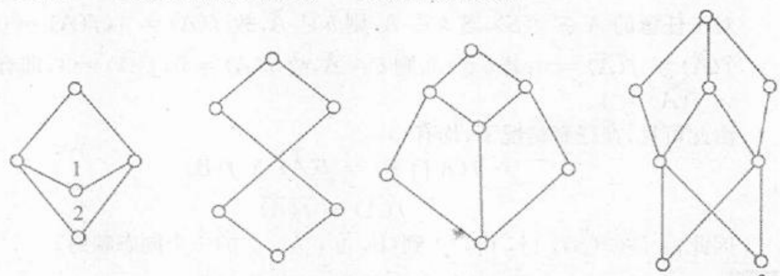
本章教材习题全解

6－1 习题

1. 由图 6－5 所示的偏序集，哪一个是格？为什么？



(a) (b) (c) (d)

图 6－5

解：a）不是格，因为 1，2 没有最大下界。

b）是格。

c）是格。

d）不是格，因为 1，2 没有最大下界。

2. 由下列集合 L 构成的偏序集 $\langle L, \leqslant \rangle$，其中 $\leqslant$ 的定义为：对于 $n_1, n_2 \in L$，$n_1 \leqslant n_2$ 当且仅当 n_1 是 n_2 的因子，问其中哪几个偏序集是格。

a）$L = \{1,2,3,4,6,12\}$。

b）$L = \{1,2,3,4,6,8,12,14\}$。

c) $L=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$。

解:a) 是格。

b) 不是格,因为 12,14 没有最小上界。

c) 不是格,因为 9,10 没有最小上界。

3. 验证以整除关系"|"为偏序关系的正整数格$\langle I_+, | \rangle$所诱导的代数系统$\langle I_+, \vee, \wedge \rangle$满足 $\vee$, $\wedge$ 的交换性、结合性、等幂性以及吸收性。

证明:格$\langle I_+, | \rangle$所诱导的代数系统$\langle I_+, \vee, \wedge \rangle$中的二元运算分别定义为:$\vee$:为最小公倍数,$\wedge$:为最大公约数。即对任意的 $a,b \in I_+$,有 $a \vee b = \mathrm{LCM}(a,b)$, $a \wedge b = \mathrm{GCD}(a,b)$。

对于任意的 $a,b,c \in I_+$,有

1) $a \vee b = \mathrm{LCM}(a,b) = \mathrm{LCM}(b,a) = b \vee a$,

$a \wedge b = \mathrm{GCD}(a,b) = \mathrm{GCD}(b,a) = b \wedge a$,满足交换性。

2) $(a \vee b) \vee c = \mathrm{LCM}(a,b) \vee c = \mathrm{LCM}(a,b,c) = a \vee \mathrm{LCM}(b,c) = a \vee (b \vee c)$,

$(a \wedge b) \wedge c = \mathrm{GCD}(a,b) \wedge C = \mathrm{GCD}(a,b,c) = a \wedge \mathrm{GCD}(b,c) = a \wedge (b \wedge c)$,满足结合性。

3) $(a \vee a) = \mathrm{LCM}(a,a) = a, a \wedge a = \mathrm{GCD}(a,a) = a$,满足幂等性。

4) $a \vee (a \vee b) = a \vee (\mathrm{GCD}(a,b)) = \mathrm{LCM}(a,\mathrm{GCD}(a,b)) = a$,

$a \wedge (a \vee b) = a \wedge (\mathrm{LCM}(a,b)) = \mathrm{GCD}(a,\mathrm{LCM}(a,b)) = a$,满足吸收性。

4. 设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$是一个格,任取 a,b 且 $a \prec b$,构造集合 $B=\{x \mid x \in A \text{且} a \preccurlyeq x \preccurlyeq b\}$,则$\langle B, \preccurlyeq \rangle$也是一个格。

证明:$\langle A, \preccurlyeq \rangle$是一个格,且 $B \subseteq A$,所以$\langle B, \preccurlyeq \rangle$是一个偏序集,对于任意的 $c,d \in B$,则 $a \preccurlyeq c \preccurlyeq b, a \preccurlyeq d \preccurlyeq b$,所以有 $a = a \vee a \preccurlyeq c \vee d \preccurlyeq b \vee b = b$,即 $a \preccurlyeq c \vee d \preccurlyeq b, c \vee d \in B, a = a \wedge a \preccurlyeq c \wedge d \preccurlyeq b \wedge b = b$,即 $a \preccurlyeq c \wedge d \preccurlyeq b$, $c \wedge d \in B$,因此$\langle B, \preccurlyeq \rangle$也是一个格。

5. 设 A,B 是两个集合,f 是 A 到 B 的映射,证明$\langle S, \subseteq \rangle$是$\langle \mathscr{P}(B), \subseteq \rangle$的一个子格,其中 $S=\{y \mid y=f(x), x \in \mathscr{P}(A)\}$。

证明:因为 $\subseteq$ 是偏序关系,由$\langle \mathscr{P}(B), \subseteq \rangle$所诱导的代数系统是$\langle \mathscr{P}(B), \cup, \cap \rangle$。对于任意的 $B_1, B_2 \in \mathscr{P}(B)$,有 $B_1 \cup B_2 \in \mathscr{P}(B)$, $B_1 \cap B_2 \in \mathscr{P}(B)$,故$\langle \mathscr{P}(B), \subseteq \rangle$是格。由 S 定义可知 $S \subseteq \mathscr{P}(B)$,所以$\langle S, \subseteq \rangle$是一个偏序集。

对于任意的 $S_1, S_2 \in S$,必存在 A_1, A_2,使得 $S_1 = f(A_1), S_2 = f(A_2)$,其中 $A_1 \subseteq A, A_2 \subseteq A$。又因为 f 是从 A 到 B 的映射,对于任意的 $a \in A$,都有唯一的 $b \in B$,使得 $f(a)=b$。所以有

$$\begin{aligned} S_1 \cup S_2 &= f(A_1) \cup f(A_2) \\ &= f(A_1 \cup A_2) \in S, \\ S_1 \cap S_2 &= f(A_1) \cap f(A_2) \\ &= f(A_1 \cap A_2) \in S_{\circ} \end{aligned}$$

因此$\langle S, \subseteq \rangle$是$\langle \mathscr{P}(B), \subseteq \rangle$的子格。

6. 设$\langle A, \vee, \wedge \rangle$是一个代数系统,其中 $\vee$, $\wedge$ 都是二元运算且分别满足幂等性,

举例说明吸收性不一定成立。

解：例如$\langle A, \vee, \wedge \rangle$是一个代数系统，其中$A=\{a,b\}$，

$\vee$运算定义为：$a \vee a = a, a \vee b = b, b \vee b = b, b \vee a = a$，

$\wedge$运算定义为：$a \wedge a = a, a \wedge b = b, b \wedge b = b, b \wedge a = a$，

则$\vee$，$\wedge$满足等幂性，但是$a \wedge (a \vee b) = a \wedge b = b$，不满足吸收律。

7. 设a和b是格$\langle A, \preccurlyeq \rangle$中的两个元素，证明：

a) $a \wedge b = b$当且仅当$a \vee b = a$。

b) $a \wedge b \prec b$和$a \wedge b \prec a$当且仅当a与b是不可比较的。

证明：a) $\langle A, \preccurlyeq \rangle$是格，满足吸收律，故若$a \wedge b = b$，则$a \vee b = a \vee (a \wedge b) = a$；若$a \vee b = a$，则$a \wedge b = (a \vee b) \wedge b = b$。

b) 若$a \wedge b \prec b$和$a \wedge b \prec a$，则$a \wedge b \neq b$且$a \wedge b \neq a$。

假设a与b是可比较的，则$a \preccurlyeq b$或$b \preccurlyeq a$，那么有$a \wedge b = a$或$a \wedge b = b$矛盾，所以a与b是不可比较的。

反之，若a与b是不可比较的，则$a \not\preccurlyeq b$且$b \not\preccurlyeq a$，即$a \wedge b \neq b$且$a \wedge b \neq a$。

因为在格中$a \wedge b \preccurlyeq b$和$a \wedge b \preccurlyeq a$成立，所以必有$a \wedge b \prec b$和$a \wedge b \prec a$。

8. 证明：在格中若$a \preccurlyeq b \preccurlyeq c$，则$a \vee b = b \wedge c, (a \wedge b) \vee (b \wedge c) = b = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$。

证明：在格中若$a \preccurlyeq b \preccurlyeq c$则$a \wedge b = a, a \vee b = b, b \wedge c = b, b \vee c = c, a \vee c = c$成立。

所以$a \vee b = b = b \wedge c$，

$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) = a \vee b = b, (a \vee b) \wedge (a \vee c) = b \wedge c = b$，因此$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) = b = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$成立。

9. 证明在格中成立$(a \wedge b) \vee (c \wedge d) \preccurlyeq (a \vee c) \wedge (b \vee d)$和$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$。

证明：由$a \wedge b \preccurlyeq a, c \wedge d \preccurlyeq c$，可得$(a \wedge b) \vee (c \wedge d) \preccurlyeq a \vee c$，由$a \wedge b \preccurlyeq b, c \wedge d \preccurlyeq d$，可得$(a \wedge b) \vee (c \wedge d) \preccurlyeq b \vee d$，所以$(a \wedge b) \vee (c \wedge d) \preccurlyeq (a \vee c) \wedge (b \vee d)$，

由$a \wedge b \preccurlyeq a, b \wedge c \preccurlyeq b, c \wedge a \preccurlyeq a$，可得$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \preccurlyeq a \vee b, ((a \wedge b) \vee (b \wedge c)) \vee (c \wedge a) \preccurlyeq (a \vee b) \vee a$，

即$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \vee a) \preccurlyeq a \vee b$，

同理可得$(a \wedge b) \vee ((b \wedge c)) \vee (c \wedge a) \preccurlyeq b \vee c, (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \preccurlyeq c \vee a$，

所以$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (a \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$。

10. 用对偶原理证明定理6-1.2中的后一个结论，即在格中若$a \preccurlyeq b$和$c \preccurlyeq d$，则$a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d$。

证明：由格的性质可得，若$a \preccurlyeq b$和$c \preccurlyeq d$，则$a \vee c \preccurlyeq b \vee d$。

对此结论应用对偶原理应有，若$b \preccurlyeq a$和$d \preccurlyeq c$，则$b \wedge d \preccurlyeq a \wedge c$，再将$a$与$b$互换，$c$与$d$互换，得若$a \preccurlyeq b$和$c \preccurlyeq d$，则$a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d$。

11. 设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$是一个格，证明$\langle A, \preccurlyeq_R \rangle$也是一个格。

证明：先证 $\preccurlyeq_R$ 是一个偏序关系，因为 $\preccurlyeq$ 是一个偏序关系，所以满足自反性、反对称性和传递性。对任意 $a \in A$，$\preccurlyeq$ 是自反的，所以 $a \preccurlyeq a$ 成立，从而 $a \preccurlyeq_R a$ 也成立，$\preccurlyeq_R$ 是自反的。

对于任意 $a,b \in A$ 若 $a \preccurlyeq_R b$ 且 $b \preccurlyeq_R a$，则有 $b \preccurlyeq a$ 且 $a \preccurlyeq b$ 成立，因为 $\preccurlyeq$ 是反对称的，所以 $a = b$，故 $\preccurlyeq_R$ 是反对称的。

对于任意 $a,b,c \in A$ 若 $a \preccurlyeq_R b, b \preccurlyeq_R c$，则有 $b \preccurlyeq a, c \preccurlyeq b$ 成立，因为 $\preccurlyeq$ 是传递的，所以 $c \preccurlyeq a$ 成立，$a \preccurlyeq_R c$，故 $\preccurlyeq_R$ 是传递的。

由上可知，$\langle A, \preccurlyeq_R \rangle$ 是一个偏序集。

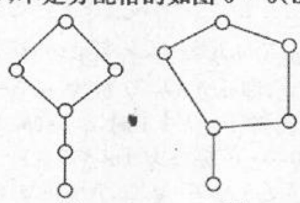
对于任意 $a,b \in A$ 由 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 为格可知 $a \wedge b, a \vee b$ 存在，设 $\vee_1$ 和 $\wedge_1$ 的关系是 $\preccurlyeq_R$ 的最小上界和最大下界，则 $a \vee_1 b = a \wedge b, a \wedge_1 b = a \vee b$。即 A 任意两个元素都有最小上界和最大下界。

综上可知，$\langle A, \preccurlyeq_R \rangle$ 也是一个格。

6—2 习题

1. 试举两个含有6个元素的格，其中一个是分配格，另一个不是分配格。

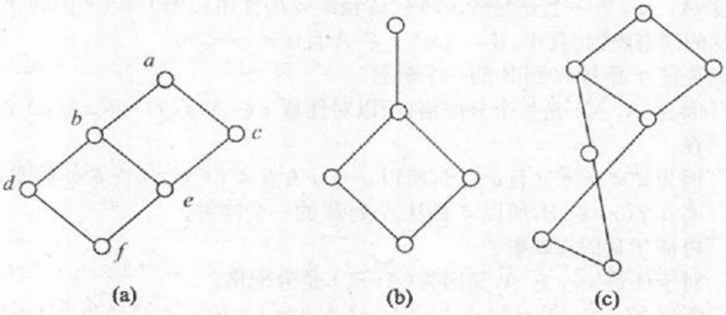
解：分配格如图6－6(a)，不是分配格的如图6－6(b)。



(a) (b)

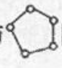
图6－6

2. 在图6－7中给出的几个格，哪个是分配格？



(a) (b) (c)

图6－7

解：(c) 不是分配格，因为它有与  同构的子格，(a)，(b) 是分配格。

3. 证明格$\langle I,\max,\min\rangle$是分配格。

证明：对任意的$a,b,c\in I$，

$$\max(a,\min(b,c))=\begin{cases}\max(a,b)=\begin{cases}a,b\leqslant c,b\leqslant a\\ b,b\leqslant c,a\leqslant b\end{cases},\\ \max(a,c)=\begin{cases}a,c\leqslant b,c\leqslant a\\ c,c\leqslant b,a\leqslant c\end{cases}\end{cases}$$

$$\min(\max(a,b),\max(a,c))=\begin{cases}\min(a,c)=a,b\leqslant a,a\leqslant c\\ \min(a,a)=a,b\leqslant a,c\leqslant a\\ \min(b,c)=\begin{cases}b,a\leqslant b,a\leqslant c,b\leqslant c,\\ c,a\leqslant b,a\leqslant c,c\leqslant b\end{cases}\\ \min(b,a)=a,a\leqslant b,c\leqslant a\end{cases}$$

所以$\max(a,\min(b,c))=\min(\max(a,b),\max(a,c))$。

由对偶原理可知，$\min(a,\max(b,c)=\max(\min(a,b),\min(a,c))$。

4. 证明在分配格中，可以把分配式更一般地写成：

$a\wedge(b_1\vee b_2\vee\cdots\vee b_n)=(a\wedge b_1)\vee(a\wedge b_2)\vee\cdots\vee(a\wedge b_n)$，

$a\vee(b_1\wedge b_2\wedge\cdots\wedge b_n)=(a\vee b_1)\wedge(a\vee b_2)\wedge\cdots\wedge(a\vee b_n)$。

证明：用数学归纳法

当$n=2$时，$a\wedge(b_1\vee b_2)=(a\wedge b_1)\vee(a\wedge b_2)$

假设当$n=k$时成立，即$a\wedge(b_1\vee b_2\vee\cdots\vee b_k)=(a\wedge b_1)\vee(a\wedge b_2)\vee\cdots\vee(a\wedge b_k)$，则当$n=k+1$时，$a\wedge(b_1\vee b_2\vee\cdots\vee b_k\vee b_{k+1})$

$=(a\wedge(b_1\vee b_2\vee\cdots\vee b_k))\vee(a\wedge b_{k+1})$

$=(a\wedge b_1)\vee(a\wedge b_2)\vee\cdots\vee(a\wedge b_k)\vee(a\wedge b_{k+1})$，

所以对于任意n在分配格中，分配式$a\wedge(b_1\vee b_2\vee\cdots\vee b_n)=(a\wedge b_1)\vee(a\wedge b_2)\vee\cdots\vee(a\wedge b_n)$，同理可得$a\vee(b_1\wedge b_2\wedge\cdots\wedge b_n)=(a\vee b_1)\wedge(a\vee b_2)\wedge\cdots\wedge(a\vee b_n)$。

5. 设$\langle A,\leqslant\rangle$是一个分配格，$a,b\in A$且$a\prec b$，证明：$f(x)=(x\vee a)\wedge b$是一个从$A$到$B$的同态映射。其中，$B=\{x\mid x\in A$且$a\leqslant x\leqslant b\}$

证明：先证f是从A到B的一个映射。

因为$\langle A,\leqslant\rangle$是一个分配格，所以对任意$x\in A$，$f(x)=(x\vee a)\wedge b$唯一存在。

因为$a\leqslant x\vee a$且$a\prec b$，所以$a=a\wedge b\leqslant(x\vee a)\wedge b\leqslant b$，即$a\leqslant f(x)\leqslant b$，$f(x)\in B$，所以$f$是从$A$到$B$的一个映射。

再证f是同态映射。

对于任意$x,y\in A$，又因为$\langle A,\leqslant\rangle$是分配格。

所以$f(x\vee y)=((x\vee y)\vee a)\wedge b=(x\vee y\vee a)\wedge b=(x\wedge b)\vee(y\wedge b)\vee(a\wedge b)$，

$f(x)\vee f(y)=((x\vee a)\wedge b)\vee((y\vee a)\wedge b)=(x\wedge b)\vee(a\wedge b)\vee(y\wedge b)\vee(a\wedge b)=(x\wedge b)\vee(y\wedge b)\vee(a\wedge b)$，

$f(x\vee y)=f(x)\vee f(y)$，

同理可得 $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$，

因此，f 是一个从 A 到 B 的同态映射。

6. 试举例说明模格不一定是分配格。

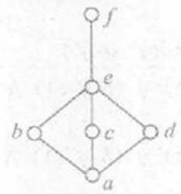


图 6－8

解：给定格如图 6－8 所示，对于任意的 $x,y,z \in \{a,b,c,d,e,f\}$，若有 $x \preccurlyeq y$，则 $x = a$ 或 $y = e$ 或 $y = f$，

$y = f$ 时，$x \vee (y \wedge z) = x \vee z = y \wedge (x \vee z)$，

$x = a$ 时，$x \vee (y \wedge z) = y \wedge z = y \wedge (x \vee z)$，

$y = e$ 时，则 $x \in \{a,b,c,d\}$，若 $x = a$，则 $x \vee (y \wedge z) = y \wedge z = y \wedge (x \vee z)$，

若 $x \in \{b,c,d\}$，则 $z \in \{a,b,c,d,e,f\}$，

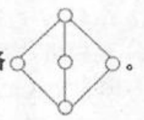
当 $z = a$ 时，$x \vee (y \wedge z) = x \vee z = x, y \wedge (x \vee z) = y \wedge x = x$，

当 $z = f$ 时，$x \vee (y \wedge z) = x \vee y = y, y \wedge (x \vee z) = y \wedge x = y$，

当 $x = e$ 时，$x \vee (y \wedge z) = x \vee y = y, y \wedge (x \vee z) = y \wedge z = y$，

当 $z \in \{b,c,d\}$ 时，若 $x = z$，则 $x \vee (y \wedge z) = x \vee z = x, y \wedge (x \vee z) = y \wedge x = x$，

若 $x \neq z$，则 $x \wedge (y \wedge z) = x \vee z = e, y \wedge (x \vee z) = y \wedge e = e$，

综上可知：$x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \wedge z) = y \wedge (x \vee z)$ 因此上图所示的格是模格，但不是分配格，因此格中有子格 。

7. 证明：一个格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是分配格当且仅当对任意的 $a,b,c \in A$，有

$$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$$

证明：必要性，若格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是分配格，则有

$$\begin{aligned}
&(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \\
&= (b \wedge (a \vee c)) \vee (c \wedge a) \\
&= (b \vee (c \wedge a)) \wedge ((a \vee c) \vee (c \wedge a)) \\
&= (b \vee c) \wedge (b \vee a) \wedge (c \vee a) \\
&= (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)
\end{aligned}$$

充分性，对任意 $a,b,c \in A$，令 $a' = (a \vee b) \wedge (a \vee c), b' = b \vee c, c' = a$，

则 $(a' \wedge b') \vee (b' \wedge c') \vee (c' \wedge a')$

$= ((a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)) \vee ((b \vee c) \wedge a) \vee (a \wedge (a \vee b) \wedge (a$

$\vee c))$

$=((a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)) \vee ((b \vee c) \wedge a) \vee a$

$=((a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \vee a$

$=a \vee (b \wedge c)$

$(a' \vee b') \wedge (b' \vee c') \wedge (c' \vee a')$

$=(((a \vee b) \wedge (a \vee c)) \vee (b \vee c)) \wedge ((b \vee c) \wedge a) \vee (a \vee (a \vee b) \wedge (a \vee c))$

$=(((a \vee b) \wedge (a \vee c)) \vee (b \vee c)) \wedge ((a \vee b) \wedge (a \vee c))$

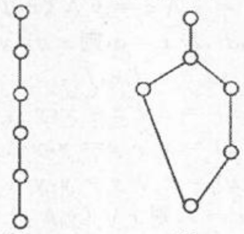
$=(a \vee b) \wedge (a \vee c)$

所以 $a \vee (b \wedge c)=(a \vee b) \wedge (a \vee c)$，同理可证 $a \wedge (b \vee c)=(a \vee b) \wedge (a \vee c)$，

所以格 $\langle A, \leqslant \rangle$ 是分配格。

8. 举出两个含有6个元素的格，其中一个是模格，另一个不是模格。

解：例如图6－9所示，(a)模格，(b)不是模格。



(a) (b)

图6－9

9. 证明：一个格是模格当且仅当对于任意的 a,b,c，有

$$a \vee (b \wedge (a \vee c))=(a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

证明：必要性，设 $\langle A, \leqslant \rangle$ 是模格，则对于任意的 $a,b,c \in A$，若 $a \leqslant b$，则 $a \vee (b \wedge c)=b \wedge (a \vee c)$，因为 $a \leqslant a \vee c$，所以 $a \vee ((a \vee c) \wedge b)=(a \vee c) \wedge (a \vee b)$。

充分性，设 $\langle A, \leqslant \rangle$ 是格，且对于任意 $a,b,c \in A$，$a \vee (b \wedge (a \vee c))=(a \vee b) \wedge (a \vee c)$，则当 $a \leqslant c$ 时，$a \vee c=c$，故得 $a \vee (b \wedge c)=(a \vee b) \wedge c$。

所以 $\langle A, \leqslant \rangle$ 是模格。

10. 设 $\langle A, \leqslant \rangle$ 是模格，$x,y,a \in A$，且 x,y 分别盖住 a，证明 $x \vee y$ 盖住 x 和 y。

证明：由 x,y 盖住 a 可知，$a \leqslant x$ 且 $a \leqslant y$，且没有 $z \in A$ 使得 $a \leqslant z \leqslant x$，$a \leqslant z \leqslant y$，所以 $x \wedge y=a$。又因为 $x \leqslant x \vee y$，$y \leqslant x \vee y$，若存在 $z \in A$，使 $x \leqslant z \leqslant x \vee y$，则 $x \wedge y,x,y,z,x \vee y$ 的关系如图6－10所示。

现考虑 $x \vee (z \wedge y)$，有三种可能，

a) 若 $z \wedge y=y$，则 $y \leqslant z$，又 $x \leqslant z$，故有 $x \vee y \leqslant z$，$x \vee y=z$；

b) 若 $z \wedge y=z$，则 $z \leqslant y$，而 $a \leqslant x \leqslant z$，故 $a \leqslant z \leqslant y$，这与 y 盖住 a 矛盾；

c) $z \wedge y=a$，则 $x \vee (z \wedge y)=x \vee a=x$，又 $z \wedge (x \vee y)=z$，又因为 x

$\leqslant z$，由模格定义可知：$x \vee (z \wedge y) = z \wedge (x \vee y)$，即 $x = z$，可见 $x \vee y$ 盖住 x，同理可证 $x \vee y$ 盖住 y。

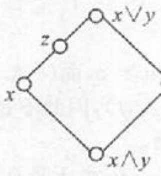


图 6－10

11. 设 $\langle S, \leqslant \rangle$ 是模格，$a, b \in S$，作 $X = \{x \mid x \in S，且\ a \wedge b \leqslant x \leqslant a\}$，$Y = \{y \mid y \in S，且\ b \leqslant y \leqslant a \vee b\}$，则下面的互逆映射：

$$x \to x \vee b (x \in X), y \to y \wedge a (y \in Y),$$

是 X 和 Y 之间的同构。

证明：记 $f: x \to x \vee b(x \in X)$，$g: y \to y \wedge a(y \in Y)$，当 $a \wedge b \leqslant x \leqslant a$，$(a \wedge b) \vee b \leqslant x \vee b \leqslant a \vee b$，即 $b \leqslant x \vee b \leqslant a \vee b$，$f(x) \in Y$，故 f 是 X 到 Y 的映射；当 $b \leqslant y \leqslant a \vee b$ 时，$b \wedge a \leqslant y \wedge a \leqslant a$，$g(y) \in X$，故 g 是从 Y 到 X 的映射。

对于任意 $x \in X$，$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x \vee b) = (x \vee b) \wedge a$；因为 $\langle S, \leqslant \rangle$ 是模格，$x \leqslant a$，则 $(x \wedge b) \vee a = x \vee (a \wedge b) = x$，即 g 是 f 的左逆。类似地，对任意 $y \in Y$，$f \circ g(y) = f(g(y)) = f(y \wedge a) = (y \wedge a) \vee b = y \wedge (a \vee b) = y$，即 g 是 f 的右逆，因此 f 和 g 都是双射。

若对于任意的 $x_1 \leqslant x_2$，$x_1, x_2 \in X$，则 $a \wedge b \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant a$，从而 $(x_1 \vee b) \leqslant (x_2 \vee b)$，即 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$，故 f 是从 X 到 Y 的同构映射。

若对于任意的 $y_1 \leqslant y_2$，$y_1, y_2 \in Y$，则 $b \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant a \vee b$，从而 $(y_1 \wedge a) \leqslant (y_2 \wedge a)$，即 $g(y_1) \leqslant g(y_2)$，故 g 是从 Y 到 X 的同构映射。

6－3 习题

1. 试根据图 6－11 所示的有界格，回答以下问题。

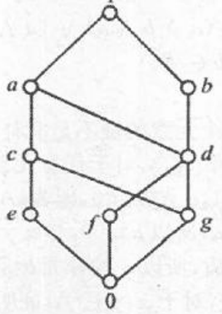


图 6－11

a) a 和 f 的补元素分别是哪些元素？

b) 该有界格是分配格吗？

c) 该有界格是有补格吗？

解：a) a 和 f 都没有补元。

b) 因为 $c \wedge (e \vee f) = c \wedge a = c$，而 $(c \wedge e) \vee (c \wedge f) = e \vee 0 = e$，所以 $c \wedge (e \vee f) \neq (c \wedge e) \vee (c \wedge f)$，因此不是分配格。

c) d 没有补元，它不是有补格。

2. 证明：在有界格中 0 是 1 的唯一补元，1 是 0 的唯一补元。

证明：$\langle A, \leqslant \rangle$ 是有界格，0 是 A 的全下界，1 是 A 的全上界，所以 $0 \wedge 1 = 0, 0 \vee 1 = 1$，从而 0 是 1 的补元，1 是 0 的补元。

假设 0_1 也是 1 的补元，则 $0_1 \wedge 1 = 0, 0_1 \vee 1 = 1$，由于 $0 \leqslant 0_1 \leqslant 1$，所以 $0_1 \wedge 1 = 0_1$，即 $0 = 0_1$，因此 0 是 1 的唯一补元。

3. 证明具有两个或更多个元素的格中不存在以自身为补元的元素。

证明：因在格中求补元，此格必为有界格，设 $\langle A, \leqslant \rangle$ 为有界格，若 $|A| = 2$，则 $A = \{0,1\}$。因为 $0 \vee 0 = 0, 0 \wedge 0 = 0, 1 \vee 1 = 1, 1 \wedge 1 = 1, 0 \vee 1 = 1, 0 \wedge 1 = 0$，所以 0 和 1 互为补元，即具有两个元素的格中不存在以自身为补元的元素。

若 $|A| > 2$，设存在 $a \in A, a \neq 0$ 且 $a \neq 1$，a 以自身为补元，则由补元定义：$a = a \wedge a = 0, a = a \vee a = 1$，可得 $0 = a = 1$ 与假设矛盾，因此不存在以自身为补元的元素。

因此，具有连个或更多个元素的格中不存在以自身为补元的元素。

4. 在有界分配格中，证明具有补元的那些元素组成一个子格。

证明：设 $\langle A, \leqslant \rangle$ 是一有界分配格，B 是 A 中具有补元的那些元素的集合，因为 0 和 1 互为补元，所以 $0, 1 \in B \neq \varnothing$。对于任意的 $a, b \in B$，设其补元分别为 $\bar{a}, \bar{b}$。

先考察 $a \vee b$，因为 $(a \vee b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) = (a \vee b \vee \bar{a}) \wedge (a \vee b \vee \bar{b}) = (b \vee 1) \wedge (a \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1$，

$(a \vee b) \wedge (\bar{a} \wedge \bar{b}) = (a \wedge \bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{a} \wedge \bar{b}) = (0 \wedge \bar{b}) \vee (0 \wedge \bar{a}) = 0 \vee 0 = 0$，所以 $a \vee b \in B$。

再考察 $a \wedge b$，因为 $(a \wedge b) \vee (\bar{a} \vee \bar{b}) = (a \vee \bar{a} \vee \bar{b}) \wedge (b \vee \bar{a} \vee \bar{b}) = (1 \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1$，

$(a \wedge b) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b}) = (a \wedge b \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b \wedge \bar{b}) = (0 \wedge b) \vee (0 \wedge a) = 0 \vee 0 = 0$，所以 $a \wedge b \in B$。

综上可知 B 是子格。

5. 试证明，具有三个或更多个元素的链不是有补格。

证明：设 $\langle A, \leqslant \rangle$ 是链，且 $|A| \leqslant 3$，对于任意元素 $a \in A$，且 $a \neq 0, a \neq 1$，若 a 有补元 b，则有 $a \vee b = 1, a \wedge b = 0$，因为 $\langle A, \leqslant \rangle$ 是链，必有 $a \leqslant b$ 或 $b \leqslant a$，若 $a \leqslant b$，则 $a \wedge b = a$，所以 $a = 0$，与 $a \neq 0$ 矛盾，若 $b \leqslant a$，则 $a \vee b = a$，得 $a = 1$，与 $a \neq 1$ 矛盾，所以 a 的补元 b 是不存在的，这种链不是有补格。

6. 设 $\langle A, \leqslant \rangle$ 是一个有界格，对于 $x, y \in A$，证明：

a) 若 $x \vee y = 0$，则 $x = y = 0$。

b) 若 $x \wedge y = 1$，则 $x = y = 1$。

证明：a) 若 $x \vee y = 0$，则 $x \preccurlyeq 0, y \preccurlyeq 0$。因为 0 是全下界，所以不可能有 $x \prec 0$ 和 $y \prec 0$，则必有 $x = y = 0$；

b) 若 $x \wedge y = 1$，则 $1 \preccurlyeq x, 1 \preccurlyeq y$，因为 1 是全上界，不可能有 $1 \prec x, 1 \prec y$，则有 $x = y = 1$。

6—4　习题

1. 证明在布尔代数中，有

$$a \vee (\overline{a} \wedge b) = a \vee b$$
$$a \wedge (\overline{a} \vee b) = a \wedge b$$

证明：布尔代数是由布尔格所诱导的代数系统，布尔格是有补分配格，所以

$$a \vee (\overline{a} \wedge b) = (a \vee \overline{a}) \wedge (a \vee b) = 1 \wedge (a \vee b) = a \vee b,$$
$$a \wedge (\overline{a} \vee b) = (a \wedge \overline{a}) \vee (a \wedge b) = 0 \vee (a \wedge b) = a \wedge b.$$

2. 设 $\langle S, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 是一个布尔代数，$x, y \in S$，证明 $x \preccurlyeq y$ 当且仅当 $\overline{y} \preccurlyeq \overline{x}$。

证明：$\langle S, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 是一个布尔代数，$x, y \in S$，则 $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x \wedge y = x \Leftrightarrow \overline{x \wedge y} = \overline{x} \Leftrightarrow \overline{x} \vee \overline{y} = \overline{x} \Leftrightarrow \overline{y} \preccurlyeq \overline{x}$。

3. $\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 是布尔代数，如果在 A 上定义二元运算 $\oplus$ 为：

$$a \oplus b = (a \wedge \overline{b}) \vee (\overline{a} \wedge b)$$

证明：$\langle A, \oplus \rangle$ 是一个阿贝尔群。

证明：① 因为 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 是布尔代数，$\vee, \wedge, ^{-}$ 三个运算在 A 上是封闭的，所以对于任意 $a, b \in A$，$a \oplus b = (a \wedge \overline{b}) \vee (\overline{a} \wedge b) \in A$，运算 $\oplus$ 在 A 上是封闭的。

② 对于任意 $a, b, c \in A$，

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \oplus c &= ((a \wedge \overline{b}) \vee (\overline{a} \wedge b)) \oplus c \\ &= (((a \wedge \overline{b}) \vee (\overline{a} \wedge b)) \wedge \overline{c}) \vee (\overline{(a \wedge \overline{b}) \vee (\overline{a} \wedge b)} \wedge c) \\ &= (a \wedge \overline{b} \wedge \overline{c}) \vee (\overline{a} \wedge b \wedge \overline{c}) \vee (((\overline{a} \vee b) \wedge (a \vee \overline{b})) \wedge c) \\ &= (a \wedge \overline{b} \wedge \overline{c}) \vee (\overline{a} \wedge b \wedge \overline{c}) \vee (((a \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b})) \wedge c) \\ &= (a \wedge \overline{b} \wedge \overline{c}) \vee (\overline{a} \wedge b \wedge \overline{c}) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b} \wedge c)\end{aligned}$$

同理可得 $a \oplus (b \oplus c) = (a \wedge \overline{b} \wedge \overline{c}) \vee (\overline{a} \wedge b \wedge \overline{c}) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b} \wedge c)$，即 $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$，运算 $\oplus$ 满足结合性。

③ 对于任意 $a \in A$，有 $a \oplus 0 = (a \wedge 1) \vee (\overline{a} \wedge 0) = a = 0 \oplus a = (0 \wedge \overline{a}) \vee (1 \wedge a)$，故 0 是幺元。

④ 对于任意 $a \in A$，有 $a \oplus a = (a \wedge \overline{a}) \vee (\overline{a} \wedge a) = 0 \vee 0 = 0$，所以 $\overline{a} = a$，即 A 中每一个元素都以自身为逆元。

由上可知 $\langle A, \oplus \rangle$ 是群。

对任意的 $a, b \in A$，$a \oplus b = (a \wedge \overline{b}) \vee (\overline{a} \wedge b) = (b \wedge \overline{a}) \vee (\overline{b} \wedge a) = b \oplus a$，所以运算 $\oplus$ 满足交换性，故 $\langle A, \oplus \rangle$ 是阿贝尔群。

4. 设 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 是一个布尔代数，如果在 A 上定义二元运算 $+, \cdot$ 为：

$$a + b = (a \wedge \overline{b}) \vee (\overline{a} \wedge b),$$

$$a \cdot b = a \wedge b,$$

证明：$\langle A, +, \cdot\rangle$ 是以 1 为幺元的环。

证明：由 6－4 习题 3 可知 $\langle A, +\rangle$ 是阿贝尔群。

对于任意 $a,b,c \in A, a \cdot b = a \wedge b \in A$，满足封闭性。

$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot (b \wedge c) = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = (a \cdot b) \wedge c = (a \cdot b) \cdot c$ 满足结合性，故 $\langle A, \oplus\rangle$ 是半群。

$$\begin{aligned} a \cdot (b+c) &= a \cdot ((\bar{b} \wedge c) \vee (b \wedge \bar{c})) \\ &= a \wedge ((\bar{b} \wedge c) \vee (b \wedge \bar{c})) \\ &= (a \wedge \bar{b} \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \bar{c}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \cdot b + a \cdot c &= (a \wedge b) + (a \wedge c) \\ &= (\overline{(a \wedge b)} \wedge (a \wedge c)) \vee ((a \wedge b) \wedge \overline{(a \wedge c)}) \\ &= ((\bar{a} \vee \bar{b}) \wedge a \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge (\bar{a} \vee \bar{c})) \\ &= (a \wedge \bar{b} \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \bar{c}) \end{aligned}$$

所以 $a \cdot (a+b) = a \cdot b + a \cdot c$，即 $\cdot$ 对 $+$ 满足分配律。

对于 $a \in A, a \cdot 1 = a \wedge 1 = a = 1 \cdot a = 1 \wedge a$，1 是运算 $\cdot$ 的幺元。

综上可知，$\langle A, +, \cdot\rangle$ 是以 1 为幺元的环。

5. 对于 6－4 习题 4 中的二元运算 $+$ 和 $\cdot$，证明

a) $(a+b)+b = a$。

b) $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$。

c) $a + a = 0$。

d) $a + 0 = a$。

e) $a + 1 = \bar{a}$。

证明：a) 由 6－4 习题 3 可知运算 $+$ 是可结合的，所以

$(a+b)+b = a+(b+b) = a+(b \wedge \bar{b}) \vee (\bar{b} \wedge b) = a+(0 \vee 0) = a+0 = (a \wedge 1) \vee (\bar{a} \wedge 0) = a \vee 0 = a$，即 $(a+b)+b = a$。

b) 6－4 习题 4 中已证 $a \cdot (b+c) = (a \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$。

c) $a + a = (a \wedge \bar{a}) \vee (\bar{a} \wedge a) = 0 \vee 0 = 0$。

d) $a + 0 = (a \wedge 1) \vee (\bar{a} \wedge 0) == a \vee 0 = a$。

e) $a + 1 = (a \wedge 0) \vee (\bar{a} \wedge 1) = 0 \vee \bar{a} = \bar{a}$。

6. 设 $K = \{1,2,5,10,11,22,55,110\}$ 是 110 的所有整因子的集合，证明：具有全上界 110 和全下界 1 的代数系统 $\langle K, \mathrm{LCM}, \mathrm{GCD}, '\rangle$ 是一个布尔代数，这里，对于任意的 $x \in K, x' = 110/x$。

证明：显然，代数系统 $\langle K, \mathrm{LCM}, \mathrm{GCD}, '\rangle$ 是由格 $\langle K, |\rangle$ 所诱导的，其中 $|$ 为整除关系。

对于任意的 $a,b,c \in K$，有 $a \,\mathrm{LCM}(b \,\mathrm{GCD}\, c) = (a \,\mathrm{LCM}\, b)\mathrm{GCD}(a \,\mathrm{LCM}\, c)$，$a \,\mathrm{GCD}(b \,\mathrm{LCM}\, c) = (a \,\mathrm{GCD}\, b)\mathrm{LCM}(a \,\mathrm{GCD}\, c)$，则 $\langle K, |\rangle$ 为分配格。

对于 K 中元素，因为 $1 \,\mathrm{LCM}\, 110 = 110, 1 \,\mathrm{GCD}\, 110 = 1$，

$2 \,\mathrm{LCM}\, 55 = 110, 2 \,\mathrm{GCD}\, 55 = 1$，

$5 \,\mathrm{LCM}\, 22 = 110, 5 \,\mathrm{GCD}\, 22 = 1$，

$10 \text{ LCM } 11 = 110, 10 \text{ GCD } 11 = 1$,

所以有：$1' = 110, 2' = 55, 5' = 22, 10' = 11$。即 K 中任一元素 X 的补元为 X'，则格 $\langle K, |\rangle$ 为有补分配格。所以 $\langle K, \text{LCM}, \text{GCD}, '\rangle$ 是一个布尔代数。

7. 设 $\langle K, \vee, \wedge, '\rangle$ 和 $\langle L, \cup, \cap, ^{-}\rangle$ 是两个布尔代数，并设 f 是从 K 到 L 的满同态，即对于任意的 $x, y \in K$，有 $f(x \wedge y) = f(x) \cap f(y)$，$f(x \vee y) = f(x) \cup f(y)$，$f(x') = \overline{f(x)}$，试证明：$f(0_K) = 0_L$，$f(1_K) = 1_L$。这里 $0_K, 0_L$ 和 $1_K, 1_L$ 分别是相应的布尔代数中的全上界和全下界。

证明：因为 f 是 K 到 L 的满射，则对任意 $l \in L$，存在 $k \in K$，使得 $f(k) = l$。

因为 $l \cup f(0_K) = f(k) \cup f(0_K) = f(k \vee 0_K) = f(k) = l$,

$l \cap f(1_K) = f(k) \cap f(1_K) = f(k \wedge 1_K) = f(k) = l$,

所以有 $f(0_K) \leqslant l, l \leqslant f(1_K)$，由 l 的任意性知，$f(0_K)$ 和 $f(1_K)$ 分别是 L 的全下界和全上界，因为布尔代数的全上界和全下界是唯一的，所以 $f(0_K) = 0_L$，$f(1_K) = 1_L$。

8. 设 12 和 24 的整因子集合分别为 $K_1 = \{1,2,3,4,6,12\}$ 和 $K_2 = \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$，试问 $\langle K_1, \text{LCM}, \text{GCD}, '\rangle$ 和 $\langle K_2, \text{LCM}, \text{GCD}, '\rangle$ 是布尔代数吗？

解：$\langle K_1, \text{LCM}, \text{GCD}, '\rangle$ 是由 $\langle K_1, |\rangle$ 诱导的（$|$ 表示整除关系），$\langle K_2, \text{LCM}, \text{GCD}, '\rangle$ 是由 $\langle K_2, |\rangle$ 诱导的。

$\langle K_1, |\rangle$ 所对应的哈斯图如图 6－12(a) 所示。因为 2 和 6 没有补元，所以 $\langle K_1, |\rangle$ 不是有补格，也不是布尔格，故 $\langle K_1, \text{LCM}, \text{GCD}, '\rangle$ 不是布尔代数。

$\langle K_2, |\rangle$ 所对应的哈斯图如图 6－12(b) 所示。因为 2,4,6 和 12 都没有补元，所以 $\langle K_2, |\rangle$ 不是有补格，也不是布尔格，故 $\langle K_2, \text{LCM}, \text{GCD}, '\rangle$ 不是布尔代数。

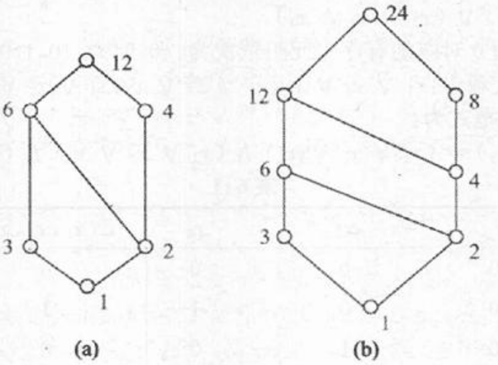


图 6－12

9. 设 $a, b_1, b_2, \cdots, b_r$ 都是布尔代数 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-}\rangle$ 的原子，那么，$a \leqslant (b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_r)$ 当且仅当存在着 $i(1 \leqslant i \leqslant r)$ 使得 $a = b_i$。

证明：充分性，若存在 i 使得 $a = b_i (1 \leqslant i \leqslant r)$，则有 $a = b_i \leqslant (b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_{i-1} \vee b_i \vee b_{i+1} \vee \cdots \vee b_r)$,

必要性，反证法，设 $a \leqslant (b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_r)$，但不存在 $i(1 \leqslant i \leqslant r)$ 使 $a =$

b_i，则 $a \wedge \overline{(b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_r)} = a \wedge (b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_r) = (a \wedge b_1) \vee \cdots \vee (a \wedge b_r) = 0 \vee \cdots \vee 0 = 0$，

因为 a 和 b_i 均是原子，$a \neq b_i (1 \leqslant i \leqslant r)$，则 $a \wedge b_i = 0 (1 \leqslant i \leqslant r)$，所以由定理6-4.1可知，$a \leqslant \overline{(b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_r)}$ 这与 $a \leqslant (b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_r)$ 矛盾，假设不成立，所以必存在 $i(1 \leqslant i \leqslant r)$ 使得 $a = b_i$。

10. 设 $b_1, b_2, \cdots, b_r$ 是有限布尔代数 $\langle A, \vee, \wedge, ^- \rangle$ 中的所有原子，那么 $y = 0$ 当且仅当对每一个 i 都有 $y \wedge b_i = 0$，这里，$1 \leqslant i \leqslant r$。

证明：必要性，若 $y = 0$，则 $y \wedge b_i = 0 (1 \leqslant i \leqslant r)$。

充分性，用反证法。假设对每个 i 都有 $y \wedge b_i = 0 (1 \leqslant i \leqslant r)$，但 $y \neq 0$。则由定理6-4.2可知，至少存在一个原子 $b_j (1 \leqslant j \leqslant r)$ 使得 $b_j \leqslant y$，则 $b_j \wedge y = b_j \neq 0$ 矛盾，所以 $y = 0$。

6－5 习题

1. 设 $E(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x_2} \wedge x_3)$ 是布尔代数 $\langle \{0,1\}, \vee, \wedge, ^- \rangle$ 上的一个布尔表达式，试写出 $E(x_1, x_2, x_3)$ 的析取范式和合取范式。

解：布尔表达式 $E(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x_2} \wedge x_3)$ 所对应的函数表，如表6-1所示。因为函数值为1所对应的有序三元组依次为 $\langle 0,0,1 \rangle$，$\langle 0,1,1 \rangle$，$\langle 1,0,1 \rangle$，$\langle 1,1,0 \rangle$，$\langle 1,1,1 \rangle$，所以可分别构造小项为：$\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3$，$\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3$，$x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3$，$x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}$，$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$，因此 $E(x_1, x_2, x_3)$ 的析取范式为：

$E(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$，

因为函数值0对应的有序三元组依次为：$\langle 0,0,0 \rangle$，$\langle 0,1,0 \rangle$，$\langle 1,0,0 \rangle$，所以可分别构造大项为：$x_1 \vee x_2 \vee x_3$，$x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$，$\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3$，因此，$E(x_1, x_2, x_3)$ 的合取范式为：

$E(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$。

表6-1

x_1	x_2	x_3	$E(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1