘函数表达式可以唯一确定b。利用优化模型也可以得到最优加工参数。由此，我们把优化选择出的值和理论值进行比较，统计分析得吻合度达 90.87%。

5.3.3 软件模拟

我们首先选取五个模板样品，在合理范围内分别任意给予初值r（桌面垂直与切割方向的长度）和h（桌子的高度）：

表 4 五个模型的具体参数

组数	h	r	椭圆	圆	正八边形	正六边形	方形
1	55	35	√				
2	45	30		√			
3	60	40			√		
4	70	40				√	
5	65	40					√

*备注：打“√”者为相对应的桌面形状

然后进行优化选择，选取最优的其他参数n、b、k。

表 5 优化后选取的参数值

组数	h	r	n	k	b
1	55	35	20	0.53	67
2	45	30	18	0.55	55
3	60	40	22	0.46	88
4	70	40	20	0.42	97
5	65	40	16	0.32	126

*备注：h,r,b 单位均为 cm，n 为条数，k 为比例

通过对即得参数的计算，我们得出开槽长度和木棍切割长度：

表 6 桌面上剩余木棍长度和开槽长度

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
椭圆	剩余木条长	7.81	13.17	16.54	19.00	20.88	22.33	23.42	24.21	24.72	24.97
	开槽长度	0.00	4.84	7.32	8.93	10.83	12.36	13.56	14.44	15.03	15.32

		1	2	3	4	5	6	7	8	9
圆形	剩余木条长	6.87	12.86	17.61	21.28	24.08	26.18	27.72	28.76	29.38
	开槽长度	0.00	5.21	9.20	13.43	17.01	19.87	22.03	23.55	24.46

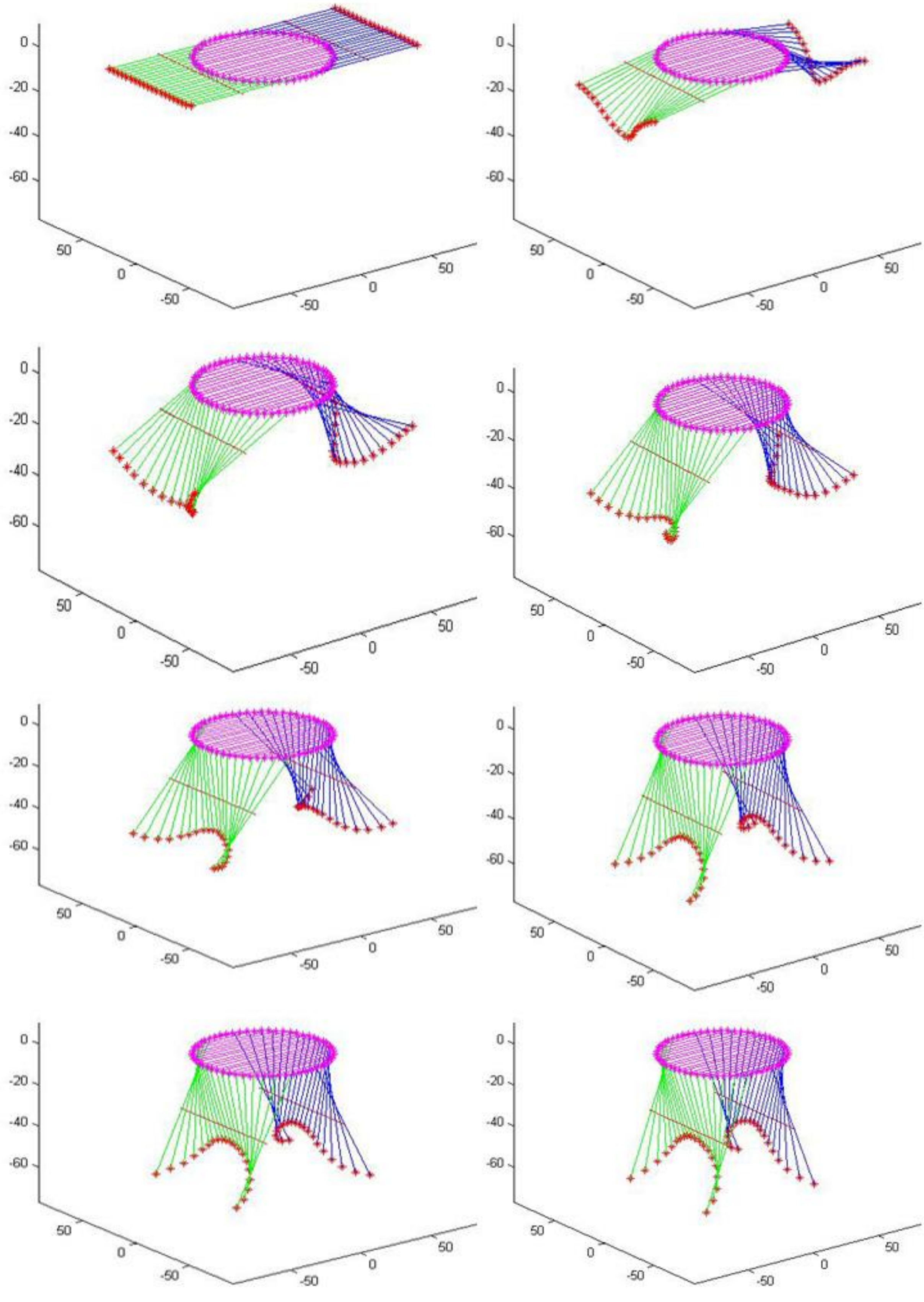
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
正八边形	剩余木条长	23.47	25.28	27.10	28.92	30.74	32.56	36.96	36.96	36.96	36.96	36.96
	开槽长度	0.00	1.72	3.24	4.56	5.64	6.46	7.59	7.59	7.59	7.59	7.59

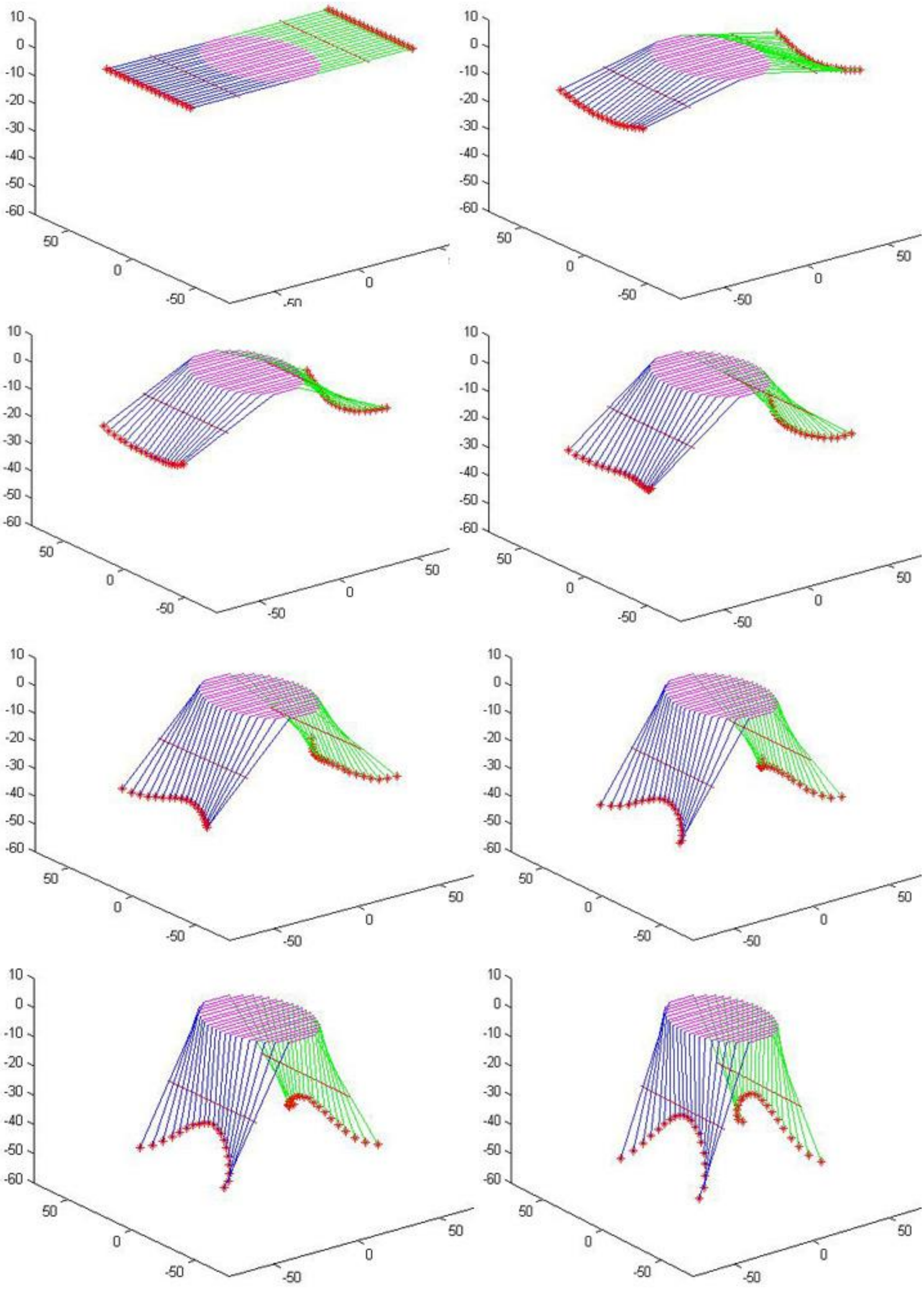
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
正六边形	剩余木条长	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
	开槽长度	0	1.892	3.5646	5.0051	6.1906	7.0813	7.6082	7.6406	6.8751	5.1711

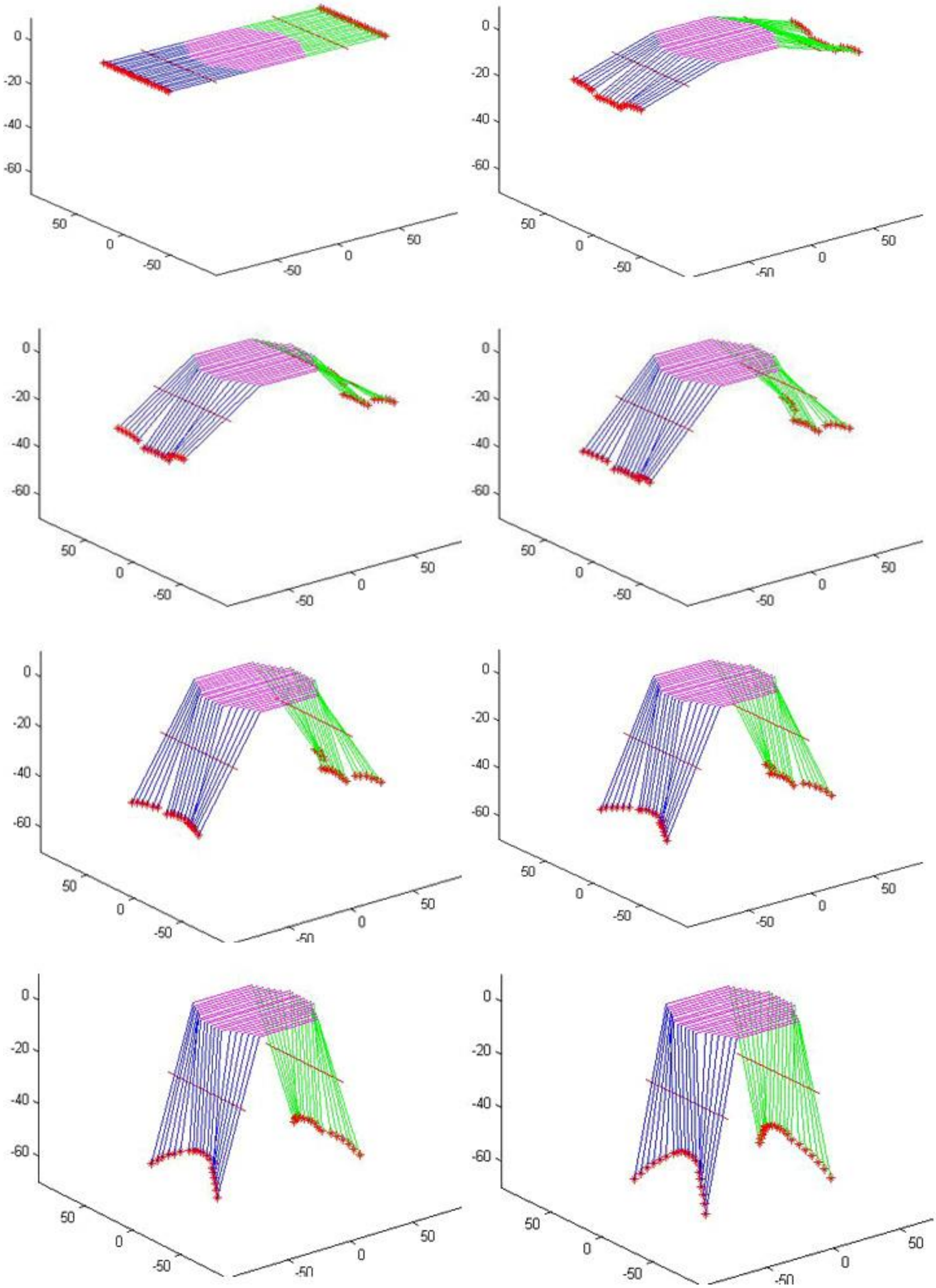
		1	2	3	4	5	6	7	8
正四边形	剩余木条长	5	10	15	20	25	30	35	40
	开槽长度	0	4.6443	8.5548	11.6566	13.7919	14.63	13.3214	4.4237

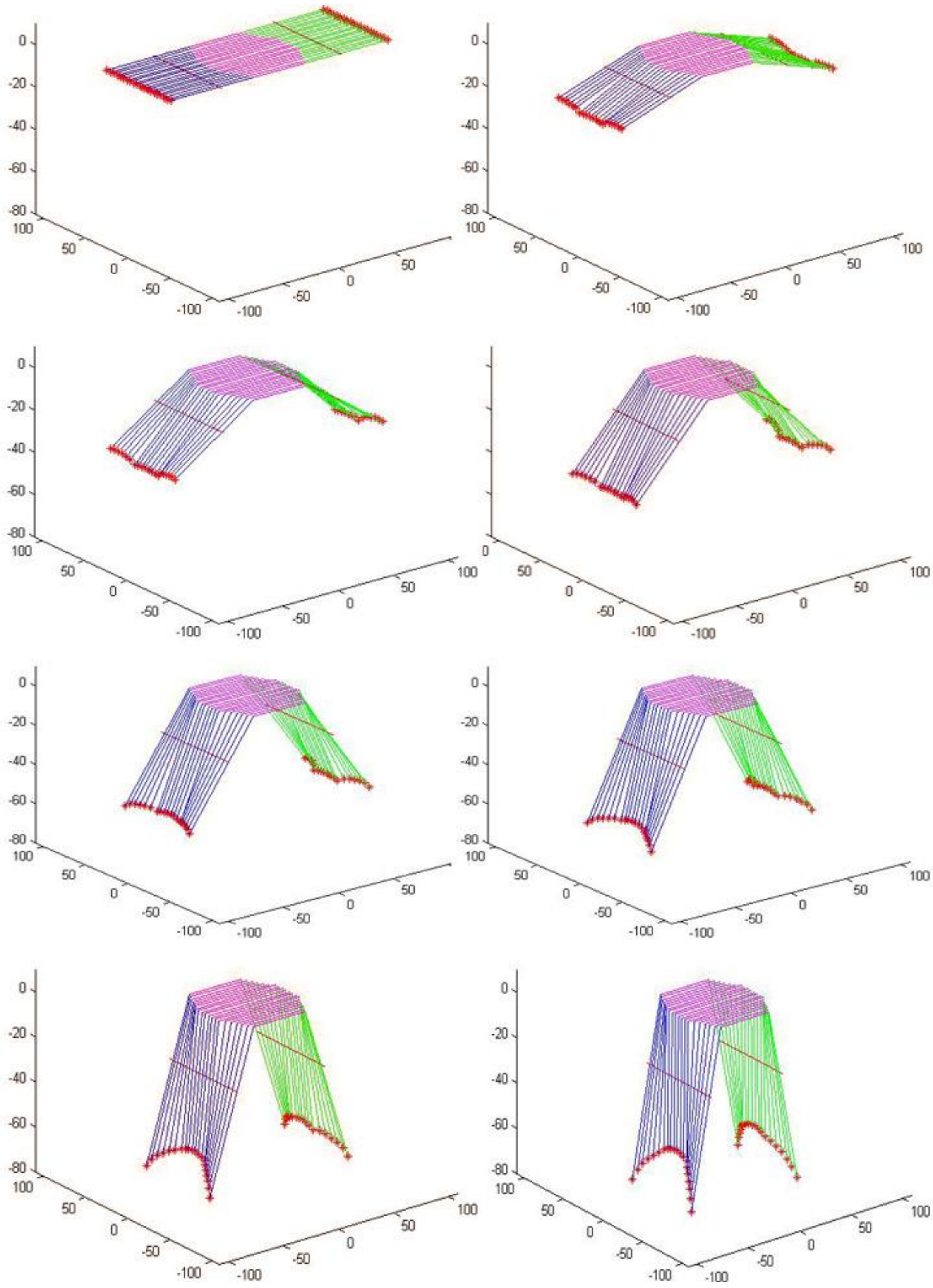
通过对所得参数的拟合，我们用 Matlab7.0 画出桌子的动态变化图，依次为圆形桌面、椭圆、正六边形、正八边形、正四边形桌面，如图所示（代码见附录）：

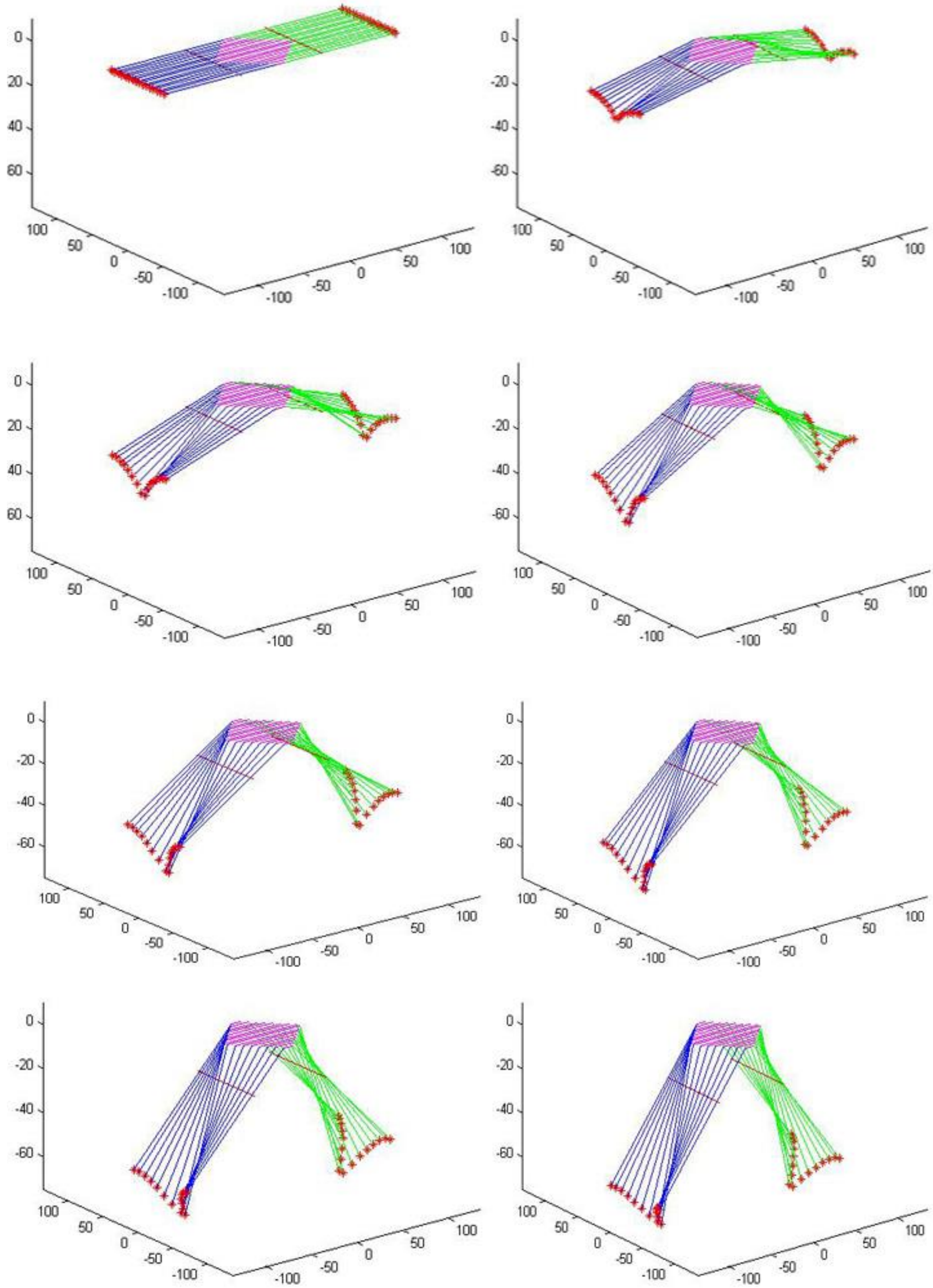
图 14 模拟动态示意图截图




10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
50
0
-50


0
-20
-40
-60
50
0
-50
-50
0
50





六、模型评价与推广

本文所建立的模型为基于几何关系的折叠桌动态模型，是通过几何关系，建立数学模型，最终得到曲线方程，从而形象地描述出折叠桌的动态变化过程。

我们的模型有许多优点。通过几何关系找到的桌角边缘线曲线方程比较准确，不需要用到多项式拟合，误差较小，并且能巧妙地将折叠桌动态变化过程转化为求解最外侧木条和其余木条与竖直方向夹角之间的关系，将文字和图形的描述全面地用数学表达式描述出来。再者，我们所用的木板切割方式简单易行，桌面外形丰富，包括圆形、椭圆、正六边形、正八边形、正四边形等基本形状的桌面，且优雅美观，实用性强。最后在求解木条开槽长度时，将钢筋理想运动轨迹和实际运动轨迹之间的最大距离作为木条的开槽长度，这是我们一大创新点，灵活地运用了空间立体思维及数学关系。其次，对于客户任意给定要求的最优设计方案，本模型能较好地满足客户的期望，尽量达到客户的要求。最后，我们的优化模型搜索最优解是在符合客观事实的合理范围内进行的，且在这一范围内完成了全局搜索，没有遗漏，也没有陷入局部最优。程序运行总步数少，较省时间。

当然我们的模型也存在不足。通过几何关系来建立方程，涉及到的角度和变量较多，公式推导较为复杂。在第二问的优化模型中，约束条件较少，这样得到的优化方案较多，工程量比较大。

总体来说，本文基于几何关系的折叠桌动态模型和设计方案是有很强的可行性的，可以推广到解决其他类似的不规则桌面形状的折叠桌设计问题。

七、参考文献

[1] 韩佳成，Robert Van Embricqs，平板折叠桌.设计，2012，8（1）：24-24;

[2] 谷德设计网，平板折叠桌，www.gooood.hk/_d274957045.htm，2014 年 9 月 13 日;

[3] 崔恒忠，曹资，刘景园.可展开折叠式空间结构实用分析方法与参数影响研究.北京：北京工业大学土木系，2012

[4] 陈锦昌，刘桂雄，梁利东，自由曲面造型中曲面信息的表示与分析[J]，华南理工大学学报（自然科学版），2002,30（4）：26-28

八、附件

```
clear all
clc
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%寻找最终aa
r=25;
ki=0.5;
b=60;
h=50;
nnn=20;
a=2*r/nnn;
e=ki*b;
for n=1:10
    if n==1
    s(n)=(r^2-(r-a*n)^2)^.5/2;
    else
        s(n)=(r^2-(r-a*n)^2)^.5/2+s(n-1)/2;
    end
end

aa=acos(h/(b-s(1)));
l=b-s(1);
for n=1:10
        bb(n)=-atan(tan(aa)-(s(n)-s(1))/(l/2*cos(aa)));
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
r2=e-s(1);

for n=1:nnn/2
    if bb(n)<0
        bbb=0;
    else
        bbb=bb(n);
    end
r1=e-s(n);
x(n)=(cos(bbb)*(r2-r1)/r2*cos(pi/2-bbb)+(1-(cos(bbb)*(r2-r1)/r2)^2)^.5*sin(pi/2-bbb))*r2/c
os(bbb)-r1;
end
x
%%%%%%%%%%%%%%%%%末端曲线
r=25;
ki=0.5;
b=60;
h=50;
nnn=20;
a=2*r/nnn;
e=ki*b;
for n=1:nnn/2
    if n==1
    x(n)=(r^2-(r-a*n)^2)^.5/2;
    else
        x(n)=(r^2-(r-a*n)^2)^.5/2+x(n-1)/2;
    end
```

```
    y(n)=a/2+(nnn/2-n)*a;
end

 aa=       acos(h/(b-x(1))) ;  %pi/2:-0.01:acos(50/(60-x(1)))%%%%%%
l=60-x(1);
for n=1:nnn/2
        bb(n)=-atan(tan(aa)-(x(n)-x(1))/(l/2*cos(aa)));
end
for ii=1:nnn/2
    yy(ii)=y(ii);

    if bb(ii)>0
        xx(ii)=abs((60-x(ii))*sin(bb(ii)))-x(ii);
        xxx=-xx(ii);
        xx(ii)=-xx(ii);
    else
        xx(ii)=abs((60-x(ii))*sin(bb(ii)))+x(ii);
        xxx=xx(ii);
    end

    zz(ii)=-(-2*b*(r^2-yy(ii)^2)^(1/2)-xxx^2+2*xxx*(r^2-yy(ii)^2)^(1/2)+b^2)^(1/2);
end
for ii=nnn/2+1:nnn
    yy(ii)=-yy(nnn+1-ii);
    zz(ii)=zz(nnn+1-ii);
    xx(ii)=xx(nnn+1-ii);
    x(ii)=x(nnn+1-ii);
     y(ii)=-y(nnn+1-ii);
end

for jj=1:nnn
    plot3(xx(jj),yy(jj),zz(jj),'r*')
        plot3(-1.*xx(jj),yy(jj),zz(jj),'r*')
    hold on
end
hold on
%%%%%%%%%%%%%%%%%%末端平面
r=25;
ki=0.5;
b=60;
h=50;
nnn=20;
a=2*r/nnn;
for n=1:nnn/2
    if n==1
    x(n)=(r^2-(r-a*n)^2)^.5/2;
    else
        x(n)=(r^2-(r-a*n)^2)^.5/2+x(n-1)/2;
    end
    y(n)=a/2+(nnn/2-n)*a;
end
 for aa=pi/2:-0.1:acos(h/(b-x(1)))   %%%%%%
```

```
l=b-x(1);
for n=1:nnn/2
        bb(n)=-atan(tan(aa)-(x(n)-x(1))/(l/2*cos(aa)));
end
for ii=1:nnn/2
    yy(ii)=y(ii);

    if bb(ii)>0
        xx(ii)=abs((b-x(ii))*sin(bb(ii)))-x(ii);
        xxx=-xx(ii);
        xx(ii)=-xx(ii);
    else
        xx(ii)=abs((b-x(ii))*sin(bb(ii)))+x(ii);
        xxx=xx(ii);
    end

    zz(ii)=-(-2*b*(r^2-yy(ii)^2)^(1/2)-xxx^2+2*xxx*(r^2-yy(ii)^2)^(1/2)+b^2)^(1/2);
end
for ii=nnn/2+1:nnn
    yy(ii)=-yy(nnn+1-ii);
    zz(ii)=zz(nnn+1-ii);
    xx(ii)=xx(nnn+1-ii);
    x(ii)=x(nnn+1-ii);
     y(ii)=-y(nnn+1-ii);
end

for jj=1:nnn

axis([-b-10 b+10 -b-10 b+10 -h-10 10])

    plot3(xx(jj),yy(jj),zz(jj),'.')
    plot3(-1.*xx(jj),yy(jj),zz(jj),'g.')
    hold on
end
 end
hold on
%%%%%%%%%%%%%动态
clear all
clc
clf

r=25;
ki=0.5;
b=60;
h=50;
nnn=20;
a=2*r/nnn;
e=ki*b;
%%%%%%%%%%%%%%%%%末端曲线
```

```
for n=1:nnn/2
    if n==1
    x(n)=(r^2-(r-a*n)^2)^.5/2;
    else
        x(n)=(r^2-(r-a*n)^2)^.5/2+x(n-1)/2;
    end
    y(n)=a/2+(nnn/2-n)*a;
end
for aa=pi/2:-0.1:acos(h/(b-x(1)))   %%%%%%
    clf

l=b-x(1);
for n=1:nnn/2
        bb(n)=-atan(tan(aa)-(x(n)-x(1))/(l/2*cos(aa)));
        bb
end
for ii=1:nnn/2
    yy(ii)=y(ii);

     if bb(ii)>0
        xx(ii)=abs((b-x(ii))*sin(bb(ii)))-x(ii);
        xxx=-xx(ii);
        xx(ii)=-xx(ii);
    else
        xx(ii)=abs((b-x(ii))*sin(bb(ii)))+x(ii);
        xxx=xx(ii);
    end

    zz(ii)=-(-2*b*(r^2-yy(ii)^2)^(1/2)-xxx^2+2*xxx*(r^2-yy(ii)^2)^(1/2)+b^2)^(1/2);
end
for ii=nnn/2+1:nnn
    yy(ii)=-yy(nnn+1-ii);
    zz(ii)=zz(nnn+1-ii);
    xx(ii)=xx(nnn+1-ii);
    x(ii)=x(nnn+1-ii);
     y(ii)=-y(nnn+1-ii);
end

for jj=1:nnn

axis([-b-10 b+10 -b-10 b+10 -h-10 10])

for sita=0:pi/30:2*pi
    plot3(r*cos(sita),r*sin(sita),0,'m*')
    hold on
    end
    plot3(xx(jj),yy(jj),zz(jj),'r*')
    line([xx(jj),x(jj)],[yy(jj),y(jj)],[zz(jj),0],'color','b')
    hold on
    plot3(-1.*xx(jj),yy(jj),zz(jj),'r*')
    line([-1.*xx(jj),-1.*x(jj)],[yy(jj),y(jj)],[zz(jj),0],'color','g')
    hold on
```

```
line([-1*(b-abs(x(1)))*sin(bb(1))*ki+x(1),-1*(b-abs(x(1)))*sin(bb(1))*ki+x(1)],[r,-r],[-(b
-abs(x(1)))*cos(bb(1))*ki,-(b-abs(x(1)))*cos(bb(1))*ki],'color','r')
    hold on

line([(b-abs(x(1)))*sin(bb(1))*ki-x(1),(b-abs(x(1)))*sin(bb(1))*ki-x(1)],[r,-r],[-(b-abs(x
(1)))*cos(bb(1))*ki,-(b-abs(x(1)))*cos(bb(1))*ki],'color','r')

     hold on



    line([-1.*x(jj),1.*x(jj)],[y(jj),y(jj)],[0,0],'color','m')
     hold on
end
hold on
pause(0.08)
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%桌子


r=25;
ki=0.5;
b=60;
h=50;
nnn=20;
a=2*r/nnn;
e=ki*b;
for n=1:nnn/2
    if n==1
    x(n)=(r^2-(r-a*n)^2)^.5/2;
    else
        x(n)=(r^2-(r-a*n)^2)^.5/2+x(n-1)/2;
    end
    y(n)=a/2+(nnn/2-n)*a;
end
 aa=acos(h/(b-x(1)))%pi/2:-0.1:acos(50/(60-x(1)))   %%%%%%
l=b-x(1);
for n=1:nnn/2
        bb(n)=-atan(tan(aa)-(x(n)-x(1))/(l/2*cos(aa)));
end
for ii=1:nnn/2
    yy(ii)=y(ii);

    if bb(ii)>0
        xx(ii)=abs((b-x(ii))*sin(bb(ii)))-x(ii);
        xxx=-xx(ii);
        xx(ii)=-xx(ii);
    else
        xx(ii)=abs((b-x(ii))*sin(bb(ii)))+x(ii);
```

```
        xxx=xx(ii);
    end

    zz(ii)=-(-2*b*(r^2-yy(ii)^2)^(1/2)-xxx^2+2*xxx*(r^2-yy(ii)^2)^(1/2)+b^2)^(1/2);
end
for ii=nnn/2+1:nnn
    yy(ii)=-yy(nnn+1-ii);
    zz(ii)=zz(nnn+1-ii);
    xx(ii)=xx(nnn+1-ii);
    x(ii)=x(nnn+1-ii);
     y(ii)=-y(nnn+1-ii);
end

for jj=1:nnn

axis([-b-10 b+10 -b-10 b+10 -h-10 10])
for sita=0:pi/30:2*pi
    plot3(r*cos(sita),r*sin(sita),0,'m*')
    hold on
    end
    plot3(xx(jj),yy(jj),zz(jj),'r*')
    line([xx(jj),x(jj)],[yy(jj),y(jj)],[zz(jj),0],'color','b')
    hold on
    plot3(-1.*xx(jj),yy(jj),zz(jj),'r*')
    line([-1.*xx(jj),-1.*x(jj)],[yy(jj),y(jj)],[zz(jj),0],'color','g')
    hold on

line([-1*(b-abs(x(1)))*sin(bb(1))*ki+x(1),-1*(b-abs(x(1)))*sin(bb(1))*ki+x(1)],[r,-r],[-(b
-abs(x(1)))*cos(bb(1))*ki,-(b-abs(x(1)))*cos(bb(1))*ki],'color','r')
    hold on

line([(b-abs(x(1)))*sin(bb(1))*ki-x(1),(b-abs(x(1)))*sin(bb(1))*ki-x(1)],[r,-r],[-(b-abs(x
(1)))*cos(bb(1))*ki,-(b-abs(x(1)))*cos(bb(1))*ki],'color','r')

     hold on
    line([-1.*x(jj),1.*x(jj)],[y(jj),y(jj)],[0,0],'color','m')
     hold on
end
hold on
for jj=1:nnn
plot3(xx(jj),yy(jj),zz(jj),'r*')
 hold on
plot3(-1.*xx(jj),yy(jj),zz(jj),'r*')
hold on
end

clear all
clc
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%寻找最终aa
r=40;
ki=0.5;
b=81;
```

```
h=67;
nnn=20;
a=2*r/nnn;
e=ki*b;
for n=1:10
    if n==1
    s(n)=(r^2-(r-a*n)^2)^.5/2;
    else
        s(n)=(r^2-(r-a*n)^2)^.5/2+s(n-1)/2;
    end
end

aa=acos(h/(b-s(1)));
l=b-s(1);
for n=1:10
        bb(n)=-atan(tan(aa)-(s(n)-s(1))/(l/2*cos(aa)));
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
r2=e-s(1);

for n=1:nnn/2
    if bb(n)<0
        bbb=0;
    else
        bbb=bb(n);
    end
r1=e-s(n);
x(n)=(cos(bbb)*(r2-r1)/r2*cos(pi/2-bbb)+(1-(cos(bbb)*(r2-r1)/r2)^2)^.5*sin(pi/2-bbb))*r2/c
os(bbb)-r1;
end
x

%%%%%%%%%%%%%%%%%%末端曲线

r=40;
ki=0.5;
b=81;
h=67;
nnn=20;
a=2*r/nnn;
e=ki*b;
for n=1:nnn/2
    if n==1
    x(n)=(r^2-(r-a*n)^2)^.5/2;
    else
        x(n)=(r^2-(r-a*n)^2)^.5/2+x(n-1)/2;
    end
    y(n)=a/2+(nnn/2-n)*a;
end

 aa=      acos(h/(b-x(1)))  ;  %pi/2:-0.01:acos(50/(60-x(1)))%%%%%%
l=60-x(1);
```

```
for n=1:nnn/2
        bb(n)=-atan(tan(aa)-(x(n)-x(1))/(1/2*cos(aa)));
end
for ii=1:nnn/2
    yy(ii)=y(ii);

    if bb(ii)>0
        xx(ii)=abs((60-x(ii))*sin(bb(ii)))-x(ii);
        xxx=-xx(ii);
        xx(ii)=-xx(ii);
    else
        xx(ii)=abs((60-x(ii))*sin(bb(ii)))+x(ii);
        xxx=xx(ii);
    end

    zz(ii)=-(-2*b*(r^2-yy(ii)^2)^(1/2)-xxx^2+2*xxx*(r^2-yy(ii)^2)^(1/2)+b^2)^(1/2);
end
for ii=nnn/2+1:nnn
    yy(ii)=-yy(nnn+1-ii);
    zz(ii)=zz(nnn+1-ii);
    xx(ii)=xx(nnn+1-ii);
    x(ii)=x(nnn+1-ii);
     y(ii)=-y(nnn+1-ii);
end

for jj=1:nnn
    plot3(xx(jj),yy(jj),zz(jj),'r*')
        plot3(-1.*xx(jj),yy(jj),zz(jj),'r*')
    hold on
end
hold on

%%%%%%%%%%%%%%%%%末端曲线
r=40;
ki=0.5;
b=81;
h=67;
nnn=20;
a=2*r/nnn;
e=ki*b;
for n=1:nnn/2
    if n==1
    x(n)=(r^2-(r-a*n)^2)^.5/2;
    else
        x(n)=(r^2-(r-a*n)^2)^.5/2+x(n-1)/2;
    end
    y(n)=a/2+(nnn/2-n)*a;
end
 for aa=pi/2:-0.1:acos(h/(b-x(1)))   %%%%%%

l=b-x(1);
for n=1:nnn/2
```

```
        bb(n)=-atan(tan(aa)-(x(n)-x(1))/(1/2*cos(aa)));
end
for ii=1:nnn/2
    yy(ii)=y(ii);

    if bb(ii)>0
        xx(ii)=abs((b-x(ii))*sin(bb(ii)))-x(ii);
        xxx=-xx(ii);
        xx(ii)=-xx(ii);
    else
        xx(ii)=abs((b-x(ii))*sin(bb(ii)))+x(ii);
        xxx=xx(ii);
    end

    zz(ii)=-(-2*b*(r^2-yy(ii)^2)^(1/2)-xxx^2+2*xxx*(r^2-yy(ii)^2)^(1/2)+b^2)^(1/2);
end
for ii=nnn/2+1:nnn
    yy(ii)=-yy(nnn+1-ii);
    zz(ii)=zz(nnn+1-ii);
    xx(ii)=xx(nnn+1-ii);
    x(ii)=x(nnn+1-ii);
     y(ii)=-y(nnn+1-ii);
end

for jj=1:nnn

axis([-b-10 b+10 -b-10 b+10 -h-10 10])

    plot3(xx(jj),yy(jj),zz(jj),'.')
    plot3(-1.*xx(jj),yy(jj),zz(jj),'g.')
    hold on
end
 end
hold on
for jj=1:nnn
    plot3(xx(jj),yy(jj),zz(jj),'r*')
        plot3(-1.*xx(jj),yy(jj),zz(jj),'r*')
    hold on
end

%%%%%%%%%%%%%%%%末端曲线

r=40;
ki=0.5;
b=81;
h=67;
nnn=20;
a=2*r/nnn;
e=ki*b;
for n=1:nnn/2
    if n==1
    x(n)=(r^2-(r-a*n)^2)^.5/2;
```

```
    else
        x(n)=(r^2-(r-a*n)^2)^.5/2+x(n-1)/2;
    end
    y(n)=a/2+(nnn/2-n)*a;
end
 aa=acos(h/(b-x(1)))%  %%%%%%
l=b-x(1);
for n=1:nnn/2
        bb(n)=-atan(tan(aa)-(x(n)-x(1))/(l/2*cos(aa)));
end
for ii=1:nnn/2
    yy(ii)=y(ii);

    if bb(ii)>0
        xx(ii)=abs((b-x(ii))*sin(bb(ii)))-x(ii);
        xxx=-xx(ii);
        xx(ii)=-xx(ii);
    else
        xx(ii)=abs((b-x(ii))*sin(bb(ii)))+x(ii);
        xxx=xx(ii);
    end

    zz(ii)=-(-2*b*(r^2-yy(ii)^2)^(1/2)-xxx^2+2*xxx*(r^2-yy(ii)^2)^(1/2)+b^2)^(1/2);
end
for ii=nnn/2+1:nnn
    yy(ii)=-yy(nnn+1-ii);
    zz(ii)=zz(nnn+1-ii);
    xx(ii)=xx(nnn+1-ii);
    x(ii)=x(nnn+1-ii);
     y(ii)=-y(nnn+1-ii);
end

for jj=1:nnn

axis([-b-10 b+10 -b-10 b+10 -h-10 10])
for sita=0:pi/30:2*pi
    plot3(r*cos(sita),r*sin(sita),0,'m*')
    hold on
    end
    plot3(xx(jj),yy(jj),zz(jj),'r*')
    line([xx(jj),x(jj)],[yy(jj),y(jj)],[zz(jj),0],'color','b')
    hold on
    plot3(-1.*xx(jj),yy(jj),zz(jj),'r*')
    line([-1.*xx(jj),-1.*x(jj)],[yy(jj),y(jj)],[zz(jj),0],'color','g')
    hold on

line([-1*(b-abs(x(1)))*sin(bb(1))*ki+x(1),-1*(b-abs(x(1)))*sin(bb(1))*ki+x(1)],[r,-r],[-(b
-abs(x(1)))*cos(bb(1))*ki,-(b-abs(x(1)))*cos(bb(1))*ki],'color','r')
    hold on

line([(b-abs(x(1)))*sin(bb(1))*ki-x(1),(b-abs(x(1)))*sin(bb(1))*ki-x(1)],[r,-r],[-(b-abs(x
(1)))*cos(bb(1))*ki,-(b-abs(x(1)))*cos(bb(1))*ki],'color','r')
```

```
     hold on
    line([-1.*x(jj),1.*x(jj)],[y(jj),y(jj)],[0,0],'color','m')
     hold on
end
hold on
for jj=1:nnn
plot3(xx(jj),yy(jj),zz(jj),'r*')
 hold on
plot3(-1.*xx(jj),yy(jj),zz(jj),'r*')
hold on
end



clear all
clc
clf

r=40;
ki=0.5;
b=81;
h=67;
nnn=20;
a=2*r/nnn;
e=ki*b;
%%%%%%%%%%%%%%%%%末端曲线

for n=1:nnn/2
    if n==1
    x(n)=(r^2-(r-a*n)^2)^.5/2;
    else
        x(n)=(r^2-(r-a*n)^2)^.5/2+x(n-1)/2;
    end
    y(n)=a/2+(nnn/2-n)*a;
end
for aa=pi/2:-0.1:acos(h/(b-x(1)))   %%%%%%
    clf

l=b-x(1);
for n=1:nnn/2
        bb(n)=-atan(tan(aa)-(x(n)-x(1))/(l/2*cos(aa)));
end
for ii=1:nnn/2
    yy(ii)=y(ii);

     if bb(ii)>0
        xx(ii)=abs((b-x(ii))*sin(bb(ii)))-x(ii);
        xxx=-xx(ii);
        xx(ii)=-xx(ii);
    else
```

```
        xx(ii)=abs((b-x(ii))*sin(bb(ii)))+x(ii);
        xxx=xx(ii);
    end

    zz(ii)=-(-2*b*(r^2-yy(ii)^2)^(1/2)-xxx^2+2*xxx*(r^2-yy(ii)^2)^(1/2)+b^2)^(1/2);
end
for ii=nnn/2+1:nnn
    yy(ii)=-yy(nnn+1-ii);
    zz(ii)=zz(nnn+1-ii);
    xx(ii)=xx(nnn+1-ii);
    x(ii)=x(nnn+1-ii);
     y(ii)=-y(nnn+1-ii);
end

for jj=1:nnn

axis([-b-10 b+10 -b-10 b+10 -h-10 10])

for sita=0:pi/30:2*pi
    plot3(r*cos(sita),r*sin(sita),0,'m*')
    hold on
    end
    plot3(xx(jj),yy(jj),zz(jj),'r*')
    line([xx(jj),x(jj)],[yy(jj),y(jj)],[zz(jj),0],'color','b')
    hold on
    plot3(-1.*xx(jj),yy(jj),zz(jj),'r*')
    line([-1.*xx(jj),-1.*x(jj)],[yy(jj),y(jj)],[zz(jj),0],'color','g')
    hold on

line([-1*(b-abs(x(1)))*sin(bb(1))*ki+x(1),-1*(b-abs(x(1)))*sin(bb(1))*ki+x(1)],[r,-r],[-(b
-abs(x(1)))*cos(bb(1))*ki,-(b-abs(x(1)))*cos(bb(1))*ki],'color','r')
    hold on

line([(b-abs(x(1)))*sin(bb(1))*ki-x(1),(b-abs(x(1)))*sin(bb(1))*ki-x(1)],[r,-r],[-(b-abs(x
(1)))*cos(bb(1))*ki,-(b-abs(x(1)))*cos(bb(1))*ki],'color','r')

     hold on
    line([-1.*x(jj),1.*x(jj)],[y(jj),y(jj)],[0,0],'color','m')
     hold on
end
pause(0.08)
end



clear all
clc
%%%%%%%%%%%%%%%%%    末端曲线
h=67;    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%        待定
r=40; %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%        待定

n0=15;%%%%%%%%%%%%%根数
```

```
np=30;

ki0=0.3;%%%%%%%%%%%%%%%%钢条所占比例
kip=0.8;

b0=50;%%%%%%%%%%%%%%%%%木板长度的一半
bp=150;

m=1;
for nnn=n0:np
p=1;
for ki=ki0:0.01:kip
q=1;
for b=b0:bp
e=ki*b;
a=2*r/nnn;
for i=1:nnn/2%%%%%%%%%%  求x、y表达式
    if i==1
    x(i)=(r^2-(r-a*i)^2)^.5/2;
    else
        x(i)=(r^2-(r-a*i)^2)^.5/2+x(i-1)/2;
    end
    y(i)=a/2+(nnn/2-i)*a;
end

aa=acos(h/(b-x(1)));  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  aa赋值
l=b-x(1);
for n=1:nnn/2%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%   求bb
        bb(n)=-atan(tan(aa)-(x(n)-x(1))/(l/2*cos(aa)));
end




for ii=1:nnn/2%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%   求xx, yy, zz
    yy(ii)=y(ii);

    if bb(ii)>0
        xx(ii)=abs((b-x(ii))*sin(bb(ii)))-x(ii);
        xxx=-xx(ii);
        xx(ii)=-xx(ii);
    else
        xx(ii)=abs((b-x(ii))*sin(bb(ii)))+x(ii);
        xxx=xx(ii);
    end

    zz(ii)=-(-2*b*(r^2-yy(ii)^2)^(1/2)-xxx^2+2*xxx*(r^2-yy(ii)^2)^(1/2)+b^2)^(1/2);
end

zs=4*r*b;
sum=0;
```

```
for n=1:nnn/2
    if n==1
    s(n)=(r^2-(r-a*n)^2)^.5/2;
    else
        s(n)=(r^2-(r-a*n)^2)^.5/2+s(n-1)/2;
    end
end
r2=e-s(1);
pan=0;
for i=1:nnn/2
    if bb(i)<0
        bbb=0;
    else
        bbb=bb(i);
    end
r1=e-s(i);
ss(i)=(cos(bbb)*(r2-r1)/r2*cos(pi/2-bbb)+(1-(cos(bbb)*(r2-r1)/r2)^2)^.5*sin(pi/2-bbb))*r2/
cos(bbb)-r1;

if ss(i)>b-e
  pan=1;
end
end

for i=1:nnn/2
sum=sum+ss(i);
end

d=2*(l*sin(aa)+1/2*(r^2-(r-a)^2)^.5);

kk=(d-2*r)^2;
%%%%m,p,q=n,ki,b

if s>0&a>0&b>0&e>0&b>r&b>e&e>r&0<=aa&aa<=pi/2&l>=h&-pi/2<=bb&bb<=pi/2&
n>=2&d<l&pan==0&mod(nnn,2)==0
zong(m,p,q)=kk/20.4787+d/54.5253+sum/108+nnn/20+zs/6000;

else
    zong(m,p,q)=inf;
end

q=q+1;
end
p=p+1;
end
m=m+1;
end



for iii=1:m-1
```

```
    for jjj=1:p-1
        for ooo=1:q-1
            if zong(iii,jjj,ooo)==0
                zong(iii,jjj,ooo)=inf;
            end
        end
    end
end

ix=0;
iy=0;
iz=0;
zn=inf;
for iii=1:m-1
    for jjj=1:p-1
        for ooo=1:q-1
            if zong(iii,jjj,ooo)<zn
                zn=zong(iii,jjj,ooo);
                ix=iii;
                iy=jjj;
                iz=ooo;
            end
        end
    end
end
if ix==0|iy==0|iz==0
   disp('this is an error')
else
nz=ix+n0-1
kz=0.01*(iy-1)+ki0
bz=iz+b0-1
end
```

第三题（由于程序过多，在此仅以椭圆为例进行说明，其余见电子版附件）

```
clear all
clc
%%%%%%%%%%%%%%%%%%    末端曲线
h=55;   %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%      待定
r=35; %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%      待定

n0=15;%%%%%%%%%%%%%根数
np=30;

ki0=0.3;%%%%%%%%%%%%%%%%钢条所占比例
kip=0.8;

b0=50;%%%%%%%%%%%%%%%%%%木板长度的一半
bp=150;
```

```
m=1;
for nnn=n0:np
p=1;
for ki=ki0:0.01:kip
q=1;
for b=b0:bp
e=ki*b;
a=2*r/nnn;
oa=r^2;
ob=25^2;
for i=1:nnn/2%%%%%%%%%%%  求x、y表达式
      y(i)=a/2+(10-i)*a;
        x(i)=(abs((oa*ob-ob*y(i)^2)/oa))^.5;

end
aa=acos(h/(b-x(1)));  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  aa赋值
l=b-x(1);
for n=1:nnn/2%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%   求bb
        bb(n)=-atan(tan(aa)-(x(n)-x(1))/(l/2*cos(aa)));
end




for ii=1:nnn/2%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%   求xx, yy, zz
    yy(ii)=y(ii);

    if bb(ii)>0
        xx(ii)=abs((b-x(ii))*sin(bb(ii)))-x(ii);
        xxx=-xx(ii);
        xx(ii)=-xx(ii);
    else
        xx(ii)=abs((b-x(ii))*sin(bb(ii)))+x(ii);
        xxx=xx(ii);
    end

    zz(ii)=-(-2*b*(r^2-yy(ii)^2)^(1/2)-xxx^2+2*xxx*(r^2-yy(ii)^2)^(1/2)+b^2)^(1/2);
end

zs=4*r*b;
sum=0;

for n=1:nnn/2
    if n==1
    s(n)=(r^2-(r-a*n)^2)^.5/2;
    else
        s(n)=(r^2-(r-a*n)^2)^.5/2+s(n-1)/2;
    end
end
r2=e-s(1);
pan=0;
```

```
for i=1:nnn/2
    if bb(i)<0
        bbb=0;
    else
        bbb=bb(i);
    end
r1=e-s(i);
ss(i)=(cos(bbb)*(r2-r1)/r2*cos(pi/2-bbb)+(1-(cos(bbb)*(r2-r1)/r2)^2)^.5*sin(pi/2-bbb))*r2/
cos(bbb)-r1;

if ss(i)>b-e
  pan=1;
end
end

for i=1:nnn/2
sum=sum+ss(i);
end

d=2*(l*sin(aa)+1/2*(r^2-(r-a)^2)^.5);

kk=(d-2*r)^2;
%%%%m,p,q=n,ki,b

if s>0&a>0&b>0&e>0&b>r&b>e&e>r&0<=aa&aa<=pi/2&l>=h&-pi/2<=bb&bb<=pi/2&
n>=2&d<l&pan==0&mod(nnn,2)==0
zong(m,p,q)=kk/20.4787+d/54.5253+sum/108+nnn/20+zs/6000;

else
    zong(m,p,q)=inf;
end

q=q+1;
end
p=p+1;
end
m=m+1;
end



for iii=1:m-1
    for jjj=1:p-1
        for ooo=1:q-1
            if zong(iii,jjj,ooo)==0
                zong(iii,jjj,ooo)=inf;
            end
        end
    end
end

ix=0;
```

```
iy=0;
iz=0;
zn=inf;
for iii=1:m-1
    for jjj=1:p-1
        for ooo=1:q-1
            if zong(iii,jjj,ooo)<zn
                zn=zong(iii,jjj,ooo);
                ix=iii;
                iy=jjj;
                iz=ooo;
            end
        end
    end
end
if ix==0|iy==0|iz==0
   disp('this is an error')
else
nz=ix+n0-1
kz=0.01*(iy-1)+ki0
bz=iz+b0-1
end

clear all
clc
clf

h=55;
r=35;
nnn=20;
ki=0.53;
b=67;
a=2*r/nnn;
e=ki*b;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%末端曲线
oa=r^2;
ob=25^2;
for i=1:nnn/2  %%%%%%%%%%%  求x、y表达式
     y(i)=a/2+(10-i)*a;
        x(i)=(abs((oa*ob-ob*y(i)^2)/oa))^.5;


end
for aa=pi/2:(acos(h/(b-x(1)))-pi/2)/7:acos(h/(b-x(1)))  %%%%%%
    clf

l=b-x(1);
for n=1:nnn/2
        bb(n)=-atan(tan(aa)-(x(n)-x(1))/(l/2*cos(aa)));
        bb
end
for ii=1:nnn/2
    yy(ii)=y(ii);
```

```
     if bb(ii)>0
        xx(ii)=abs((b-x(ii))*sin(bb(ii)))-x(ii);
        xxx=-xx(ii);
        xx(ii)=-xx(ii);
    else
        xx(ii)=abs((b-x(ii))*sin(bb(ii)))+x(ii);
        xxx=xx(ii);
    end

    zz(ii)=-(-2*b*(r^2-yy(ii)^2)^(1/2)-xxx^2+2*xxx*(r^2-yy(ii)^2)^(1/2)+b^2)^(1/2);
end
for ii=nnn/2+1:nnn
    yy(ii)=-yy(nnn+1-ii);
    zz(ii)=zz(nnn+1-ii);
    xx(ii)=xx(nnn+1-ii);
    x(ii)=x(nnn+1-ii);
     y(ii)=-y(nnn+1-ii);
end

for jj=1:nnn

axis([-b-10 b+10 -b-10 b+10 -h-10 10])
    plot3(xx(jj),yy(jj),zz(jj),'r*')
    line([xx(jj),x(jj)],[yy(jj),y(jj)],[zz(jj),0],'color','g')
    hold on
    plot3(-1.*xx(jj),yy(jj),zz(jj),'r*')
    line([-1.*xx(jj),-1.*x(jj)],[yy(jj),y(jj)],[zz(jj),0],'color','b')
    hold on

line([-1*(b-abs(x(1)))*sin(bb(1))*ki+x(1),-1*(b-abs(x(1)))*sin(bb(1))*ki+x(1)],[r,-r],[-(b
-abs(x(1)))*cos(bb(1))*ki,-(b-abs(x(1)))*cos(bb(1))*ki],'color','r')
    hold on

line([(b-abs(x(1)))*sin(bb(1))*ki-x(1),(b-abs(x(1)))*sin(bb(1))*ki-x(1)],[r,-r],[-(b-abs(x
(1)))*cos(bb(1))*ki,-(b-abs(x(1)))*cos(bb(1))*ki],'color','r')

     hold on
    line([-1.*x(jj),1.*x(jj)],[y(jj),y(jj)],[0,0],'color','m')
     hold on
end
pause(0.08)%keyboard
end




r2=e-x(1);
for n=1:nnn/2
    if bb(n)<0
        bbb=0;
```

```
    else
        bbb=bb(n);
    end
r1=e-x(n);
xp(n)=(cos(bbb)*(r2-r1)/r2*cos(pi/2-bbb)+(1-(cos(bbb)*(r2-r1)/r2)^2)^.5*sin(pi/2-bbb))*r2/
cos(bbb)-r1;
end
x
xp
```