本章教材习题全解

2－1,2－2 习题

1. 用谓词表达式写出下列命题。

a) 小张不是工人。

b) 他是田径或球类运动员。

c) 小莉是非常聪明和美丽的。

d) 若 m 是奇数,则 $2m$ 不是奇数。

e) 每一个有理数是实数。

f) 某些实数是有理数。

g) 并非每一个实数都是有理数。

h) 直线 A 平行于直线 B,当且仅当直线 A 不相交于直线 B。

解:a) 设 $W(x)$:x 是工人。c:小张。

则有 $\neg W(c)$。

b) 设 $S(x)$:x 是田径运动员。$B(x)$:x 是球类运动员。h:他。

则有 $S(h) \vee B(h)$。

c) 设 $C(x)$:x 是聪明的。$B(x)$:x 是美丽的。l:小莉。

则有 $C(l) \wedge B(l)$。

d) 设 $O(x)$:x 是奇数。

则有 $O(m) \rightarrow \neg O(2m)$。

e) 设 $R(x)$:x 是实数。$Q(x)$:x 是有理数。

则有 $(\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))$。

f) 设 $R(x)$:x 是实数。$Q(x)$:x 是有理数。

则有 $(\exists x)(R(x) \wedge Q(x))$。

g) 设 $R(x)$:x 是实数。$Q(x)$:x 是有理数。

则有 $\neg(\forall x)(R(x) \rightarrow Q(x))$。

h) 设 $P(x,y)$:直线 x 平行于直线 y。$G(x,y)$:直线 x 相交于直线 y。

则有 $P(A,B) \rightleftharpoons \neg G(A,B)$。

2. 找出以下十二个句子所对应的谓词表达式。

a) 所有教练员是运动员。$(J(x), L(x))$

b) 某些运动员是大学生。$(S(x))$

c) 某些教练是年老的,但是健壮的。$(O(x), V(x))$

d) 金教练既不老但也不是健壮的。(j)

e) 不是所有运动员都是教练。
f) 某些大学生运动员是国家选手。($C(x)$)
g) 没有一个国家选手不是健壮的。
h) 所有老的国家选手都是运动员。
i) 没有一位女同志既是国家选手又是家庭妇女。($W(x),H(x)$)
j) 有些女同志既是教练员又是国家选手。
k) 所有运动员都钦佩某些教练。($A(x,y)$)
l) 有些大学生不钦佩运动员。

解:a) 设 $J(x)$:x 是教练员。$L(x)$:x 是运动员。
则有$(\forall x)(J(x)\to L(x))$。
b) 设 $S(x)$:x 是大学生。$L(x)$:x 是运动员。
则有$(\exists x)(L(x)\land S(x))$。
c) 设 $J(x)$:x 是教练员。$O(x)$:x 是年老的。$V(x)$:x 是健壮的。
则有$(\exists x)(J(x)\land O(x)\land V(x))$。
d) 设 $O(x)$:x 是年老的。$V(x)$:x 是健壮的。j:金教练。
则有$\neg O(j)\land\neg V(j)$。
e) 设 $L(x)$:x 是运动员。$J(x)$:x 是教练员。
则$\neg(\forall x)(L(x)\to J(x))$。
本题亦可理解为:某些运动员不是教练。
故$(\exists x)(L(x)\land\neg J(x))$。
f) 设 $S(x)$:x 是大学生。$L(x)$:x 是运动员。$C(x)$:x 是国家选手。
则有$(\exists x)(S(x)\land L(x)\land C(x))$。
g) 设 $C(x)$:x 是国家选手。$V(x)$:x 是健壮的。
则有$(\forall x)(C(x)\to V(x))$ 或$\neg(\exists x)(C(x)\land\neg V(x))$。
h) 设 $C(x)$:x 是国家选手。$O(x)$:x 是老的。$L(x)$:x 是运动员。
则有$(\forall x)(O(x)\land C(x)\to L(x))$。
i) 设 $W(x)$:x 是女同志。$H(x)$:x 是家庭妇女。$C(x)$:x 是国家选手。
则有$\neg(\exists x)(W(x)\land C(x)\land H(x))$。
j) 设 $W(x)$:x 是女同志。$J(x)$:x 是教练。$C(x)$:x 是国家选手。
则有$(\exists x)(W(x)\land J(x)\land C(x))$。
k) 设 $L(x)$:x 是运动员。$J(y)$:y 是教练。$A(x,y)$:x 钦佩 y。
则有$(\forall x)(L(x)\to(\exists y)(J(y)\land A(x,y)))$。
l) 设 $S(x)$:x 是大学生。$L(x)$:x 是运动员。$A(x,y)$:x 钦佩 y。
则$(\exists x)(S(x)\land(\forall y)(L(y)\to\neg A(x,y)))$。

2—3 习题

1. 令 $P(x)$ 为"x 是质数";$E(x)$ 为"x 是偶数";$O(x)$ 为"x 是奇数";$D(x,y)$ 为"x

除尽 y"。把下列各式译成汉语：

a) $P(5)$。

b) $E(2) \wedge P(2)$。

c) $(\forall x)(D(2,x) \rightarrow E(x))$。

d) $(\exists x)(E(x) \wedge D(x,6))$。

e) $(\forall x)(\neg E(x) \rightarrow \neg D(2,x))$。

f) $(\forall x)(E(x) \rightarrow (\forall y)(D(x,y) \rightarrow E(y)))$。

g) $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(E(y) \wedge D(x,y)))$。

h) $(\forall x)(O(x) \rightarrow (\forall y)(P(y) \rightarrow \neg D(x,y))$。

解：a) 5 是质数。

b) 2 是偶数且 2 是质数。

c) 对所有的 x，若 x 能被 2 除尽，则 x 是偶数。

d) 存在 x，x 是偶数，且 x 能除尽 6(即某些偶数能除尽 6)。

e) 对所有的 x，若 x 不是偶数，则 x 不能被 2 除尽。

f) 对所有的 x，若 x 是偶数，则对所有的 y，若 x 能除尽 y，则 y 也是偶数。

g) 对所有的 x，若 x 是质数，则存在 y，y 是偶数且 x 能除尽 y(即所有质数能除尽某些偶数)。

h) 对所有的 x，若 x 是奇数，则对所有 y，y 是质数，则 x 不能除尽 y(即任何奇数不能除尽任何质数)。

2. 令 $P(x)$，$L(x)$，$R(x,y,z)$ 和 $E(x,y)$ 分别表示"x 是一个点"，"x 是一条直线"，"z 通过 x 和 y"和"$x = y$"。符号化下面的句子。

对每两个点有且仅有一条直线通过该两点。

解：$(\forall x)(\forall y)((P(x) \wedge P(y) \wedge \neg E(x,y) \rightarrow (\exists !z)(L(z) \wedge R(x,y,z)))$，

或 $(\forall x)(\forall y)((P(x) \wedge P(y) \wedge \neg E(x,y) \rightarrow (\exists z)(L(z) \wedge R(x,y,z) \wedge \neg(\exists u)(\neg E(z,u) \wedge L(u) \wedge R(x,y,u))))$。

3. 利用谓词公式翻译下列命题。

a) 如果有限个数的乘积为零，那么至少有一个因子等于零。

b) 对于每一个实数 x，存在一个更大的实数 y。

c) 存在实数 x，y 和 z，使得 x 与 y 之和大于 x 与 z 之积。

解：a) 设 $N(x)$：x 是有限个数的乘积。$z(y)$：y 为 0。

$P(x)$：x 的乘积为零。$F(y)$：y 是乘积中的一个因子。

则有 $(\forall x)(N(x) \wedge P(x) \rightarrow (\exists y)(F(y) \wedge z(y)))$。

b) 设 $R(x)$：x 是实数。$Q(x,y)$：y 大于 x。

故 $(\forall x)(R(x) \rightarrow (\exists y)(Q(x,y) \wedge R(y)))$。

c) $R(x)$：x 是实数。$G(x,y)$：x 大于 y。

则 $(\exists x)(\exists y)(\exists z)(R(x) \wedge R(y) \wedge R(z) \wedge G(x+y, x \cdot z))$。

4. 用谓词公式写出下式：若 $x < y$ 和 $z < 0$，则 $xz > yz$。

解：设 $G(x,y)$：x 大于 y。

则有 $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(G(y,x) \wedge G(0,z) \rightarrow G(x \cdot z, y \cdot z))$。

5. 自然数一共有三条公理。

a) 每个数都有唯一的一个数是它的后继数。

b) 没有一个数使数 1 是它的后继数。

c) 每个不等于 1 的数都有唯一的一个数是它的直接先行者。用两个谓词表达上述三条公理。

解：设 $N(x)$：x 是一个数。$S(x,y)$：y 是 x 的后继数。$E(x,y)$：$x = y$。则

a) $(\forall x)(N(x) \rightarrow (\exists ! y)(N(y) \wedge S(x,y)))$，

或 $(\forall x)(N(x) \rightarrow (\exists y)(N(y) \wedge S(x,y) \wedge \neg(\exists z)(\neg E(y,z) \wedge N(z) \wedge S(x,z))))$。

b) $\neg(\exists x)(N(x) \wedge S(x,1))$。

c) $(\forall x)(N(x) \wedge \neg S(x,2) \rightarrow (\exists ! y)(N(y) \wedge S(y,x)))$，

或 $(\forall x)(N(x) \wedge \neg S(x,2) \rightarrow (\exists y)(N(y) \wedge S(y,x) \wedge \neg(\exists z)(\neg E(y,z) \wedge N(z) \wedge S(z,x))))$。

6. 用谓词公式刻划下述命题。

那位戴眼镜的用功的大学生在看这本大而厚的巨著。

解：设 $S(x)$：x 是大学生。$E(x)$：x 是戴眼镜的。

$F(x)$：x 是用功的。 $R(x,y)$：x 在看 y。

$G(y)$：y 是大的。 $K(y)$：y 是厚的。 $J(y)$：y 是巨著。 a：这本。 b：那位。

则有 $E(b) \wedge F(b) \wedge S(b) \wedge R(b,a) \wedge G(a) \wedge K(a) \wedge J(a)$。

7. 取个体域为实数集 R，函数 f 在 a 点连续的定义是：f 在 a 点连续，当且仅当对每个 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\delta > 0$，使得对所有 x，若 $|x-a| < \delta$，则 $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$。把上述定义用符号化的形式表达。

解：设 $P(x,y)$：x 在 y 连续。 $Q(x,y)$：$x > y$。则

$P(f,a) \rightleftarrows ((\forall \varepsilon)(\exists \delta)(\forall x)(Q(\varepsilon,0) \rightarrow (Q(\delta,0) \wedge Q(\delta, |x-a|) \rightarrow Q(\varepsilon, |f(x)-f(a)|))))$

2—4 习题

1. 对下面每个公式指出约束变元和自由变元。

a) $(\forall x)P(x) \rightarrow P(y)$。

b) $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \wedge (\exists x)S(x)$。

c) $(\exists x)(\forall y)(P(x) \wedge Q(y)) \rightarrow (\forall x)R(x)$。

d) $(\exists x)(\exists y)(P(x,y) \wedge Q(z))$。

解：a) x 是约束变元，y 是自由变元。

b) x 是约束变元，$P(x) \wedge Q(x)$ 中的 x 受全称量词 $\forall$ 的约束，$S(x)$ 中的 x 受存在量词 $\exists$ 的约束。

c) x,y 都是约束变元，$P(x)$ 中的 x 受 $\exists$ 的约束，$R(x)$ 中的 x 受 $\forall$ 的约束。

d) x,y 是约束变元，z 是自由变元。

2. 如果论域是集合 $\{a,b,c\}$，试消去下面公式中的量词。

a) $(\forall x)P(x)$。

b) $(\forall x)R(x) \wedge (\forall x)S(x)$。

c) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$。

d) $(\forall x)\neg P(x) \vee (\forall x)P(x)$。

解：a) $P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)$。

b) $R(a) \wedge R(b) \wedge R(c) \wedge S(a) \wedge S(b) \wedge S(c)$。

c) $(P(a) \rightarrow Q(a)) \wedge (P(b) \rightarrow Q(b)) \wedge (P(c) \rightarrow Q(c))$。

d) $(\neg P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \neg P(c)) \vee (P(a) \wedge P(b) \wedge P(c))$。

3. 寻求下列各式的真假值。

a) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ 其中 $P(x): x=1, Q(x): x=2$ 而且论域是 $\{1,2\}$。

b) $(\forall x)(P \rightarrow Q(x)) \vee R(a)$ 其中 $P: 2>1, Q(x): x \leqslant 3, R(x): x>5$ 而 $a:5$，论域是 $\{-2,3,6\}$。

解：a) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (P(1) \vee Q(1)) \wedge (P(2) \vee Q(2))$，

但 $P(1)$ 为 T，$Q(1)$ 为 F，$P(2)$ 为 F，$Q(2)$ 为 T，所以

$(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (T \vee F) \wedge (F \vee T) \Leftrightarrow T$。

b) $(\forall x)(P \rightarrow Q(x)) \vee R(a) \Leftrightarrow ((P \rightarrow Q(-2)) \wedge (P \rightarrow Q(3)) \wedge (P \rightarrow Q(6))) \vee R(5)$，

因为 P 为 T，$Q(-2)$ 为 T，$Q(3)$ 为 T，$Q(6)$ 为 F，$R(5)$ 为 F，所以

$(\forall x)(P \rightarrow Q(x)) \vee R(a) \Leftrightarrow ((T \rightarrow T) \wedge (T \rightarrow T) \wedge (T \rightarrow F)) \vee F \Leftrightarrow F$。

4. 对下列谓词公式中的约束变元进行换名。

a) $(\forall x)(\exists y)(P(x,z) \rightarrow Q(y)) \rightleftarrows S(x,y)$

b) $((\forall x)(P(x) \rightarrow (R(x) \vee Q(x))) \wedge (\exists x)R(x)) \rightarrow (\exists z)S(x,z)$

解：a) $(\forall u)(\exists v)(P(u,z) \rightarrow Q(v)) \rightleftarrows S(x,y)$

b) $((\forall u)(P(u) \rightarrow (R(u) \vee Q(u))) \wedge (\exists v)R(v)) \rightarrow (\exists z)S(x,z)$

5. 对下列谓词公式中的自由变元进行代入。

a) $((\exists y)A(x,y) \rightarrow (\forall x)B(x,z)) \wedge (\exists x)(\forall z)C(x,y,z)$

b) $((\forall y)P(x,y) \wedge (\exists z)Q(x,z)) \vee (\forall x)R(x,y)$

解：a) $((\exists y)A(u,y) \rightarrow (\forall x)B(x,v)) \wedge (\exists x)(\forall z)C(x,t,z)$

b) $((\forall y)P(u,y) \wedge (\exists z)Q(u,z)) \vee (\forall x)R(x,t)$

2—5 习题

1. 考虑以下赋值。

论域 $D=\{1,2\}$，

指定常数 a 和 b：

a	b
1	2

指定函数 f：

$f(1)$	$f(2)$
2	1

指定谓词 P：

$P(1,1)$	$P(1,2)$	$P(2,1)$	$P(2,2)$
T	T	F	F

求以下各公式的真值。

a) $P(a,f(a)) \wedge P(b,f(b))$。

b) $(\forall x)(\exists y)P(y,x)$。

c) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \rightarrow P(f(x),f(y)))$。

解：a) $P(a,f(a)) \wedge P(b,f(b)) \Leftrightarrow P(1,f(1)) \wedge P(2,f(2)) \Leftrightarrow P(1,2) \wedge P(2,1) \Leftrightarrow T \wedge F \Leftrightarrow F$

b) $(\forall x)(\exists y)P(y,x) \Leftrightarrow (\forall x)(P(1,x) \vee P(2,x)) \Leftrightarrow (P(1,1) \vee P(2,1)) \wedge (P(1,2) \vee P(2,2)) \Leftrightarrow (T \vee F) \wedge (T \vee F) \Leftrightarrow T$

c) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \rightarrow P(f(x),f(y)))$

$\Leftrightarrow (\forall x)((P(x,1) \rightarrow P(f(x),f(1))) \wedge (P(x,2) \rightarrow P(f(x),f(2))))$

$\Leftrightarrow (P(1,1) \rightarrow P(f(1),f(1))) \wedge (P(1,2) \rightarrow P(f(1),f(2))) \wedge (P(2,1) \rightarrow P(f(2),f(1))) \wedge (P(2,2) \rightarrow P(f(2),f(2)))$

$\Leftrightarrow (P(1,1) \rightarrow P(2,2)) \wedge (P(1,2) \rightarrow P(2,1)) \wedge (P(2,1) \rightarrow P(1,2)) \wedge (P(2,2) \rightarrow P(1,1))$

$\Leftrightarrow (T \rightarrow F) \wedge (T \rightarrow F) \wedge (F \rightarrow T) \wedge (F \rightarrow T) \Leftrightarrow F \wedge F \wedge T \wedge T \Leftrightarrow F$

2. 对以下各公式赋值后求真值。

a) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(f(x),a))$。

b) $(\exists x)(P(f(x)) \wedge Q(x,f(a)))$。

c) $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x,a))$。

d) $(\forall x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(x,y))$。

其中，论域 $D=\{1,2\}$，$a=1$。

f：

$f(1)$	$f(2)$
2	1

P：

$P(1)$	$P(2)$
F	T

Q：

$Q(1,1)$	$Q(1,2)$	$Q(2,1)$	$Q(2,2)$
T	T	F	F

解:a) $(\forall x)(P(x) \to Q(f(x),a))$

$\Leftrightarrow (P(1) \to Q(f(1),1)) \wedge (P(2) \to Q(f(2),1))$

$\Leftrightarrow (F \to Q(2,1)) \wedge (T \to Q(1,1))$

$\Leftrightarrow (F \to F) \wedge (T \to T) \Leftrightarrow T$

b) $(\exists x)(P(f(x)) \wedge Q(x,f(a)))$

$\Leftrightarrow (P(f(1)) \wedge Q(1,f(1))) \vee (P(f(2)) \wedge Q(2,f(1)))$

$\Leftrightarrow (T \wedge T) \vee (F \wedge F) \Leftrightarrow T$

c) $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x,a))$

$\Leftrightarrow (P(1) \wedge Q(1,a)) \vee (P(2) \wedge Q(2,a))$

$\Leftrightarrow (P(1) \wedge Q(1,1)) \vee (P(2) \wedge Q(2,1))$

$\Leftrightarrow (F \wedge T) \vee (T \wedge F) \Leftrightarrow F$

d) $(\forall x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(x,y))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(P(x) \wedge (\exists y)Q(x,y))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(P(x) \wedge (Q(x,1) \vee Q(x,2)))$

$\Leftrightarrow (P(1) \wedge (Q(1,1) \vee Q(1,2))) \wedge (P(2) \wedge (Q(2,1) \vee Q(2,2)))$

$\Leftrightarrow (F \wedge (T \vee T)) \wedge (T \wedge (F \vee F)) \Leftrightarrow F$

3. 举例说明下列各蕴含式。

a) $\neg((\exists x)P(x) \wedge Q(a)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \to \neg Q(a)$。

b) $(\forall x)(\neg P(x) \to Q(x)), (\forall x)\neg Q(x) \Rightarrow P(a)$。

c) $(\forall x)(P(x) \to Q(x)), (\forall x)(Q(x) \to R(x)) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \to R(x))$。

d) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)), (\forall x)\neg P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)$。

e) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)), (\forall x)\neg P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)$。

解:a) 因为$\neg((\exists x)P(x) \wedge Q(a)) \Rightarrow \neg(\exists x)P(x) \vee \neg Q(a)$,

故原式为$\neg(\exists x)P(x) \vee \neg Q(a) \Rightarrow (\exists x)P(x) \to \neg Q(a)$。

设 $P(x)$:x 是大学生。$Q(x)$:x 是运动员。

前提:或者不存在 x,x 是大学生且 a 是运动员。

结论:如果存在 x 是大学生,则必有 a 不是运动员。

b) 设 $P(x)$:x 是研究生。$Q(x)$:x 是大学生。a:论域中的某人。

前提:对论域中所有 x,如果 x 不是研究生,则 x 是大学生。

对论域中所有 x,x 不是大学生。

结论:对论域中某个 a,必有结论 a 是研究生,即 $P(a)$ 成立。

c) 设 $P(x)$:x 是研究生。$Q(x)$:x 曾读过大学。$R(x)$:x 曾读过中学。

前提:对所有 x,如果 x 是研究生,则 x 曾读过大学。

对所有 x,如果 x 曾读过大学,则 x 曾读过中学。

结论:对所有 x,如果 x 是研究生,则 x 曾读过中学。

d) 设 $P(x)$:x 是研究生。$Q(x)$:x 是运动员。

前提：对所有 x，或者 x 是研究生，或者 x 是运动员。

对所有 x，x 不是研究生

结论：必存在 x，x 是运动员。

e) 设 $P(x)$：x 是研究生。$Q(x)$：x 是运动员。

前提：对所有 x，或者 x 是研究生，或者 x 是运动员。

对所有 x，x 不是研究生

结论：对所有 x，x 是运动员。

4. 求证 $(\exists x)(A(x)\to B(x))\Leftrightarrow(\forall x)A(x)\to(\exists x)B(x)$。

证明：$(\exists x)(A(x)\to B(x))\Leftrightarrow(\exists x)(\neg A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow(\exists x)\neg A(x)\vee(\exists x)B(x)\Leftrightarrow\neg(\forall x)A(x)\vee(\exists x)B(x)\Leftrightarrow(\forall x)A(x)\to(\exists x)B(x)$

5. 求证 $(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)\Rightarrow(\forall x)(A(x)\vee B(x))$。

证明：1) 在论域为有限域时，设 $D=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，

$(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)\Leftrightarrow(A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\cdots\wedge A(a_n))\vee(B(a_1)\wedge B(a_2)\wedge\cdots\wedge B(a_n))$

$\Leftrightarrow(A(a_1)\vee B(a_1))\wedge(A(a_1)\vee B(a_2))\wedge\cdots\wedge(A(a_1)\vee B(a_n))\wedge(A(a_2)\vee B(a_1))\wedge(A(a_2)\vee B(a_2))\wedge\cdots\wedge(A(a_2)\vee B(a_n))\wedge\cdots\wedge(A(a_n)\vee B(a_1))\wedge(A(a_n)\vee B(a_2))\wedge\cdots\wedge(A(a_n)\vee B(a_n))$

$\Rightarrow(A(a_1)\vee B(a_1))\wedge(A(a_2)\vee B(a_2))\wedge\cdots\wedge(A(a_n)\vee B(a_n))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(A(x)\vee B(x))$

2) 在论域为无穷域时，设 $D=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$，

同理可证 $(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)\Rightarrow(\forall x)(A(x)\vee B(x))$，

所以 $(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)\Rightarrow(\forall x)(A(x)\vee B(x))$。

6. 判断下列推证是否正确。

$(\forall x)(A(x)\to B(x))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(\neg A(x)\vee B(x))$

$\Leftrightarrow(\forall x)\neg(A(x)\wedge\neg B(x))$

$\Leftrightarrow\neg(\exists x)(A(x)\wedge\neg B(x))$

$\Leftrightarrow\neg((\exists x)A(x)\wedge(\exists x)\neg B(x))$

$\Leftrightarrow\neg(\exists x)A(x)\vee\neg(\exists x)\neg B(x)$

$\Leftrightarrow\neg(\exists x)A(x)\vee(\forall x)B(x)$

$\Leftrightarrow(\exists x)A(x)\to(\forall x)B(x)$

解：推证不正确，因为 $\neg(\exists x)(A(x)\wedge\neg B(x))\not\Leftrightarrow\neg((\exists x)A(x)\wedge(\exists x)\neg B(x))$。

7. 求证 $(\forall x)(\forall y)(P(x)\to Q(y))\Leftrightarrow(\exists x)P(x)\to(\forall y)Q(y)$。

证明：$(\forall x)(\forall y)(P(x)\to Q(y))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)(\neg P(x)\vee Q(y))$

$\Leftrightarrow(\forall x)\neg P(x)\vee(\forall y)Q(y)$

$\Leftrightarrow\neg(\exists x)P(x)\vee(\forall y)Q(y)$

$\Leftrightarrow(\exists x)P(x)\to(\forall y)Q(y)$

2—6 习题

1. 把以下各式化为前束范式。

a) $(\forall x)(P(x)\to(\exists y)Q(x,y))$。

b) $(\exists x)(\neg((\exists y)P(x,y))\to((\exists z)Q(z)\to R(x)))$。

c) $(\forall x)(\forall y)(((\exists z)P(x,y,z)\wedge(\exists u)Q(x,u))\to(\exists v)Q(y,v))$。

解:a) $(\forall x)(P(x)\to(\exists y)Q(x,y))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(\neg P(x)\vee(\exists y)Q(x,y))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(\exists y)(\neg P(x)\vee Q(x,y))$

b) $(\exists x)(\neg((\exists y)P(x,y))\to((\exists z)Q(z)\to R(x)))$

$\Leftrightarrow(\exists x)((\exists y)P(x,y)\vee((\exists z)Q(z)\to R(x)))$

$\Leftrightarrow(\exists x)((\exists y)P(x,y)\vee(\neg(\exists z)Q(z)\vee R(x)))$

$\Leftrightarrow(\exists x)((\exists y)P(x,y)\vee((\forall z)\neg Q(z)\vee R(x)))$

$\Leftrightarrow(\exists x)(\exists y)(\forall z)(P(x,y)\vee\neg Q(z)\vee R(x))$

c) $(\forall x)(\forall y)(((\exists z)P(x,y,z)\wedge(\exists u)Q(x,u))\to(\exists v)Q(y,v))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)(\neg((\exists z)P(x,y,z)\wedge(\exists u)Q(x,u))\vee(\exists v)Q(y,v))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)((\forall z)\neg P(x,y,z)\vee(\forall u)\neg Q(x,u)\vee(\exists v)Q(y,v))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall u)(\exists v)(\neg P(x,y,z)\vee\neg Q(x,u)\vee Q(y,v))$

2. 求等价于下面 wff 的前束合取范式与前束析取范式。

a) $((\exists x)P(x)\vee(\exists x)Q(x))\to(\exists x)(P(x)\vee Q(x))$。

b) $(\forall x)(P(x)\to(\forall y)((\forall z)Q(x,y)\to\neg(\forall z)R(y,x)))$。

c) $(\forall x)P(x)\to(\exists x)((\forall z)Q(x,z)\vee(\forall z)R(x,y,z))$。

d) $(\forall x)(P(x)\to Q(x,y))\to((\exists y)P(y)\wedge(\exists z)Q(y,z))$。

解:a) $((\exists x)P(x)\vee(\exists x)Q(x))\to(\exists x)(P(x)\vee Q(x))$

$\Leftrightarrow\neg((\exists x)P(x)\vee(\exists x)Q(x))\vee(\exists x)(P(x)\vee Q(x))$

$\Leftrightarrow\neg(\exists x)(P(x)\vee Q(x))\vee(\exists x)(P(x)\vee Q(x))\Leftrightarrow T$

b) $(\forall x)(P(x)\to(\forall y)((\forall z)Q(x,y)\to\neg(\forall z)R(y,x)))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(\neg P(x)\vee(\forall y)(Q(x,y)\to\neg R(y,x)))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)(\neg P(x)\vee\neg Q(x,y)\vee\neg R(y,x))$

前束合取范式，

$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)((\neg P(x) \wedge \neg Q(x,y) \wedge \neg R(y,x)) \vee (\neg P(x) \wedge \neg Q(x,y) \wedge R(y,x)) \vee (\neg P(x) \wedge Q(x,y) \wedge \neg R(y,x)) \vee (\neg P(x) \wedge Q(x,y) \wedge R(y,x)) \vee (P(x) \wedge \neg Q(x,y) \wedge \neg R(y,x)) \vee ((P(x) \wedge \neg Q(x,y) \wedge R(y,x)) \vee (P(x) \wedge Q(x,y) \wedge \neg R(y,x)))$

前束析取范式。

c) $(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)((\forall z)Q(x,z) \vee (\forall z)R(x,y,z))$

$\Leftrightarrow \neg(\forall x)P(x) \vee (\exists x)((\forall z)Q(x,z) \vee (\forall z)R(x,y,z))$

$\Leftrightarrow(\exists x)\neg P(x) \vee (\exists x)((\forall z)Q(x,z) \vee (\forall u)R(x,y,u))$

$\Leftrightarrow(\exists x)(\neg P(x) \vee (\forall z)Q(x,z) \vee (\forall u)R(x,y,u))$

$\Leftrightarrow(\exists x)(\forall z)(\forall u)(\neg P(x) \vee Q(x,z) \vee R(x,y,u))$

前束合取范式，

$\Leftrightarrow(\exists x)(\forall z)(\forall u)((P(x) \wedge Q(x,z) \wedge R(x,y,u)) \vee (P(x) \wedge Q(x,z) \wedge \neg R(x,y,u)) \vee (P(x) \wedge \neg Q(x,z) \wedge R(x,y,u)) \vee (\neg P(x) \wedge Q(x,z) \wedge R(x,y,u)) \vee (\neg P(x) \wedge Q(x,z) \wedge \neg R(x,y,u)) \vee (\neg P(x) \wedge \neg Q(x,z) \wedge R(x,y,u)) \vee (\neg P(x) \wedge \neg Q(x,z) \wedge \neg R(x,y,u)))$

前束析取范式。

d) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x,y)) \rightarrow ((\exists y)P(y) \wedge (\exists z)Q(y,z))$

$\Leftrightarrow \neg(\forall x)(\neg P(x) \vee Q(x,y)) \vee ((\exists y)P(y) \wedge (\exists z)Q(y,z))$

$\Leftrightarrow(\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x,y)) \vee ((\exists u)P(u) \wedge (\exists z)Q(y,z))$

$\Leftrightarrow(\exists x)(\exists u)(\exists z)((P(x) \wedge \neg Q(x,y)) \vee (P(u) \wedge Q(y,z)))$

前束析取范式，

$\Leftrightarrow(\exists x)(\exists u)(\exists z)((P(x) \vee P(u)) \wedge (P(x) \vee Q(y,z)) \wedge (\neg Q(x,y) \vee P(u)) \wedge (\neg Q(x,y) \vee Q(y,z)))$

前束合取范式。

2—7 习题

1. 证明下列各式。

a) $(\forall x)(\neg A(x) \rightarrow B(x)), (\forall x)\neg B(x) \Rightarrow (\exists x)A(x)$。

b) $(\exists x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$。

c) $(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)), (\forall x)(C(x) \rightarrow \neg B(x)) \Rightarrow (\forall x)(C(x) \rightarrow \neg A(x))$。

d) $(\forall x)(A(x) \lor B(x)),(\forall x)(B(x) \to \neg C(x)),(\forall x)C(x) \Rightarrow (\forall x)A(x)$。

证明:a) $(\forall x)(\neg A(x) \to B(x)),(\forall x)\neg B(x) \Rightarrow (\exists x)A(x)$。

(1) $(\forall x)(\neg A(x) \to B(x))$	P
(2) $\neg A(u) \to B(u)$	$US(1)$
(3) $(\forall x)\neg B(x)$	P
(4) $\neg B(u)$	$US(2)$
(5) $\neg B(u) \to A(u)$	$T(2)E$
(6) $A(u)$	$T(4),(5)I$
(7) $(\exists x)A(x)$	$EG(6)$

b) $(\exists x)A(x) \to (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x) \to B(x))$。

(1) $\neg(\forall x)(A(x) \to B(x))$	P(附加前提)
(2) $(\exists x)\neg(A(x) \to B(x))$	$T(1)E$
(3) $\neg(A(c) \to B(c))$	$ES(2)$
(4) $A(c)$	$T(3)I$
(5) $\neg B(c)$	$T(3)I$
(6) $(\exists x)A(x)$	$EG(4)$
(7) $(\exists x)A(x) \to (\forall x)B(x)$	P
(8) $(\forall x)B(x)$	$T(6),(7)I$
(9) $B(c)$	$US(8)$
(10) $B(c) \land \neg B(c)$(矛盾)	$T(5),(9)I$

c) $(\forall x)(A(x) \to B(x)),(\forall x)(C(x) \to \neg B(x)) \Rightarrow (\forall x)(C(x) \to \neg A(x))$。

(1) $(\forall x)(A(x) \to B(x))$	P
(2) $A(u) \to B(u)$	$US(1)$
(3) $(\forall x)(C(x) \to \neg B(x))$	P
(4) $C(u) \to \neg B(u)$	$US(3)$
(5) $\neg B(u) \to \neg A(u)$	$T(2)E$
(6) $C(u) \to \neg A(u)$	$T(4),(5)I$
(7) $(\forall x)(C(x) \to \neg A(x))$	$UG(6)$

d) $(\forall x)(A(x) \lor B(x)),(\forall x)(B(x) \to \neg C(x)),(\forall x)C(x) \Rightarrow (\forall x)A(x)$

(1) $(\forall x)(B(x) \to \neg C(x))$	P
(2) $B(u) \to \neg C(u)$	$US(1)$

(3) $(\forall x)C(x)$ P

(4) $C(u)$ $US(3)$

(5) $\neg B(u)$ $T(2),(4)I$

(6) $(\forall x)(A(x) \vee B(x))$ P

(7) $A(u) \vee B(u)$ $US(6)$

(8) $A(u)$ $T(5),(7)I$

(9) $(\forall x)A(x)$ $UG(8)$

2. 用 CP 规则证明

a) $(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x)$。

b) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$。

证明：a)

(1) $(\forall x)P(x)$ P(附加前提)

(2) $P(u)$ $US(1)$

(3) $(\forall x)(P(x) \to Q(x))$ P

(4) $P(u) \to Q(u)$ $US(3)$

(5) $Q(u)$ $T(2),(4)I$

(6) $(\forall x)Q(x)$ $UG(5)$

(7) $(\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x)$ CP

b) 因为 $(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \Leftrightarrow \neg(\forall x)P(x) \to (\exists x)Q(x)$，

故本题就是推证 $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \neg(\forall x)P(x) \to (\exists x)Q(x)$。

(1) $\neg(\forall x)P(x)$ P(附加前提)

(2) $(\exists x)\neg P(x)$ $T(1)E$

(3) $\neg P(c)$ $ES(2)$

(4) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ P

(5) $P(c) \vee Q(c)$ $US(4)$

(6) $Q(c)$ $T(3),(5)I$

(7) $(\exists x)Q(x)$ $EG(6)$

(8) $\neg(\forall x)P(x) \to (\exists x)Q(x)$ CP

3. 符号化下列命题并推证其结论。

a) 所有有理数是实数，某些有理数是整数，因此某些实数是整数。

b) 任何人如果他喜欢步行，他就不喜欢乘汽车，每一个人或者喜欢乘汽车或者喜欢骑自行车。有的人不爱骑自行车，因而有的人不爱步行。

c) 每个大学生不是文科学生就是理工科学生，有的大学生是优秀生，小张不是理工科学生，但他是优秀生，因而如果小张是大学生，他就是文科学生。

解：a) 设 $R(x)$：x 是实数。$Q(x)$：x 是有理数。$I(x)$：x 是整数。本题符号化为：

$$(\forall x)(Q(x) \to R(x)) \wedge (\exists x)(Q(x) \wedge I(x)) \Rightarrow (\exists x)(R(x) \wedge I(x))$$

(1) $(\exists x)(Q(x) \wedge I(x))$	P
(2) $Q(c) \wedge I(c)$	$ES(1)$
(3) $(\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))$	P
(4) $Q(c) \rightarrow R(c)$	$US(3)$
(5) $Q(c)$	$T(2)I$
(6) $R(c)$	$T(4),(5)I$
(7) $I(c)$	$T(2)I$
(8) $R(c) \wedge I(c)$	$T(6),(7)I$
(9) $(\exists x)(R(x) \wedge I(x))$	$EG(8)$

b) 设 $P(x)$：x 喜欢步行。$Q(x)$：x 喜欢乘汽车。$R(x)$：x 喜欢骑自行车。本题符号化为：

$(\forall x)(P(x) \rightarrow \neg Q(x)),(\forall x)(Q(x) \vee R(x)),(\exists x)\neg R(x) \Rightarrow (\exists x)\neg P(x)$

(1) $(\exists x)\neg R(x)$	P
(2) $\neg R(c)$	$ES(1)$
(3) $(\forall x)(Q(x) \vee R(x))$	P
(4) $Q(c) \vee R(c)$	$US(3)$
(5) $Q(c)$	$T(2),(4)I$
(6) $(\forall x)(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$	P
(7) $P(c) \rightarrow \neg Q(c)$	$US(6)$
(8) $\neg P(c)$	$T(5),(7)I$
(9) $(\exists x)\neg P(x)$	$EG(8)$

c) 设 $G(x)$：x 是大学生。$L(x)$：x 是文科学生。$P(x)$：x 是理工科学生。$S(x)$：x 是优秀生。c：小张。

本题符号化为：

$(\forall x)(G(x) \rightarrow (L(x) \vee P(x))),(\exists x)(G(x) \wedge S(x)),\neg P(c),S(c) \Rightarrow G(c) \rightarrow L(c)$

(1) $G(c)$	P(附加前提)
(2) $(\forall x)(G(x) \rightarrow (L(x) \vee P(x)))$	P
(3) $G(c) \rightarrow (L(c) \vee P(c))$	$US(2)$
(4) $L(c) \vee P(c)$	$T(1),(3)I$
(5) $\neg P(c)$	P
(6) $L(c)$	$T(4),(5)I$
(7) $G(c) \rightarrow L(c)$	CP

注意：本题推证过程中未用到前提 $(\exists x)(G(x) \wedge S(x))$ 以及 $S(c)$。主要是 $S(x)$：x 是优秀生，这个条件与其他前提的联系对证明结论没有影响，因 $S(x)$ 与其他前提不矛盾，故本题的推证仍是有效的。

历年考研真题评析

1. $A(x)$：x 是人。$B(x)$：x 是错误。$C(x,y)$：x 犯了 y。$D(x,y)$：y 能改正 x。

用上述谓词构成表示下列语句的谓词公式：

(1) 凡人都会犯错误。

(2) 并非所有人犯错误都能改。

(3) 有的错误任何人犯了都不能改。(上海交通大学考研真题)

【分析】(1) 正确理解命题：必要时把命题改叙，使其中每个原子命题、原子命题之间的关系能明显表达出来。

(2) 分解原子命题：分解成个体、谓词和量词。

(3) 找出量词：应注意全称量词 $\forall$ 后跟条件式，存在量词 $\exists$ 后跟合取式。

(4) 选择恰当的联结词。

此题谓词已给出，只需选择量词和恰当的联结词即可。

解：(1) $(\forall x)(A(x) \rightarrow (C(x,y) \wedge B(y)))$。

(2) $\neg(\forall x)((A(x) \wedge B(y) \wedge C(x,y)) \rightarrow D(y,x))$ 或 $(\exists x)(A(x) \wedge B(y) \wedge C(x,y) \wedge \neg D(y,x))$。

(3) $(\exists y)((B(y) \wedge (\forall x)(A(x) \wedge C(x,y))) \rightarrow \neg D(y,x))$。

2. 将命题“并非 E_1 中的每个数都小于或等于 E_2 中的每个数”按以下要求的形式表达出来。

(1) 出现全称量词，不出现存在量词。

(2) 出现存在量词，不出现全称量词。(中国科学院计算机技术研究所考研真题)

【分析】(1) 正确理解命题：必要时把命题改叙，使其中每个原子命题、原子命题之间的关系能明显表达出来。

(2) 分解原子命题：分解成个体、谓词和量词。

(3) 找出量词：应注意全称量词 $\forall$ 后跟条件式，存在量词 $\exists$ 后跟合取式。

(4) 选择恰当的联结词。

解：(1) $C(x,y)$：x 小于或等于 y。$A(x)$：x 是 E_1 中的数。$B(x)$：x 是 E_2 中的数。

$\neg(\forall x)(\forall y)((A(x) \wedge B(y)) \rightarrow C(x,y))$。

(2) $D(x,y)$：x 大于 y。$A(x)$：x 是 E_1 中的数。$B(x)$：x 是 E_2 中的数。

$(\exists x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y) \wedge D(y,x))$。

3. 用一阶谓词逻辑推导证明 $((\forall x)A \rightarrow B) \rightarrow ((\exists x)A \rightarrow B)$ B 与 x 无关。(南京大学考研真题)

证明：$((\forall x)A \rightarrow B) \rightarrow ((\exists x)A \rightarrow B)$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg(\forall x)A \vee B) \vee (\neg(\exists x)A \vee B)$$

$\Leftrightarrow(\forall x)A \vee \neg B \vee (\forall x)\neg A \vee B$

$\Leftrightarrow(\forall x)A \vee (\forall x)\neg A \vee \neg B \vee B$

$\Leftrightarrow T$

4. 符号化下列命题,并使用推理规则证明。

每个领导小组成员都是干部并且是专家,有些成员是老同志,所以有些成员是老干部。(大连理工大学考真试题)

【分析】 先根据命题符号化的规则将命题符号化,再使用谓词推理规则进行推理证明。谓词逻辑中逻辑推证经常使用命题逻辑推证中的 P,T,CP 等推理规则,还要使用 US 或 ES 规则,将量词指定,最后再使用 UG 或 EG 规则对命题进行量化。需要注意 US 规则和 ES 规则的使用顺序。

证明:设 $A(x)$:x 是领导小组成员。$B(x)$:x 是干部。$C(x)$:x 是专家。$O(x)$:x 是老年人。

前提:$(\forall x)(A(x)\rightarrow(B(x)\wedge C(x)))$,$(\exists x)(A(x)\wedge O(x))$

结论:$(\exists x)(A(x)\wedge B(x)\wedge O(x))$

证明过程如下:

(1) $(\exists x)(A(x)\wedge O(x))$	P
(2) $A(c)\wedge O(c)$	$ES(1)$
(3) $(\forall x)(A(x)\rightarrow(B(x)\wedge C(x)))$	P
(4) $A(c)\rightarrow(B(c)\wedge C(c))$	$US(3)$
(5) $A(c)$	$T(2)I$
(6) $B(c)\wedge C(c)$	$T(4),(5)I$
(7) $B(c)$	$T(6)I$
(8) $O(c)$	$T(2)I$
(9) $A(c)\wedge B(c)\wedge O(c)$	$T(5),(7),(8)I$
(10) $(\exists x)(A(x)\wedge B(x)\wedge O(x))$	$EG(9)$

5. 用一阶谓词系统证明:

所有北极熊都是白色的,没有棕熊是白色的,所以北极熊不是棕熊。(南京大学考研真题)

【分析】 先用谓词表达,再使用谓词规则推理。

证明:设 $A(x)$:x 是北极熊,$B(x)$:x 是棕熊,$C(x)$:x 是白色的。

前提:$(\forall x)(A(x)\rightarrow C(x))$,$(\forall x)(B(x)\rightarrow\neg C(x))$

结论:$(\forall x)(A(x)\rightarrow\neg B(x))$

(1) $(\forall x)(B(x)\rightarrow\neg C(x))$	P
(2) $(\forall x)(C(x)\rightarrow\neg B(x))$	$T(1)E$
(3) $(\forall x)(A(x)\rightarrow C(x))$	P
(4) $(\forall x)(A(x)\rightarrow\neg B(x))$	$T(2),(3)I$