

# 一种新的三维自治混沌系统<sup>\*</sup>

冯朝文<sup>†</sup> 蔡理康 强 张立森

(空军工程大学理学院, 西安 710051)

(2010年6月12日收到; 2010年9月1日收到修改稿)

通过对蔡氏电路的研究,提出了一种新的混沌系统,并对该系统的基本动力学特性进行了深入研究,得到该系统的 Lyapunov 指数和 Lyapunov 维数,给出了相图、Lyapunov 指数谱、分岔图、Poincaré 映射以及功率谱等. 利用 OrCAD-PSpice 软件设计了该新混沌系统的振荡电路并进行了仿真实验. 研究结果表明,该系统与蔡氏电路产生的混沌吸引子并不拓扑等价,且该系统的参数变化范围较大,最大 Lyapunov 指数接近 1,数值仿真和电路系统实验仿真具有很好的一致性,证实了该系统的存在性和物理上可实现性.

关键词: 混沌系统, Lyapunov 指数谱, 分岔图, 电路实现

PACS: 05.45.Ac, 05.45.Pq

## 1. 引言

自 1963 年 Lorenz<sup>[1]</sup> 发现第一个混沌吸引子以来,混沌理论得到了迅猛的发展,并在非线性科学、信息科学、保密通信以及其他工程领域获得了广泛应用. 混沌的研究包括混沌生成、混沌分析、非线性电路实现及混沌应用等. 国内外研究人员已经提出了许多新的不同类型的混沌系统,如 Rössler 系统<sup>[2]</sup>、Chen 系统<sup>[3]</sup>、Lü 系统<sup>[4]</sup>等. 其中,1984 年 Chua 建立的非线性混沌振荡电路是目前众多混沌电路中最具代表性的一种,已成为理论和实验研究混沌的一个范例<sup>[5]</sup>. 蔡氏电路中的分段线性函数是决定混沌产生的关键因素. 由此,人们试图对蔡氏电路进行改进和探索,并取得了一系列研究成果,如变形蔡氏电路<sup>[6]</sup>、蔡氏对偶混沌电路<sup>[7]</sup>、多涡卷蔡氏电路等<sup>[8-11]</sup>. 然而,这些变型电路大都只研究了非线性函数对于系统的某一个状态变量动态方程的影响,且局限在改变非线性函数的形式,或是改变非线性函数与状态变量间的关系,而未涉及同类非线性函数在某两个或多个状态变量动态方程中对于系统产生非线性动态行为的影响.

本文通过对蔡氏电路及其变型结构的分析,在两个状态变量动态方程中引入相同的非线性函数,

并改变它与状态变量之间的关系,提出了一种新的三维混沌系统. 分析了该系统的动力学行为,包括平衡点性质、Lyapunov 指数谱、分岔图等,设计了该三维混沌系统的电路结构,并用硬件电路的仿真实验验证了理论分析和数值仿真的正确性.

## 2. 系统模型的提出与分析

本文提出的混沌系统动力学状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(z - f(x)), \\ \dot{y} &= f(x) - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y - \gamma z.\end{aligned}\quad (1)$$

其中  $f(x)$  通常用分段线性函数表示

$$f(x) = bx + \frac{1}{2}(a - b)(|x + 1| - |x - 1|). \quad (2)$$

系统(1)中  $x, y, z$  为状态变量,  $\alpha, \beta, \gamma, a, b$  为系统参数. 当  $\alpha = 6, \beta = 20, \gamma = 0.01, a = -3, b = 1$  时,系统(1)的三个 Lyapunov 指数分别为  $\lambda_{L1} = 0.7359$ ,  $\lambda_{L2} = 0, \lambda_{L3} = -6.2242$ , Lyapunov 维数  $D_L = 2.1182$ , 表明存在一个典型的混沌吸引子,如图 1 所示.

系统(1)虽与经典的蔡氏电路<sup>[12]</sup>相似,但有以下几点不同:

1) 该系统中的第一个状态方程和第二个状态

<sup>\*</sup> 国家高技术研究发展计划(批准号:2008AAJ225)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: phonchownfcw@sohu.com

方程发生改变,这导致产生不同的平衡点和吸引子拓扑结构.

2) 该系统中非线性函数  $f(x)$  可以拓展为具有多个极值的连续性函数,例如正余弦波函数、三角波函数和锯齿波函数等,以便产生多涡卷混沌吸引子.

子,而经典蔡氏电路的非线性函数则是分段线性形式且各线性区为负斜率,产生的吸引子为单涡卷或双涡卷.

3) 该系统的最大 Lyapunov 指数接近 1,而经典蔡氏电路的最大 Lyapunov 指数则不超过 0.6.

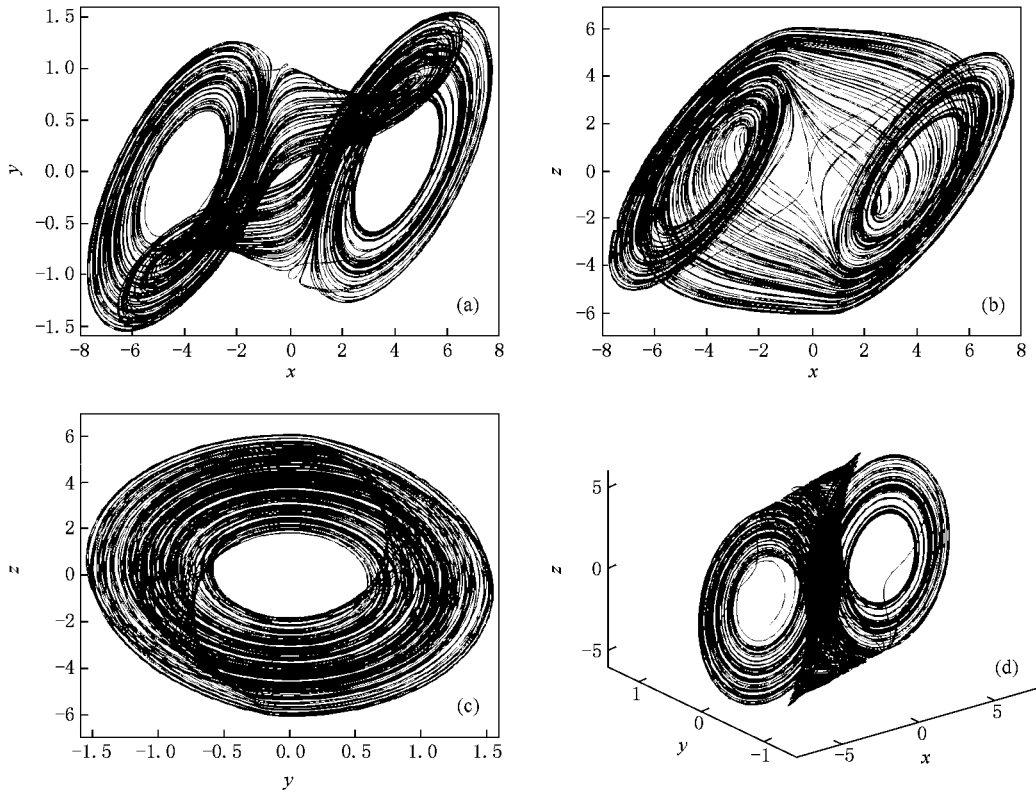


图1 系统(1)的奇怪吸引子 (a)  $x-y$  平面相图; (b)  $x-z$  平面相图; (c)  $y-z$  平面相图; (d)  $x-y-z$  空间相图

### 3. 基本动力学特性

#### 3.1. 对称性和不变性

做变换  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$ , 系统(1)的方程仍保持不变,即系统的图像关于原点对称,且这种自然的对称性对所有的系统参数都保持不变.

#### 3.2. 平衡点的稳定性

由  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$  可计算出系统(1)有三个平衡点  $O(0, 0, 0)$ ,  $P^+(1 - a/b, 0, 0)$ ,  $P^-(a/b - 1, 0, 0)$ .

将系统(1)在各平衡点处线性化后,可得 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -\alpha m & 0 & \alpha \\ m & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{bmatrix}.$$

其中,当  $|x| \leq 1$  时,  $m = a$ ; 当  $x \leq -1$  或  $x \geq 1$  时,  $m = b$ . 系统(1)对应的特征方程为

$$F(\lambda) = \lambda^3 + (\alpha m + 1 + \gamma)\lambda^2 + (\alpha m + \alpha m\gamma + \gamma + \beta)\lambda + \alpha m(2\beta + \gamma) = 0. \quad (3)$$

当  $\alpha = 6$ ,  $\beta = 20$ ,  $\gamma = 0.01$ ,  $a = -3$ ,  $b = 1$  时,可计算出在平衡点  $O$  处矩阵的特征值为  $\lambda_1 = 18.9077$ ,  $\lambda_2 = -0.9588 + j6.0967$ ,  $\lambda_3 = -0.9588 - j6.0967$ ,  $\lambda_1$  为正实根,  $\lambda_2$  与  $\lambda_3$  是一对具有负实部的共轭复根. 因此,平衡点  $O$  是一个不稳定的鞍焦点. 同理可得,在平衡点  $P^+$  和  $P^-$  处矩阵的特征值均为  $\lambda_1 = -7.6834$ ,  $\lambda_2 = 0.3367 + j5.5795$ ,  $\lambda_3 = 0.3367$ .

$-j5.5795$ , 因此, 平衡点  $P^+$  和  $P^-$  均为不稳定的鞍焦点.

由以上分析可知, 系统(1)的三个平衡点都是不稳定的鞍焦点, 满足 Shilnikov 定理, 即对于三阶自治系统平衡点的特征值  $\gamma$  和  $\sigma \pm j\omega$ , 若满足  $\gamma\sigma < 0$  且  $|\gamma| > |\sigma|$ , 则系统的矢量场满足产生混沌的鞍焦点条件, 从而在理论上证明了系统(1)存在混沌特性的可能性.

### 3.3. Lyapunov 指数谱、分岔图

随着系统参数的改变, 系统平衡点的稳定性将会发生变化, 从而系统也将处于不同的状态.

情况 1 固定参数  $\beta = 20$ ,  $\gamma = 0.01$ ,  $\mu = -3$ ,  $b = 1$ , 改变  $\alpha$ . 当  $\alpha$  在  $[0, 18]$  范围内变化时, 系统的 Lyapunov 指数谱如图 2 所示, 分岔如图 3 所示. 由图 2 和图 3 可见, 当  $\alpha \in [0, 1.15]$  时, Lyapunov 指数均小于零, 故系统轨道收敛于平衡点吸引子; 当  $\alpha \in (1.15, 1.55) \cup (1.99, 2.26)$  时, 系统进入周期态; 当  $\alpha \in [1.55, 1.99] \cup [2.26, 17]$  时, 系统处于混沌态; 当  $\alpha \in (17, 18]$  时, 系统则处于拟周期态.

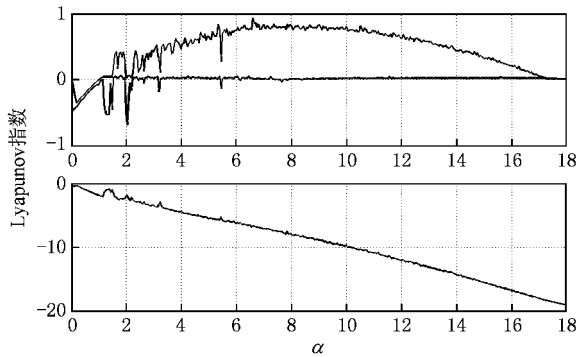


图 2 Lyapunov 指数谱,  $\beta = 20$ ,  $\gamma = 0.01$ ,  $\mu = -3$ ,  $b = 1$ ,  $\alpha \in [0, 18]$

情况 2 固定参数  $\alpha = 6$ ,  $\gamma = 0.01$ ,  $\mu = -3$ ,  $b = 1$ , 改变  $\beta$ . 当  $\beta$  在  $[8, 25]$  范围内变化时, 系统的 Lyapunov 指数谱如图 4 所示, 分岔如图 5 所示. 由图 4 和图 5 可见, 随着参数  $\beta$  在范围  $[8, 25]$  内不断增大, 系统从拟周期态进入混沌态. 当  $\beta > 24$  时, 系统退出混沌区.

对于系统(1)随其他参数  $\gamma$ ,  $\mu$ ,  $b$  变化的分析过程类似于前两种情况, 这里只给出了 Lyapunov 指数谱, 如图 6 所示. 固定参数  $\alpha = 6$ ,  $\beta = 20$ ,  $\mu$

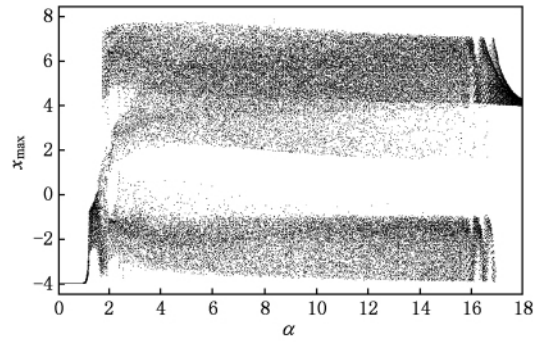


图 3 分岔图,  $\beta = 20$ ,  $\gamma = 0.01$ ,  $\mu = -3$ ,  $b = 1$ ,  $\alpha \in [0, 18]$

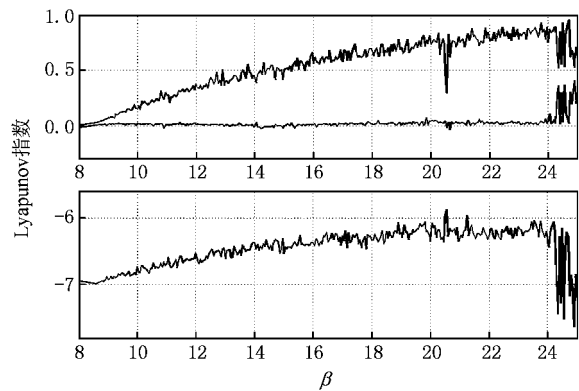


图 4 Lyapunov 指数谱,  $\alpha = 6$ ,  $\gamma = 0.01$ ,  $\mu = -3$ ,  $b = 1$ ,  $\beta \in [8, 25]$

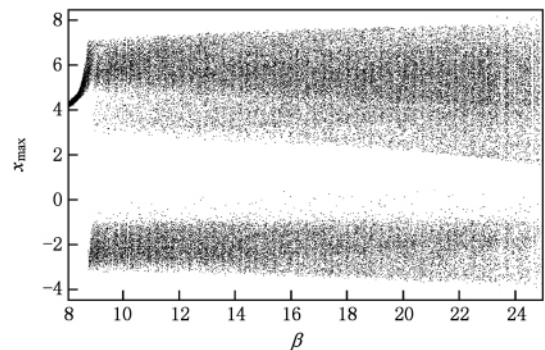
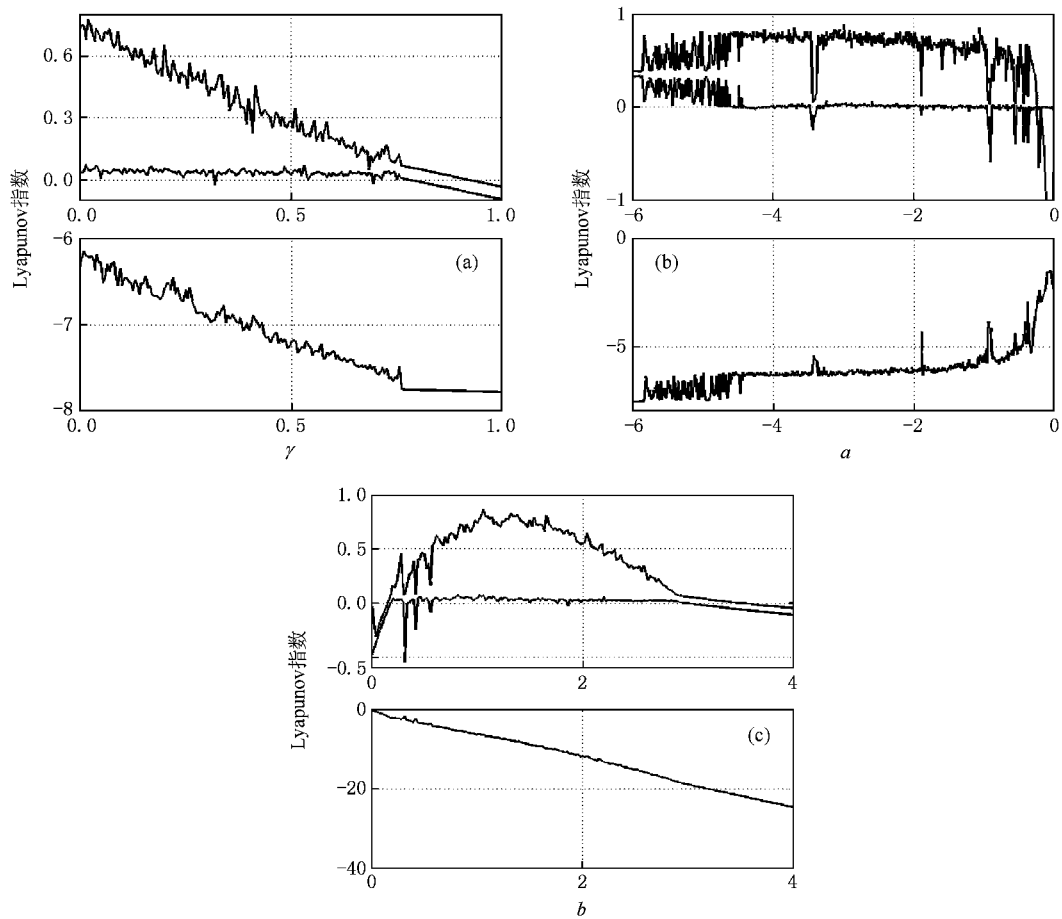
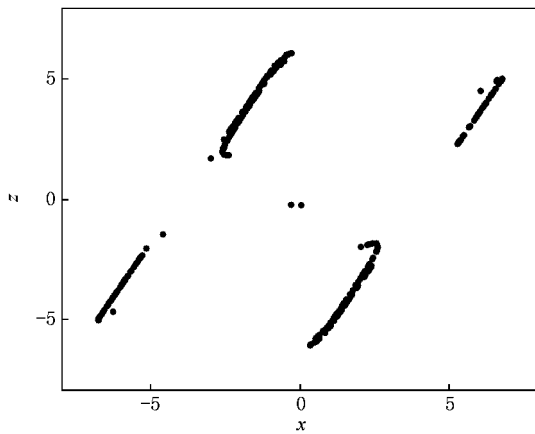


图 5 分岔图,  $\alpha = 6$ ,  $\gamma = 0.01$ ,  $\mu = -3$ ,  $b = 1$ ,  $\beta \in [8, 25]$

$= -3$ ,  $b = 1$ , 改变  $\gamma$ ,  $\gamma \in [0, 1]$ , 如图 6(a) 所示; 固定参数  $\alpha = 6$ ,  $\beta = 20$ ,  $\gamma = 0.01$ ,  $b = 1$ , 改变  $\mu$ ,  $\mu \in [-6, 0]$ , 如图 6(b) 所示; 固定参数  $\alpha = 6$ ,  $\beta = 20$ ,  $\gamma = 0.01$ ,  $\mu = -3$ , 改变  $b$ ,  $b \in [0, 4]$ , 如图 6(c) 所示.


 图6 系统(1)随参数  $\gamma$ ,  $a$ ,  $b$  变化的 Lyapunov 指数谱 (a)  $\gamma \in [0, 1]$ ; (b)  $a \in [-6, 0]$ ; (c)  $b \in [0, 4]$ 

 图7 系统(1)在截面  $y = 0$  上的 Poincaré 映射

### 3.4. Poincaré 截面和功率谱

为了利于观察系统的动力学行为,可在给定参

数值情况下选择穿过平衡点的平面作为 Poincaré 截面,通过观察截面上截点的情况,判断系统是否可产生混沌运动.本文取参数  $\alpha = 6$ ,  $\beta = 20$ ,  $\gamma = 0.01$ ,  $a = -3$ ,  $b = 1$ ,选定截面  $y = 0$ ,可得系统(1)的 Poincaré 映像,如图7所示.由图7可见,在 Poincaré 截面上有无穷多个密集点,吸引子的轮廓清晰可见,进一步说明了此时系统的运动是混沌的.

混沌系统的时域波形具有非周期性,解的流对初始值极为敏感.以分量  $y$  为例,从图8(a)可以看出系统(1)的时域波形具有这种特点.另外,混沌吸引子的非周期性也可以通过系统的连续功率谱表现出来.由图8(b)可见,系统(1)的混沌吸引子是非周期性的,且  $y$  的功率谱具有连续的宽带特征,这对保密通信、流体混合等基于混沌的实际应用具有重要价值.

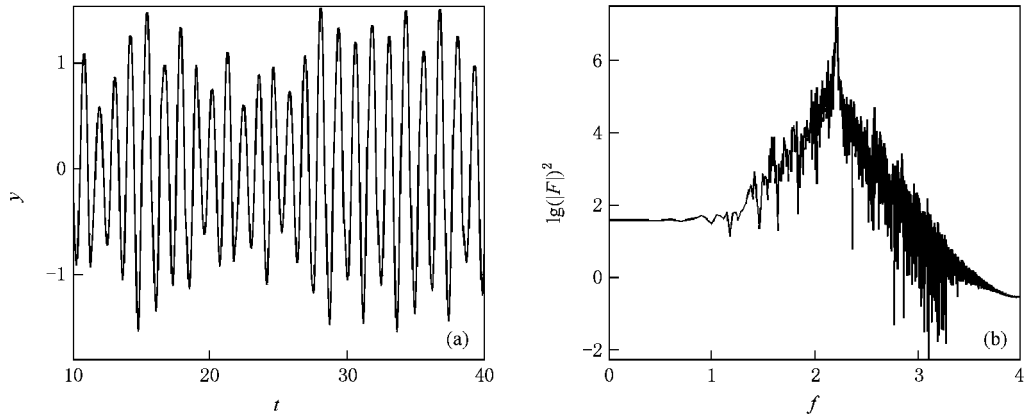


图8 系统(1)的混沌吸引子时域波形与功率谱 (a)  $y(t)$  的时域波形; (b) 信号  $y(t)$  的功率谱( $f$ 代表频率  $F$ 代表信号幅值)

#### 4. 电路设计与实验结果

混沌系统的最直接最简单的物理实现是通过电路来完成的,许多混沌系统的动力学行为都是通过电路得到了验证.由图1可知,状态变量的变化范围在集成电路允许的工作电压范围内,因此,可直

接根据系统微分方程设计电路.

本文采用线性电阻、线性电容、运算放大器( $\mu A741$ )来设计实现系统(1)的电路,运放的电源电压值为 $\pm 15V$ .利用OrCAD-PSpice软件可设计出该电路,如图9所示.整个电路主要由三部分组成:加减比例电路、积分电路和反相电路.

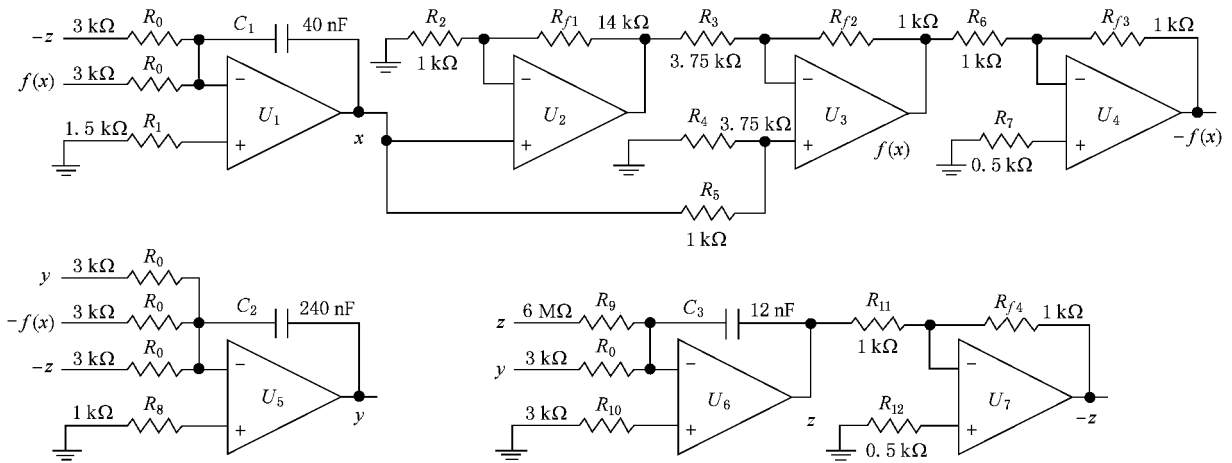


图9 混沌系统(1)的电路实现原理图

根据电路理论以及各个元件的特性,容易建立其电路方程为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{z - f(x)}{R_0 C_1}, \\ \dot{y} &= \frac{f(x) - y + z}{R_0 C_2}, \\ \dot{z} &= -\frac{y}{R_0 C_3} - \frac{z}{R_9 C_3},\end{aligned}$$

$$f(x) = \left[ \frac{R_{j2}}{R_5} - \frac{R_{j2}}{R_3} \left( 1 + \frac{R_{j1}}{R_2} \right) \right] x. \quad (4)$$

系统(1)各参数对应的电路实现方式为

$$\begin{aligned}\alpha &= C_0 / C_1, \quad \beta = C_0 / C_3, \\ \gamma &= R_0 C_0 / (R_9 C_3), \\ a &= \frac{R_{j2}}{R_5} - \frac{R_{j2}}{R_3} \left( 1 + \frac{R_{j1}}{R_2} \right),\end{aligned}$$

$$b = \frac{R_2}{R_5} \pi = t / (R_0 C_0). \quad (5)$$

电路中的  $1/(R_0 C_0)$  是积分因子,它决定混沌信号的频率,通过改变  $R_0$  或  $C_0$  可以改变混沌信号

的频率,从而满足混沌通信的要求.本电路中取  $R_0 = 1 \text{ k}\Omega$  和  $C_0 = 240 \text{ nF}$ ,可以满足硬件电路实验要求.当系统参数取  $\alpha = 6$   $\beta = 20$   $\gamma = 0.01$   $\mu = -3$ ,  $b = 1$  时,图 10 为通过模拟电路的实验观察得到的

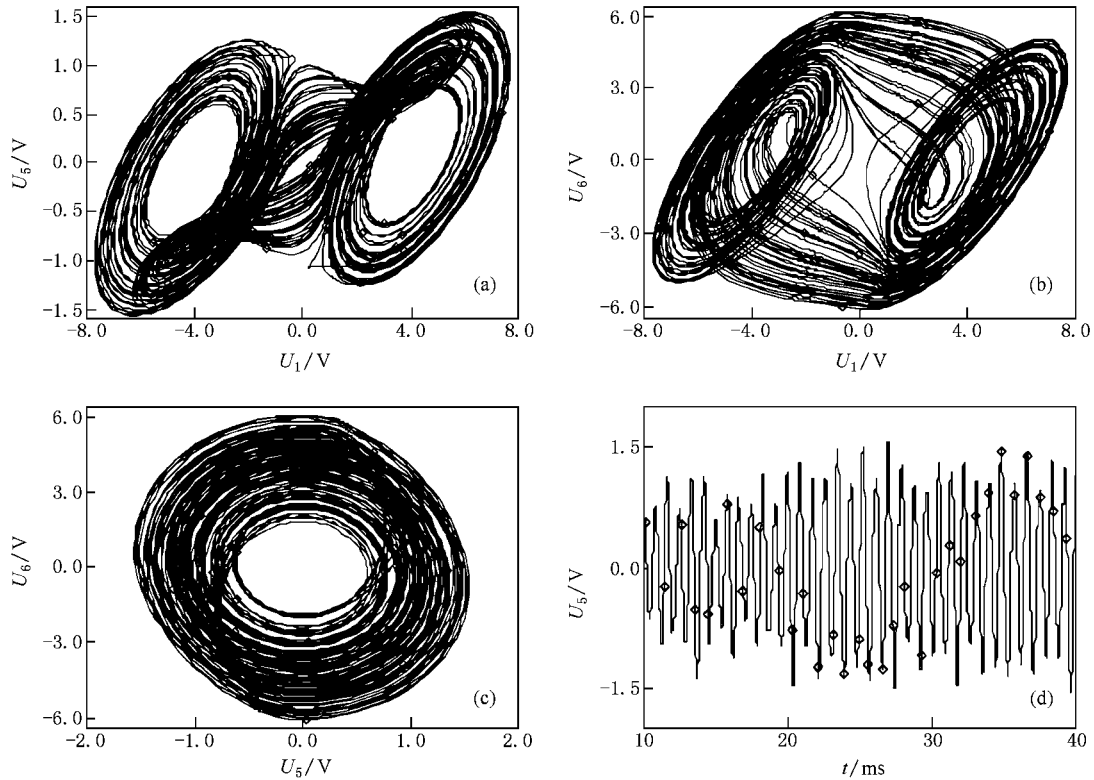


图 10 系统(1)的电路实验图 (a)  $x$ - $y$  平面相图; (b)  $x$ - $z$  平面相图; (c)  $y$ - $z$  平面相图; (d)  $y$  的时序图

吸引子,这与图 1 中数值仿真的结果一致.

## 5. 结 论

通过在三维自治系统的两个状态方程中引入相同的非线性函数,得到了一种新的混沌吸引子.

理论分析和计算机仿真结果表明,本文提出的混沌系统不仅数学模型拓扑结构简单,而且存在着复杂的混沌动力学行为,具有一切混沌系统的共有特征.同时,利用电路实验较好地证明了与数值仿真的一致性.该新的混沌系统在电子测量、保密通信、数字图像加密等领域中具有潜在的应用价值.

- [1] Lorenz E N 1963 *Atoms. Sci.* **20** 130
- [2] Rössler O E 1976 *Phys. Lett. A* **57** 397
- [3] Chen G R, Ueta T 1999 *Int. J. Bifurc. Chaos* **9** 1465
- [4] Lü J H, Chen G R 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 659
- [5] Matsumoto T 1984 *IEEE Trans. Circuit Syst.* **31** 1055
- [6] Yin Y Z 1996 *Int. J. Bifurc. Chaos* **6** 2101
- [7] Liu C X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1198 (in Chinese) [刘崇新 2002 物理学报 **51** 1198]
- [8] Zhong G Q, Man K F, Chen G R 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12**

- 2907
- [9] Yu S M, Qiu S S, Lin Q H 2003 *Sci. China E* **33** 365
- [10] Li Y, Yu S M, Dai Q Y, Liu M H, Liu Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3938 (in Chinese) [李亚、禹思敏、戴青云、刘明华、刘庆 2006 物理学报 **55** 3938]
- [11] Chen L, Peng H J, Wang D S 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3337 (in Chinese) [谌龙、彭海军、王德石 2008 物理学报 **57** 3337]
- [12] Chua L O, Lin G N 1990 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **37** 885

## A novel three-dimensional autonomous chaotic system

Feng Chao-Wen<sup>†</sup> Cai Li Kang Qiang Zhang Li-Sen

( College of Science , Air Force Engineering University , Xi' an , Shaanxi 710051 , China )

( Received 12 June 2010 ; revised manuscript received 1 September 2010 )

### Abstract

Based on the study of Chua's circuit , a novel chaotic system is reported. Basic dynamical properties of the new system are further investigated via theoretical analysis and numerical simulation , including Lyapunov exponent , Lyapunov dimension , portrait diagrams , Lyapunov exponent spectrum , bifurcation diagrams , Poincaré mapping and power spectrum. Finally , an electronic circuit is designed by the Orcad-PSpice software to implement the new system. The investigation results show that the new chaotic system has broad parameter regions , an maximum Lyapunov exponent approaching one , and is not topologically equivalent to Chua's circuit. It also shows a good agreement between numerical simulation and circuit experimental simulation , which proves the existence and physical realizability of the new chaotic system.

**Keywords:** chaotic system , Lyapunov exponent spectrum , bifurcation diagram , circuit realization

**PACS:** 05.45.Ac , 05.45.Pq

---

\* Project supported by the National High Technology Research and Development Program of China ( Grant No. 2008AAJ225 ) .

<sup>†</sup> E-mail: phonchownfcw@sohu.com