本章教材习题全解

8—1 习题

1. 设 $V=\{a,b,c\}$，求 V^2，V^3。

解：$V=\{a,b,c\}$，$V^2=\{aa,ab,ac,ba,bb,bc,ca,cb,cc\}$，

$V^3=\{aaa,aab,aac,aba,abb,abc,aca,acb,acc,baa,bab,bac,bba,bbb,bbc,bca,bcb,bcc,caa,cab,cac,cba,cbb,cbc,cca,ccb,ccc\}$。

2. 给出有限字母表V,求$|V^k|$。

解:设$|V|=n,V^k=V\times V\times\cdots\times V,|V^k|=|V|\times|V|\times\cdots\times|V|=|V|^k=n^k$。

3. 设V是有限字母表,$|V|=n$。建立映射$f:V^*\to N$,其中,

$f(\lambda)=0$

$$f(\omega\circ\alpha)=nf(\omega)+h(\alpha)\begin{cases}\omega\in V^*\\ \omega\in V\\ h:V\to I_n\text{ 是一个双射函数}\end{cases}$$

证明:f是双射函数,由此可知V^*是可列集。

证明:由于h是V到I_n的双射,将V中字母调序使得$V=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$且$h(a_i)=i(1\leqslant i\leqslant n)$,令$|\omega|=k,\omega=\{a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_k}\},i_k\in\{1,2,\cdots,n\}$有$f(\omega)=f(a_{i_1}\cdots a_{i_k})=n^{k-1}h(a_{i_1})+\cdots+nh(a_{i_{k-1}})+h(a_{i_k})=i_1n^{k-1}+i_2n^{k-2}+\cdots+i_{k-1}n+i_k$。

下面讨论$f(\omega)$值的分布,当$|\omega|=1$时,$f(a_i)=i(1\leqslant i\leqslant n)$;

当$|\omega|=2$时,$f(a_1a_1)=n+1,f(a_1a_2)=n+2,\cdots,f(a_1a_n)=n+n,\cdots,f(a_na_1)=n\cdot n+1,f(a_na_2)=n\cdot n+2,\cdots,f(a_na_n)=n\cdot n+n=n\cdot(n+1)$;

当$|\omega|=k$时,$f(a_1\cdots a_1)=n^{k-1}+\cdots+n+1,\cdots,f(a_1\cdots a_n)=n^{k-1}+\cdots+n+n,\cdots,f(a_n\cdots a_n)=n(n^{k-1}+\cdots+n+1)$,令$S_k=n^{k-1}+\cdots+n+1(k\geqslant 1)$,当$|\omega|=k$时,$f(\omega)$值在$S_k$和$nS_k$之间,且对$S_k$与$nS_k$之间,任一正整数$Q$,都有长度为$k$的串$\omega$,使$f(\omega)=Q$,令区间$[S_k,nS_k]$中正整数集合为$T_k$,则$T_k$与长度为$k$的串$\omega$一一对应,$nS_k$的下一个整数为$nS_k+1=n(n^{k-1}+\cdots+n+1)+1=S_{k+1}$,因此,正整数集合$I_+$可划分为集合$T_1,T_2,T_3,\cdots$之并,$I_+=T_1\cup T_2\cup T_3\cup\cdots$,其中,$T_i\cap T_j=\varnothing(i\neq j)$,函数$f$实现了非空串集合$V^+$与$I_+$之间的双射,再令$f(\lambda)=0$,$f$实现了$V^*$与$N$之间的双射,$N$是可列集,故$V^*$是可列集。

4. 简化下列式子:

a) $\Lambda\varnothing^*$。

b) $\Lambda^*\varnothing^*$。

c) $A^*\cup\varnothing^*$。

d) $(\varnothing\cup A)^*$。

e) $(\Lambda\cup A)^*$。

解:a) $\Lambda\varnothing^*=\Lambda(\Lambda\cup\varnothing\cup\varnothing^2\cup\cdots)=\Lambda\Lambda=\Lambda$。

b) $\Lambda^*\varnothing=\Lambda^*\Lambda=(\Lambda\cup\Lambda\cup\Lambda^2\cup\cdots)\Lambda=\Lambda\Lambda=\Lambda$。

c) $A^*\cup\varnothing^*=A^*\cup\Lambda=A^*$。

d) $(\varnothing\cup A)^*=A^*$。

e) $(\Lambda\cup A)^*=(\Lambda^*A^*)^*=(\Lambda A^*)^*=(A^*)^*=A^*$。

5. 设V是字母表,L是V上的一个语言。定义V^*上的一个关系$\sim$:

$\alpha\sim\beta$当且仅当所有$\omega,\varphi\in V^*$,有

$$(\omega\alpha\varphi\in L)\Leftrightarrow(\omega\beta\varphi\in L),$$

证明：～是一个等价关系。

证明：自反：对 V 上任一串 α，显然有 $\alpha \sim \alpha$。

对称：设 V 上串 α,β 有 $\alpha \sim \beta$。由定义可知，对任意 $\omega,\varphi \in V^*$，有

$$(\omega\alpha\varphi \in L) \Leftrightarrow (\omega\beta\varphi \in L)$$

即 $\omega\alpha\varphi \in L$ 与 $\omega\beta\varphi \in L$ 同真假，因此，$\beta \sim \alpha$。

传递：设 V 上串 α,β 和 γ 有 $\alpha \sim \beta,\beta \sim \gamma$，即对任意串 ω 和 φ，$\omega\alpha\varphi \in L$ 与 $\omega\beta\varphi \in L$ 同真假，$\omega\beta\varphi \in L$ 与 $\omega\gamma\varphi \in L$ 同真假，故而 $\omega\alpha\varphi \in L$ 与 $\omega\gamma\varphi \in L$ 同真假，$\alpha \sim \gamma$。

综上所述，～是等价关系。

6. 证明定理 8－1.3 中未证部分，即设 A,B,C 和 D 是 V 上任意语言，那么有

a) $A\Lambda = \Lambda A = A$。

b) $(B \cup C)A = BA \cup CA$。

c) $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$。

d) $(B \cap C)A \subseteq BA \cap CA$。

证明：a) $A\Lambda = \{\alpha\lambda \mid \alpha \in A\} = \{\alpha \mid \alpha \in A\} = A$，$\Lambda A = \{\lambda\alpha \mid \alpha \in A\} = \{\alpha \mid \alpha \in A\} = A$。

b) 因为 $B \subseteq B \cup C$，所以 $BA \subseteq (B \cup C)A$。同理 $CA \subseteq (B \cup C)A$，所以 $BA \cup CA \subseteq (B \cup C)A$。

任取 $\omega \in (B \cup C)A$，有 $\omega = \alpha\beta,\alpha \in B \cup C,\beta \in A$。当 $\alpha \in B$ 时，有 $\omega \in BA$。当 $\alpha \in C$ 时，有 $\omega \in CA$，所以 $(B \cup C)A \subseteq BA \cup CA$。

综上所述，$(B \cup C)A = BA \cup CA$。

c) 因为 $B \cap C \subseteq B$，所以 $A(B \cap C) \subseteq AB$。因为 $B \cap C \subseteq C$，所以 $A(B \cap C) \subseteq AC$。即 $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$。

设 $A = \{c,cb\},B = \{ba\},C = \{a\}$ 是 $V = \{a,b,c\}$ 上的三个语言。$B \cap C = \emptyset$，$A(B \cap C) = \emptyset$。而 $AB = \{cba,cbba\}$，$AC = \{ca,cba\}$，$AB \cap AC = \{cba\}$。所以，$A(B \cap C) \subset AB \cap AC$。上式不能成立等号。

d) 与 c) 类似。

7. 设 $A = \{\lambda,0\},B = \{0,1\}$。列出下列集合的所有元素：

a) A^2。b) B^3。c) AB。d) A^+；e) B^*。

解：a) $A^2 = \{\lambda,0,00\}$。

b) $B^3 = \{000,001,010,011,100,101,110,111\}$。

c) $AB = \{0,1,00,01\}$。

d) $A^+ = A \cup A^2 \cup A^3 \cup \cdots = \{\lambda,0\} \cup \{\lambda,0,00\} \cup \{\lambda,0,00,000\} \cup \cdots = \{\lambda,0,00,000,\cdots\} = \{0^k \mid k \geqslant 0\}$。

e) $B^* = \{0,1\}^* = \Lambda \cup B \cup B^2 \cup \cdots = \{\lambda\} \cup \{0,1\} \cup \{00,01,10,11\} \cup \cdots = \{a_1a_2\cdots a_k \mid k \geqslant 0,a_i \in \{0,1\},1 \leqslant i \leqslant k\}$。$B^*$ 是由空串及所有二进制串组成的集合。

8. 设 L 是字母表 V 上的语言。证明：

a) $L^mL^n = L^{m+n}$，其中 $m,n \geqslant 0$。

b) $(L^m)^n = L^{mn}$，其中 $m,n \geqslant 0$。

证明：a) 当 m,n 中有一为零时，$L^0 = \Lambda$，上式显然成立。

当 $m,n \geqslant 1$ 时，对任一 $\omega \in L^m L^n$，有 $\omega = \alpha\beta, \alpha \in L^m, \beta \in L^n$。

故而

$$\alpha = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_m, \gamma_i \in L(1 \leqslant i \leqslant m)$$
$$\beta = \theta_1\theta_2\cdots\theta_n, \theta_j \in L(1 \leqslant j \leqslant n)$$
$$\alpha\beta = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_m\theta_1\theta_2\cdots\theta_n \in L^{m+n}, L^m L^n \in L^{m+n}$$

反之，对任一 $\varphi \in L^{m+n}, \varphi = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{m+n}, \gamma_i \in L, 1 \leqslant i \leqslant m+n$。令 $\alpha = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_m, \beta = \gamma_{m+1}\gamma_{m+2}\cdots\gamma_{m+n}, \alpha \in L^m, \beta \in L^n, \varphi = \alpha\beta \in L^m L^n, L^{m+n} \subseteq L^m L^n$，因此，$L^m L^n = L^{m+n}$。

b) 当 m,n 中有一为零时，$(L^m)^n = \Lambda = L^{mn}$。当 $m,n \geqslant 1$ 时，由 a) 得：

$$(L^m)^n = \underbrace{L^m L^m L^m \cdots L^m}_{n} = (L^m L^m)\underbrace{L^m \cdots L^m}_{(n-2)}$$
$$= L^{2m}\underbrace{L^m \cdots L^m}_{n-2} = L^{3m}\underbrace{L^m \cdots L^m}_{(n-3)} = \cdots = L^{mn}$$

9. 证明：如果 $A \neq \varnothing, A^2 = A$，那么 $A^* = A$。反之成立吗？

证明：$A^2 = A, A^3 = A^2 A = AA = A$。一般有 $A^k = A(k \geqslant 2)$。

再证 $\Lambda \subseteq A$。用反证法，如果 $\lambda \notin A$，令 A 中长度最小的串为 $\omega, \omega \in A, |\omega| = i > 0$。因为 $A = A^2, \omega \in A^2, \omega = \omega_1\omega_2, \omega_1, \omega_2 \in A$。由于 ω 是 A 中长度最小的串，$|\omega_1| \geqslant i, |\omega_2| \geqslant i, |\omega| = |\omega_1| + |\omega_2| \geqslant 2i$，与 $|w| = i$ 矛盾，因此 $\Lambda \subseteq A$。

$$A^* = \Lambda \cup A \cup A^2 \cup \cdots = \Lambda \cup A \cup A \cup \cdots = \Lambda \cup A = A$$

反之，如果 $A \neq \varnothing, A^* = A$ 也可推得 $A = A^2$。因为 $\Lambda \subseteq A^*, A^* = A, \Lambda \subseteq A, \lambda \in A$。一方面，$A = A\Lambda \subseteq AA = A^2$。另一方面，$A^2 \subseteq A^* = A$，因此，$A = A^2$。如果 $A = \varnothing$，显然有 $A = A^2 = \varnothing$，但 $A^* = \Lambda, A^* \neq A$。

10. 证明定理 8－1.4 中未证部分，即设 A 和 B 是 V 上的语言，那么有

a) $AA^* = A^*A = A^+$。

b) $(A^*)^* = A^*A^* = A^*$。

c) $(A^*)^+ = (A^+)^* = A^*$。

d) $A^*A^+ = A^+A^* = A^+$。

e) $(A^*B^*)^* = (A^* \cup B^*)^*$。

证明：a) $AA^* = A \circ \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} A^i = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} A^{i+1} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A^j = A^+$。同理有 $A^*A = A^+$。

b) 先证 $A^*A^* = A^*$。

$A^*A^* = A^* \circ (\Lambda \cup A^+) = A^* \cup A^*A^+$，故 $A^* \subseteq A^*A^*$。

另一方面，对任一 $\alpha \in A^*A^*$，有 $\alpha = \beta\gamma, \beta \in A^*, \gamma \in A^*$。因为 $A^* = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} A^i$，有 $\beta \in A^m, \gamma \in A^n, m,n \geqslant 0$。$\alpha = \beta\gamma \in A^{m+n} \subseteq A^*, A^*A^* \subseteq A^*$。

由上可知，$A^*A^* = A^*$。

再证 $(A^*)^* = A^*$。

因为$(A^*)^2 = A^*A^* = A^*$，$(A^*)^3 = (A^*)^2A^* = A^*A^* = A^*$，可推得 $(A^*)^kA^* = A^*(k \geqslant 1)$。

$$(A^*)^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty}(A^*)^k = \bigcup_{k=1}^{\infty}A^* = A^*$$

$$(A^*)^* = \Lambda \cup (A^*)^+ = \Lambda \cup A^* = A^*$$

c) 因为 $A^* \subseteq (A^*)^+$。另一方面，$(A^*)^+ \subseteq (A^*)^* = A^*$。因此，$(A^*)^+ = A^*$。

因为$(A^+)^* \subseteq (A^*)^* = A^*$，$A \subseteq A^+$，$A^* \subseteq (A^+)^*$。因此$(A^+)^* = A^*$。

d) 因为 $\Lambda \subseteq A^*$，$A^+ = \Lambda A^+ \subseteq A^*A^+$。另一方面，任取$\alpha \in A^*A^+$，$\alpha = \beta\gamma$，$\beta \in A^*$，$\gamma \in A^+$，$\beta \in A^m$，$m \geqslant 0$，$\gamma \in A^n$，$n \geqslant 1$；$\alpha = \beta\gamma \in A^{m+n} \subseteq A^+(m+n \geqslant 1)$，所以，$A^*A^+ \subseteq A^+$。

由上可知，$A^*A^+ = A^+$。

同理可证，$A^+A^* = A^+$。

e) 先证$(A^* \cup B^*)^* \subseteq (A^*B^*)^*$。

因为$A^* = A^*\Lambda \subseteq A^*B^*$，$B^* \subseteq A^*B^*$，$A^* \cup B^* \subseteq A^*B^*$，$(A^* \cup B^*)^* \subseteq (A^*B^*)^*$。

因为$A^* \subseteq A^* \cup B^*$，$B^* \subseteq A^* \cup B^*$，$A^*B^* \subseteq (A^* \cup B^*)^2 \subseteq (A^* \cup B^*)^*$，所以$(A^*B^*)^* \subseteq ((A^* \cup B^*)^*)^* = (A^* \cup B^*)^*$。

由此可知，$(A^*B^*)^* = (A^* \cup B^*)^*$。

11. 证明：如果 L 是镜像语言，那么，L' 也是镜像语言。

证明：L 是镜像语言，$L = L'$。因为 $L = (L')'$，所以 $L' = (L')'$，L' 是镜像语言。

12. 给定语言L，令$\hat{L} = L \cap L'$。如果L是镜像语言，$\hat{L}$必是镜像语言吗？反之，如果 $\hat{L}$ 是镜像语言，L 必是镜像语言吗？

证明：L 是镜像语言，$L = L'$，$\hat{L} = L \cap L' = L \cap L = L$，$\hat{L}$ 是镜像语言。

反之，$\hat{L}$ 是镜像语言，L 不一定是镜像语言。例如，$L = \{0,01\}$，$L' = \{0,10\}$，$\hat{L} = L \cap L' = \{0\}$，$\hat{L}$ 是镜像语言，$L \neq L'$，L 不是镜像语言。

8—2 习题

1. 给定文法 $G = (\{\sigma, A\}, \{0,1\}, P, \sigma)$，其中 P：$\sigma \to 0\sigma$，$\sigma \to 1A$，$\sigma \to 0$，$A \to 0A$，$A \to 1\sigma$，$A \to 1$。描述 $L(G)$，写出 00101 的派生过程并画出派生树。

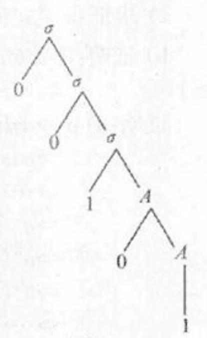


图 8－7

解：考察 P 中所有生成式，在这些生成式的两边或者所含字母 1 和 A 的数目相同，或者字母 1 和 A 的数目右边比左边多两个。所以，由 σ 派生的字符串中 1 和 A 的数目为偶数。由生成式 $A \to 1$ 可知，非终结符 A 最终被终结符 1 代替，因此，$L(G)$ 中任意串必含偶数个 1，而 0 的数目可

任意。

00101 的派生过程为：

$\sigma \Rightarrow 0\sigma \Rightarrow 00\sigma \Rightarrow 001A \Rightarrow 0010A \Rightarrow 00101$。

它的派生树如图 8－7 所示。

2. 考察下列文法 $G_1 = (\{\sigma\},\{c\},P_1,\sigma)$，其中，$P_1:\sigma \to \lambda, \sigma \to \sigma\sigma, \sigma \to c$，及 $G_2 = (\{\sigma\},\{c\},P_2,\sigma)$，其中，$P_2:\sigma \to \lambda, \sigma \to \sigma c\sigma, \sigma \to c$。

a) 描述 $L(G_i)(i = 1,2)$。

b) 对每一语言，给出一个长度为 5 的终结符串的派生，并构造派生树。

解：a) $L(G_1) = L(G_2) = \{c^n \mid n \geqslant 0\}$。

b) 长度为 5 的终结符串为 $ccccc$。

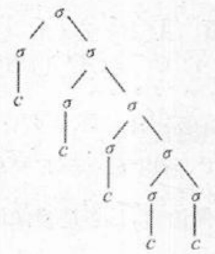
文法 G_1 的派生过程为：

$\sigma \Rightarrow \sigma\sigma \Rightarrow \sigma\sigma\sigma \Rightarrow \sigma\sigma\sigma\sigma \Rightarrow \sigma\sigma\sigma\sigma\sigma \Rightarrow c\sigma\sigma\sigma\sigma \Rightarrow cc\sigma\sigma\sigma \Rightarrow ccc\sigma\sigma \Rightarrow cccc\sigma \Rightarrow ccccc$。

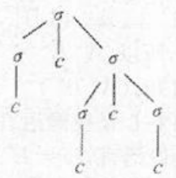
文法 G_2 的派生过程为：

$\sigma \Rightarrow \sigma c\sigma \Rightarrow \sigma c\sigma c\sigma \Rightarrow cc\sigma c\sigma \Rightarrow cccc\sigma \Rightarrow ccccc$。

他们的派生树分别如图 8－8(a) 和(b) 所示。



(a)



(b)

图 8－8

3. 给定文法 $G = (V_N, V_T, P, \sigma)$，$V_N = \{\sigma, B, C\}$，$V_T = \{a,b,c\}$，生成式集 P：

(1) $\sigma \to a\sigma BC$；(2) $\sigma \to aBC$；(3) $CB \to BC$；(4) $aB \to ab$；

(5) $bB \to bb$；(6) $bC \to bc$；(7) $cC \to cc$。

a) 求证：$a \stackrel{*}{\Rightarrow} a^n b^n c^n$。判断它属于哪一型文法。

b) 证明：串 $a^n b^n c^n (n \geqslant 1)$ 是 $L(G)$ 中仅有的终结符串，由此可知 $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \geqslant 1\}$。

证明：a) $\sigma \Rightarrow a\sigma BC$　　(用生成式(1))

$\Rightarrow aa\sigma BCBC$　　(用生成式(1))

$\Rightarrow \cdots\cdots$

$\Rightarrow a^{n-1}\sigma(BC)^{n-1}$　　(用生成式(1))

$\Rightarrow a^n(BC)^n$　　(用生成式(2))

$\Rightarrow a^n(BC)^{n-2}B^2C^2$　　(用生成式(3))

$\Rightarrow \cdots\cdots$

$\Rightarrow a^nB^nC^n$ （用生成式(3)）

$\Rightarrow a^nbB^{n-1}C^n$ （用生成式(4)）

$\Rightarrow a^nb^nB^{n-2}C^n$ （用生成式(5)）

$\Rightarrow \cdots\cdots$

$\Rightarrow a^nb^nC^n$ （用生成式(5)）

$\Rightarrow a^nb^ncC^{n-1}$ （用生成式(6)）

$\Rightarrow a^nb^nc^2C^{n-2}$ （用生成式(7)）

$\Rightarrow \cdots\cdots$

$\Rightarrow a^nb^nc^n$ （用生成式(7)）

该文法的生成式中只有 $CB \to BC$ 不属于 $\varphi A\psi \to \varphi\omega\psi$ 形式。但是我们引进新的非终结符 D 和 E，令 $V'_N = \{\sigma, B, C, D, E\}$。将生成式 $CB \to BC$ 改为：$CB \to DB, DB \to DE, DE \to BE, BE \to BC$。那么，这些生式都属于 $\varphi A\psi \to \varphi\omega\psi$ 形式了，所以文法 G 是上下文有关文法。

b) 分析生成式的结构。

由于生成式(4)，(5)，(6)和(7)的左端，在非终结符 B 或 C 的左邻为终结符，因此在任何以 σ 开始的派生过程中未运用生成式(2)之前不能运用他们。$n-1(\geqslant 1)$ 次运用生成式(1)和1次运用生成式(2)，有

$$\sigma \stackrel{*}{\Rightarrow} a^n(BC)^n \quad (n \geqslant 1)$$

由于 $a^n(BC)^n$ 中没有 σ 了，不能再运用生成式(1)或(2)。此时只能运用生成式(3)或(4)。生成式(3)将非终结符 B 和 C 位置互换，生成式(4)将非终结符 B 换为终结符 b。运用了生成式(4)后才可运用生成式(5)或(6)，他们分别将非终结符 B 和 C 换为终结符 b 和 c。此时，字符串为：

$$a^nb^ic\alpha (i \leqslant n)$$

其中 α 是由 B 和 C 组成，B 的数目为 $n-i$，C 的数目为 $n-1$。

如果 $i < n$，α 中至少有一个 B。在 $a^nb^ic\alpha$ 的派生中只能运用生成式(3)或(7)，因为(3)只能改变 B 和 C 的次序，(7)只能将非终结符 C 改为终结符 c，所以不管怎样交替运用生成式(3)或(7)，$c\alpha$ 中的非终结符 B 始终不能消失，因此不能得到由终结符组成的串。

如果 $i = n$，此时串为：

$$a^nb^nc\alpha$$

其中 α 是由 $n-1$ 个 C 组成。此时 $a^nb^nc\alpha$ 的派生中只能用生成式(7)。重复使用(7)就得终结符串 $a^nb^nc^n$。

4. a) 构造一个左线性文法 G，使 $L(G) = \{10^n \mid n \geqslant 0\}$。

b) 构造一个右线性文法 G，使 $L(G) = \{ab^m \mid m \geqslant 0\} \cup \{c^n \mid n \geqslant 0\}$。

解：a) $G = \{V_N, V_T, P, \sigma\}$，

其中，$V_N = \{\sigma, A\}$，$V_T = \{0, 1\}$，P：$\sigma \to 1, \sigma \to A0, A \to A0, A \to 1$。

b) $G = \{V_N, V_T, P, \sigma\}$，

其中，$V_N = \{\sigma, B, C\}$，$V_T = \{a, b, c\}$，P：$\sigma \to a, \sigma \to aB, B \to bB, B \to b, \sigma \to c$，

$\sigma \to cC, C \to cC, C \to c$。

5. 设 G 为一文法且它的所有生成式的形式都是 $A \to \varphi B$ 和 $A \to \varphi$，其中 $A, B \in V_N, \varphi \in V_T^*$。试证 G 产生的语言 $L(G)$ 能由右线性文法产生。

证明：设文法 $G = (V_N, V_T, P, \sigma)$，其中，$V_T = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$。

构造新文法 $G' = (V'_N, V'_T, P', \sigma')$，令 $V'_T = V_T, \sigma' = \sigma$，

G' 的产生式集 P 根据 G 的生成式集构造。

(1) 对 P 中形式为 $A \to \varphi, A \to \varphi B$ 的生成式，如果 φ 是一个终结符，那么在 P 中保持不变；

(2) 如果 P 中有生成式 $A \to \varphi, \varphi = a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_p}$，则在 G' 中增加新非终结符 $B_1, B_2, \cdots, B_{p-1}$，将生成式 $A \to a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_p}$ 改写为：

$A \to a_{i_1} B_1, B_1 \to a_{i_2} B_2, \cdots, B_{p-2} \to a_{i_{p-1}} B_{p-1}, B_{p-1} \to a_{ip}$；

(3) 若 P 中有生成式 $A \to \varphi B, \varphi = b_{j_1} b_{j_2} \cdots b_{j_k}$，则在 G' 中增加新非终结符 $C_1, C_2, \cdots, C_{k-1}$。将生成式 $A \to \varphi B$ 改写为：

$A \to b_{j_1} C_1, C_1 \to b_{j_2} C_2, \cdots, C_{k-2} \to b_{j_{k-1}} C_{k-1}, C_{k-1} \to b_{j_k} B$。

从而 $L(G') = L(G)$，而 G' 为右线性文法。

6. 给出一个正则文法，产生下列语言

$L = \{\omega \mid \omega \in \{0,1\}^*$ 且 ω 不含有两个相邻的 1$\}$。

解：$G = (\{\sigma, A\}, \{0,1\}, P, \sigma)$，其中，

$P: \sigma \to \lambda, \sigma \to 0, \sigma \to 1, \sigma \to 0\sigma, \sigma \to 1A, A \to 0\sigma, A \to 0$，则 G 为产生语言 L 的正则文法。

7. 给出一个产生下列语言 $L = \{\omega\omega' \mid \omega \in \{0,1\}^*\}$ 的上下文有关文法。

解：产生语言 L 的上下文有关文法为 $G = (\{\sigma, A\}, \{0,1\}, P, \sigma)$，其中 P 为：$\sigma \to \lambda, \sigma \to 00, \sigma \to 11, \sigma \to 0A0, \sigma \to 1A1, A \to 0\sigma 0, A \to 1\sigma 1, A \to 00, A \to 11$。

8. 考察下列 0 型文法：$G = (\{\sigma, A, B, C, D, E\}, \{0,1\}, P, \sigma)$，其中 P 为：(1) $\sigma \to ABC$，(2) $AB \to 0AD$，(3) $AB \to 1AE$，(4) $AB \to \lambda$，(5) $D0 \to 0D$，(6) $D1 \to 1D$，(7) $E0 \to 0E$，(8) $E1 \to 1E$，(9) $C \to \lambda$，(10) $DC \to B0C$，(11) $EC \to B1C$，(12) $0B \to B0$，(13) $1B \to B1$。

描述 $L(G)$，并写出 01100110 的派生过程。

解：$L(G) = \{\omega\omega \mid \omega \in \{0,1\}^*\}$，01100110 的派生过程为：

$\sigma \overset{(1)}{\Rightarrow} ABC \overset{(2)}{\Rightarrow} 0ADC \overset{(10)}{\Rightarrow} 0AB0C \overset{(3)}{\Rightarrow} 01AE0C \overset{(7)}{\Rightarrow} 01A0EC \overset{(11)}{\Rightarrow} 01A0B1C$

$\overset{(12)}{\Rightarrow} 01AB01C \overset{(3)}{\Rightarrow} 011AE01C \overset{(7)}{\Rightarrow} 011A0E1C \overset{(8)}{\Rightarrow} 011A01EC \overset{(11)}{\Rightarrow} 011A01B1C$

$\overset{(13)}{\Rightarrow} 011A0B11C \overset{(12)}{\Rightarrow} 011AB011C \overset{(2)}{\Rightarrow} 0110AD011C \overset{(5)}{\Rightarrow} 011A0D11C \overset{(6)}{\Rightarrow} 0110A01D1C$

$\overset{(6)}{\Rightarrow} 0110A011DC \overset{(10)}{\Rightarrow} 0110A011B0C \overset{(13)}{\Rightarrow} 0110A01B10C \overset{(13)}{\Rightarrow} 0110A0B110C$

$\overset{(12)}{\Rightarrow} 0110AB0110C \overset{(4)}{\Rightarrow} 01100110C \overset{(9)}{\Rightarrow} 01100110$

8－3 习题

1. 构造有限状态机$M=(Q,S,R,f,g,q_I)$，其中，$S=R=\{0,1,2,3\}$，对于$t>2$有$r(t)=m(t)+n(t)$，这里$m(t)=\begin{cases}2,\text{如果 } s(t-1) \text{ 是 } 0 \text{ 或 } 2\\0,\text{其他}\end{cases}$和$n(t)=\begin{cases}1,\text{如果 } s(t-2) \text{ 是 } 1 \text{ 或 } 3\\0,\text{其他}\end{cases}$。如果$s(-1)=s(0)=0$，确定$r(1)$和$r(2)$。

解：由$r(t)$的定义知，$r(t)$由$s(t-2)$和$s(t-1)$确定，M有四个不同的状态，不妨设为A,B,C,D，则状态与$s(t-2)$，$s(t-1)$的关系为表8－3所示。

表8－3

状态	A	B	C	D
$s(t-2)s(t-1)$	10,12,30,32	00,02,20,22	11,13,31,33	01,03,21,23

有限状态机的状态图如图8－9所示。

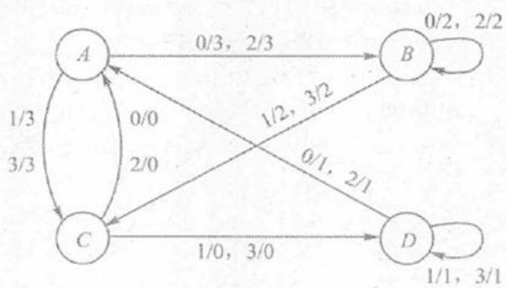


图8－9

如果机器处于状态A，即$s(t-2)s(t-1)=10,12,30$或32。当输入字母为0，则：$s(t-2)s(t-1)s(t)=100,120,300$或320。他们的后两位是00,20，机器$M$转向状态$B$。由于$s(t-1)$是0或2，$m(t)=2$；由于$s(t-2)$是1或3。$n(t)=1$，$r(t)=m(t)+n(t)=3$。因此，在状态图中有$A\xrightarrow{0/3}B$，其余以此类推。

所以当$s(-1)=s(0)$时，$r(1)=m(1)+n(1)=2+0=2$。

当$s(1)=1,3$时，$r(2)=m(2)+n(2)=0+0=0$。

当$s(1)=0,2$时，$r(2)=m(2)+n(2)=2+0=2$。

2. 设$S=\{a,b,c\}$，对于S中每一串符号s和S^*中每一串ω，定义$N_s(\omega)=\omega$中s出现的次数，给出转换赋值机$M=(Q,S,R,f,g,q_I)$的状态图，对于输入串ω，它的最终输出是$r=(N_a(\omega)+2N_b(\omega)-3N_c(\omega))\text{mod}5$，求激励是$abbccbaabc$的响应。

解：由初等数论知r的取值为0,1,2,3,4，设对应的状态为q_0,q_1,q_2,q_3,q_4，由$2\text{mod}5=(-3)\text{mod}5=2$，所以输入串$\omega$和$\omega'$的最终输出$r$和$r'$有关系式：

$$r'=\begin{cases}(r+1)\text{mod}5,\omega'=\omega a\\(r+2)\text{mod}5,\omega'=\omega b \text{ 或 } \omega'=\omega c\end{cases}$$

8－3　习题

1. 构造有限状态机 $M=(Q,S,R,f,g,q_I)$，其中，$S=R=\{0,1,2,3\}$，对于 $t>2$ 有 $r(t)=m(t)+n(t)$，这里 $m(t)=\begin{cases}2,\text{如果 } s(t-1) \text{ 是 } 0 \text{ 或 } 2\\0,\text{其他}\end{cases}$ 和 $n(t)=\begin{cases}1,\text{如果 } s(t-2) \text{ 是 } 1 \text{ 或 } 3\\0,\text{其他}\end{cases}$。如果 $s(-1)=s(0)=0$，确定 $r(1)$ 和 $r(2)$。

解：由 $r(t)$ 的定义知，$r(t)$ 由 $s(t-2)$ 和 $s(t-1)$ 确定，M 有四个不同的状态，不妨设为 A,B,C,D，则状态与 $s(t-2)$，$s(t-1)$ 的关系为表 8－3 所示。

表 8－3

状态	A	B	C	D
$s(t-2)s(t-1)$	10,12,30,32	00,02,20,22	11,13,31,33	01,03,21,23

有限状态机的状态图如图 8－9 所示。

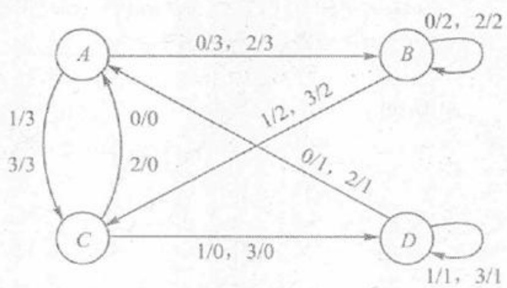


图 8－9

如果机器处于状态 A，即 $s(t-2)s(t-1)=10,12,30$ 或 32。当输入字母为 0，则：$s(t-2)s(t-1)s(t)=100,120,300$ 或 320。他们的后两位是 00，20，机器 M 转向状态 B。由于 $s(t-1)$ 是 0 或 2，$m(t)=2$；由于 $s(t-2)$ 是 1 或 3。$n(t)=1$，$r(t)=m(t)+n(t)=3$。因此，在状态图中有 $A \xrightarrow{0/3} B$，其余以此类推。

所以当 $s(-1)=s(0)$ 时，$r(1)=m(1)+n(1)=2+0=2$。

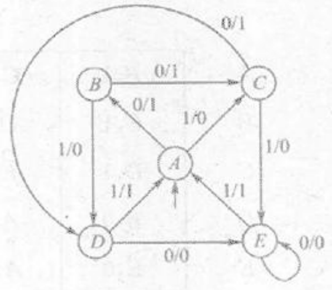
当 $s(1)=1,3$ 时，$r(2)=m(2)+n(2)=0+0=0$。

当 $s(1)=0,2$ 时，$r(2)=m(2)+n(2)=2+0=2$。

2. 设 $S=\{a,b,c\}$，对于 S 中每一串符号 s 和 S^* 中每一串 ω，定义 $N_s(\omega)=\omega$ 中 s 出现的次数，给出转换赋值机 $M=(Q,S,R,f,g,q_I)$ 的状态图，对于输入串 ω，它的最终输出是 $r=(N_a(\omega)+2N_b(\omega)-3N_c(\omega))\text{mod}5$，求激励是 $abbccbaabc$ 的响应。

解：由初等数论知 r 的取值为 0，1，2，3，4，设对应的状态为 q_0,q_1,q_2,q_3,q_4，由 $2\text{mod}5=(-3)\text{mod}5=2$，所以输入串 ω 和 ω' 的最终输出 r 和 r' 有关系式：

$$r'=\begin{cases}(r+1)\text{mod}5,\omega'=\omega a\\(r+2)\text{mod}5,\omega'=\omega b \text{ 或 } \omega'=\omega c\end{cases}$$



(c)

图 8－11

解:图 8－11(a),(b),(c)的状态机的状态表分别如表 8－4(a′),(b′)和(c′)所示。

表 8－4(a′)

	00	01	10	11	
A	A	A	B	B	00
B	B	A	C	C	01
C	C	A	D	D	11
D	D	A	A	A	10

(b′)

	c_1	c_2	c_3	
q_0	q_1	q_2	q_7	0
q_1	q_2	q_3	q_0	1
q_2	q_3	q_4	q_1	0
q_3	q_4	q_5	q_2	1
q_4	q_5	q_6	q_3	0
q_5	q_6	q_0	q_4	1
q_6	q_7	q_1	q_5	0
q_7	q_0	q_2	q_6	1

(c′)

	0	1
A	B,1	C,0
B	C,1	D,0
C	D,1	E,0
D	E,0	A,1
E	E,0	A,1

4. 给定有限状态机的状态表如表 8－5(a) 和(b) 所示，画出相应的状态图。

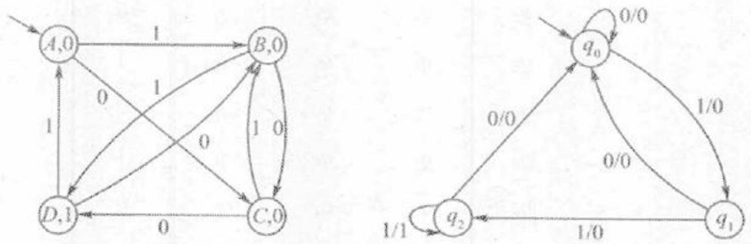
表 8－5(a)

	0	1	
A	C	B	0
B	C	D	0
C	D	B	0
D	B	A	1

(b)

	0	1
q_0	q_0,0	q_1,0
q_1	q_0,0	q_2,0
q_2	q_0,0	q_2,1

解：(a) 状态图如图 8－12(a′)，(b) 状态图如图 8－12(b′) 所示。



(a′)　　　　　　　　　　　　(b′)

图 8－12

5. 设M是n个状态的有限状态机，如果有一个激励将M从状态q_I转向状态q，证明必存在一个长度小于n的激励，使M从状态q_I转向状态q。

证明：将每个状态视为一个结点，则n个状态的有限状态机的状态图为图论中n个结点的有向图，若激励能将M从状态q_I转向状态q，相当于有向图中从q_I对应结点到q所对应的结点之间存在有向路。由图论知必存在长度$<n$为从q_I对应结点到q所对应的结点的有向路，该有向路中各有向弧所标记的输入字母所组成的字，就是M从状态q_I转向状态q且长度$<n$的激励。

6. 设计一台有限状态机M，其中$S=R=\{0,1\}$，当输入串中有三个连续的0或1时，它输出1，其他均输出0。

解：满足要求的有限状态机的状态图如图8－13所示。

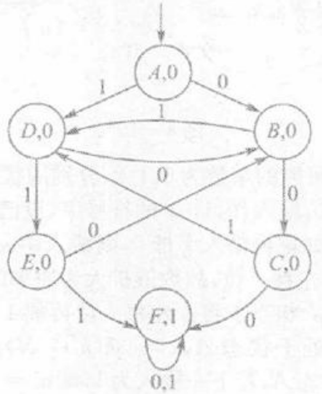


图8－13

A为初态，F为终态，A,B,C,D输出0，F输出1。

7. 设计一台有限状态机，其中$S=\{a,b\}$，当且仅当输入符号串包含两个连续的a或两个连续的b时，输出为1，否则输出为0。

解：满足要求的有限状态机的状态图如图8－14所示。

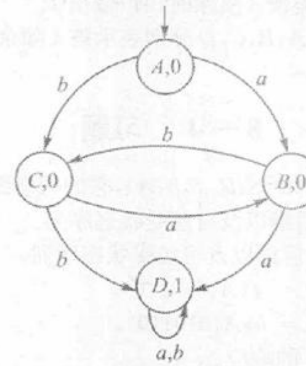


图8－14

5. 设M是n个状态的有限状态机，如果有一个激励将M从状态q_I转向状态q，证明必存在一个长度小于n的激励，使M从状态q_I转向状态q。

证明：将每个状态视为一个结点，则n个状态的有限状态机的状态图为图论中n个结点的有向图，若激励能将M从状态q_I转向状态q，相当于有向图中从q_I对应结点到q所对应的结点之间存在有向路。由图论知必存在长度$<n$为从q_I对应结点到q所对应的结点的有向路，该有向路中各有向弧所标记的输入字母所组成的字，就是M从状态q_I转向状态q且长度$<n$的激励。

6. 设计一台有限状态机M，其中$S=R=\{0,1\}$，当输入串中有三个连续的0或1时，它输出1，其他均输出0。

解：满足要求的有限状态机的状态图如图8－13所示。

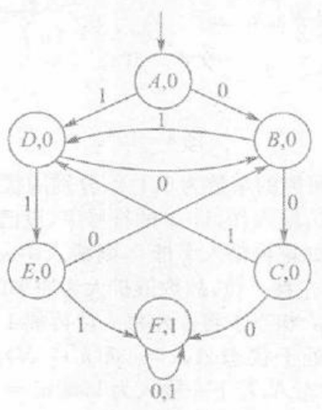


图8－13

A为初态，F为终态，A,B,C,D输出0，F输出1。

7. 设计一台有限状态机，其中$S=\{a,b\}$，当且仅当输入符号串包含两个连续的a或两个连续的b时，输出为1，否则输出为0。

解：满足要求的有限状态机的状态图如图8－14所示。

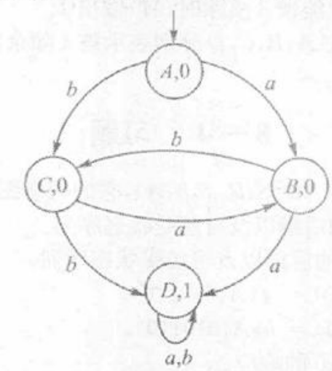


图8－14

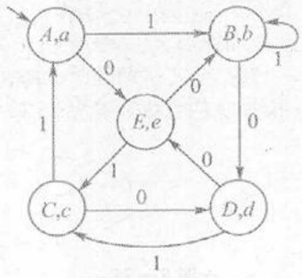


图 8－16

解：a) 由图 8－16 知

$A \xrightarrow{0} E \xrightarrow{1} C \xrightarrow{1} A \xrightarrow{1} B \xrightarrow{0} D$

故 A 的 01110 的后继状态为 D，可接受状态序列为 $AECABD$。

b) 由图图 8－17 知

$E \xrightarrow{1} C \xrightarrow{0} D \xrightarrow{0} E \xrightarrow{1} C \xrightarrow{0} D \xrightarrow{1} C$

故 E 的 100101 的后继状态是 C，可接受状态是 $ECDECDC$。

c) 由 $A \xrightarrow{0} E \xrightarrow{1} C \xrightarrow{0} D \xrightarrow{1} C \xrightarrow{1} A \xrightarrow{0} E$

故 $f(A,010) = D, f(D,110) = E, f(A,010110) = E$，

故 $f(f(A,010),110) = f(A,010110)$。

又 $h(f,(A,010),110) = h(D,110) = h(f(D,110)) = h(E) = e$，

$h(A,010110) = h(f(A,010110)) = h(E) = e$，

所以 $h(f(A,010),110) = h(A,010110)$。

d) 状态 A 的 010110 的可接受状态为 $AECDCAE$，所以对于激励 010110 的响应为 $aecdcae$。

e) 与相似的转换赋值机 $M_1 = (Q,S,R,f,g,q_I)$，其中

$Q = \{A,B,C,D,E\}, q_I = A$，

$S = \{0,1\}, R = \{a,b,c,d,e\}$，

$f: f(A,0) = E, f(A,1) = B$，

$f(B,0) = D, f(B,1) = B$，

$f(C,0) = D, f(C,1) = A$，

$f(D,0) = E, f(D,1) = C$，

$f(E,0) = B, f(E,1) = C$，

$g: g(A,0) = e, g(A,1) = b$，

$g(B,0) = d, g(B,1) = b$，

$g(C,0) = d, g(C,1) = a$，

$g(D,0) = e, g(D,1) = c$，

$g(E,0) = e, g(E,1) = c$。

对于激励 010110 的响应为 $ecdcae$，状态图如图 8－17 所示。

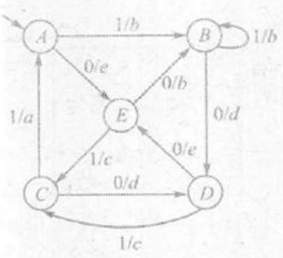


图 8－17

2. 完成定理 8-4.1 的证明，即对于有限状态机 M_1 我们有 $O(q,\omega\varphi)=O(f(q,\omega),\varphi)$，其中，$q$ 是 q_I 的 ψ 一后继，$\omega,\varphi\in S^+,\psi\in S^*$。

证明：先证 $O(q_I,\omega\varphi)=O(f(q_I,\omega),\varphi)$。

对 $|\varphi|$ 用归纳法：

① $|\varphi|=1$ 时，φ 是一个输入字母 a，由输出函数 O 的定义有

$O(q_I,\omega a)=O(f(q_I,\omega),a)$，

将上式中将 q_I 换成任意状态 q，也有

$O(q,\omega a)=O(f(q,\omega),a)$。

② 假设 $|\varphi|=k$ 时上式成立。

当 $|\varphi|=k+1$ 时，令 $\varphi=\varphi' a$，其中 $|\varphi'|=k$，则

$$\begin{aligned}O(q_I,\omega\varphi)&=O(q_I,\omega\varphi' a)=O(f(q_I,\omega\varphi'),a)\\&=O(f(f(q_I,\omega),\varphi'),a)=O(f(q',\varphi'),a)\\&=O(q',\varphi' a)=O(f(q_I,\omega),\varphi)\end{aligned}$$

设 q 是 q_I 的 ψ 一后继，即 $q=f(q_I,\varphi)$，有

$$\begin{aligned}O(q,\omega\varphi)&=O(f(q_I,\psi),\omega\varphi)=O(q_I,\psi\omega\varphi)\\&=O(f(q_I,\psi\omega),\varphi)=O(f(f(q_I,\psi),\omega),\varphi)\\&=O(f(q,\omega),\varphi)\end{aligned}$$

3. 给定有限状态机 $M=(Q,S,R,f,g,q_1)$，它的状态图如图 8－18 所示。

a) 求状态 q_2 的 $aabba$ 的后继以及可接受状态序列。

b) 求状态 q_3 的 $bbaaba$ 的后继以及可接受状态序列。

c) 验证 $f(f(q_2,aba),aba)=f(q_2,abaaba)$，$g(f(q_2,aba),aba)=g(q_2,abaaba)$。

d) 求 M 对于激励 $abaaba$ 的响应。

e) 构造一台与 M 相似的状态赋值机，并求它对于激励 $abaaba$ 的响应。

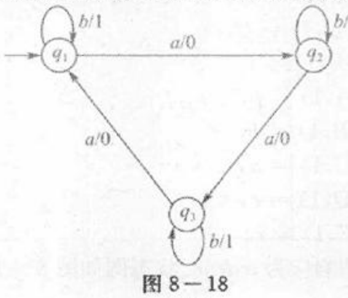


图 8－18

解：a) 由图 8－18 知

$q_2 \xrightarrow{a} q_3 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_1 \xrightarrow{b} q_1 \xrightarrow{a} q_2$

故 q_2 的 $aabba$ 的后继为 q_2，可接受状态为 $q_3q_3q_1q_1q_1q_2$。

b) 由 $q_3 \xrightarrow{b} q_3 \xrightarrow{b} q_3 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{a} q_2 \xrightarrow{b} q_2 \xrightarrow{a} q_3$

q_3 的 $bbaaba$ 的后继为 q_3，可接受状态序列为 $q_3q_3q_1q_2q_2q_3$。

c) $f((q_2,aba),aba)=f(q_1,aba)=q_3=f(q_2,abaaba)$

$g(f(q_2,aba),aba)=g(q_1,aba)=g(f(q_1,ab))=g(q_2,a)=0$

同时 $g(q_2,abaaba)=g(f(q_2,abaab),a)=g(q_2,a)=0$

故 $g(f(q_2,aba),aba)=g(q_2,abaaba)$。

d) 由 $q_1 \xrightarrow{a/0} q_2 \xrightarrow{b/1} q_2 \xrightarrow{a/0} q_3 \xrightarrow{a/0} q_1 \xrightarrow{b/1} q_1 \xrightarrow{a/0} q_2$

故对于激励 $abaaba$ 的响应为 010010；

e) 与 M 相似的状态赋值机

$M_s=(Q_s,\{a,b\},\{0,1\},f_s,h,\langle q_1,r_0\rangle)$

其中，$r_0\in\{0,1\}$

$Q_s=Q\times R=\{\langle q_1,0\rangle,\langle q_1,1\rangle,\langle q_2,0\rangle,\langle q_2,1\rangle,\langle q_3,0\rangle,\langle q_3,1\rangle\}$，

由 M 的转换构造响应 M_s 中的转换为表 8－6 所示。

表 8－6

M	M_s
$q_1 \xrightarrow{a/0} q_2$	$\langle\langle q_1,0\rangle,0\rangle \xrightarrow{a} \langle\langle q_2,0\rangle,0\rangle$
	$\langle\langle q_1,1\rangle,1\rangle \xrightarrow{a} \langle\langle q_2,0\rangle,0\rangle$
$q_1 \xrightarrow{b/1} q_1$	$\langle\langle q_1,0\rangle,0\rangle \xrightarrow{b} \langle\langle q_1,1\rangle,1\rangle$
	$\langle\langle q_1,1\rangle,1\rangle \xrightarrow{b} \langle\langle q_1,1\rangle,1\rangle$
$q_2 \xrightarrow{a/0} q_3$	$\langle\langle q_2,0\rangle,0\rangle \xrightarrow{a} \langle\langle q_3,0\rangle,0\rangle$
	$\langle\langle q_2,1\rangle,1\rangle \xrightarrow{a} \langle\langle q_3,0\rangle,0\rangle$
$q_2 \xrightarrow{b/1} q_2$	$\langle\langle q_2,0\rangle,0\rangle \xrightarrow{b} \langle\langle q_2,1\rangle,1\rangle$
	$\langle\langle q_2,1\rangle,1\rangle \xrightarrow{b} \langle\langle q_2,1\rangle,1\rangle$
$q_3 \xrightarrow{a/0} q_2$	$\langle\langle q_3,0\rangle,0\rangle \xrightarrow{a} \langle\langle q_1,0\rangle,0\rangle$
	$\langle\langle q_3,1\rangle,1\rangle \xrightarrow{a} \langle\langle q_1,0\rangle,0\rangle$
$q_3 \xrightarrow{b/1} q_3$	$\langle\langle q_3,0\rangle,0\rangle \xrightarrow{b} \langle\langle q_3,1\rangle,1\rangle$
	$\langle\langle q_3,1\rangle,1\rangle \xrightarrow{b} \langle\langle q_3,1\rangle,1\rangle$

M_s 的状态 f_s 定义为：

$f_s(\langle q_1,0\rangle,a)=\langle q_2,0\rangle$，　　$f_s(\langle q_1,0\rangle,b)=\langle q_1,1\rangle$，
$f_s(\langle q_1,1\rangle,a)=\langle q_2,0\rangle$，　　$f_s(\langle q_1,1\rangle,b)=\langle q_1,1\rangle$，
$f_s(\langle q_2,0\rangle,a)=\langle q_3,0\rangle$，　　$f_s(\langle q_2,0\rangle,b)=\langle q_2,1\rangle$，
$f_s(\langle q_2,1\rangle,a)=\langle q_3,0\rangle$，　　$f_s(\langle q_2,1\rangle,b)=\langle q_2,1\rangle$，
$f_s(\langle q_3,0\rangle,a)=\langle q_1,0\rangle$，　　$f_s(\langle q_3,0\rangle,b)=\langle q_3,1\rangle$，
$f_s(\langle q_3,1\rangle,a)=\langle q_1,0\rangle$，　　$f_s(\langle q_3,1\rangle,b)=\langle q_3,1\rangle$，

M_s 的输出函数 h 定义为：

$h(\langle q_1,0\rangle)=0$，　　$h(\langle q_1,1\rangle)=1$，
$h(\langle q_2,0\rangle)=0$，　　$h(\langle q_2,1\rangle)=1$，
$h(\langle q_3,0\rangle)=0$，　　$h(\langle q_3,1\rangle)=1$，

当 $\langle q_1,0\rangle$ 为初态时，激励 $abaaba$ 的响应为 0010010，当 $\langle q_1,1\rangle$ 为初态时，激励 $abaaba$ 的响应为 1010010。

4. 构造一台与图 8－19 相似的转换赋值机。

解：如下图 8－20 所示。

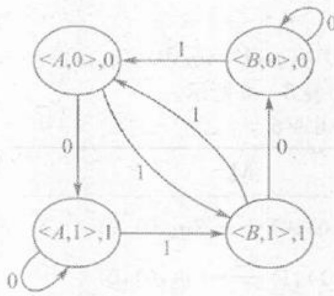


图 8－19

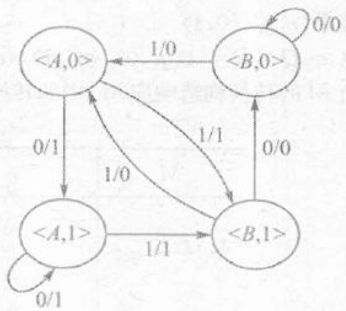


图 8－20

5. 设 M_s 是与给定的转换赋值机 M_t 相似的状态赋值机，对于同一激励，M_s 的响应比 M_t 的响应多一个首字母，请对 M_t 稍作修改，使它们的响应相同。

解：设 M_t 初态 q_t 对应 M_s 的初态 q_s，将 q_s 的输出作为首字母，然后连接上 M_t 对某一激励的响应就得到 M_s 对于同一激励的响应，从而 M_s 和 M_t 对于同一激励的响应相同。

8－5　习题

1. 完成定理 8-5.3 的证明，即证明若 $q_a,q_b\in Q$，则当 $q_a \overset{k}{\sim} q_b$，且对所有输入字母 $s\in S$，有 $f(q_a,s)\overset{k}{\sim} f(q_b,s)$ 时 $q_a \overset{k+1}{\sim} q_b$。

证明：用反证法。

假设 $q_a \overset{k+1}{\nsim} q_b$，则存在字 φ，$|\varphi|=k+1$ 且 $O(q_a,\varphi)\neq O(q_b,\varphi)$，令 $\varphi=sw$，

s 是一个输入字母，$|w| = k$。由 $O(q_a, \varphi) = O(q_a, sw) = O(f(q_a, s), w)$，
$O(q_b, \varphi) = O(q_b, sw) = O(f(q_b, s), w)$，
所以 $O(q_a, \varphi) \neq O(q_b, \varphi)$，
故 $f(q_a, s) \overset{k}{\not\sim} f(q_b, s)$ 与已知矛盾，从而 $q_a \overset{k+1}{\sim} q_b$。

2. 证明：如果有限自动机 M 有 n 个状态，其中 $n \geqslant 2$，则存在一个整数 $k \leqslant n-1$ 使得 $P_k = P$。

证明：设有限自动机 M 的状态集 $Q = \{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$，如果 $P_1 = \{\{q_1, q_2, \cdots, q_n\}\}$，显然，$P_2 = P_1$，故而 $P = P_1$，如果划分 P_1 中元素数目大于等于2，根据有限自动机 M 的简化过程，由 P_1 可得 P_1 的加细 P_2，若 $P_2 \neq P_1$，则 $|P_2| \geqslant |P_1| + 1 \geqslant 3$。若 $P_3 \neq P_2$，则 $|P_3| \geqslant |P_2| + 1 \geqslant 4, \cdots$，若 $P_{i+1} \neq P_i$，则 $|P_{i+1}| \geqslant |P_i|$，则 $|P_{i+1}| \geqslant |P_i| + 1 \geqslant i + 2$。
另外因为 n 个状态集合 Q 的最细划分的每一划分块由一个状态组成，所以 $|P_{i+1}| \leqslant |Q| = n$，则 $i + 2 \leqslant n$，即 $i \leqslant n-2$，从而对任意有限自动机 M，如果它有 n 个状态，必有 $k \leqslant n-1$，使 $P_k = P$。

3. 设 M 是有 n 个状态的有限状态机，q 是 M 中一个状态，如果有一个激励 ω，使 $f(q_I, \omega) = q$，则必有 $\omega' \in S^*$，$|\omega'| \leqslant n-1$，，使 $f(q_I, \omega') = q$。

证明：由 8－3 习题 5 证明知结论成立。

4. 试简化(如果有可能)转换赋值机 M，它的状态如表 8－7 所示。

表 8－7

	0	1
s_0	$s_1, 0$	$s_7, 0$
s_1	$s_7, 0$	$s_0, 1$
s_2	$s_8, 0$	$s_7, 1$
s_3	$s_7, 0$	$s_5, 1$
s_4	$s_3, 0$	$s_2, 0$
s_5	$s_6, 0$	$s_7, 0$
s_6	$s_8, 0$	$s_5, 1$
s_7	$s_2, 0$	$s_7, 1$
s_8	$s_2, 0$	$s_0, 1$

解：$P_1 = \{\{s_0, s_4, s_5\}, \{s_1, s_2, s_3, s_6, s_7, s_8\}\}$，
$P_2 = \{\{s_0, s_4, s_5\}, \{s_1, s_3, s_6, s_8\}, \{s_2, s_7\}\}$，
$P_3 = \{\{s_0, s_4, s_5\}, \{s_1, s_3, s_8\}, \{s_6\}, \{s_2\}, \{s_7\}\}$，
$P_4 = \{\{s_0\}, \{s_4\}, \{s_5\}, \{s_1, s_3\}, \{s_8\}, \{s_6\}, \{s_2\}, \{s_7\}\}$，
$P_5 = \{\{s_0\}, \{s_4\}, \{s_5\}, \{s_1\}, \{s_3\}, \{s_8\}, \{s_6\}, \{s_2\}, \{s_7\}\}$，

因此 M 不能被简化。

5. 简化转换赋值机 M，它的状态如表 8－8 所示。画出简化机的状态图，对于状态 s_0，s_7，求出有不同响应的激励。

表 8－8

	a	b	c	d
s_0	$s_4,1$	$s_2,0$	$s_1,1$	$s_4,1$
s_1	$s_2,0$	$s_5,1$	$s_4,1$	$s_1,0$
s_2	$s_1,1$	$s_0,0$	$s_3,1$	$s_5,1$
s_3	$s_6,0$	$s_5,1$	$s_4,1$	$s_1,0$
s_4	$s_2,0$	$s_5,1$	$s_3,1$	$s_4,0$
s_5	$s_2,1$	$s_5,1$	$s_3,0$	$s_7,0$
s_6	$s_3,1$	$s_0,0$	$s_1,1$	$s_5,1$
s_7	$s_1,1$	$s_2,0$	$s_4,1$	$s_5,1$

解：$P_1=\{\{s_0,s_2,s_6,s_7\},\{s_1,s_3,s_4\},\{s_5\}\}$，

$P_2=\{\{s_0\},\{s_2,s_6,s_7\},\{s_1,s_3,s_4\},\{s_5\}\}$，

$P_2=\{\{s_0\},\{s_2,s_6\},\{s_7\},\{s_1,s_3,s_4\},\{s_5\}\}=P_4=P$。

故可将简化，如表 8－9 所示。

表 8－9

P	M'
$\{s_0\}$	A
$\{s_2,s_6\}$	B
$\{s_7\}$	C
$\{s_1,s_3,s_4\}$	D
$\{s_5\}$	E

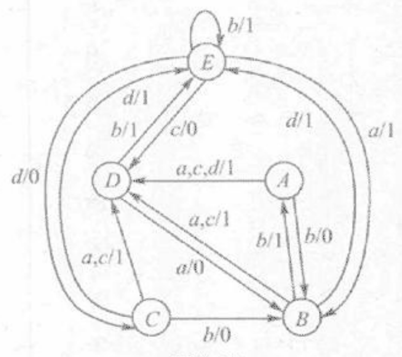


图8—21

则 M' 的状态图如图 8－21 所示，状态 s_0，s_7 在 P_3 的不同等价类中有：

(1) 状态 s_0，s_7 的 $s(1)$ 后继必须在 P_2 的不同等价类中，故只能取 $s(1)=d$，$s_0 \xrightarrow{d/1} s_4$，$s_7 \xrightarrow{d/1} s_5$；

(2) 状态 s_4，s_5 的 $s(2)$ 后继必须在 P_1 的不同等价类中，故只能取 $s(2)=d$，$s_4 \xrightarrow{d/0} s_4$，$s_5 \xrightarrow{d/0} s_7$；

(3) 状态 s_4, s_7 必须有不同的输出，可取 $s(3) = a, b$ 或 d，$g(s_4, a) = 0, g(s_7, a) = 1, g(s_4, b) = 1, g(s_7, b) = 0, g(s_4, d) = 0, g(s_7, d) = 1$，所以使 s_0, s_7 有不同响应的激励是 $\omega_1 = dda$，或 $\omega_2 = ddb$ 或 $\omega_3 = ddd$。

对于 $\omega_1 = dda$，有 $s_0 \xrightarrow{d/1} s_4 \xrightarrow{d/0} s_4 \xrightarrow{a/0} s_2$，响应为 100，

$s_7 \xrightarrow{d/1} s_5 \xrightarrow{d/0} s_7 \xrightarrow{a/1} s_1$，响应为 101。

对于 $\omega_2 = ddb$，有

$s_0 \xrightarrow{d/1} s_4 \xrightarrow{d/0} s_4 \xrightarrow{b/1} s_5$，响应为 101，

$s_7 \xrightarrow{d/1} s_5 \xrightarrow{d/0} s_7 \xrightarrow{b/0} s_2$，响应为 100。

对于 $\omega_3 = ddd$，有

$s_0 \xrightarrow{d/1} s_4 \xrightarrow{d/0} s_4 \xrightarrow{d/0} s_4$，响应为 100，

$s_7 \xrightarrow{d/1} s_5 \xrightarrow{d/0} s_7 \xrightarrow{d/1} s_5$，响应为 101。

6. 证明如果 $P_k \neq P$，则 $|P| \geqslant k+2$。

证明：因 $P_k \neq P$，所以 $P_k \neq P_{k+1}$，从而 $|P_{k+1}| \geqslant |P_k| + 1 \geqslant k+2$，可得 $|P| \geqslant |P_{k+1}| \geqslant k+2$。

8－6　习题

1. 给定有限状态接收器，$M = (Q, S, \delta, I, F)$ 的状态图如图 8－22(a)、(b) 和 (c) 所示，分别写出 Q, S, δ, I, F，说明他们是确定的还是不确定的。

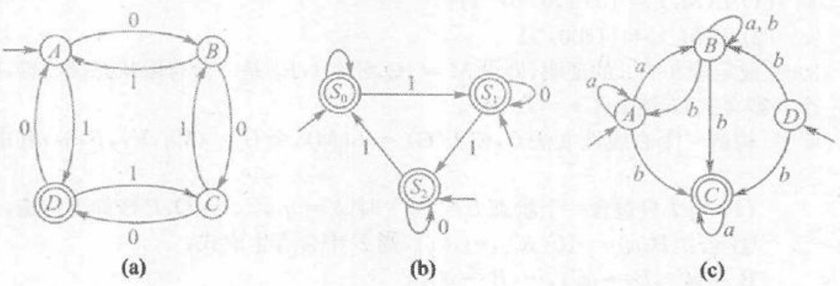


图 8－22

解：a) $Q = \{A, B, C, D\}, S = \{0, 1\}$，

$I = \{A\}, F = \{D\}$，

$\delta(A,0) = \{B\}, \delta(A,1) = \{D\}$，

$\delta(B,0) = \{C\}, \delta(B,1) = \{A\}$，

$\delta(C,0) = \{D\}, \delta(C,1) = \{B\}$，

$\delta(D,0) = \{A\}, \delta(D,1) = \{C\}$，

M 是确定的。

b) $Q = \{s_0, s_1, s_2\}, S = \{0, 1\}$，

$I = \{s_0, s_1, s_2\}, F = \{s_0, s_1, s_2\}$,

$\delta(s_0, 0) = \{s_0\}, \delta(s_0, 1) = \{s_1\}$

$\delta(s_1, 0) = \{s_1\}, \delta(s_1, 1) = \{s_2\}$

$\delta(s_2, 0) = \{s_2\}, \delta(s_2, 1) = \{s_0\}$

M 是确定的。

c) $Q = \{A, B, C, D\}, S = \{a, b\}$,

$L = \{A, D\}, F = \{C\}$,

$\delta(A, a) = \{A, B\}, \delta(A, b) = \{C\}$,

$\delta(B, a) = \{B\}, \delta(B, b) = \{A, B, C\}$,

$\delta(C, a) = \{C\}, \delta(C, b) = \varnothing$,

$\delta(D, a) = \varnothing, \delta(D, b) = \{B, C\}$,

M 是不确定的。

2. 写出图 8－23(a) 和(b) 有限状态接收器接受的语言。

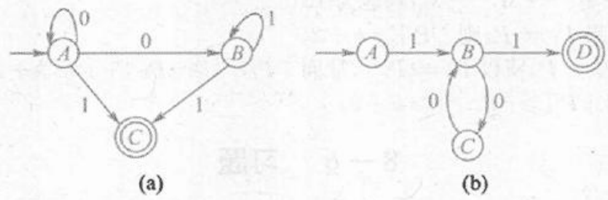


图 8－23

解：(1) $L(M_1) = \{0^*1, 0^*01^*1\}$。

(2) $L(M_2) = \{1(00)^*1\}$。

3. 完成定理8-6.3的证明。即设 $M = \{Q, S, \delta, I, F\}$ 是一台有限状态接收器，则存在一个 3 型文法 G，使 $L(G) = L(M)$。

证明：构造一个右线性文法 G，使 $L(G) = L(M)$，令 $G = (V_N, V_T, P, \delta)$，其中 $V_T = S$。

(1) 当 I 只包含一个状态 $I = \{q_I\}$ 时，$\delta = q_I, V_N = Q, P$ 按如下构造：

① 若 $\delta(B, a) = \{C_1, C_2, \cdots, C_k\}$，则 P 中含有生成式：

$B \to aC_1, B \to aC_2, \cdots, B \to aC_k$。

② 若 $C_i \in \delta(B, a)$ 且 $C_i \in F$，则 P 中含生成式：$B \to a$。

③ 若 $I \cap F \neq \varnothing$，则 P 中含生成式：$\delta \to \lambda$。

(2) 当 I 包含多个状态时，增加一个不在 Q 中的字母 σ，作 G 的初始符，$V_N = Q \cup \{\sigma\}$。P 的构造与上面类似，同时再增加生成式：$\sigma \to A$，其中 $A \in I$。

由上述方法构造的文法，因包含 $\sigma \to A$，还不是右线性文法，可以删去生成式 $\sigma \to A$，且在剩下的生成式中，将所出现生成式左端的初态 A 用 σ 代替。代替后，如果生成式右端还有 A，则保留左端为 A 的原生成式。

下面证明 $L(G) = L(M)$。

设 $\omega \in L(G), \omega \neq \lambda, \omega = a_1a_2\cdots a_k \in V_T^+$，在 $L(G)$ 中有某个非终结符序列

$B_1,B_2,\cdots,B_{k-1}$,使 $\sigma\Rightarrow a_1B_1\Rightarrow a_1a_2B_2\Rightarrow\cdots\Rightarrow a_1a_2\cdots a_{k-1}B_{k-1}\Rightarrow a_1a_2\cdots a_k$,即有生成式:$\sigma\rightarrow a_1B_1,B_1\rightarrow a_2B_2,\cdots,B_{k-2}\rightarrow a_{k-1}B_{k-1},B_{k-1}\rightarrow a_k$。由 P 的构造可知,$B_1\in\delta(\sigma,a_1),B_2\in\delta(B_1,a_2),\cdots,B_{k-1}\in\delta(B_{k-2},a_{k-1}),B\in\delta(B_{k-1},a_k)$ 且 $B\in F$。即 σ 的 ω-后继在终态集 F 中,故 $\omega\in L(M)$。

设 $\omega\in L(M)$,当 $\omega=\lambda$,则 P 中含有生成 $\sigma\rightarrow\lambda,I\cap F\neq\emptyset,\lambda\in L(M)$。

综上,$L(G)\subseteq L(M)$。

反之,设 $\omega=a_1a_2\cdots a_k\in L(M),k\geqslant 1$,则存在状态序列 $\sigma,Q_1,Q_2,\cdots Q_{k-1}$,使得 $Q_1\in\delta(\sigma,a_1),Q_2\in\delta(Q_1,a_2),\cdots,Q_{k-1}\in\delta(Q_{k-2},a_{k-1}),A\in\delta(Q_{k-1},a_k)$ 且 $A\in F$。故 P 中有生成式:$\sigma\rightarrow a_1Q_1,Q_1\rightarrow a_2Q_2,\cdots,Q_{k-2}\rightarrow a_{k-1}Q_{k-1},Q_{k-1}\rightarrow a_k$,因此,$\sigma\Rightarrow a_1Q_1\Rightarrow a_1a_2Q_2\Rightarrow\cdots\Rightarrow a_1a_2\cdots a_{k-1}Q_{k-1}\Rightarrow a_1a_2\cdots a_{k-1}a_k,\omega\in L(G)$,

若 $\omega=\lambda\in L(M)$,则 $\sigma\in F,I\cap F\neq\emptyset,P$ 中有生成式 $\sigma\rightarrow\lambda,\lambda\in L(G)$。

所以 $L(M)\subseteq L(G)$

即 $L(G)=L(M)$。

4. 对于图 8－24 所示的有限状态接收器 M,构造文法 G,使 $L(G)=L(M)$。

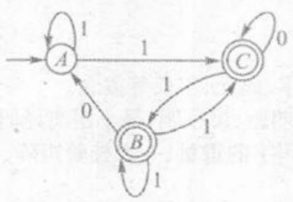


图 8－24

解:$G=(\{A,B,C\},\{0,1\},P,A)$,其中 P 为:

$A\rightarrow 1A,A\rightarrow 1C,A\rightarrow 1,B\rightarrow 0A,B\rightarrow 1B,B\rightarrow 1C,B\rightarrow 1,C\rightarrow 0C,C\rightarrow 1B,C\rightarrow 0,C\rightarrow 1$。

5. 给定正则文法 $G=(\{0,1\},\{\sigma,A,B\},P,\sigma)$,其中 P:$\sigma\rightarrow 1A,A\rightarrow 1B,B\rightarrow 1B,B\rightarrow 0\sigma,B\rightarrow 0$

试描述 $L(G)$ 并给出接受该语言的有限状态接收器。

解:$L(G)=\{(111^*0)^k\mid k\geqslant 1\}$。

接受该语言的有限状态接收器为 $M=\{\{\sigma,A,B,C\},\{0,1\},\delta,\{\sigma\},\{C\}\}$,

其中 δ 为:

$\delta(\sigma,1)=\{A\},\delta(\sigma,0)=\emptyset$,

$\delta(A,1)=\{B\},\delta(A,0)=\emptyset$,

$\delta(B,1)=\{B\},\delta(B,0)=\{\sigma,C\}$,

$\delta(C,1)=\emptyset,\delta(C,0)=\emptyset$。