

# 一类四维多翼混沌系统及其电路实现

罗明伟<sup>1)†</sup> 罗小华<sup>2)</sup> 李华青<sup>3)</sup>

1) (重庆邮电大学自动化学院, 重庆 400065)

2) (重庆邮电大学光电工程学院, 重庆 400065)

3) (重庆大学计算机学院, 重庆 400044)

(2012年3月30日收到; 2012年8月24日收到修改稿)

提出了一种产生多翼蝴蝶混沌吸引子的新方法. 基于三维 Lorenz 系统, 通过增加一个状态变量和一个分段线性函数, 构造出一个四维多翼混沌系统. 分析了系统的平衡点和 Lyapunov 指数谱. 最后, 设计出一个模拟电路, 进行了电路实验. 电路实验结果与数值仿真结果相一致, 验证了该方法的可行性和有效性.

**关键词:** 混沌, Lorenz 系统, 四维多翼混沌系统, 电路实现

**PACS:** 05.45.Pq, 05.45.-a

**DOI:** 10.7498/aps.62.020512

## 1 引言

自 1963 年 Lorenz 提出第一个混沌模型以来<sup>[1]</sup>, 人们对非线性系统中的混沌现象产生了极大的兴趣. 1999 年, Chen 等利用反控制方法发现了一种与 Lorenz 系统对偶的混沌系统, 称为 Chen 系统<sup>[2]</sup>. 2002 年, Lü 等相继发现了 Lü 系统<sup>[3]</sup> 和统一混沌系统<sup>[4]</sup>. 2003 年, Liu 等<sup>[5]</sup> 构造了一个四翼混沌系统, 尽管被证明是假的四翼混沌系统<sup>[6]</sup>, 但却引起了人们对构造四翼<sup>[7-17]</sup> 和多翼混沌系统<sup>[18-25]</sup> 的兴趣.

目前, 人们已能很容易地构造出四翼混沌系统. 但是对于多翼混沌系统的构造, 研究还较少, 且对于构造该类混沌系统仍然具有挑战. 文献 [18, 19] 和文献 [20] 分别基于多项式变换和 Julia 过程, 构造了能产生环形多翼蝴蝶吸引子的混沌系统; 文献 [21] 通过构造异宿环, 得到了能产生网格多翼蝴蝶吸引子的混沌系统, 但文献 [18—21] 所构造的混沌系统的代数形式十分复杂, 电路实现困难. 文献 [22, 23] 通过对两翼超混沌系统进行平移变换、镜像映射和滞回切换的操作, 构造了一类能产生  $2^n$  翼蝴蝶吸引子的超混沌系统, 但随着翼数的增加, 系统代数形式越复杂, 电路实现越困难. 文献 [24, 25] 通

过增加指标 2 平衡点, 使两翼混沌系统产生多翼蝴蝶混沌吸引子, 但设计的增加系统指标 2 平衡点的非线性函数的参数不固定, 要产生不同数量的蝴蝶混沌吸引子, 其参数的个数和大小都要改变, 且没有递推公式, 只能通过数值仿真获得, 这给系统构造和电路实现带来困难, 且容易出错.

本文在三维 Lorenz 系统基础上, 通过增加一个状态变量  $w$  和一个分段线性函数  $f(w)$ , 构造了一个代数形式简单、电路容易实现的四维多翼混沌系统. 分析了系统平衡点, 并对系统 Lyapunov 指数谱进行了数值仿真研究. 最后, 对系统进行了硬件电路实验. 电路实验结果与数值仿真结果相一致.

## 2 四维多翼混沌系统的构造

在三维 Lorenz 系统基础上, 通过增加一个关于  $w$  的一阶微分方程, 并引入一个分段线性函数  $f(w)$ , 构造了一个新的四维自治系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y-x), \\ \dot{y} &= cx - y - dxz, \\ \dot{z} &= dxy - bz, \\ \dot{w} &= a(y-w-f(w)),\end{aligned}\tag{1}$$

† 通讯作者. E-mail: luowei\_2345@yahoo.cn

其中, 系统参数  $a = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $c = 28$ ,  $d = 16$ ,  $f(w)$  为分段线性函数, 其数学表达式为

$$f(w) = \sum_{n=0}^N n [\operatorname{sgn}(w + 2n + 1) - \operatorname{sgn}(w + 2n - 1)], \quad (2)$$

其中,  $N \in \mathbf{M} = \{0, 1, 2, \dots\}$ .

当  $N = 2$  时, 系统 (1) 的四个 Lyapunov 指数数值分别为  $LE_1 = 0.8733$ ,  $LE_2 = -0.0316$ ,  $LE_3 = -9.9409$ ,  $LE_4 = -14.5675$ . 显然, 系统 (1) 的最大 Lyapunov 指数  $LE_1 = 0.8733 > 0$ , 系统处于混沌状态. 系统 (1) 能产生  $2(N+1)$  翼蝴蝶混沌吸引子, 其在  $w$ - $z$  相平面上的两翼、四翼、六翼和八翼蝴蝶混沌吸引子如图 1 所示.

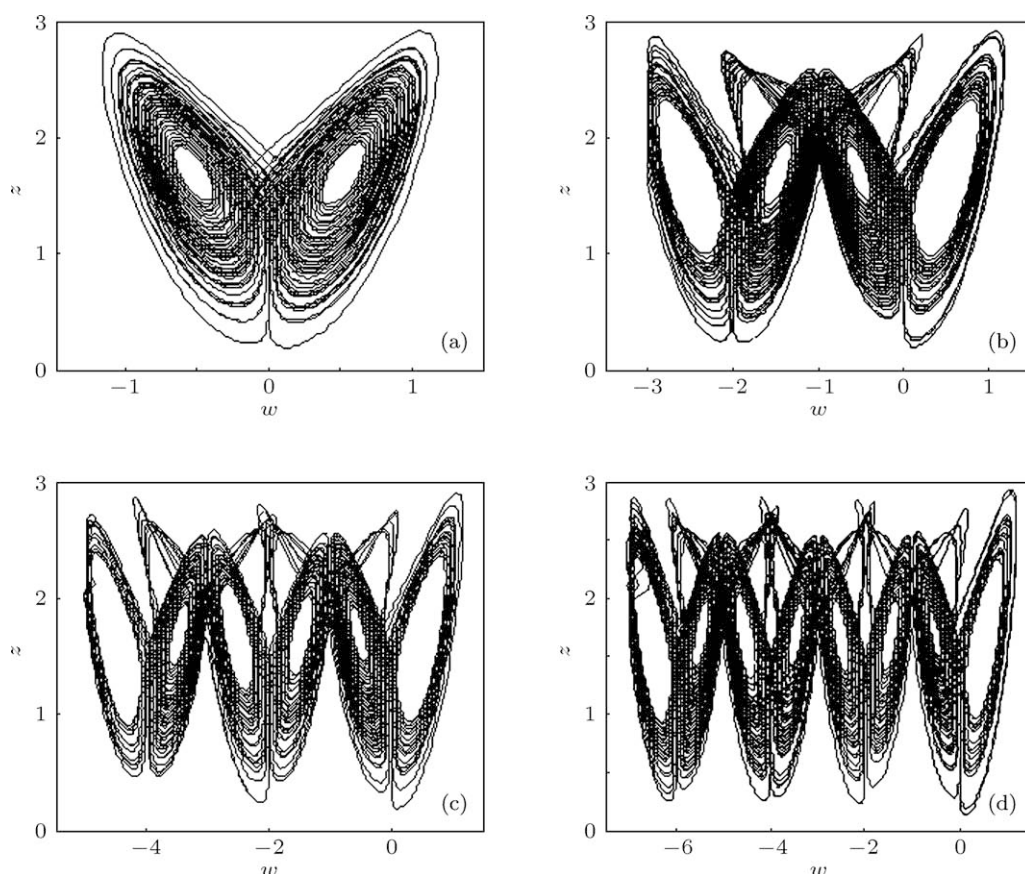


图 1 在  $w$ - $z$  相平面上, 系统 (1) 产生的多翼蝴蝶混沌吸引子 (a) 两翼; (b) 四翼; (c) 六翼; (d) 八翼

### 3 基本动力学行为分析

令  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = \dot{w} = 0$ , 得

$$\begin{aligned} a(y-x) &= 0, \\ cx - y - dxz &= 0, \\ dxy - bz &= 0, \\ a(y-w-f(w)) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

解方程 (3), 得系统 (1) 平衡点:

$$S_{1n} = (0, 0, 0, f_n),$$

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \left( \frac{\sqrt{b(c-1)}}{d}, \frac{\sqrt{b(c-1)}}{d}, \right. \\ &\quad \left. \frac{c-1}{d}, \frac{\sqrt{b(c-1)}}{d} - f_n \right), \\ S_{3n} &= \left( -\frac{\sqrt{b(c-1)}}{d}, -\frac{\sqrt{b(c-1)}}{d}, \right. \\ &\quad \left. \frac{c-1}{d}, -\frac{\sqrt{b(c-1)}}{d} - f_n \right), \end{aligned}$$

其中,  $f_n = -2n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ .

在平衡点  $S^* = (x^*, y^*, z^*, w^*)$  处, 线性化系统

(1), 得雅可比矩阵

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ c - dz^* & -1 & -dx^* & 0 \\ dy^* & dx^* & -b & 0 \\ 0 & a & 0 & -a - aF(w^*) \end{bmatrix},$$

其中  $x^*, y^*, z^*, w^*$  表示平衡点  $S_{1n}, S_{2n}, S_{3n}$  的坐标,

$$\begin{aligned} F(w^*) &= \left. \frac{df(w)}{dw} \right|_{w=w^*} \\ &= \left. \frac{d \sum_{n=0}^N n [\operatorname{sgn}(w+2n+1) - \operatorname{sgn}(w+2n-1)]}{dw} \right|_{w=w^*} \\ &= \left( d \sum_{n=0}^N n \{ \varepsilon(w+2n+1) - \varepsilon[-(w+2n+1)] \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon(w+2n-1) + \varepsilon[-(w+2n-1)] \} \right) / dw \Big|_{w=w^*} \\ &= \sum_{n=0}^N n \{ \delta(w^*+2n+1) - \delta[-(w^*+2n+1)] \\ &\quad - \delta(w^*+2n-1) + \delta[-(w^*+2n-1)] \}, \end{aligned}$$

其中,  $\varepsilon(\cdot)$  表示阶跃函数,  $\delta(\cdot)$  表示脉冲函数. 从系统平衡点  $S_{1n}, S_{2n}, S_{3n}$  可以看出  $w^* \neq -(2n \pm 1)$ , 因此  $F(w^*) = \left. \frac{df(w)}{dw} \right|_{w=w^*} = 0$ .

把平衡点  $S_{1n} = (0, 0, 0, f_n)$ , 代入特征方程  $\det(J - \lambda I) = 0$ , 得到四个特征值分别为  $\lambda_1 = -20.00$ ,  $\lambda_2 = 11.83$ ,  $\lambda_3 = -22.83$ ,  $\lambda_4 = -2.67$ , 由于  $\lambda_1, \lambda_3$  和  $\lambda_4$  为负实数,  $\lambda_2$  为正实数, 故平衡点  $S_{1n}$  为不稳定的鞍点.

把平衡点  $S_{2n} = \left( \frac{\sqrt{b(c-1)}}{d}, \frac{\sqrt{b(c-1)}}{d}, \frac{c-1}{d}, \frac{\sqrt{b(c-1)}}{d} - f_n \right)$ , 代入特征方程  $\det(J - \lambda I) = 0$ , 得到四个特征值分别为  $\lambda_1 = -20.00$ ,  $\lambda_{2,3} = 0.09 \pm 10.20i$ ,  $\lambda_4 = -13.84$ , 由于  $\lambda_1$  和  $\lambda_4$  为负实数,  $\lambda_{2,3}$  为具有正实部的共轭复数根, 故平衡点  $S_{2n}$  为不稳定的鞍焦点. 通过计算知平衡点  $S_{3n}$  与平衡点  $S_{2n}$  具有相同的特征值, 因此平衡点  $S_{3n}$  也是不稳定的鞍焦点.

以  $N=2$  为例, 给出了系统 (1) 随参数  $b$  变化的 Lyapunov 指数谱, 如图 2 所示. 从图 2 知, 在  $b \in [0.73, 3]$  时,  $LE_1 > 0$ ,  $LE_2 \approx 0$ ,  $LE_4 < LE_3 < 0$ , 因

此系统 (1) 处于混沌状态.

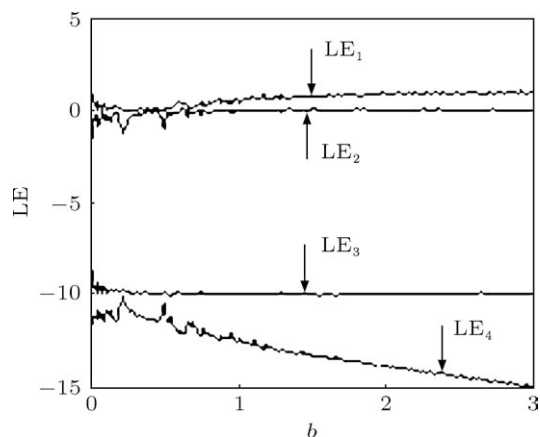


图2 系统 (1) 随参数  $b$  变化的 Lyapunov 指数谱

#### 4 四维多翼混沌系统的电路实现

利用运算放大器 UA741CN、乘法器 AD633JN、电阻和电容对系统 (1) 进行硬件电路实验. 其中, 乘法器 AD633 的增益为 0.1, 运算放大器 UA741CN 的电源电压为  $E = \pm 15 \text{ V}$ , 其输出饱和值  $V_{\text{sat}} \approx \pm 13.5 \text{ V}$ .

根据系统 (1) 和 (2) 式, 设计的可以产生两翼、四翼和六翼蝴蝶混沌吸引子的电路, 如图 3 所示.

根据图 3 得到如下电路方程:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{R_0 C_0} \left( \frac{R}{R_2} y - \frac{R}{R_1} x \right), \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{R_0 C_0} \left( \frac{R}{R_5} x - \frac{R}{R_3} y - \frac{R}{10 R_4} xz \right), \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{1}{R_0 C_0} \left( \frac{R}{10 R_7} xy - \frac{R}{R_6} z \right), \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{1}{R_0 C_0} \left( \frac{R}{R_8} y - \frac{R}{R_9} w - \frac{R}{R_{10}} f(w) \right). \end{aligned} \quad (4)$$

令时间常数  $\tau = t/10R_0C_0$ , 则 (4) 式变为

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= 10 \left( \frac{R}{R_2} y - \frac{R}{R_1} x \right), \\ \frac{dy}{d\tau} &= 10 \left( \frac{R}{R_5} x - \frac{R}{R_3} y - \frac{R}{10 R_4} xz \right), \\ \frac{dz}{d\tau} &= 10 \left( \frac{R}{10 R_7} xy - \frac{R}{R_6} z \right), \\ \frac{dw}{d\tau} &= 10 \left( \frac{R}{R_8} y - \frac{R}{R_9} w - \frac{R}{R_{10}} f(w) \right). \end{aligned} \quad (5)$$

取  $R = 10 \text{ k}\Omega$ , 根据系统 (1) 和 (5) 式得  $R_3 = 100 \text{ k}\Omega$ ,  $R_5 = 3.57 \text{ k}\Omega$ ,  $R_6 = 37.5 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = R_7 = 625 \Omega$ ,  $R_1 = R_2 = R_8 = R_9 = R_{10} = 10 \text{ k}\Omega$ .

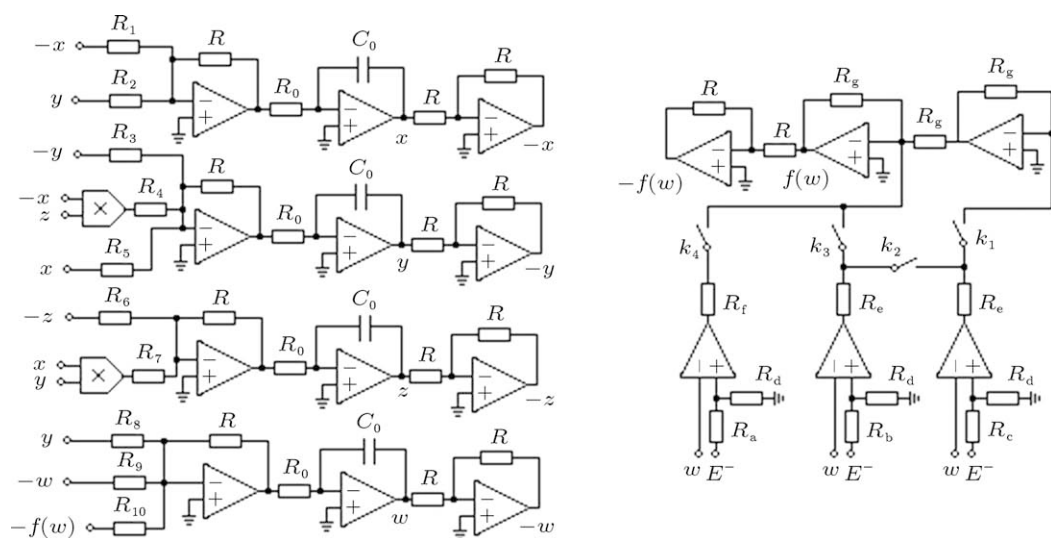


图3 产生多翼蝴蝶混沌吸引子的电路图

在图3中,  $R_0C_0$  为时间尺度变化因子, 为了便于观察波形, 需调整  $R_0C_0$ . 实验发现, 调整  $R_0C_0 = 10^{-4}$ , 可观察到较好的波形. 此时, 可取  $R_0 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $C_0 = 10 \text{ nF}$ , 其电路模拟实验结果如图4所示.

当  $N = 0$ , 即开关  $k_1-k_4$  全部断开时,

$$f(w) = 0, \quad (6)$$

此时, 电路产生两翼蝴蝶混沌吸引子, 如图4(a)所示.

当  $N = 1$ , 即开关  $k_1, k_3$  闭合,  $k_2, k_4$  断开时,

$$\begin{aligned} f(w) &= \text{sgn}(w+3) - \text{sgn}(w+1) \\ &= \frac{|V_{\text{sat}}|R_g}{R_e} \left[ \text{sgn}\left(w - \frac{R_d}{R_b + R_d}E^-\right) \right. \\ &\quad \left. - \text{sgn}\left(w - \frac{R_d}{R_c + R_d}E^-\right) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

此时, 电路产生四翼蝴蝶混沌吸引子, 如图4(b)

所示.

当  $N = 2$ , 即开关  $k_1, k_2, k_4$  闭合,  $k_3$  断开时,

$$\begin{aligned} f(w) &= 2\text{sgn}(w+5) - \text{sgn}(w+3) - \text{sgn}(w+1) \\ &= \frac{|V_{\text{sat}}|R_g}{R_f} \text{sgn}\left(w - \frac{R_d}{R_a + R_d}E^-\right) \\ &\quad - \frac{|V_{\text{sat}}|R_g}{R_e} \left[ \text{sgn}\left(w - \frac{R_d}{R_c + R_d}E^-\right) \right. \\ &\quad \left. + \text{sgn}\left(w - \frac{R_d}{R_b + R_d}E^-\right) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

此时, 电路产生六翼蝴蝶混沌吸引子, 如图4(c)所示.

取  $R_g = R_d = 1 \text{ k}\Omega$ , 根据 (6), (7), (8) 式, 可得  $R_a = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_b = 4 \text{ k}\Omega$ ,  $R_c = 14 \text{ k}\Omega$ ,  $R_e = 13.5 \text{ k}\Omega$ ,  $R_f = 6.75 \text{ k}\Omega$ .

从图4和图1可以看出, 电路实验结果与数值仿真结果相一致.

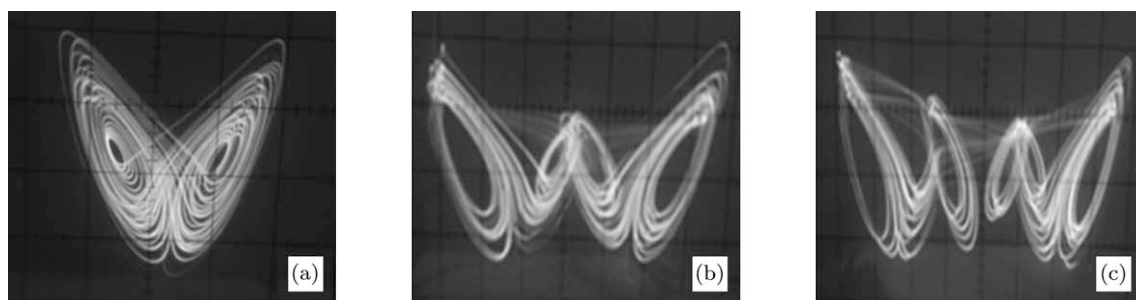


图4 电路实验结果 (a) 两翼; (b) 四翼; (c) 六翼

## 5 结 论

提出了一种在 Lorenz 系统上生产多翼蝴蝶混沌吸引子的新方法. 该方法构造的混沌系统的代数形式简单, 且电路实现更容易. 通过理论分析, 呈现出了系统的混沌特性. 模拟电路产生的多翼蝴蝶混

沌吸引子与数值仿真结果一致. 同时, 该方法还可用于其他四维多翼混沌系统的设计而不失一般性. 由于多翼蝴蝶混沌吸引子较一般的单翼或两翼蝴蝶混沌吸引子的动力学行为更复杂, 因此, 该系统在工程上具有更大的应用价值, 尤其是在保密通信中的应用.

- 
- [1] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
  - [2] Chen G, Ueta T 1999 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **9** 1465
  - [3] Lü J H, Chen G R 2002 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **12** 659
  - [4] Lü J H, Chen G R, Cheng D Z, Celikovsky S 2002 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **12** 2917
  - [5] Liu W B, Chen G R 2003 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **13** 261
  - [6] Liu W B, Chen G R 2004 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **14** 1395
  - [7] Qi G Y, Chen G R, Li S W, Zhang Y H 2006 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **16** 859
  - [8] Wang F Z, Qi G Y, Chen Z Q, Yuan Z Z 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3137 (in Chinese) [王繁珍, 齐国元, 陈增强, 袁著址 2007 物理学报 **56** 3137]
  - [9] Chen Z Q, Yang Y, Yuan Z Z 2008 *Chaos, Solitons & Fractals* **38** 1187
  - [10] Giuseppe G 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3247
  - [11] Li D Q 2008 *Phys. Lett. A* **372** 387
  - [12] Wang L 2009 *Nonlinear Dyn.* **56** 453
  - [13] Dong E Z, Chen Z P, Chen Z Q, Yuan Z Z 2009 *Chin. Phys. B* **18** 2680
  - [14] Dadras S, Momeni H R 2009 *Phys. Lett. A* **373** 3637
  - [15] Hu G S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3734 (in Chinese) [胡国四 2009 物理学报 **58** 3734]
  - [16] Qiao X H, Bao B C 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 8152 (in Chinese) [乔晓华, 包伯成 2009 物理学报 **58** 8152]
  - [17] Hu G S, Yu B 2009 *Int. J. Mod. Phys. C* **20** 323
  - [18] Miranda R, Stone E 1993 *Phys. Lett. A* **178** 105
  - [19] Yu S M, Lü J H, Tang W K S, Chen G R 2006 *Chaos* **16** 033126
  - [20] Bouallegue K, Chaari A, Toumi A 2011 *Chaos, Solitons & Fractals* **44** 79
  - [21] Yu S M, Lü J H, Chen G R, Yu X H 2011 *IEEE Trans. Circuits Syst. II, Exp. Briefs* **58** 314
  - [22] Yu B, Hu G S 2010 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **20** 727
  - [23] Hu G S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 8139 (in Chinese) [胡国四 2009 物理学报 **58** 8139]
  - [24] Yu S M, Tang W K S, Lü J H, Chen G R 2008 *IEEE Trans. Circuits Syst. II, Exp. Briefs* **55** 1168
  - [25] Yu S M, Tang W K S, Lü J H, Chen G R 2010 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **20** 29

# A family of four-dimensional multi-wing chaotic system and its circuit implementation

Luo Ming-Wei<sup>1)†</sup> Luo Xiao-Hua<sup>2)</sup> Li Hua-Qing<sup>3)</sup>

1) ( College of Automation, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China )

2) ( College of Optoelectronic Engineering, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China )

3) ( College of Computer Science, Chongqing University, Chongqing 400044, China )

( Received 30 March 2012; revised manuscript received 24 August 2012 )

## Abstract

A new method to generate multi-wing butterfly chaotic attractors is presented. Based on the three-dimensional Lorenz system, in this paper we propose a four-dimensional multi-wing chaotic system by appending a state variable and a piecewise linear function. The equilibrium points and Lyapunov exponent spectra of the system are studied. Furthermore, an electronic circuit is designed to implement the system. The experimental results are in agreement with numerical simulation results, which verify the feasibility and availability of this method.

**Keywords:** chaos, Lorenz system, four-dimensional multi-wing chaotic system, circuit implementation

**PACS:** 05.45.Pq, 05.45.-a

**DOI:** 10.7498/aps.62.020512

---

† Corresponding author. E-mail: luowei.2345@yahoo.cn