数字逻辑

基于传输性质的可靠性编码

可靠性编码

能减少错误，发现错误，甚至纠正错误的编码称为可靠性编码。

防止传输过程中的错误（虽然数字信号比模拟信号可靠，更容易还原，但也不排除错误可能，绝大多数单错，多错几率很小）

数据校验

1. 为什么设置校验码

元件故障、噪声干扰等各种因素常常导致计算机在处理信息过程中出现错误。为了防止错误，可将信号采用专门的逻辑线路进行编码以检测错误，甚至校正错误。

通常的方法是：在每个字上添加一些校验位，用来确定字中出现错误的位置。

常用方法：

格雷码

奇偶校验码；

海明校验与纠错码；

循环冗余校验码。

一、格雷码

又称循环码，有多种形式，共同特点是任意相邻的两个代码之间仅有一位不同。

格雷码常用在计数器中，以防止多计数或少计数。

格 雷 码

- 格雷码是一种无权码。
- 编码特点是：任何两个相邻代码之间仅有一位不同。
- 该特点常用于模拟量的转换。当模拟量发生微小变化，格雷码仅仅改变一位，这与其它码同时改变2位或更多的情况相比，更加可靠,且容易检错。

二进制码 $b_3b_2b_1b_0$	格雷码 $G_3G_2G_1G_0$
0000	0000
0001	0001
0010	0011
0011	0010
0100	0110
0101	0111
0110	0101
0111	0100
1000	1100
1001	1101
1010	1111
1011	1110
1100	1010
1101	1011
1110	1001
1111	1000

格雷码的单位距离特性可以降低其产生错误的概率，并且能提高其运行速度。例如，为完成十进制数7加1的运算，当采用四位自然二进制码时，计数器应由0111变为1000，由于计数器中各元件特性不可能完全相同，因而各位数码不可能同时发生变化，可能会瞬间出现过程性的错码。变化过程可能为0111→1111→1011→1001→1000。虽然最终结果是正确的，但在运算过程中出现了错码1111，1011，1001，这会造成数字系统的逻辑错误，而且使运算速度降低。若采用格雷码，由7变成8，只有一位发生变化，就不会出现上述错码，而且运算速度会明显提高。

数据校验码原理

1、n位码字：由k位数据位和r位校验位组成的n位单元。

2、码距：任意两个合法编码之间不同的二进数位数为码距

例：若用4位二进制数表示16种状态，16种状态都用，则码距L=1。若用4位二进制数表示8种状态，而把另外8种状态作为非法编码，此时的码距L=2。

3、最小码距：指一种编码的任意两个码字中间，对应位置代码变化的最少个数。8421BCD码0111→1001 L=3 而0100→0101 L=1

意思：将其中一个码字改为另一个码字需要修改L位

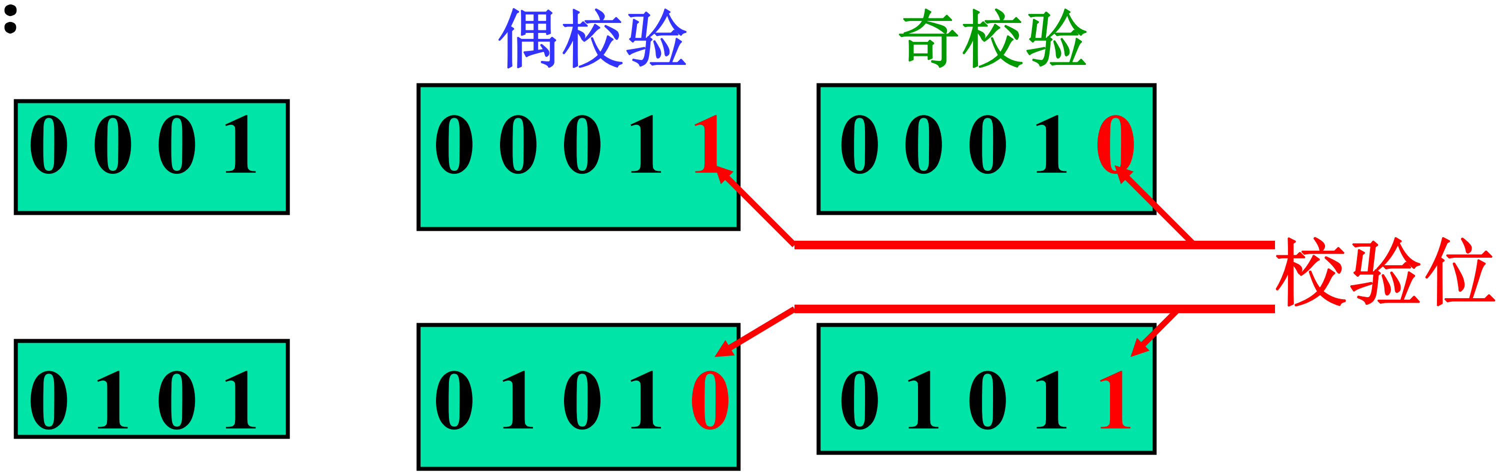
4、数据校验的实现原理：数据校验码是在合法的数据编码之间，加进一些不允许出现的(非法的)编码，使合法的数据编码出现错误时成为非法编码。这样就可以通过检测编码的合法性达到发现错误的目的。

要检查L位错，编码的码距需要L+1，一个码字L位出错就无法成为另外一个合法码字。类似地，为纠L位错，编码的码距需要2L+1

2. 奇偶校验

原理： 在 k 位数据码之外增加 1 位校验位，使 k+1 位校验码中取值为 1 的个数保持为偶数（偶校验）或 奇数（奇校验）

例如：



原有数据位　　　　　　两个校验码

设$x=(x_0 x_1 \ldots x_{n-1})$是一个n位字，则奇校验位P定义为

$$P=\overline{x_0 \oplus x_1 \oplus \ldots \oplus x_{n-1}}$$

式中$\oplus$代表按位加，只有当x中包含有奇数个1时，$P=0$。

同理，偶校验位P定义为

$$P=x_0 \oplus x_1 \oplus \ldots \oplus x_{n-1}$$

即x中包含偶数个1时，才使$P=0$。

奇校验：$P=\overline{D_1 \oplus D_2 \oplus D_3 \oplus D_4 \oplus D_5 \oplus D_6 \oplus D_7 \oplus D_8}$

奇校验检错码：$G=\overline{P \oplus D_1 \oplus D_2 \oplus D_3 \oplus D_4 \oplus D_5 \oplus D_6 \oplus D_7 \oplus D_8}$

偶校验：$P=D_1 \oplus D_2 \oplus D_3 \oplus D_4 \oplus D_5 \oplus D_6 \oplus D_7 \oplus D_8$

偶校验检错码：$G=P \oplus D_1 \oplus D_2 \oplus D_3 \oplus D_4 \oplus D_5 \oplus D_6 \oplus D_7 \oplus D_8$

G=0表示数据正常，否则表示出错

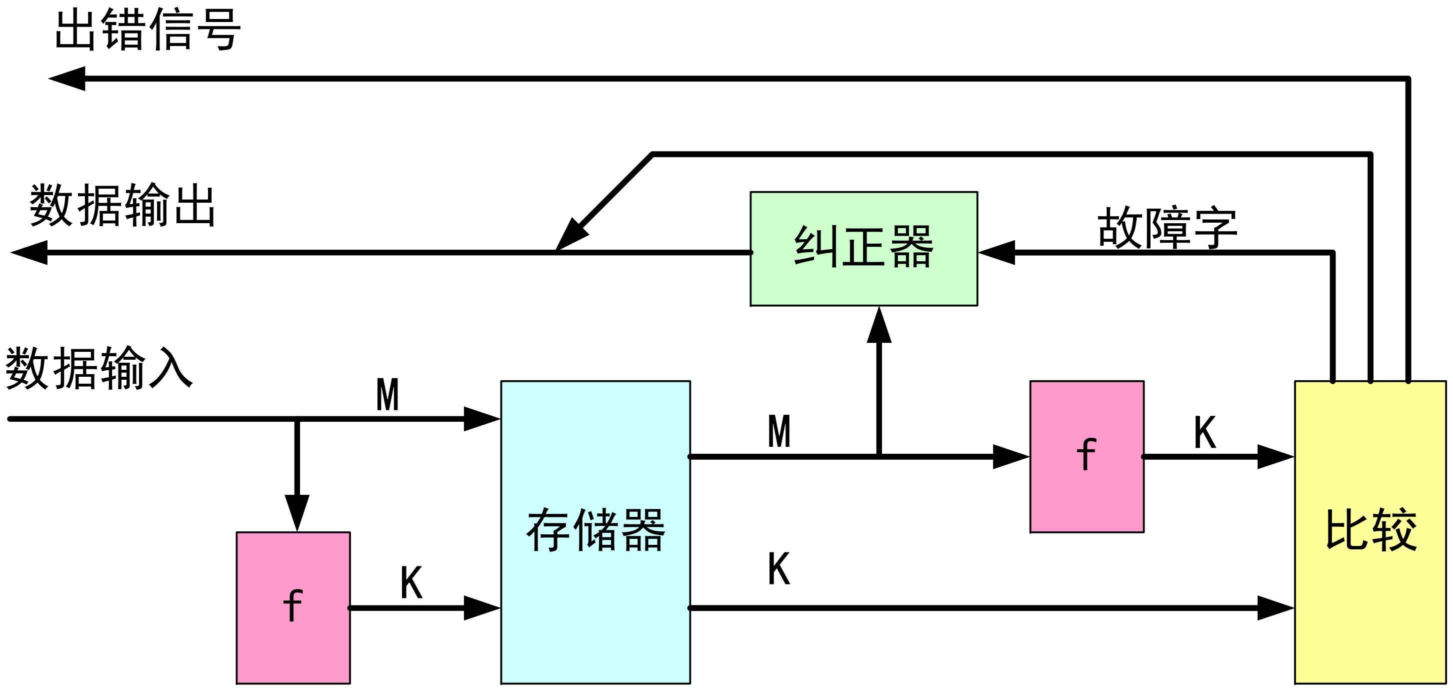
例 已知下表中左面一栏有5个字节的数据。请分别用奇校验和偶校验进行编码。

数　据	偶校验编码 C		奇校验编码 C	
1 0 1 0 1 0 1 0	1 0 1 0 1 0 1 0	0	1 0 1 0 1 0 1 0	1
0 1 0 1 0 1 0 0	0 1 0 1 0 1 0 0	1	0 1 0 1 0 1 0 0	0
0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0	0	0 0 0 0 0 0 0 0	1
0 1 1 1 1 1 1 1	0 1 1 1 1 1 1 1	1	0 1 1 1 1 1 1 1	0
1 1 1 1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1 1 1	0	1 1 1 1 1 1 1 1	1

特点：

奇偶校验可检测奇数个错误，
但无法检测偶数个错误，
更无法识别错误信息的位置及纠正错误。

纠错码功能



从M位数据中产生一组新的K位校验码与取出的纠错码功能校验位码作比较：

1、无错误

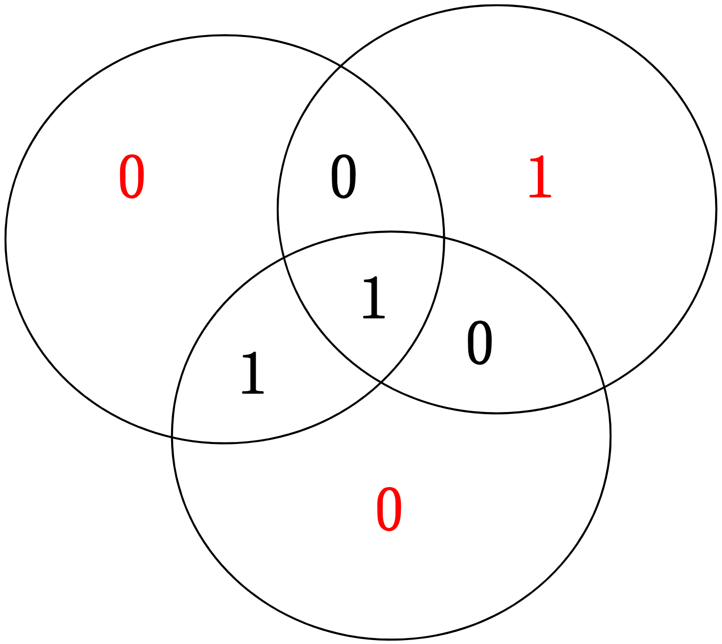
2、检测到差错，并可以纠正。

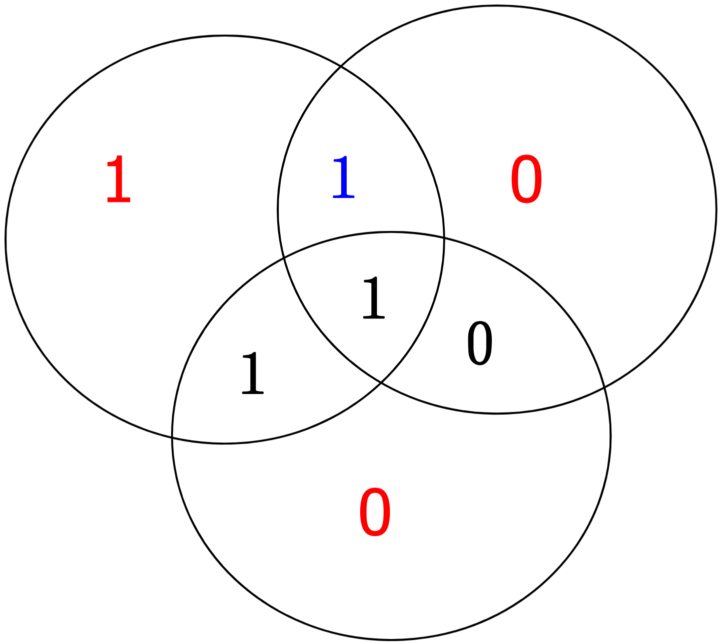
3、检测到差错，但无法纠正。

海明校验码

- 奇偶校验
  - 一个校验位
  - 只能检错，无法纠错
- 海明码
  - 多个奇偶校验组
  - 既能检错，也能纠错

- 分组交叉奇偶校验法
  - 将编码中的数据位分成r个校验组，组内采取奇偶校验，每组一个校验位，可构成r位检错码。r>1
- 全部检错码为0表示数据正常
- 不为零时检错码的值表示编码中出错数据位
- 可检错，也可纠错
- 每一数据位至少参加2个校验组，一位出错，可引起多个检错码的变化。





一个数据位参加多个校验组
一个数据位发生错误可在多个检测码中反应
可有效提高检错能力

1．原理

海明校验码的实现原理是：在数据位中加入几个校验位，将数据代码的码距均匀地拉大，并把数据的每个二进制位分配在几个奇偶校验组中。当某一位出错后，就会引起有关的几个校验位的值发生变化，这不但可以发现错误，还能指出是哪一位出错，为进一步自动纠错提供了依据。

2．编码规则

若海明码的最高位号为m，最低位号为1，即$H_mH_{m-1}\cdots H_2H_1$，则海明码的编码规则是：

（1）校验位与数据位之和为m，每个校验位P_i在海明码中被分在位号2^{i-1}的位置上，其余各位为数据位，并按从低向高逐位依次排列的关系分配各数据位。

（2）海明码的每一位位码H_i（包括数据位和校验位）由多个校验位校验，其关系是被校验的每一位位号要等于校验它的各校验位的位号之和。

3．增添校验位

设海明码N位，其中数据位k位，校验位r位

假设欲检测的有效信息为k位，需增加的校验位为r位，则校验码的长度为n=k+r位。应满足以下关系式：

$$2^r \geqslant k+r+1$$

这个关系式称为海明不等式，校验位r位表示共r个校验组。

确定校验位后，就可以与信息位组成海明校验位。假设数据位是7位，据上所述，校验位的位数k为4,故海明码的总位数为11。它们的排列关系可表示为：

海明码位号：H_{11} H_{10} H_9 H_8 H_7 H_6 H_5 H_4 H_3 H_2 H_1

海明码：D_7 D_6 D_5 P_4 D_4 D_3 D_2 P_3 D_1 P_2 P_1

。

4．校验位校验任务的分配

根据海明码的编码规则，每一位海明码都有多个校验位校验，且被校验的每一位的位号等于参与校验它的几个校验位的位号之和。

占据各权位上的校验位按权组成的**8421**码，正好等于海明码的位号，即海明码的位号H_i正好等于要校验它的校验位所占权位权值之和。

例如：$H_{11} = P_4 \times 2^3 + P_2 \times 2^2 + P_1 \times 2^1$

这说明了H_{11}位将由 P_4、P_2、P_1进行校验。

校验位P_1可以校验：H_1、H_3、H_5、H_7、H_9、H_{11}、H_{13}、H_{15}

校验位P_2可以校验：H_2、H_3、H_6、H_7、H_{10}、H_{11}、H_{14}、H_{15}

校验位P_3可以校验：H_4、H_5、H_6、H_7、H_{12}、H_{13}、H_{14}、H_{15}

校验位P_4可以校验：H_8、H_9、H_{10}、H_{11}、H_{12}、H_{13}、H_{14}、H_{15}

根据偶校验，可以写出相应的校验方程。

例：设有一个7位信息码位0110001，求它的海明码。

解： 此例中，信息位k=7，根据海明不等式，可求得校验位最短长度r=4。

其海明码表示如下：

海明码位号：	H_{11}	H_{10}	H_9	H_8	H_7	H_6	H_5	H_4	H_3	H_2	H_1
海明码：	0	1	1	P_4	0	0	0	P_3	1	P_2	P_1

按偶校验写出校验方程为：

$H_1 \oplus H_3 \oplus H_5 \oplus H_7 \oplus H_9 \oplus H_{11} = 0$ （$P_1 = H_1$）

$H_2 \oplus H_3 \oplus H_6 \oplus H_7 \oplus H_{10} \oplus H_{11} = 0$ （$P_2 = H_2$）

$H_4 \oplus H_5 \oplus H_6 \oplus H_7 = 0$ （$P_3 = H_4$）

$H_8 \oplus H_9 \oplus H_{10} \oplus H_{11} = 0$ （$P_4 = H_8$）

由此可得：$P_1 = 0$、$P_2 = 0$、$P_3 = 0$、$P_4 = 0$，所以0110001的海明码为01100000100。

5．检错与纠错

方法：将收到的码字重新代入校验方程校验即可。假设上面例子中的海明码01100000100传送后，若H_6位发生了错误，变成了01100100100，这时把它们代入上面的偶校验校验方程，如下：

$$G_1=H_1\oplus H_3\oplus H_5\oplus H_7\oplus H_9\oplus H_{11}=0\oplus 1\oplus 0\oplus 0\oplus 1\oplus 0=0$$

$$G_2=H_2\oplus H_3\oplus H_6\oplus H_7\oplus H_{10}\oplus H_{11}=0\oplus 1\oplus 1\oplus 0\oplus 1\oplus 0=1$$

$$G_3=H_4\oplus H_5\oplus H_6\oplus H_7=0\oplus 0\oplus 1\oplus 0=1$$

$$G_4=H_8\oplus H_9\oplus H_{10}\oplus H_{11}=0\oplus 1\oplus 1\oplus 0=0$$

可以把$G_4G_3G_2G_1=0110$看成一个“指误字”，因为其二进制码为0110，说明H_6出了错，是H_6错成了1，所以要纠错，纠错时将H_6位取反值，即让它恢复到正确值0。这样纠错后即可得到正确的海明码01100000100。

两位同时出错?

引入总校验位

$P_5=H_1\oplus H_2\oplus H_3\oplus H_4\oplus H_5\oplus H_6\oplus H_7\oplus H_8\oplus H_9\oplus H_{10}\oplus H_{11}$

$G_5=P_5\oplus H_1\oplus H_2\oplus H_3\oplus H_4\oplus H_5\oplus H_6\oplus H_7\oplus H_8\oplus H_9\oplus H_{10}\oplus H_{11}$

G_5判断是一位错还是两位错。任何偶数个数出错， G_5一定为0。

1）如果G_5~ G_1=00000,表明无错误。

2）如果G_5~ G_1=1xxxx,表明一位错误，位置为xxxx。

3）如果G_5~ G_1=0xxxx,表明两位错误

海明码**01100000100**

无错误 P_5 =1　G_5~ G_1=000000

H_6错 01100100100　G_5~ G_1=10110

H_6 H_3错 01100100000　G_5~ G_1=00101

循环冗余校验码

1. CRC的编码方法

任何一个二进制序列中的各位看成一个多项式的系数

如：1101→$1\times X^3+1\times X^2+0\times X^1+1\times X^0$

设：n是有效数据信息位位数，r是校验位位数。

总长k=n+r位，称（k，n）码。

设待编码的有效信息以多项式M(x)表示，将M(x)左移r位得到多项式$M(x)*X^r$，使低r位二进制位全为零，以便与r位校验位拼接。使用多项式$M(x)*X^r$除以生成多项式G(x)，求得的余数即为校验位。为了得到r位余数(校验位)，G(X)必须是r+1位的。

G(X)最高项的指数决定了r的位数

假设$M(x)*X^r$除以生成多项式$G(x)$，求得的余数用表达式$R(x)$表示，商的表达式用$Q(x)$表示，它们之间的关系如下：

$$\frac{M(x)\ *X^r}{G(X)} = Q(X) + \frac{R(X)}{G(X)}$$

这时将余数$R(X)$与$M(x)*X^r$相加，就得到n+r位CRC编码：

$$M(x)*X^r+R(x) = Q(x)*G(x) + R(x) + R(x)$$

因为“两个相同数据的模2和为零”，即$R(x) + R(x) = 0$，所以

$$M(x)*X^r+R(x) = Q(x)*G(x)$$

CRC编码是可被G(X)表示的编码整除。

例 设四位有效信息位是1100，选用生成多项式 G(X)=1011，试求有效信息位1100的CRC编码。

解：

(1)将有效信息位1100表示为多项式M(x)

$M(X) = X^3 + X^2 = 1100$

(2)M(X)左移r=3位，得$M(x)*X^3$

$M(x)*X^3 = X^6 + X^5 = 1100000$

(3)用r+1位的生成多项式 G(X)，对$M(x)*X^r$作“模2除”

$1100000/1011 = 1110 + 010/1011$

(4)$M(x)*X^3$ 与r位余数R(X) 作“模2加”，即可求得它的CRC编码

$M(x)*X^3 + R(X) = 1100000 + 010 = 1100010$ (模2加)

因为k=7、n=4，所以编好的CRC码又称为(7，4)码。

2．模2运算：不考虑借位和进位

（1）模2加减：可用异或门实现，即：

0+0=0；0+1=1；1+0=1；1+1=0；

0-0=0；0-1=1；1-0=1；1-1=0；

（2）模2乘法：用模2加求部分积之和

例如：

$$
\begin{array}{r}
1011 \\
\times \quad 11 \\
\hline
1011 \\
+ \quad 1011 \\
\hline
11101
\end{array}
$$

（3） **模2除法：**按模2减求部分余数，每上一位商，部分余数要减少一位，上商规则是：只要余数最高位为1，则商1，否则为0。当部分余数的位数小于除数时，该余数为最后余数。

例如：

```
              111..................商
11（除数）   1000（被除数）
             11
              10
              11
               10
               11
                1
```

3．CRC的译码及纠错

CRC码传送到目标部件，用约定的多项式G(x)对收到的CRC码进行“模2除”，若余数为0，则表明该CRC校验码正确；否则表明有错，不同的出错位，其余数是不同的。由余数具体指出是哪一位出了错，然后加以纠正。

可以证明：更换不同的有效信息位，余数与出错位的对应关系不会发生变化，只与码制和生成多项式G(X)有关。

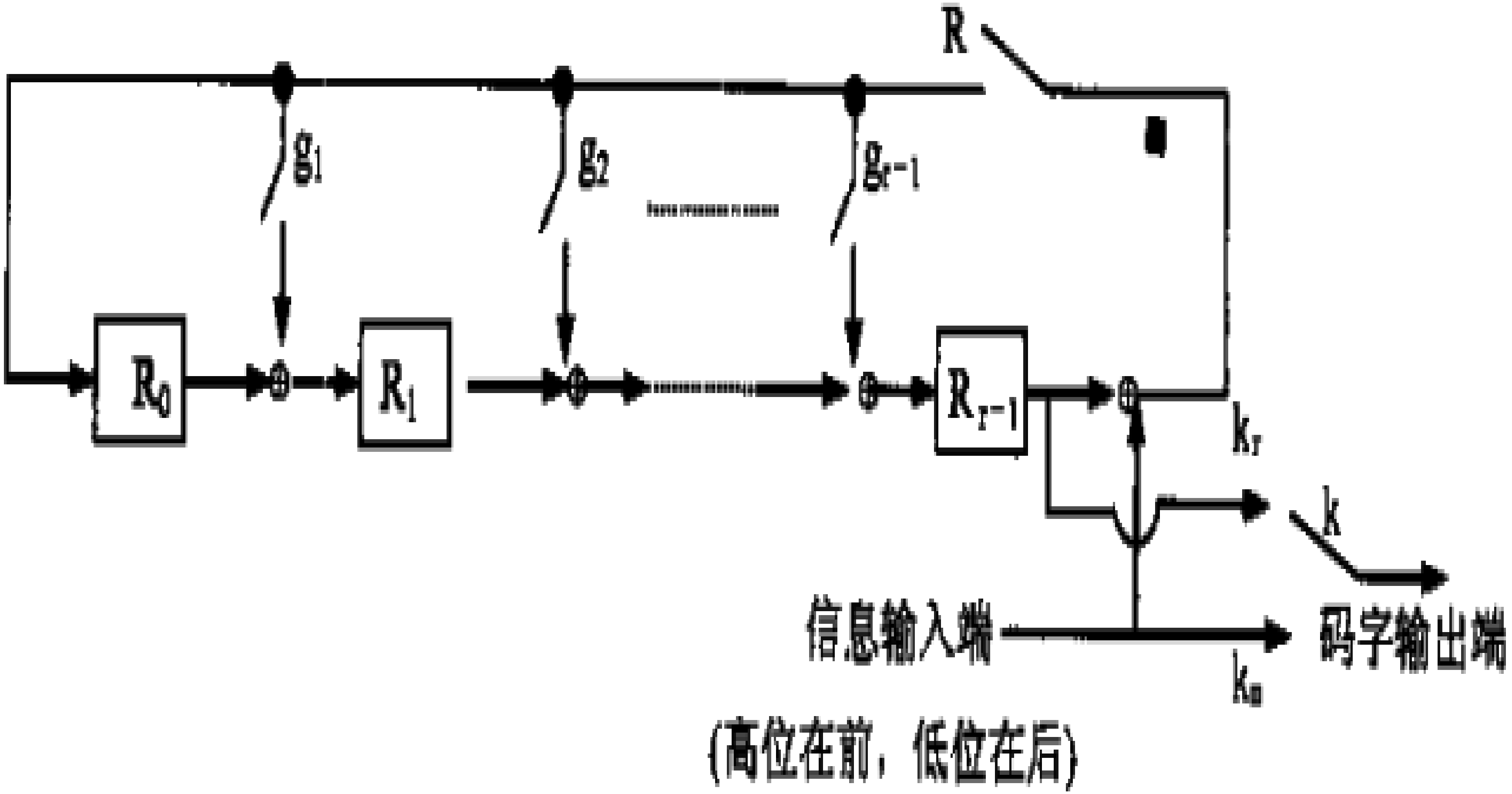
(7,4)循环码出错模式G(x)=1011

A_1~A_7	余数	出错位
1100010	000	无
1100011	001	7
1100000	010	6
1100110	100	5
1101010	011	4
1110010	110	3
1000010	111	2
0100010	101	1

0	0	1	0	1	1	0			
0	0	1	0						
	0	1	0	0					
		1	0	0	0				
	-	1	0	1	1				
			0	1	1	0			
				1	1	0	0		
			-	1	0	1	1		
					1	1	1	0	
				-	1	0	1	1	
						1	0	1	0
					-	1	0	1	1
							0	0	1

CRC编码电路

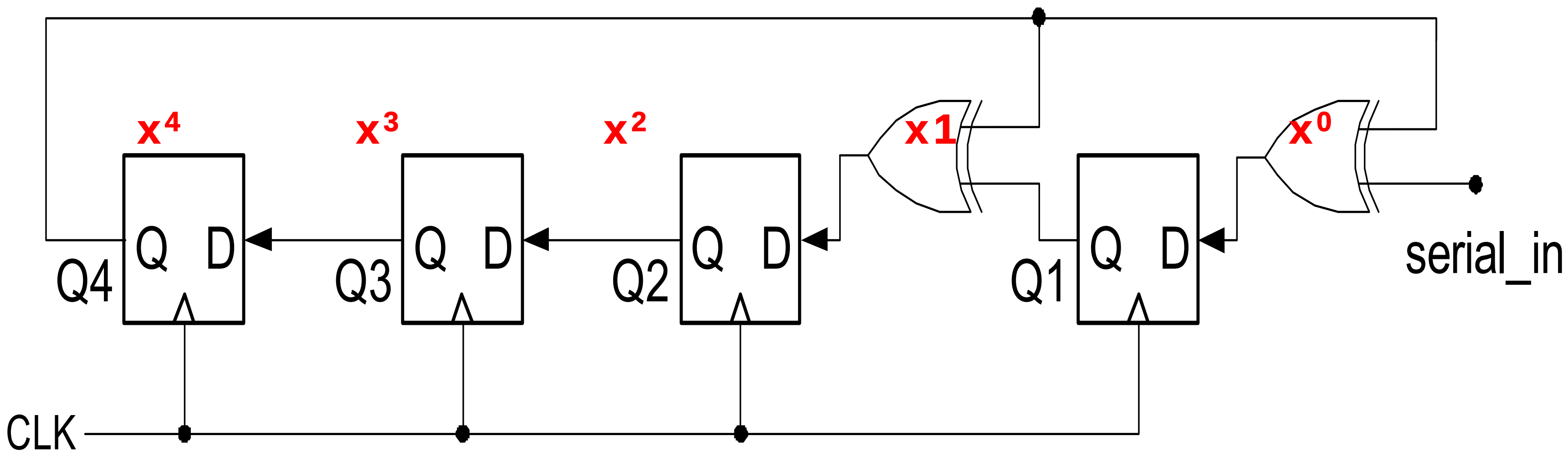
$$G(x)=x^r+g_{r-1}x^{r-1}+\cdots+g_2x^2+g_1x^1+1$$



CRC产生电路

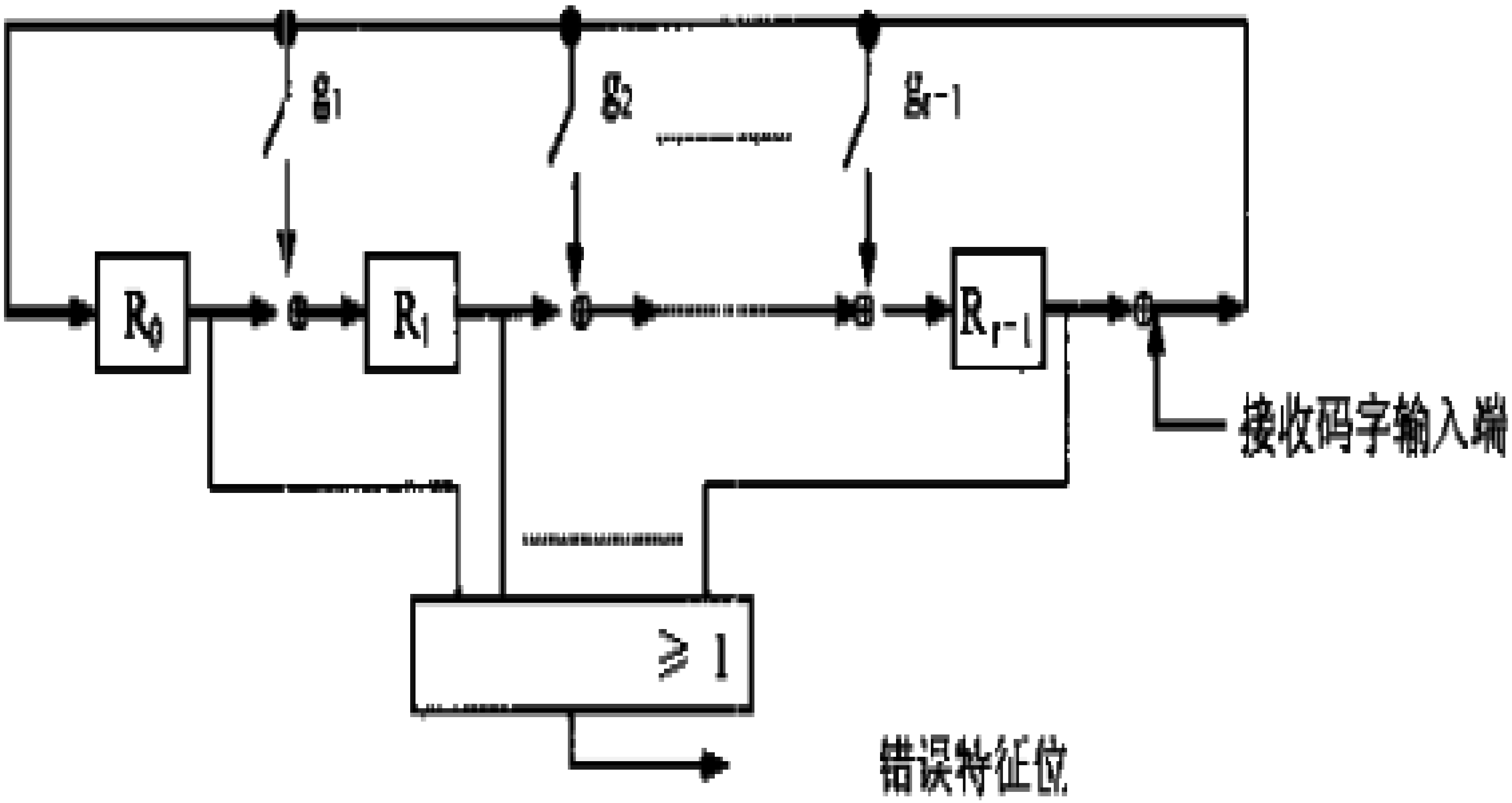
CRC校验码不仅检错率高，而且硬件实现简单，因而广泛应用。

$G(X)=X^4+X+1$ 10011 编码电路



- 触发器初始状态为**0**
- **Q4=0**时，不够除，下一个脉冲，数据右移一位
- **Q4=1**时，够除，商上一，作模二的减法，
- 有异或门的位置相当于生成多项式为**1**的位置，作异或运算，
- 无异或门的位置，相当于多项式为零的位置

CRC译码电路



4. 关于生成多项式

不是任何一个(k+1)位多项式都能作为生成多项式，从检错、纠错的要求来看，生成多项式应满足下列要求：

(1)任何一位发生错误，都应使余数不为零；

(2)不同位发生错误，都应使余数不同；

(3)用余数补零，继续作“模2除”，应使余数循环。

常用的CRC生成多项式：

CRC-12	12位	$x^{12}+x^{11}+x^{3}+x^{2}+1$	
CRC-16	16位	$x^{16}+x^{15}+x^{2}+1$	（IBM）
CRC-16	16位	$x^{16}+x^{12}+x^{5}+1$	（CCITT）
CRC-32	32位	$x^{32}+x^{26}+x^{23}+x^{16}+x^{11}+x^{10}+x^{8}+x^{7}+x^{5}+x^{4}+x^{2}+x+1$	

广泛运用于通信传输领域，磁存储领域

- **例题**
- 信息位8位的海明码，在接收到报文110010100000，判断传输是否出错，并求出发送端发送的信息位。

  解答：

  2^r≥8+r+1，确定校验位为4位2^4≥4+4+1。
- 按照上面的海明码信息位和校验位的分布情况表，对接收数据进行分解：
- 从而得到信息位为11000100，校验位为1000。

  因为12=2^3+2^2 ;11=2^3+2^1+2^0;10=2^3+2^1; 9=2^3+2^0;7=2^2+2^1+2^0;6=2^2+2^1 ;5 =2^2+2^0;3=2^1+2^0 ;

  可得发送端校验位：

  r3= I8+I7+I6+I5;　（+表示异或）

  r2= I8+I4+I3+I2;

  r1= I7+I6+I4+I3+I1;

  r0= I7+I5+I4+I2+I1。

  接收端可根据以下关系验证是否出错

  S3= r3+I8+I7+I6+I5;　（+表示异或）

  S2= r2+I8+I4+I3+I2;

  S1= r1+I7+I6+I4+I3+I1;

  S0= r0+I7+I5+I4+I2+I1;　：其中的

  注意rn为接收端校验位。

  由上面的算式得S3 S2 S1 S0=1001，从而得知第九位出错，所以信息位为11010100。此外，若S3 S2 S1 S0全为0，则证明传输正确。

- 例题3

  若海明码的监督关系式为：

  S0=a0+a3+a4+a5　　（+表示异或）

  S1=a1+a4+a5+a6

  S2=a2+a3+a5+a6

  接收端收到的码字为：a6 a5 a4 a3 a2 a1 a0=1 0 1 0 1 0 0

  那最多一位错的情况下发送端的发送信息位是什么?

  解答：按监督关系式

  S0=0+0+1+0=1　　（+表示异或）

  S1=0+1+0+1=0

  S2=1+0+0+1=0

  得出S2　S1　S0=001 根据值与错码位置的对应关系所以a0错误，发送端的发送信息应为1010101。

- 假设使用的生成多项式是G(x)=x^3+x+1。4位的原始报文为1010，求编码后的报文。
- 解：
- 1、将生成多项式G(x)=x^3+x+1转换成对应的二进制除数1011。
- 2、此题生成多项式有4位（R+1）(注意：4位的生成多项式计算所得的校验码为3位，R为校验码位数)，要把原始报文C(x)左移3（R）位变成1010 000
- 3、用生成多项式对应的二进制数对左移3位后的原始报文进行模2除（高位对齐），相当于按位异或：
- 1010000
- 1011
- ------------------
- 0001000
- ___1011(下划线作为对齐之用，不允许使用空格对齐字符，下同)
- ------------------
- _____011
- 得到的余位011，所以最终编码为：1010 011
-