本章教材习题全解

4－1 习题

1. 下列函数中哪些是入射的，满射的或双射的。

(a) $f:I\to I, f(j)=j(\mathrm{mod}3)$。

(b) $f:N\to N, f(j)=\begin{cases}1, & j\text{是奇数}\\0, & j\text{是偶数}\end{cases}$。

(c) $f:N\to\{0,1\}, f(j)=\begin{cases}0, & j\text{是奇数}\\1, & j\text{是偶数}\end{cases}$。

(d) $f:I\to N, f(i)=|2i|+1$。

(e) $f:R\to R, f(r)=2r-15$。

解：(a) 不是入射也不是满射。

(b) 不是入射也不是满射。

(c) 不是入射，是满射。

(d) 不是入射也不是满射。

(e) 是双射。

2. 令 $f:A\to B$，这里 $C\subseteq A$，证明：

$$f(A)-f(C)\subseteq f(A-C)$$

证明：设任意的 $y\in f(A)-f(C)$。则存在某个 $x\in A$，使得 $f(x)=y$，但对任意的 $z\in C$ 都有 $y\neq f(z)$，因此 $x\in A-C$，又因 $y=f(x)$，所以 $y\in f(A-C)$，由 y 的任意性可得 $f(A)-f(C)\subseteq f(A-C)$。

3. 假设 f 和 g 是函数，且有 $f\subseteq g$ 和 $\mathrm{dom}\,g\subseteq\mathrm{dom}\,f$，证明：$f=g$。

证明：证法一：证明 $f=g$，只需证明 $f\subseteq g$ 且 $g\subseteq f$ 即可。

任取 $\langle x,g(x)\rangle\in g$，因为 $\mathrm{dom}\,g\subseteq\mathrm{dom}\,f$，所以 $x\in\mathrm{dom}\,f$，则有 $\langle x,f(x)\rangle\in f$，又因为 $f\subseteq g$，即 $\langle x,f(x)\rangle\in g$。由函数定义可知 $f(x)=g(x)$，所以 $\langle x,g(x)\rangle=\langle x,f(x)\rangle\in f$，由 $\langle x,g(x)\rangle$ 的任意性知 $g\subseteq f$；又因为 $f\subseteq g$，所以 $f=g$。

证法二：函数相等的定义。

因为，$f=\{\langle x,f(x)\rangle\mid x\in\mathrm{dom}\,f\}$，$g=\{\langle x,g(x)\rangle\mid x\in\mathrm{dom}\,g\}$。

$f\subseteq g\Leftrightarrow$ 对任意 $\langle x,f(x)\rangle\in f, x\in\mathrm{dom}\,f$，有 $\langle x,f(x)\rangle\in g, x\in\mathrm{dom}\,f\Leftrightarrow(\langle x,f(x)\rangle\in f\to\langle x,f(x)\rangle\in g)$ 且 $(x\in\mathrm{dom}\,f\to x\in\mathrm{dom}\,g)\Leftrightarrow\mathrm{dom}\,f\subseteq\mathrm{dom}\,g$ 且对所有 $x\in\mathrm{dom}\,f, f(x)=g(x)$，又因为 $\mathrm{dom}\,g\subseteq\mathrm{dom}\,f$，所以 $\mathrm{dom}\,g=\mathrm{dom}\,f$，且 $f(x)=g(x)$。

即 $f=\{\langle x,f(x)\mid x\in\mathrm{dom}\,f\rangle\}=\{\langle x,g(x)\rangle\mid x\in\mathrm{dom}\,g\}=g$。

注意：函数实际上是一种满足一定条件的二元关系，可用集合相等的方法来

证明，也可以用函数相等的定义来证明。

4. 假设 f 和 g 是函数，证明：$f\cap g$ 也是函数。

证明：设 $f=\{\langle x,f(x)\rangle \mid x\in \mathrm{dom} f\}$，$g=\{\langle x,g(x) \mid x\in \mathrm{dom} g\rangle\}$，

则 $f\cap g=\{\langle x,y\rangle \mid x\in \mathrm{dom} f\cap \mathrm{dom} g \wedge y=f(x)=g(x)\}$，

$\mathrm{dom}(f\cap g)=\{x \mid x\in \mathrm{dom} f\cap \mathrm{dom} g, f(x)=g(x)\}$，

若 $y_1\neq y_2$，因 f 是函数，所以存在 $x_1\neq x_2$，使得 $y_1=f(x_1)$，$y_2=f(x_2)$。

所以 $f\cap g$ 是一个函数。

5. 假定 X 和 Y 是有穷集合，找出从 X 到 Y 存在入射的必要条件是什么？

解：若 X 和 Y 是有穷集合，X 到 Y 存在入射的必要条件是

①$|X|\leqslant|Y|$，②$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$。

6. 设 A 和 B 是有穷集合，有多少不同的入射函数和多少不同的双射函数。

解：A 和 B 是有穷集合，设 $|A|=m$，$|B|=n$，要使映射 $f:A\to B$ 为入射，必有 $|A|\leqslant|B|$，即 $m\leqslant n$，在 B 中任选出 m 个元素的任一全排列都形成 A 到 B 的不同入射，故从 A 到 B 的不同入射共有 $C_n^m\cdot m!$ 个。

若从 A 到 B 存在双射函数，则 $|A|=|B|$，此时集合 B 中元素的任一全排列都形成 A 到 B 的双射，故不同的双射有 $m!$ 个。

7. 试证明 $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$，$f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$。

证明：a) 对任意 $y\in f(A\cup B)$，存在 $x\in A\cup B$，使 $f(x)=y$，即当 $x\in A\vee x\in B$ 时有 $y=f(x)$，故 $f(x)\in f(A)\vee f(x)\in f(B)$，即 $y\in f(A)\cup f(B)$，所以 $f(A\cup B)\subseteq f(A)\cup f(B)$。

反之，对任意 $y\in f(A)\cup f(B)$，则 $y\in f(A)\vee y\in f(B)$，则存在 $x\in A\vee x\in B$，使 $y=f(x)$，即 $x\in(A\cup B)$，使 $f(x)=y$，故 $y\in f(A\cup B)$，所以 $f(A)\cup f(B)\subseteq f(A\cup B)$。

综上可知 $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$。

b) 对任意 $y\in f(A\cap B)$，存在 $x\in A\cap B$，使 $f(x)=y$，即 $x\in A\wedge x\in B$ 时有 $y=f(x)$，故 $f(x)\in f(A)\wedge f(x)\in f(B)$，即 $y\in f(A)\cap f(B)$，所以 $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$。

8. 假设 $f:A\to B$ 并定义一个函数 $G:B\to\mathscr{P}(A)$，对于 $b\in B$，有

$$G(b)=\{x\in A \mid f(x)=b\}$$

证明：如果 f 是 A 到 B 的满映射，则 G 是入射的，其逆成立吗？

证明：如果 f 是 A 到 B 的满映射，对每个 b，至少存在一个 $x\in A$，使得 $f(x)=b$，故 G 的定义域为 B。

对任意 $b_1,b_2\in B$ 且 $b_1\neq b_2$，$G(b_1)=\{x\in A \mid f(x)=b_1\}$，

$G(b_2)=\{y\in A \mid f(y)=b_2\}$，

因为 $b_1\neq b_2$，所以 $f(x)\neq f(y)$，因为 f 是函数，所以 $x\neq y$，故 $G(b_1)\neq G(b_2)$。

所以 G 是入射。

其逆不真。例 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{x,y,z\}$，则 $f:A\to B$，$f(a)=f(b)=x$，$f(c)=y$，$G:B\to\mathscr{P}(A)$，$G(x)=\{a,b\}$，$G(y)=\{c\}$，$G(z)=\varnothing$。

G是入射，但f不是满射。

4—2　习题

1. 设$X=\{1,2,3,4\}$，确定出这样的函数$f:X\to X$使得$f\neq I_X$，并且是入射的，求出$f\circ f=f^2$，$f^3=f\circ f^2$，f^{-1}和$f\circ f^{-1}$。是否能够找出另外一个入射函数$g:X\to X$使得$g\neq I_X$，但是$g\circ g=I_X$。

解：$\{1,2,3,4\}$中元素的除排列1，2，3，4外的任一排列均满足要求。

例如：$f=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,1\rangle\}$，

$f^2=\{\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,2\rangle\}$，

$f^3=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$，

$f^{-1}=\{\langle 2,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$，

$f\circ f^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$，

$g=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,3\rangle\}$，

$g\circ g=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$。

2. 设$f:A\to B$，$B'\subseteq B$，$A'\subseteq A$，$f^{-1}(B')=\{x\mid f(x)\in B'\}$，证明：

a) $f(f^{-1}(B'))\subseteq B'$。

b) 如果f是满射的，那么$f(f^{-1}(B'))=B'$。

c) $f^{-1}(f(A'))\supseteq A'$。

d) 如果f是入射的，那么$f^{-1}(f(A'))=A'$。

证明：a) 对任意元素$y\in f(f^{-1}(B'))$，必存在$x\in f^{-1}(B')$，使得$y=f(x)$。因为$f^{-1}(B')=\{x\mid f(x)\in B'\}$，所以$f(x)\in B'$，即$y\in B'$，所以$f(f^{-1}(B'))\subseteq B'$。

b) 对任意元素$y\in B'$，因f是满射，所以必存在$x\in f^{-1}(B')$，使得$f(x)=y$。因为$x\in f^{-1}(B')$，故$y=f(x)\in f(f^{-1}(B'))$，所以$B'\subseteq f(f^{-1}(B'))$。又由$a$)可知$f(f^{-1}(B'))\subseteq B'$，所以$f(f^{-1}(B'))=B'$。

c) 对$x\in A'$，$f(x)\in f(A')$，因为$A'\subseteq A$，所以$f(A')\subseteq B$，由$f(x)\in f(A')$可知，$x\in f^{-1}(f(A'))$，所以$f^{-1}(f(A'))\supseteq A'$。

d) 对任意元素$x\in f^{-1}(f(A'))$，则$f(x)\in f(A')$，则存在$x'\in A'$，使得$f(x)=f(x')$，因为f是入射，故$x=x'$，即$x\in A'$，则$f^{-1}(f(A'))\subseteq A'$，又由$c$)知$f^{-1}(f(A'))\supseteq A'$，所以$f^{-1}(f(A'))=A'$。

3. 设$f\circ g$是复合函数，证明：

a) 如果$f\circ g$是满射的，那么f是满射的。

b) 如果$f\circ g$是入射的，那么g是入射的。

c) 如果$f\circ g$是双射的，那么f是满射的而g是入射的。

证明：设$g:X\to Y$，$f:Y\to Z$，则$f\circ g$是X到Z的复合函数，且$f\circ g=f(g(x))$。

a) 因为$f\circ g$是满射，故对任意$z\in Z$，必有$x\in X$，使得$f\circ g(x)=z$，即$f(g(x))=z$，所以存在$y\in Y$，使得$y=g(x)$，且$f(y)=z$，因此，由满射定义可得f是满射的。

b) 因为$f\circ g$是入射的，故对任意的$x_1,x_2\in X$，若$x_1\neq x_2$，则$f\circ g(x_1)\neq$

$f\circ g(x_2)$，即 $f(g(x_1))\neq f(g(x_2))$，因 f 是函数，所以 $g(x_1)\neq g(x_2)$，由入射定义可得 g 是入射。

c) 因为 $f\circ g$ 是双射的，故 $f\circ g$ 是满射和入射的，由 a)，b) 可知 f 是满射的，g 是入射的。

4. 试证：若 $f:A\to B,g:B\to A$，且 $g\circ f=I_A,f\circ g=I_B$，则 $g=f^{-1}$，且 $f=g^{-1}$。

证明：因为 $g\circ f=I_A$，故对任意 $a\in A$，有 $g\circ f(a)=g(f(a))=a$，则存在 $b\in B$，使得 $f(a)=b,g(b)=a$，因此 g 是满射的，对任意 $a_1,a_2\in A$，且 $a_1\neq a_2$，有 $g\circ f(a_1)=g(f(a_1))=a_1,g\circ f(a_2)=g(f(a_2))=a_2$，即 $g(f(a_1))\neq g(f(a_2))$，因为 g 是函数，所以 $f(a_1)\neq f(a_2)$，即 f 是入射的。

因为 $f\circ g=I_B$，同理可证 f 是满射的，g 是入射的，即 f 和 g 都是双射的。

对任意 $\langle a,b\rangle\in f$，因为 $\langle a,a\rangle\in I_A$，而 $g\circ f=I_A$，则必有某个 $c\in B$，使得 $\langle a,c\rangle\in f\wedge\langle c,a\rangle\in g$。由 $\langle a,b\rangle\in f\wedge\langle a,c\rangle\in f\Rightarrow b=c$。因此 $\langle b,a\rangle\in g$。

反之，若 $\langle b,a\rangle\in g$，因为 $\langle b,b\rangle\in I_B$，而 $f\circ g=I_B$，则存在 $d\in A$，有 $\langle b,d\rangle\in g\wedge\langle d,b\rangle\in f$，由 $\langle b,a\rangle\in g\wedge\langle b,d\rangle\in g\Rightarrow a=d$，因此 $\langle a,b\rangle\in f$。

综上可得 $\langle a,b\rangle\in f$ 当且仅当 $\langle b,a\rangle\in g$。因此 $g=f^{-1}$ 且 $f=g^{-1}$。

注意：证明 $g=f^{-1}$，首先要证明 f 是 A 从 B 到的双射函数。再证明 $g=f^{c}=f^{-1}$。

5. 证明：若 $(g\circ f)^{-1}$ 是一个函数，则 f 和 g 是入射不一定成立。

证明：设 $f:A\to B,g:B\to C,A=\{a_1,a_2\},B=\{b_1,b_2,b_3\},C=\{c_1,c_2\}$，

$f=\{\langle a_1,b_1\rangle,\langle a_2,b_2\rangle\}$，

$g=\{\langle b_1,c_1\rangle,\langle b_2,c_2\rangle,\langle b_3,c_2\rangle\}$，

$g\circ f=\{\langle a_1,c_1\rangle,\langle a_2,c_2\rangle\}$，

$(g\circ f)^{-1}=\{\langle c_1,a_1\rangle,\langle c_2,a_2\rangle\}$，

由此可见 $(g\circ f)^{-1}$ 是一个函数，但 g 不是入射。

6. 一个函数 $g:S\to T$ 是称作函数 $f:T\to S$ 的左逆，若对每个 $t\in T,g(f(t))=t$，若 g 是 f 的左逆，则 f 是 g 的右逆。

a) $f:T\to S$ 有一个左逆，当且仅当它是入射的。

b) $f:T\to S$ 有一个右逆，当且仅当它是满射的。

c) 若 $g:S\to T$ 是 $f:T\to S$ 的左逆和右逆，则是 f 一个双射，且 $g=f^{-1}$。

证明：a) 若 f 存在一个左逆 g，则 $g\circ f(t)=t$，所以 $g\circ f$ 是入射的，所以 f 是入射的。

反之，若 f 是入射，下面构造函数 $g:S\to T$。

选择任一元素 $c\in T$，定义 g 如下：

$$g(s)=\begin{cases}t, & 若\ s\in f(T)，且\ f(t)=s\\ c, & 若\ s\notin f(T)\end{cases}$$

对每个变元 $s\in S,g(s)$ 有唯一的值，所以 g 是函数，且 $g(f(t))=g(s)=t$，因此 g 是 f 的左逆，即若 f 是入射的，必能构造函数 g 使得 g 为 f 的左逆。

b) 若 f 存在一个右逆 g，则 $f\circ g(s)=s$，对每个 $s\in S$，因为 g 是函数，必有 $g(s)=t$，且 $f(t)=s$，故 f 是满射的。

反之，若 f 是满射的，即对每个 $s\in S$，则至少存在一个 $t\in T$ 使 $f(t)=s$。现

构造 g 如下：

$$g(s)=\begin{cases}t, & 若仅有一个\ t\in T,使\ f(t)=s\\ t_0, & 若有\ t_0,t_1,\cdots,t_k\in T,使\ f(t_0)=f(t_1)=\cdots=f(t_k)=s\end{cases}$$

这样，对每个 $s\in S$，g 只有一个值，所以 g 是函数，且有 $f(g(s))=s$，因此 g 是 f 的右逆。

c) 由 $a)$，$b)$ 可得 g 是 f 的左逆和右逆，则 f 是满射和入射，故 f 是双射，由逆函数定义证得 $g=f^{-1}$。

4—3 习题

1. 试证明，对于所有的 $x\in E$，下列各式成立。

a) $\psi_A(x)\leqslant\psi_B(x)$，当且仅当 $A\subseteq B$。

b) $\psi_{A\cap B}(x)=\min(\psi_A(x),\psi_B(x))$。

c) $\psi_{A\cup B}(x)=\max(\psi_A(x),\psi_B(x))$。

d) $\psi_{A-B}(x)=\psi_A(x)-\psi_{A\cap B}(x)$。

证明：a) 设 $\psi_A(x)\leqslant\psi_B(x)$，对所有的 $x\in A$，$\psi_A(x)=1$。因为 $\psi_A(x)\leqslant\psi_B(x)$，故 $\psi_B(x)=1$，得 $x\in B$，所以 $A\subseteq B$。

反之，若 $A\subseteq B$，对任意 x 有下列情况：

①$x\in A$，且 $x\in B$，$\psi_A(x)=\psi_B(x)=1$，

②$x\notin A$，且 $\begin{cases}x\in B,\psi_A(x)=0,\psi_B(x)=1\\ x\notin B,\psi_A(x)=0,\psi_B(x)=0\end{cases}$，

综上所述，$\psi_A(x)\leqslant\psi_B(x)$ 当且仅当 $A\subseteq B$。

b) 对所有 $x\in E$，有下列情况：

①$x\in A\cap B\Rightarrow x\in A\wedge x\in B\Rightarrow\psi_A(x)=1\wedge\psi_B(x)=1$，

所以 $\psi_{A\cap B}(x)=\min(\psi_A(x),\psi_B(x))=1$。

②$x\notin A\cap B\Rightarrow x\notin A\vee x\notin B\Rightarrow\psi_A(x)=0\vee\psi_B(x)=0$，

即 $\psi_{A\cap B}(x)=\min(\psi_A(x),\psi_B(x))=0$，所以 $\psi_{A\cap B}(x)=\min(\psi_A(x),\psi_B(x))$。

c) 对所有 $x\in E$，有下列情况：

①$x\in A\cup B\Rightarrow x\in A\vee x\in B\Rightarrow\psi_A(x)=1\vee\psi_B(x)=1$，所以 $\psi_{A\cup B}(x)=\max(\psi_A(x),\psi_B(x))=1$。

②$x\notin A\cup B\Rightarrow x\notin A\wedge x\notin B\Rightarrow\psi_A(x)=0\wedge\psi_B(x)=0$，所以 $\psi_{A\cup B}=\max(\psi_A(x),\psi_B(x))=0$，总之，$\psi_{A\cup B}(x)=\max(\psi_a(x),\psi_B(x))$。

d) $\psi_{A-B}(x)=\psi_{A\cap\sim B}(x)=\psi_A(x)*\psi_{\sim B}(x)=\psi_A(x)*(1-\psi_B(x))$

$=\psi_A(x)-\psi_A(x)*\psi_B(x)=\psi_A(x)-\psi_{A\cap B}(x)$。

2. 设 $E=[0,1]$，$A=\left[\frac{1}{2},1\right]$，画出 ψ_A 的图。

解：$\psi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\\ 0, & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\end{cases}$，其图如图 4—1 所示。

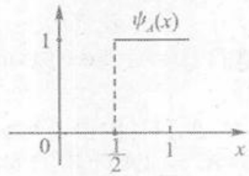

图 4－1

3. 设 $S=(A\cap B)\cup(\sim A\cap C)\cup(B\cap C)$，这里 A,B,C 是全集 E 的子集，对于 $\psi_A(x),\psi_B(x)$ 和 $\psi_C(x)$ 的值的所有可能组合，试求出 $\psi_S(x)$ 的值，并构成集的成员表。

解：成员表如表 4－1 所示。

表 4－1

$\psi_A(x)$	$\psi_B(x)$	$\psi_C(x)$	$\psi_{A\cap B}(x)$	$\psi_{\sim A\cap C}(x)$	$\psi_{B\cap C}(x)$	S
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	1	1

4. 设 $\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}$ 是 E 上的两个模糊子集，它们的并集 $\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$ 和交集 $\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}$ 都仍然是模糊子集，它们的隶属函数分别定义为：

$\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}\Leftrightarrow\mu_{\underset{\sim}{C}}=\max(\mu_{\underset{\sim}{A}},\mu_{\underset{\sim}{B}})$，

$\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}\Leftrightarrow\mu_{\underset{\sim}{C}}=\min(\mu_{\underset{\sim}{A}},\mu_{\underset{\sim}{B}})$。

证明：模糊集的 $\cap$ 和 $\cup$ 运算满足幂等律、交换律、结合律、吸收律、分配律、德·摩根律等。

证明：1）幂等律：设 $\underset{\sim}{A}$ 为 E 上的任意模糊子集：$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{C}\Leftrightarrow\mu_{\underset{\sim}{C}}=\max(\mu_{\underset{\sim}{A}},\mu_{\underset{\sim}{A}})=\mu_{\underset{\sim}{A}}$，所以 $\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}$。

$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{C}\Leftrightarrow\mu_{\underset{\sim}{C}}=\min(\mu_{\underset{\sim}{A}},\mu_{\underset{\sim}{A}})=\mu_{\underset{\sim}{A}}$，所以 $\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}$。

2）交换律：设 $\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}\Leftrightarrow\mu_{\underset{\sim}{C}}=\max(\mu_{\underset{\sim}{A}},\mu_{\underset{\sim}{B}})=\max(\mu_{\underset{\sim}{B}},\mu_{\underset{\sim}{A}})\Leftrightarrow\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{C}$，所以 $\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{A}$，

同理，设 $\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}\Leftrightarrow\mu_{\underset{\sim}{C}}=\min(\mu_{\underset{\sim}{A}},\mu_{\underset{\sim}{B}})=\min(\mu_{\underset{\sim}{B}},\mu_{\underset{\sim}{A}})\Leftrightarrow\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{C}$，

所以 $\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{A}$。

3) 吸收律：设 $\utilde{C}=\utilde{A}\cap(\utilde{A}\cup\utilde{B})\Leftrightarrow\mu_{\utilde{C}}=\min(\mu_{\utilde{A}},\max(\mu_{\utilde{A}},\mu_{\utilde{B}}))=\mu_{\utilde{A}}$，所以 $\utilde{A}\cap(\utilde{A}\cup\utilde{B})=\utilde{A}$。

同理，设 $\utilde{C}=\utilde{A}\cup(\utilde{A}\cap\utilde{B})\Leftrightarrow=\max(\mu_{\utilde{A}},\min(\mu_{\utilde{A}},\mu_{\utilde{B}}))=\mu_{\utilde{A}}$，所以 $\utilde{A}\cup(\utilde{A}\cap\utilde{B})=\utilde{A}$。

4) 结合律：设 $\utilde{C}'=\utilde{A}\cap(\utilde{B}\cap\utilde{C})\Leftrightarrow\mu_{\utilde{C}'}=\min(\mu_{\utilde{A}},\min(\mu_{\utilde{B}},\mu_{\utilde{C}}))=\min(\min(\mu_{\utilde{A}},\mu_{\utilde{B}}),\mu_{\utilde{C}})\Leftrightarrow\utilde{C}'=(\utilde{A}\cap\utilde{B})\cap\utilde{C}$，所以 $\utilde{A}\cap(\utilde{B}\cap\utilde{C})=(\utilde{A}\cap\utilde{B})\cap\utilde{C}$。

同理 $\utilde{C}'=\utilde{A}\cup(\utilde{B}\cup\utilde{C})\Leftrightarrow\mu_{\utilde{C}'}=\max(\mu_{\utilde{A}},\max(\mu_{\utilde{B}},\mu_{\utilde{C}}))=\max(\max(\mu_{\utilde{A}},\mu_{\utilde{B}}),\mu_{\utilde{C}})\Leftrightarrow\utilde{C}'=(\utilde{A}\cup\utilde{B})\cup\utilde{C}$，所以 $\utilde{A}\cup(\utilde{B}\cup\utilde{C})=(\utilde{A}\cup\utilde{B})\cup\utilde{C}$。

5) 分配律：设 $\utilde{C}'=\utilde{A}\cup(\utilde{B}\cap\utilde{C})\Leftrightarrow\mu_{\utilde{C}'}=\max(\mu_{\utilde{A}},\min(\mu_{\utilde{B}},\mu_{\utilde{C}}))=\min(\max(\mu_{\utilde{A}},\mu_{\utilde{B}}),\max(\mu_{\utilde{A}},\mu_{\utilde{C}}))\Leftrightarrow\utilde{C}'=(\utilde{A}\cup\utilde{B})\cap(\utilde{A}\cup\utilde{C})$，所以 $\utilde{A}\cup(\utilde{B}\cap\utilde{C})=(\utilde{A}\cup\utilde{B})\cap(\utilde{A}\cup\utilde{C})$。

同理，设

$\utilde{C}'=\utilde{A}\cap(\utilde{B}\cup\utilde{C})\Leftrightarrow\mu_{\utilde{C}'}=\min(\mu_{\utilde{A}},\max(\mu_{\utilde{B}},\mu_{\utilde{C}}))=\max(\min(\mu_{\utilde{A}},\mu_{\utilde{B}}),\min(\mu_{\utilde{A}},\mu_{\utilde{C}}))\Leftrightarrow\utilde{C}'=(\utilde{A}\cap\utilde{B})\cup(\utilde{A}\cap\utilde{C})$，所以 $\utilde{A}\cap(\utilde{B}\cup\utilde{C})=(\utilde{A}\cap\utilde{B})\cup(\utilde{A}\cap\utilde{C})$。

6) 德·摩根律：设 $\utilde{C}=\sim(\utilde{A}\cup\utilde{B})\Leftrightarrow\mu_{\utilde{C}}=1-\max(\mu_{\utilde{A}},\mu_{\utilde{B}})=\min(1-\mu_{\utilde{A}},1-\mu_{\utilde{B}})\Leftrightarrow\sim\utilde{A}\cap\sim\utilde{B}=\utilde{C}$，即 $\sim(\utilde{A}\cup\utilde{B})=\sim\utilde{A}\cap\sim\utilde{B}$。

同理可证 $\sim(\utilde{A}\cap\utilde{B})=\sim\utilde{A}\cup\sim\utilde{B}$。

4－4　习题

1. 对下述每组集合 A 和 B，构造一个从 A 到 B 的双射函数，说明 A 和 B 具有相同的势。

a) $A=(0,1),B=(0,2)$。

b) $A=N,B=N\times N$。

c) $A=I\times I,B=N$。

d) $A=R,B=(0,\infty)$。

e) $A=[0,1),B=(\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$。

解：a) 作双射，定义 $f:A\to B$，使 $f(x)=2x,x\in A$。

b) 设 $A=\{0,1,2,3,\cdots\}$，其对应 B 按序偶次序可记为：

$B=\{\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 0,3\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,0\rangle,\cdots\}$

c) 令 $g:I\times I\to N\times N,g(i,j)=(m,n),m=\begin{cases}-2i, & i\leqslant 0,且 i\in I\\ 2i-1, & i\in I^{+}\end{cases},n=\begin{cases}-2j, & j\leqslant 0,且 j\in I\\ 2j-1, & j\in I^{+}\end{cases}$，则 g 是双射，令 $f:N\times N\to N,f(m,n)=\frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+m$，$f$ 为双射。

所以，令 $h = I\times I \to N, h = f\circ g$，则 h 为从 $I\times I$ 到 N 的双射函数。

d) 设 $f:A\to B, f(x) = \tan\dfrac{\arctan x + \dfrac{\pi}{2}}{2}, x\in A$。

e) 设 $f:A\to B, f(x) = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}, x\in[0,1)$。

2. 证明：$(0,1)$ 与 $[0,1)$ 等势，$[0,1)$ 与 $[0,1]$ 等势。

证明：a) 设 $A = \{\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots\}$。作 $f:(0,1)\to[0,1)$ 如下：

$$\begin{cases} f(\dfrac{1}{2}) = 0 \\ f(\dfrac{1}{n}) = \dfrac{1}{n-1}, \dfrac{1}{n}\in A \wedge n > 2 \\ f(x) = x, x\in(0,1) - A \end{cases}$$

显然 f 是一个双射，因此 $(0,1)$ 与 $[0,1)$ 等势。

b) 设 $A = \{0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\cdots\}$，作 $f:[0,1)\to[0,1]$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(\dfrac{1}{n}) = \dfrac{1}{n-1}, n > 1, \dfrac{1}{n}\in A \\ f(x) = x, x\in[0,1) - A \end{cases}$$

显然 f 是一个双射，因此 $[0,1)$ 与 $[0,1]$ 等势。

3. 若 $X_1\sim X_2$ 和 $Y_1\sim Y_2$，且 $X_1\cap Y_1 = X_2\cap Y_2 = \varnothing$，证明：$X_1\cup Y_1\sim X_2\cup Y_2$。

证明：因为 $X_1\sim X_2, Y_1\sim Y_2$，所以均存在双射 $f:X_1\to X_2, g:Y_1\to Y_2$，设 $f\cup g = h$，作 $h:X_1\cup Y_1\to X_2\cup Y_2$，现证 h 是双射。

对任意 $x\in X_1\cup Y_1$，必有 $x\in X_1$ 或 $x\in Y_1$，但 $X_1\cap Y_1 = \varnothing$，故有 $x\in X_1$ 或 $x\in Y_1$ 中仅有一式成立。若 $x\in X_1$，则因 f 为双射，必有唯一 $y\in X_2$，使 $f(x) = y$，若 $x\in Y_1$，则因 g 为双射，必有唯一 $y\in Y_2$，使 $g(x) = y$。由 $X_2\cap Y_2 = \varnothing$，故 $f(x)\neq g(x)$。所以在 h 中，对任意 $x\in X_1\cup Y_1$，仅有唯一的 $y\in X_2\cup Y_2$，且 $x_1\neq x_2$ 时，$y_1\neq y_2$，因此 h 是入射的。

对任意 $y\in X_2\cup Y_2$，则 $y\in X_2$ 或 $y\in Y_2$，因 $X_2\cap Y_2 = \varnothing$，故 $y\in X_2$ 或 $y\in Y_2$ 且仅有一式成立。若 $y\in X_2$，因 f 是满射的，故必有 $x\in X_1$，使 $f(x) = y$，若 $y\in Y_2$，因 g 是满射，故必有 $x\in Y_1$，使 $g(x) = y$，由 $X_1\cap Y_1 = \varnothing$，故对任一 $y\in X_2\cup Y_2$，必有唯一 $x\in X_1\cup Y_1$，使 $h(x) = y$。故 h 是满射的。

综上可知，h 是双射，故 $X_1\cup Y_1\sim X_2\cup Y_2$。

4. 若 $A\sim C$ 和 $B\sim D$，证明 $A\times B\sim C\times D$。

证明：$A\sim C$ 和 $B\sim D$，因此均存在双射 $f:A\to C, g:B\to D$ 并令 $h:A\times B\to C\times D$。

对任意 $\langle a,b\rangle\in A\times B$，因 $a\in A, b\in B$，f 和 g 是双射，故均存在唯一的 $c\in C, d\in D$，使得：$c = f(a), d = g(b)$，所以存在唯一的 $\langle c,d\rangle\in C\times D$，使得 $\langle c,d\rangle = h(\langle a,b\rangle)$。所以 h 为函数。若 $\langle a_1,b_2\rangle\in A\times B, \langle a_2,b_2\rangle\in A\times B$，且 $\langle a_1,$

$b_1\rangle \neq \langle a_2, b_2\rangle$，又因 f 和 g 是双射，则 $\langle f(a_1), g(b_1)\rangle \neq \langle f(a_2), g(b_2)\rangle$，所以 h 是入射的。

对任意 $\langle c,d\rangle \in C\times D$，则 $c\in C, d\in D$，由于 f 和 g 是双射，则存在 $a\in A$，$b\in B$，使 $c=f(a)$，$d=g(b)$，即存在 $\langle a,b\rangle \in A\times B$，使得 $h(\langle a,b\rangle)=\langle c, d\rangle$，因此 h 是满射。

综上可知：h 是双射，$A\times B\sim C\times D$ 成立。

4－5　习题

1. 下列集合 A 的势是什么？

a) $A=\{\langle p,q\rangle \mid p,q$ 都是整数$\}$。

b) $A=\{\langle p,q\rangle \mid p,q$ 都是有理数$\}$。

c) A 是由所有半径为 1，圆心在 x 轴上的圆周所组成的集合。

d) A 是由实数轴上所有两两不相交的有限开区间组成的集合。

解：a) 令 $f:A\to B$，使得 $f(\langle p,q\rangle)=p/q$，则 f 为双射，所以 $A\sim B$，因为 $B=\{p/q\}$，$K[B]=\aleph_0$，所以 A 的势为 $\aleph_0$。

b) 与 a) 相同，$K[A]=\aleph_0$。

c) A 对应于 $(-\infty,\infty)$ 这个集合，所以 $K[A]=\aleph$。

d) 实数轴上所有两两不相交的有限开区间组成的集合，其势为 $\aleph$。

2. 如果 A 是不可数无穷集，B 是 A 的可数子集，则 $(A-B)\sim A$。

证明：A 是不可数无穷集，B 是 A 的可数子集，则 $A-B$ 为无穷集。若 $A-B$ 为有限集，且 B 是可数子集，则 A 为可数子集，与题设矛盾，因此 $A-B$ 为无限集，$A-B$ 必含有可数子集 D，设 $M=A-B-D$，则 $A=M\cup B\cup D$，因为 B,D 为可数集，所以 $B\cup D\sim D$，$M\sim M$，$M\cap(B\cup D)=\varnothing$，$M\cap D=\varnothing$，因此有 $M\cup D\cup B\sim M\cup D$，即 $A\sim(A-B)$。

3. 如果 A 是任意无限集，M 是一个可数集，则 $(A\cup M)\sim A$。

证明：① 若 A 是可数无限集，则 $A\cup M$ 是可数集，故 $(A\cup M)\sim A$。

② 若 A 是不可数无限集，因为 $M-(A\cap M)\subseteq M$，所以 $M-(A\cap M)$ 是可数集，但 $A\cup M$ 为不可数无限集，由题 2 可知 $(A\cup M)-(M-A\cap M)\sim(A\cup M)$，又因 $(A\cup M)-(M-A\cap M)=A$，所以 $(A\cup M)\sim A$。

4. 如果两集合 A_1 和 A_2 都是可数的，证明 $A_1\times A_2$ 也是可数的。

证明：设集合 A_1 和 A_2 为可数的，则有 $A_1=\{a_0,a_1,a_2,\cdots\}$，$A_2=\{b_0,b_1,b_2,\cdots\}$，作映象 $f:A_1\times A_2\to N\times N$ 如下：$f\langle a_m,b_n\rangle=\langle m,n\rangle$，则 f 是双射。

因为 $g:N\times N\to N$ 为双射，$g(\langle m,n\rangle)=\dfrac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+m$，

所以 $A_1\times A_2$ 是可数的。

5. 有限集 A 和可数集 B 的笛卡尔积集 $A\times B$ 是可数集。

证明：设有限集为 A，则 $A\cup N$ 是可数集，由题 4 可知 $(A\cup N)\times B$ 是可数集。但 $A\times B$ 是 $(A\cup N)\times B$ 的子集，因为可数集的任何无限子集都是可数的，故 $A\times$

B 是可数集。

6. 若 S 为无理数集，证明 $K[S]=\aleph$。

证明：设 R 为实数集，Q 为有理数集，S 为无理数集，则 Q 为可数集，S 为无限集，由题3可知：$(S\cup Q)\sim S$，又因为 $S\cup Q=R$，所以 $S\sim R$，于是 $K[S]=K[R]=\aleph$。

7. 令 $K[A]=\aleph$，$K[B]=\aleph$，$K[D]=\aleph_0$，这里 A,B,D 为互不相交集合，证明以下各式。

(a) $K[A\cup B]=\aleph$。(b) $K[A\cup D]=\aleph$。

证明：(a) 设 $g_1:\left[0,\frac{1}{2}\right]\to[0,1]$，

$$g_1(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n-2}, & 若\ x=\dfrac{1}{n},n>2,n\in N,\\ 2x, & 其他\end{cases}$$

设 $g_2:\left(\frac{1}{2},1\right)\to[0,1]$，$g_2(x)=2x-1$，

因为 $K[A]=\aleph$，$K[B]=\aleph$，所以 $A\sim\left[0,\frac{1}{2}\right]$，$B\sim\left(\frac{1}{2},1\right)$。

又因为 $A\cap B=\varnothing$，$\left[0,\frac{1}{2}\right]\cap\left(\frac{1}{2},1\right)=\varnothing$，所以 $A\cup B\sim[0,1]$，即 $K[A\cup B]=\aleph$。

(b) 因为 $K[D]=\aleph_0$，故 D 为可数集，$K[A]=\aleph$，A 为无限集，则 $A\cup D\sim A$。故 $K[A\cup D]=K[A]=\aleph$。

4－6 习题

1. 用定理 4-6.2 证明 $[0,1]$，$(0,1]$，$[0,1)$，$(0,1)$ 是等势的。

证明：① $f:[0,1]\to(0,1]$ 入射为 $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$，即 $K([0,1])\leqslant K((0,1])$，

$g:(0,1]\to[0,1]$ 入射为 $g(x)=x$，即 $K((0,1])\leqslant K([0,1])$，

由 cantor－Schroder－Bernstein 定理知：$[0,1]\sim(0,1]$。

② 作 $f:(0,1]\to[0,1)$ 入射为 $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{x}{2}$，

作 $g:[0,1)\to(0,1]$ 入射为 $g(x)=1-x$，故 $(0,1]\sim[0,1)$。

③ 作 $f:(0,1)\to[0,1)$ 入射为 $f(x)=x$，

作 $g:[0,1)\to(0,1)$ 入射为 $g(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$，故 $[0,1)\sim[0,1]$。

④ 作 $f:(0,1)\to[0,1]$ 入射为 $f(x)=x$，

作 $g:(0,1)\to(0,1)$ 入射为 $g(x)=\frac{x}{3}+\frac{1}{4}$，故 $(0,1)\sim[0,1]$。

综上可得：$[0,1]\sim(0,1]\sim[0,1)\sim(0,1)$。

2. 证明:若从 A 到 B 存在一个满射,则 $K[B]\leqslant K[A]$。

证明:设 $f:A\to B$ 为满射函数,构造函数:$g:B\to A$,

$$g(y)=\begin{cases}x, & 若有唯一的\ x\in A,使\ f(x)=y\\ x_0, & 若存在\ x_0,x_1,\cdots,x_k\ 使\ f(x_0)=f(x_1)=\cdots=f(x_k)\end{cases},$$

则 g 为 $B\to A$ 的入射,即 $K[B]\leqslant K[A]$。

3. 设 N 为自然数集,证明 $K[\mathscr{P}(N)]=\aleph$。

证明:① 先证 $K[\mathscr{P}(N)]\leqslant\aleph$,

构造 $g:\mathscr{P}(N)\to[0,1]$ 如下:

对每个 $S\in\mathscr{P}(N)$,即 $S\subseteq N$,定义 $g(S)=.x_0x_1x_2\cdots$,这里 $g(S)$ 用二进制表示且规定:

$$\begin{cases}x_{2j}=0,(j=0,1,2,\cdots)\\ x_{2j+1}=1,对\ j\in S\\ x_{2j+1}=0,j\notin S\end{cases}$$

即是 $g(\varnothing)=0$,$g(N)=.01010101\cdots$,$g(\{1,3,5\})=.0001000100010000\cdots$,

由 g 的构造知 g 是入射函数,所以 $K[\mathscr{P}(N)]\leqslant\aleph$。

② 再证 $\aleph\leqslant K[\mathscr{P}(N)]$。

构造 $f:[0,1]\to\mathscr{P}(N)$,设 $x=.x_0x_1x_2\cdots$ 为 $x\in[0,1]$ 的二进制数表示,定义 $f(x)=\{j\mid x_j=1\}$。即是 $f(0)=\varphi$,$f(1)=f(.1111\cdots)=N$,$f(.101010100\cdots)=\{0,2,4\}$ 等,所以 f 是 $[0,1]$ 到 $\mathscr{P}(N)$ 的入射,故 $\aleph\leqslant K[\mathscr{P}(N)]$。

综上可知 $K[\mathscr{P}(N)]=\aleph$。

4. 证明:$K[N^N]=\aleph$。

证明:$N^N=\{f\mid f:N\to N\}$

① 先证 $K[N^N]\leqslant\aleph$。

构造一个入射函数 $g:N^N\to(0,1)$ 如下:设 $f\in N^N$,即 $f:N\to N$,对每个 $i\in N$,使 $f(i)$ 的二进制表达式为 x_i,现构造 $g:N^N\to(0,1)$ 定义 $g(f)=(.x_02x_12x_22x_32\cdots)$ 其中 2 为分隔符。

例如 $f:N\to N$ 定义为 $f(x)=2x$,则 $f(0)=(0)_2$,$f(1)=(10)_2$,$f(2)=(100)_2$,$f(3)=(110)_2$,$f(4)=(1000)_2$,$\cdots$,$g(f)=.0210210021102100\cdots$,

若 $h:N\to N$,$h(x)=3x$,则 $h(0)=(0)_2$,$h(1)=(11)_2$,$h(2)=(110)_2$,$h(3)=(100)_2$,$f(4)=(1100)_2\cdots$,$g(h)=.021121102100121100\cdots$,由 g 的构造可知:$g:N^N\to(0,1)$,是入射函数,因 $K[(0,1)]=\aleph$,所以 $K[N^N]\leqslant\aleph$。

② 再证 $\aleph\leqslant K[N^N]$。

构造入射函数 $S:(0,1)\to N^N$ 如下:设 $x\in(0,1)$,$x=.x_0x_1x_2\cdots$ 是 x 的十进数小数表示(如 $0.2=0.1999\cdots$),定义 $S(x)=f\in N^N$,使用 $f(0)=x_0$,$f(1)=x_1$,$f(2)=x_2$,$\cdots$。

由 S 的构造可知 $S:(0,1)\to N^N$ 是入射函数,故必有 $\aleph\leqslant K[N^N]$。

综上可知:$K[N^N]=\aleph$。

5. 设 A,B,D 都是集合且 $A\cap B=\varnothing$,$A\cap D=B\cap D=\varnothing$,$K[A]=a$,$K[B]=$

$b,K[D]=d$,若定义 $a+b=K[A\cup B]$,$a\cdot b=K[A\times B]$,求证:

a) $\aleph+\aleph_0=\aleph$。

b) 如果 $a\leqslant b$,则 $a+d\leqslant b+d$。

c) 如果 $a\leqslant b$,则 $ad\leqslant bd$。

证明:a) 令 $A=\{x\mid x\in R$ 且 $x\geqslant 1\}$,$B=\{\frac{1}{n+2}\mid n\in N\}$,

则 $K[A]=\aleph$,$K[B]=\aleph_0$,$A\cap B=\varnothing$,$A\cup B\subset R$,故可作入射函数 $f:(A\cup B)\to R$,所以 $K[A\cup B]\leqslant\aleph$.因为 $A\subseteq A\cup B$,故 $K[A]\leqslant K[A\cup B]$,即 $\aleph\leqslant K[A\cup B]$,于是 $K[A\cup B]=\aleph$,得证。

b) 如果 $a\leqslant b$,

因为 $K[A]=a$,$K[B]=b$,若 $a\leqslant b$,则存在一个入射函数 $f:A\to B$。

再定义 g 如下 $g:A\cup D\to B\cup D$,

$$g(x)=\begin{cases}f(x), & 若\ x\in A\\ x, & 若\ x\in D\end{cases}$$

则 g 是从 $A\cup D$ 到 $B\cup D$ 的一个入射,因此 $K[A\cup D]\leqslant K[B\cup D]$。由于 $A\cap D=B\cap D=\varnothing$,得 $a+d\leqslant b+d$。

c) 如果 $a\leqslant b$,

因为 $a\leqslant b$,故存在入射函数 $f:A\to B$。定义 g 为 $g:A\times D\to B\times D$,使得 $g(\langle x,y\rangle)=\langle f(x),y\rangle$,因为 $g(\langle x_1,y_1\rangle)=g(\langle x_2,y_2\rangle)$,所以 $\langle f(x_1),y_1\rangle=\langle f(x_2),y_2\rangle$,故 $f(x_1)=f(x_2)\wedge y_1=y_2$,因为 f 是入射函数,$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$,所以有 $\langle x_1,y_1\rangle=\langle x_2,y_2\rangle$,于是 g 为入射函数,即 $K[A\times D]\leqslant[B\times D]$。于是 $ad\leqslant bd$。

历年考研真题评析

1. 设 $A=\{a,b,c,d\}$,$B=\{\alpha,\beta,\gamma\}$,$A\to B$ 中共有________个满射函数。(北京大学考研真题)

【分析】 根据满射的定义,要求对于 B 中每一个元素都有原象,而函数要求对于 A 中每个元素都有唯一的象,$C_4^1\cdot C_3^1\cdot C_2^1=24$。

答案:24。

2. 令 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$,$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$,问:

(1) 有多少不同的由 X 到 Y 的关系?

(2) 有多少不同的由 X 到 Y 的映射?

(3) 有多少不同的由 X 到 Y 的单射,双射?(中科院计算机技术研究所考研真题)

【分析】 (1) 一个 X 到 Y 的关系对应于 $X\times Y$ 的一个子集。因此,不同的 X 到 Y 的关系数为 $|\mathscr{P}(X\times Y)|=2^{mn}$;

(2) 不同的由 X 到 Y 的映射个数为 $|\{f\mid f:x\to y\}|=|\{(f(x_1),f(x_2),\cdots,$

$f(x_m)) \mid f(x_i) \in Y, 1 \leqslant i \leqslant m\} \mid = \prod_{i=1}^{m} \mid \{f(x_i) \mid f(x_i) \in Y\} \mid = n^m$；

(3) 若是双射函数，则要求 X 中每个元素与 Y 中元素一一对应，即 X 中的元素个数和 Y 中的元素个数必须相同，则双射的个数为 Y 或 X 中元素个数的全排列，若是单射函数，则要求 X 中不同元素的象也不同，即 X 中的元素个数必须小于等于 Y 中的元素个数，若 $m > n$，则单射个数 0，若 $m < n$，从 Y 中任取 m 个元素有 $n!/((n-m)!m!)$ 种方法，此 m 个元素与 X 中 m 个元素间有 $m!$ 种不同的双射，共有单射 $C_n^m * m!$ 种。

解：(1) 2^{mn}；

(2) n^m。

(3) 若 $m \neq n$，则双射的个数为 0，

若 $m = n$，则双射的个数为 $m!$，

若 $m > n$，则单射个数 0，

若 $m < n$，从 Y 中任取 m 个元素有 $n!/((n-m)!m!)$ 种方法，此 m 个元素与 X 中 m 个元素间有 $m!$ 种不同的双射，共有单射 $C_n^m * m!$ 种。

3. 设 f 为 A 到 A 的映射，

(1) 证明：若 A 为有限集，f 为 A 到 A 的单射当且仅当 f 是 A 到 A 的满射。

(2) 若 A 为无限集，举例说明上述结论不成立。(南京大学考研真)

证明：(1) 若 A 为有限集。

当 f 为 A 到 A 的单射时，$\forall x_1 \neq x_2$，有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，

则有 $\mid A \mid = \mid f(A) \mid$，$f$ 为满射。

当 f 为 A 到 A 的满射时，若存在 $x_1 \neq x_2$，

$f(x_1) = f(x_2)$，即有 $\mid A \mid \geqslant \mid f(A) \mid$，与 f 满射矛盾，所以 f 是单射。

即 A 为有限集，f 为 A 到 A 的单射当且仅当 f 是 A 到 A 的满射。

(2) 例如 $f: R \to R, f(x) = 2^x$。f 是入射但不是满射。

4. 对下列每组集合 A 和 B，构造一个从 A 到 B 的双射，以说明 A 和 B 具有相同的势。

(1) $A = R, B = (0, \infty)$。

(2) $A = [0,1], B = [1/4, 1/2]$。(大连理工大学考研真题)

解：(1) 设 $f: A \to B, f(x) = 2^x$ 或 $f(x) = \tan \dfrac{\arctan x + \dfrac{\pi}{2}}{2}, x \in A$。

(2) 设 $f: A \to B, f(x) = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}, x \in [0,1]$。

如需其他课本详解，请扫描下列二维码进入《心悦书屋》

淘宝二维码　　　　　　　　　　　　　　微店二维码

谢谢您对心悦书屋的支持，如有店铺欠缺书籍，请联系客服 QQ：2556693184，为您赶作，及时更新！