**UNIVERSITÉ DE OUAGADOUGOU**

UFR/SEA

Unité de Formation et de Recherche en Sciences Exactes et Appliquées


# TD

## Modulations AM et FM

Traitement du Signal


**Encadré par :**

DR KOURAOGO

**Réalisé par :**

**Groupe 4**

1. KABORE W.B François
2. SISSAO
3. Élise


Année académique 2025-2026

30 janvier 2026

# Table des matières

# Introduction

Les modulations d'amplitude (AM) et de fréquence (FM) sont des techniques fondamentales en télécommunications permettant de transporter une information sur une onde porteuse haute fréquence. Ces techniques sont omniprésentes dans notre quotidien : radio AM/FM, télévision, communications mobiles, etc.

## Objectifs des TD

Ces travaux dirigés visent à approfondir la compréhension théorique et pratique des modulations AM et FM à travers :

— L'analyse mathématique des signaux modulés
— Le calcul des paramètres caractéristiques (taux de modulation, indice, bande passante)
— L'étude des spectres fréquentiels
— La compréhension des processus de démodulation
— L'application à des cas concrets (radio, télévision, stéréophonie)

## Méthodologie

Pour chaque exercice, nous procéderons selon la démarche suivante :

1. Analyse théorique du problème
2. Calculs mathématiques détaillés
3. Simulations sous Matlab
4. Visualisation et interprétation des résultats

Les simulations Matlab permettent de valider les calculs théoriques et de visualiser les phénomènes étudiés dans les domaines temporel et fréquentiel.

# 1 Exercice 1 : Modulation AM

## 1.1 Énoncé

Un émetteur AM doit transmettre le signal suivant :

$$s(t) = 100\cos(3{,}77 \times 10^6 t) + 43{,}5\cos(3{,}738 \times 10^6 t) + 43{,}5\cos(3{,}802 \times 10^6 t) \quad (1)$$

## 1.2 Question a) : Fréquence latérale supérieure

**Raisonnement :**
Le signal AM s'écrit sous la forme générale :

$$s(t) = A_c\cos(2\pi f_c t) + \frac{mA_c}{2}\cos(2\pi(f_c - f_m)t) + \frac{mA_c}{2}\cos(2\pi(f_c + f_m)t) \quad (2)$$

En identifiant les termes du signal donné :
— Porteuse : $2\pi f_c = 3{,}77 \times 10^6$ rad/s $\Rightarrow f_c = \frac{3{,}77\times10^6}{2\pi} \approx 600{,}3$ kHz
— Bande latérale inférieure : $f_{inf} = \frac{3{,}738\times10^6}{2\pi} \approx 595{,}2$ kHz
— Bande latérale supérieure : $f_{sup} = \frac{3{,}802\times10^6}{2\pi} \approx 605{,}1$ kHz

**Résultat :** La fréquence latérale supérieure est $f_{sup} \approx 605{,}1$ kHz

## 1.3 Question b) : Fréquence modulante

**Raisonnement :**
La fréquence modulante est la différence entre la porteuse et une bande latérale :

$$f_m = f_c - f_{inf} = 600{,}3 - 595{,}2 = 5{,}1 \text{ kHz} \quad (3)$$

On peut vérifier : $f_{sup} - f_c = 605{,}1 - 600{,}3 = 4{,}8$ kHz (légère différence due aux arrondis).

**Résultat :** La fréquence modulante est $f_m \approx 5{,}1$ kHz

## 1.4 Question c) : Taux de modulation

**Raisonnement :**
En modulation AM, les amplitudes des bandes latérales sont données par :

$$A_{bl} = \frac{m \cdot A_c}{2} \quad (4)$$

où $m$ est le taux de modulation et $A_c$ l'amplitude de la porteuse.
Avec $A_c = 100$ V et $A_{bl} = 43{,}5$ V :

$$43{,}5 = \frac{m \times 100}{2} \Rightarrow m = \frac{2 \times 43{,}5}{100} = 0{,}87 = 87\% \quad (5)$$

**Résultat :** Le taux de modulation est $m = 87\%$

## 1.5 Question d) : Bande de fréquences

**Raisonnement :**
La bande de fréquences d'un signal AM est donnée par la règle de Carson pour l'AM :

$$BW = 2 \times f_m = 2 \times 5{,}1 = 10{,}2 \text{ kHz} \tag{6}$$

Cette bande contient la porteuse et les deux bandes latérales.

**Résultat :** La bande de fréquences de l'émission est $BW \approx 10{,}2$ kHz

## 1.6 Question e) : Répartition des puissances

**Raisonnement :**
La puissance totale d'un signal AM est :

$$P_t = P_c + P_{bl} = \frac{A_c^2}{2R} + 2 \times \frac{A_{bl}^2}{2R} = \frac{A_c^2 + 2A_{bl}^2}{2R} \tag{7}$$

Avec $P_t = 38$ kW, on peut calculer $R$ :

$$R = \frac{A_c^2 + 2A_{bl}^2}{2P_t} = \frac{100^2 + 2 \times 43{,}5^2}{2 \times 38000} = \frac{13784{,}5}{76000} \approx 0{,}181\,\Omega \tag{8}$$

Puissance de la porteuse :

$$P_c = \frac{A_c^2}{2R} = \frac{100^2}{2 \times 0{,}181} \approx 27{,}6 \text{ kW} \tag{9}$$

Puissance par bande latérale :

$$P_{bl} = \frac{A_{bl}^2}{2R} = \frac{43{,}5^2}{2 \times 0{,}181} \approx 5{,}2 \text{ kW} \tag{10}$$

**Résultats :**
- Puissance porteuse : $P_c \approx 27{,}6$ kW
- Puissance par bande latérale : $P_{bl} \approx 5{,}2$ kW
- Puissance totale bandes latérales : $2 \times 5{,}2 = 10{,}4$ kW

Vérification : $P_c + P_{bl,total} = 27{,}6 + 10{,}4 = 38$ kW

## 1.7 Question f) : Nouveau taux de modulation

**Raisonnement :**
Si la puissance totale est réduite à 32 kW en changeant le signal modulant, la puissance porteuse reste constante. On utilise la relation :

$$P_t = P_c\left(1 + \frac{m^2}{2}\right) \tag{11}$$

$$32000 = 27600\left(1 + \frac{m_{new}^2}{2}\right) \tag{12}$$

$$\frac{m_{new}^2}{2} = \frac{32000}{27600} - 1 = 0{,}159 \tag{13}$$

$$m_{new} = \sqrt{2 \times 0{,}159} \approx 0{,}565 = 56{,}5\% \tag{14}$$

**Résultat :** Le nouveau taux de modulation est $m \approx 56{,}5\%$

## 1.8 Simulations Matlab

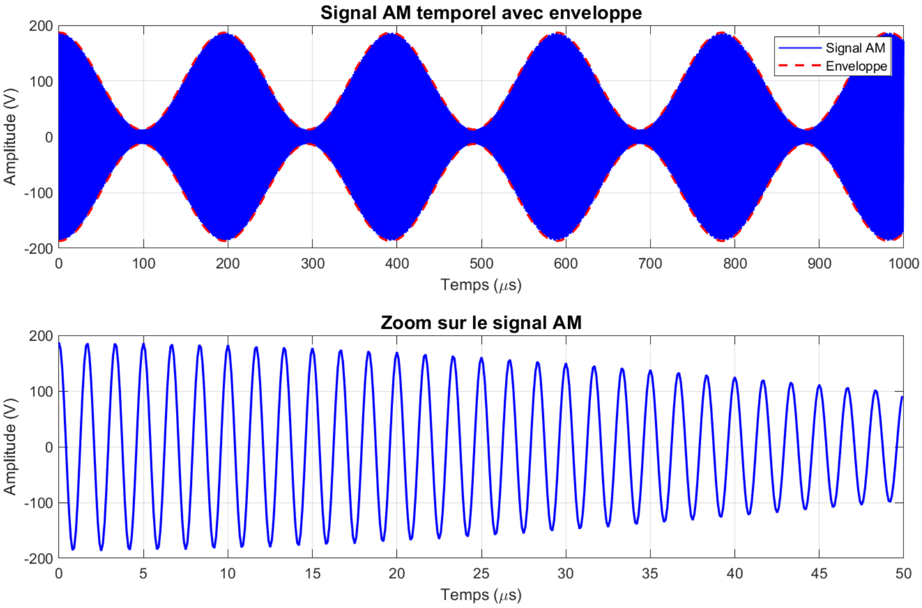


FIGURE 1 – Signal AM temporel avec enveloppe

La figure 1 montre le signal AM dans le domaine temporel. On observe clairement l'enveloppe du signal qui suit la forme du signal modulant. Le taux de modulation de 87% est visible par l'amplitude de variation de l'enveloppe.

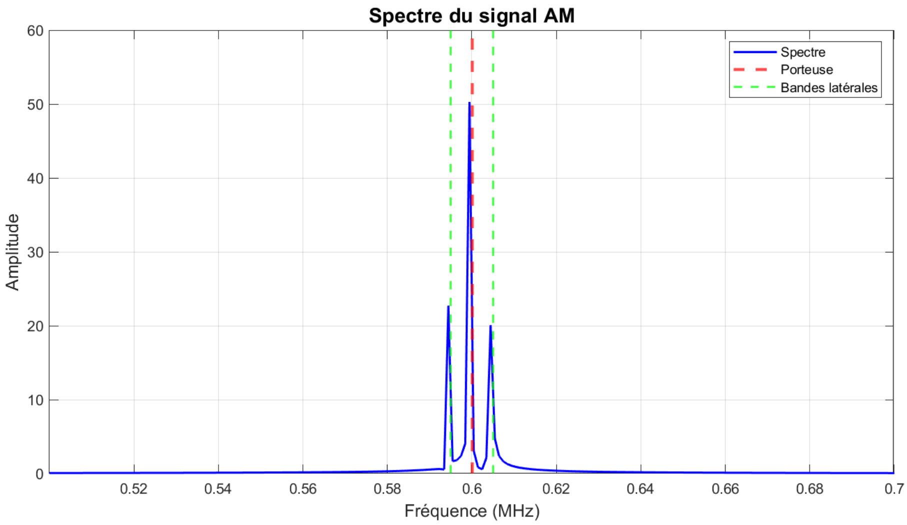


FIGURE 2 – Spectre du signal AM

La figure 2 présente le spectre fréquentiel du signal AM. On distingue :
- La raie centrale à la fréquence porteuse $f_c \approx 600$ kHz
- Les deux bandes latérales espacées de $\pm f_m \approx \pm 5$ kHz

— L'amplitude relative des bandes latérales par rapport à la porteuse confirme le taux de modulation calculé

# 2 Exercice 2 : Signal multi-fréquences

## 2.1 Énoncé

On souhaite transmettre un signal m(t) composé de trois fréquences :
- 440 Hz d'amplitude 1 volt
- 560 Hz d'amplitude 2 volts
- 680 Hz d'amplitude 1 volt

Ce signal sera modulé autour d'une porteuse pour être transmis via une antenne $\lambda/4$ onde de longueur 30 cm.

## 2.2 Question 1 : Équation mathématique du signal modulant

Le signal modulant s'écrit :

$$m(t) = 1 \times \cos(2\pi \times 440 \times t) + 2 \times \cos(2\pi \times 560 \times t) + 1 \times \cos(2\pi \times 680 \times t) \tag{15}$$

## 2.3 Question 2 : Spectre du signal modulant

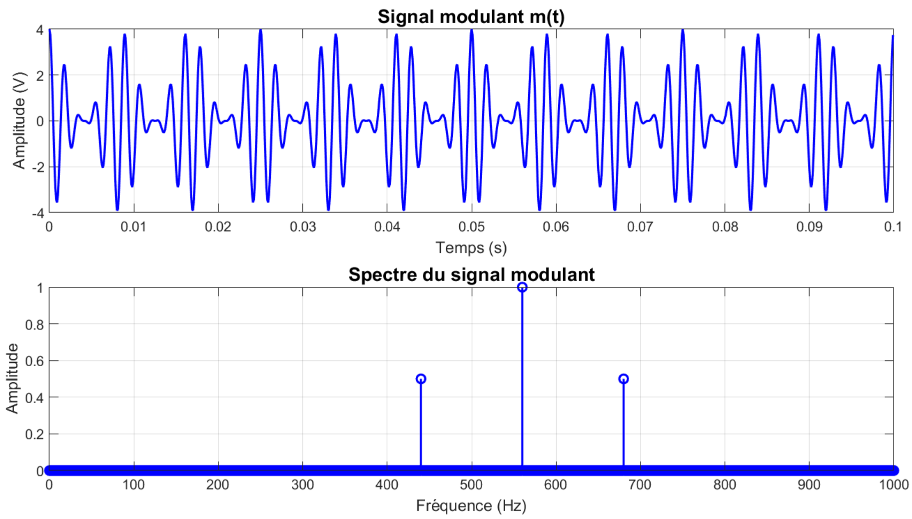


FIGURE 3 – Signal modulant m(t) et son spectre

Le spectre du signal modulant (figure 3) présente trois raies aux fréquences 440, 560 et 680 Hz, avec des amplitudes respectives de 1, 2 et 1 volt.

## 2.4 Question 3 : Fréquence porteuse

Pour une antenne $\lambda/4$ de longueur 30 cm :

$$\frac{\lambda}{4} = 0{,}30 \text{ m} \Rightarrow \lambda = 1{,}2 \text{ m} \tag{16}$$

La fréquence porteuse est :

$$f_p = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{1,2} = 250 \text{ MHz} \tag{17}$$

**Réponse :** La fréquence porteuse adaptée à l'antenne est $f_p = 250$ MHz.

## 2.5 Question 4 : Signal modulé

Avec un coefficient de modulateur $k = 1$ et une amplitude de porteuse $V_p = 3$ V, le signal modulé s'écrit :

$$s(t) = V_p[1 + k \cdot m(t)] \cos(2\pi f_p t) \tag{18}$$

$$s(t) = 3[1 + m(t)] \cos(2\pi \times 250 \times 10^6 \times t) \tag{19}$$

En développant :

$$\begin{aligned} s(t) = {} & 3\cos(2\pi f_p t) + 3\cos(2\pi \times 440 \times t)\cos(2\pi f_p t) \\ & + 6\cos(2\pi \times 560 \times t)\cos(2\pi f_p t) + 3\cos(2\pi \times 680 \times t)\cos(2\pi f_p t) \end{aligned} \tag{20}$$

## 2.6 Question 5 : Spectre du signal modulé

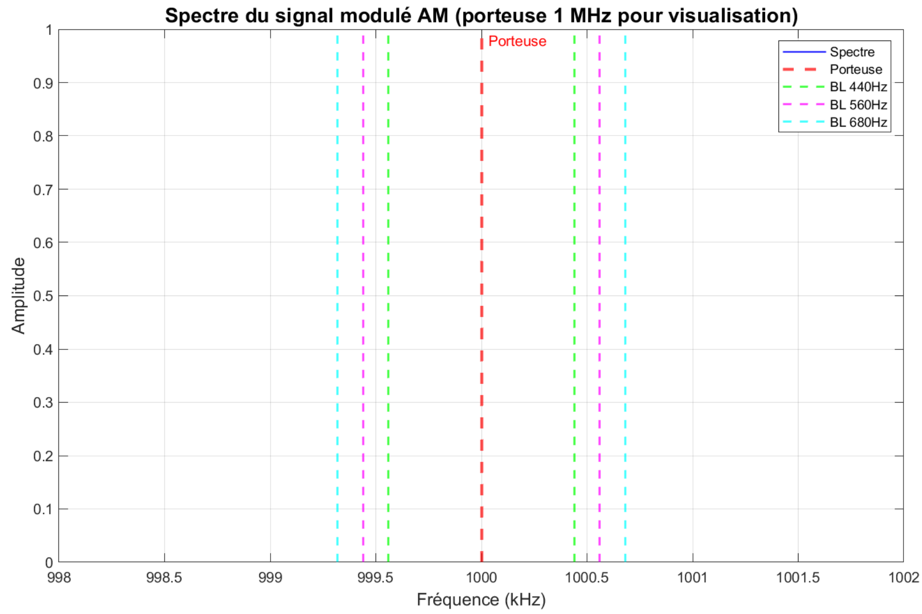


FIGURE 4 – Spectre du signal modulé AM

Le spectre du signal modulé (figure 4) montre :
- La porteuse à 250 MHz
- Six bandes latérales correspondant aux trois fréquences modulantes
- Bandes latérales inférieures : 250 MHz - 440 Hz, 250 MHz - 560 Hz, 250 MHz - 680 Hz
- Bandes latérales supérieures : 250 MHz + 440 Hz, 250 MHz + 560 Hz, 250 MHz + 680 Hz

## 2.7 Question 8 : Filtrage et démodulation

Après filtrage passe-bande [500 Hz - 600 Hz], seule la composante à 560 Hz est conservée.

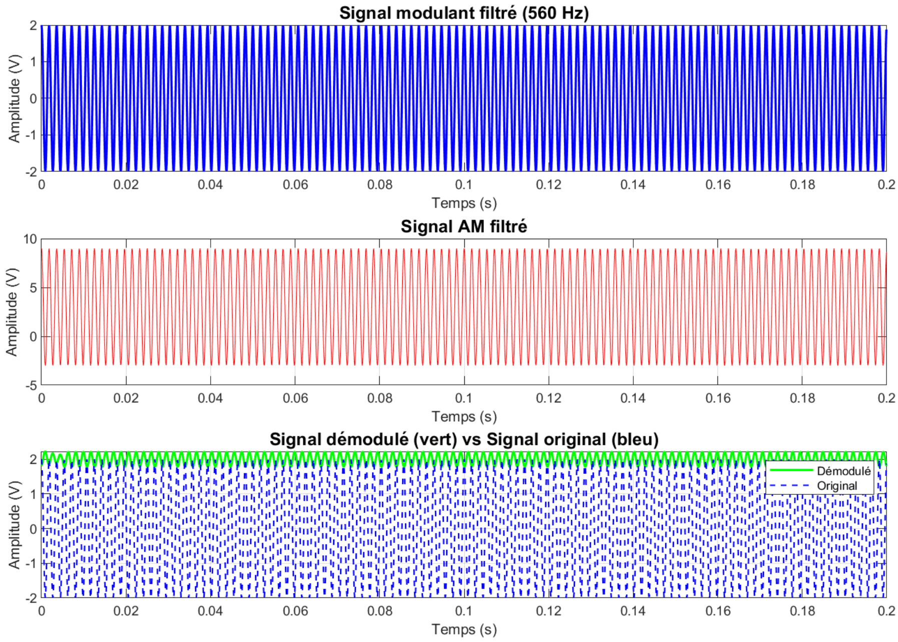


FIGURE 5 – Démodulation du signal filtré

La figure 5 montre le processus de démodulation :

1. Signal modulant filtré (560 Hz uniquement)
2. Signal AM filtré
3. Signal démodulé comparé au signal original

Le type de filtre utilisé est un **filtre passe-bande** suivi d'une **démodulation synchrone cohérente**.

# 3 Exercice 3 : Modulation FM

## 3.1 Énoncé

Un signal modulant sinusoïdal $x(t) = A_x \cos(2\pi f_x t)$ d'amplitude $A_x = 2$ V et de fréquence $f_x = 2$ kHz attaque un modulateur FM de sensibilité $k_f = 1000$ Hz/V.

La porteuse du modulateur FM, $p(t) = A_p \cos(2\pi f_p t + \varphi_p(t))$, a pour amplitude $A_p = 25$ V et pour fréquence $f_p = 100$ MHz.

## 3.2 Question 1 : Expression du signal de sortie

Le signal FM s'écrit :

$$s(t) = A_p \cos\left(2\pi f_p t + \varphi(t)\right) \tag{21}$$

où la phase instantanée est :

$$\varphi(t) = 2\pi k_f \int_0^t x(\tau)d\tau = 2\pi k_f \frac{A_x}{2\pi f_x} \sin(2\pi f_x t) = \frac{k_f A_x}{f_x} \sin(2\pi f_x t) \tag{22}$$

En posant $\beta = \frac{k_f A_x}{f_x}$ (indice de modulation), on obtient :

$$s(t) = 25 \cos\left(2\pi \times 100 \times 10^6 \times t + \beta \sin(2\pi \times 2000 \times t)\right) \tag{23}$$

## 3.3 Question 2 : Excursion en fréquence

L'excursion en fréquence (déviation maximale) est :

$$\Delta f = k_f \times A_x = 1000 \times 2 = 2000 \text{ Hz} \tag{24}$$

**Réponse :** L'excursion en fréquence est $\Delta f = 2000$ Hz $= 2$ kHz.

## 3.4 Question 3 : Indice de modulation

L'indice de modulation est :

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_x} = \frac{2000}{2000} = 1{,}0 \tag{25}$$

**Réponse :** L'indice de modulation est $\beta = 1{,}0$.

## 3.5 Question 4 : Bande occupée

La bande occupée par le signal modulé est donnée par la règle de Carson :

$$BW_{Carson} = 2(\Delta f + f_x) = 2(2000 + 2000) = 8000 \text{ Hz} = 8 \text{ kHz} \tag{26}$$

**Réponse :** La bande occupée par le signal modulé est $BW = 8$ kHz.

## 3.6 Question 5 : Nouveau signal modulant

Si le signal modulant voit sa fréquence multipliée par 2 et son amplitude divisée par 3 :

— $f_{x,new} = 2 \times 2000 = 4000$ Hz

— $A_{x,new} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$ V

Nouvelle excursion :

$$\Delta f_{new} = k_f \times A_{x,new} = 1000 \times 0{,}667 = 667 \text{ Hz} \tag{27}$$

Nouvel indice de modulation :

$$\beta_{new} = \frac{\Delta f_{new}}{f_{x,new}} = \frac{667}{4000} \approx 0{,}167 \tag{28}$$

**Réponse :** Le nouvel indice de modulation est $\beta_{new} \approx 0{,}167$.

## 3.7 Question 6 : Démodulation

Avec $\beta = 1{,}0$, on est à la limite entre NFM (Narrow Band FM, $\beta < 1$) et WFM (Wide Band FM, $\beta > 1$).

Pour $\beta < 1$ (comme $\beta_{new} = 0{,}167$), la démodulation est **cohérente**. On peut utiliser un démodulateur simple comme un discriminateur de fréquence ou un détecteur de pente.

**Réponse :** Avec $\beta < 1$, la démodulation est cohérente et peut être réalisée avec un discriminateur de fréquence simple.

## 3.8 Simulations Matlab

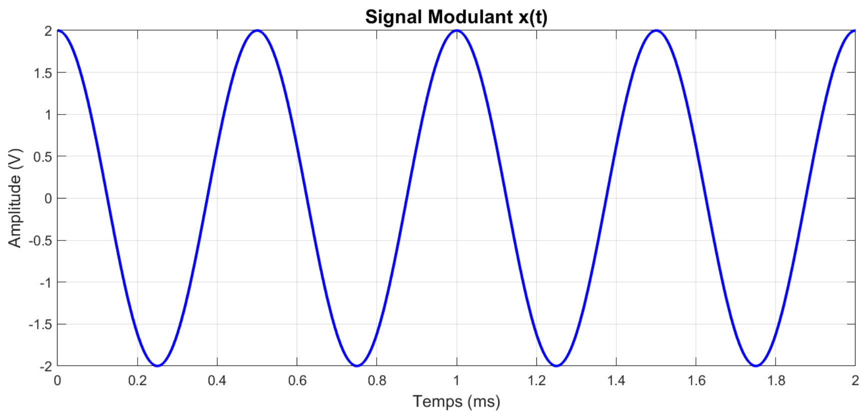


FIGURE 6 – Signal modulant x(t)

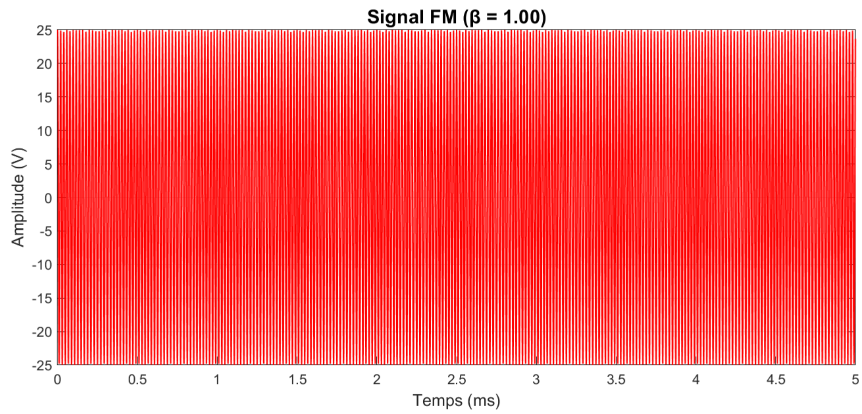


Figure 7 – Signal FM avec $\beta = 1{,}0$

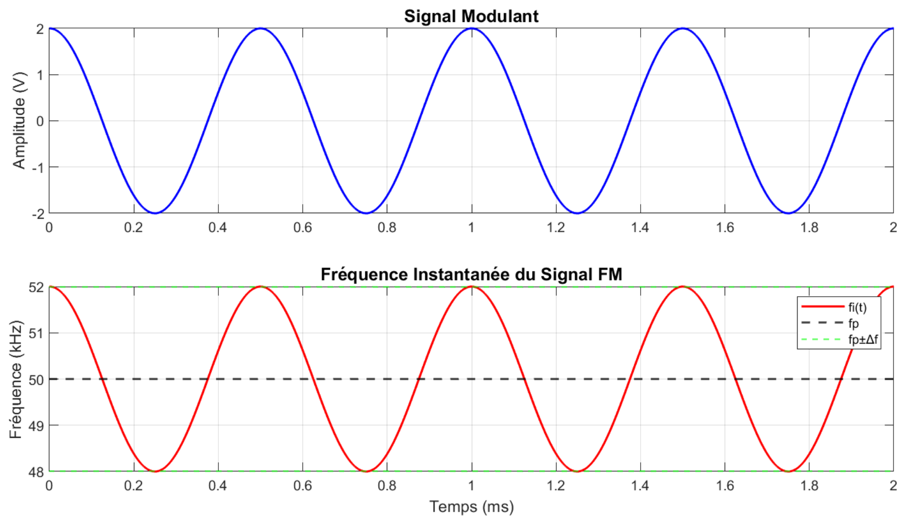


Figure 8 – Fréquence instantanée du signal FM

La figure 8 montre la variation de la fréquence instantanée du signal FM. On observe que :

— La fréquence varie entre $f_p - \Delta f$ et $f_p + \Delta f$

— La variation suit la forme du signal modulant

— L'excursion maximale est bien de $\pm 2000$ Hz

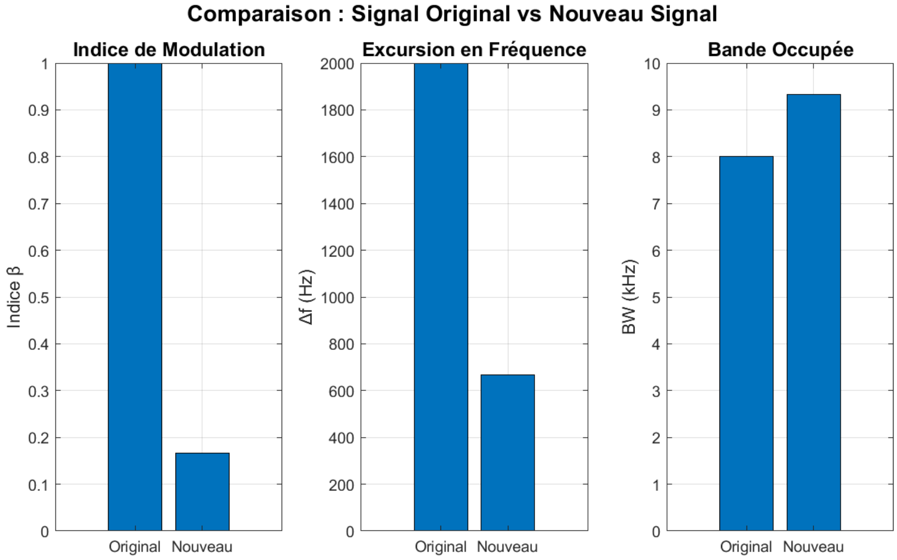


Figure 9 – Comparaison signal original vs nouveau signal

La figure 9 compare les paramètres du signal original et du nouveau signal. On constate que :

— L'indice de modulation diminue significativement (de 1.0 à 0.167)
— L'excursion en fréquence est réduite (de 2000 Hz à 667 Hz)
— La bande occupée diminue également
— Le nouveau signal est clairement en mode NFM ($\beta < 0{,}5$)

# 4 Problème 1 : Modulation AM et FM

## 4.1 Énoncé

Les bandes de fréquences allouées à la radiodiffusion sont repérées par :
— GO (Grandes Ondes) : 1052 m à 2000 m
— FM : de 87,5 MHz à 108 MHz

## 4.2 Question 1 : Compléter le tableau fréquences et longueurs d'onde

**Raisonnement détaillé :**

La relation fondamentale entre la fréquence $f$, la longueur d'onde $\lambda$ et la vitesse de propagation $c$ est donnée par :

$$c = \lambda \times f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{c}{\lambda} \tag{29}$$

où $c = 3 \times 10^8$ m/s est la vitesse de la lumière dans le vide (et approximativement dans l'air).

**Pour la bande GO :**

On nous donne les longueurs d'onde : $\lambda_{min} = 1052$ m et $\lambda_{max} = 2000$ m.

Il faut calculer les fréquences correspondantes. Attention : la fréquence est inversement proportionnelle à la longueur d'onde, donc :
— La longueur d'onde maximale correspond à la fréquence minimale
— La longueur d'onde minimale correspond à la fréquence maximale

Calcul de la fréquence minimale :

$$f_{GO,min} = \frac{c}{\lambda_{max}} = \frac{3 \times 10^8}{2000} = 1{,}5 \times 10^5 \text{ Hz} = 150 \text{ kHz} \tag{30}$$

Calcul de la fréquence maximale :

$$f_{GO,max} = \frac{c}{\lambda_{min}} = \frac{3 \times 10^8}{1052} \approx 2{,}85 \times 10^5 \text{ Hz} \approx 285 \text{ kHz} \tag{31}$$

**Pour la bande FM :**

On nous donne les fréquences : $f_{min} = 87{,}5$ MHz et $f_{max} = 108$ MHz.

Il faut calculer les longueurs d'onde correspondantes.

Calcul de la longueur d'onde maximale (correspond à $f_{min}$) :

$$\lambda_{FM,max} = \frac{c}{f_{min}} = \frac{3 \times 10^8}{87{,}5 \times 10^6} = \frac{300}{87{,}5} \approx 3{,}43 \text{ m} \tag{32}$$

Calcul de la longueur d'onde minimale (correspond à $f_{max}$) :

$$\lambda_{FM,min} = \frac{c}{f_{max}} = \frac{3 \times 10^8}{108 \times 10^6} = \frac{300}{108} \approx 2{,}78 \text{ m} \tag{33}$$

**Interprétation physique :**

— Les ondes GO ont des longueurs d'onde très grandes (1-2 km), ce qui leur permet de se propager par onde de sol et de contourner les obstacles. C'est pourquoi elles sont utilisées pour la radiodiffusion longue distance.

— Les ondes FM ont des longueurs d'onde courtes (2,78-3,43 m), ce qui limite leur portée à la ligne de vue directe. Elles offrent cependant une meilleure qualité audio.
— Le rapport de fréquences entre FM et GO est d'environ 400 :1, ce qui explique les différences de propagation et d'utilisation.

**Résultat :**

| Bande | Fréquence | Longueur d'onde |
|---|---|---|
| GO | De 150 kHz à 285 kHz | De 1052 m à 2000 m |
| FM | De 87,5 MHz à 108 MHz | De 2,78 m à 3,43 m |

## 4.3 Question 2 : Nombre maximum d'émetteurs en GO

**Raisonnement détaillé :**

La commission d'allocation des fréquences attribue un canal à chaque émetteur. En GO, chaque canal a une largeur spectrale de 9 kHz. Cette largeur est nécessaire pour transmettre le signal AM avec une qualité suffisante.

**Étape 1 : Calculer la bande totale disponible**

La bande totale disponible en GO est :

$$BW_{totale} = f_{GO,max} - f_{GO,min} = 285 - 150 = 135 \text{ kHz} \tag{34}$$

**Étape 2 : Calculer le nombre de canaux**

Le nombre maximum d'émetteurs (canaux) est obtenu en divisant la bande totale par la largeur d'un canal :

$$N = \left\lfloor \frac{BW_{totale}}{BW_{canal}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{135}{9} \right\rfloor = \lfloor 15 \rfloor = 15 \tag{35}$$

Le symbole $\lfloor \cdot \rfloor$ représente la partie entière (on ne peut pas avoir une fraction d'émetteur).

**Vérification :**

$$15 \times 9 = 135 \text{ kHz} \quad \checkmark \tag{36}$$

**Interprétation :**

— Chaque émetteur occupe 9 kHz de bande passante
— Les 15 émetteurs se répartissent uniformément sur la bande GO
— L'espacement entre canaux adjacents est de 9 kHz pour éviter les interférences
— En pratique, on laisse souvent des bandes de garde entre canaux pour améliorer la qualité

**Résultat :** Le nombre maximum d'émetteurs autorisés sur la bande GO est $N = 15$

## 4.4 Question 3 : Fonctions contenant le signal modulant

**Contexte théorique :**

Un signal modulé s'exprime généralement sous la forme :

$$s(t) = X(t)\cos(\theta(t)) \tag{37}$$

où :

— $X(t)$ est l'amplitude instantanée
— $\theta(t)$ est la phase instantanée

Le signal modulant $x(t)$ (l'information à transmettre) peut être contenu soit dans $X(t)$ (modulation d'amplitude), soit dans $\theta(t)$ (modulation de phase/fréquence).

### 4.4.1 a) En modulation d'amplitude (AM)

**Raisonnement :**

En modulation AM, on fait varier l'amplitude de la porteuse en fonction du signal modulant. Le signal AM s'écrit :

$$s_{AM}(t) = A_c[1 + m \cdot x(t)] \cos(2\pi f_c t) \tag{38}$$

où :
— $A_c$ : amplitude de la porteuse
— $m$ : taux de modulation ($0 < m \leq 1$)
— $x(t)$ : signal modulant (normalisé entre -1 et +1)
— $f_c$ : fréquence de la porteuse

En identifiant avec la forme générale $s(t) = X(t)\cos(\theta(t))$, on obtient :

$$X(t) = A_c[1 + m \cdot x(t)] \quad \text{(contient } x(t)\text{)} \tag{39}$$

$$\theta(t) = 2\pi f_c t \quad \text{(ne contient pas } x(t)\text{)} \tag{40}$$

**Interprétation physique :**
— L'amplitude varie entre $A_c(1 - m)$ et $A_c(1 + m)$
— Quand $x(t) = 1$ (maximum), l'amplitude est maximale : $A_c(1 + m)$
— Quand $x(t) = -1$ (minimum), l'amplitude est minimale : $A_c(1 - m)$
— La fréquence reste constante à $f_c$
— L'enveloppe du signal reproduit la forme de $x(t)$

**Résultat :** En modulation AM, la fonction qui contient le signal modulant est :

$$X(t) = A_c[1 + m \cdot x(t)]$$

C'est l'**amplitude** qui varie en fonction du signal modulant.

### 4.4.2 b) En modulation de fréquence (FM)

**Raisonnement :**

En modulation FM, on fait varier la fréquence instantanée de la porteuse en fonction du signal modulant. Le signal FM s'écrit :

$$s_{FM}(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t x(\tau)d\tau\right) \tag{41}$$

où :
— $A_c$ : amplitude constante de la porteuse
— $f_c$ : fréquence centrale de la porteuse
— $k_f$ : sensibilité en fréquence (Hz/V)

— $x(t)$ : signal modulant

En identifiant avec la forme générale $s(t) = X(t)\cos(\theta(t))$, on obtient :

$$X(t) = A_c \quad \text{(constante, ne contient pas } x(t)\text{)} \tag{42}$$

$$\theta(t) = 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t x(\tau)d\tau \quad \text{(contient } x(t)\text{)} \tag{43}$$

La fréquence instantanée est :

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta}{dt} = f_c + k_f \cdot x(t) \tag{44}$$

**Interprétation physique :**

— L'amplitude reste constante à $A_c$

— La fréquence varie entre $f_c - k_f|x_{max}|$ et $f_c + k_f|x_{max}|$

— Quand $x(t) > 0$, la fréquence augmente au-dessus de $f_c$

— Quand $x(t) < 0$, la fréquence diminue en dessous de $f_c$

— L'excursion maximale en fréquence est $\Delta f = k_f \cdot |x_{max}|$

**Résultat :** En modulation FM, la fonction qui contient le signal modulant est :

$$\theta(t) = 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t x(\tau)d\tau$$

C'est la **phase** (et donc la fréquence instantanée) qui varie en fonction du signal modulant.

**Comparaison AM vs FM :**

| **Critère** | **AM** | **FM** |
|---|---|---|
| Fonction modulée | Amplitude $X(t)$ | Phase $\theta(t)$ |
| Amplitude | Variable | Constante |
| Fréquence | Constante | Variable |
| Résistance au bruit | Moyenne | Excellente |
| Bande passante | $2f_m$ | $2(\Delta f + f_m)$ |

TABLE 1 – Comparaison des modulations AM et FM

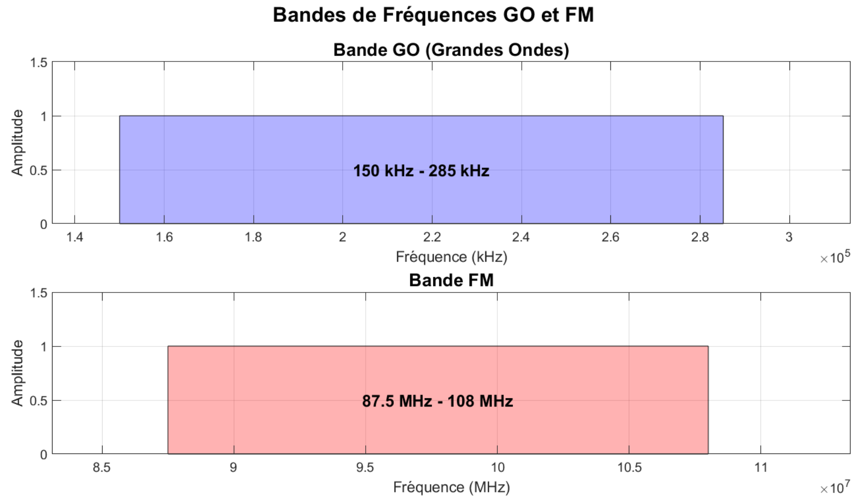


FIGURE 10 – Bandes de fréquences GO et FM

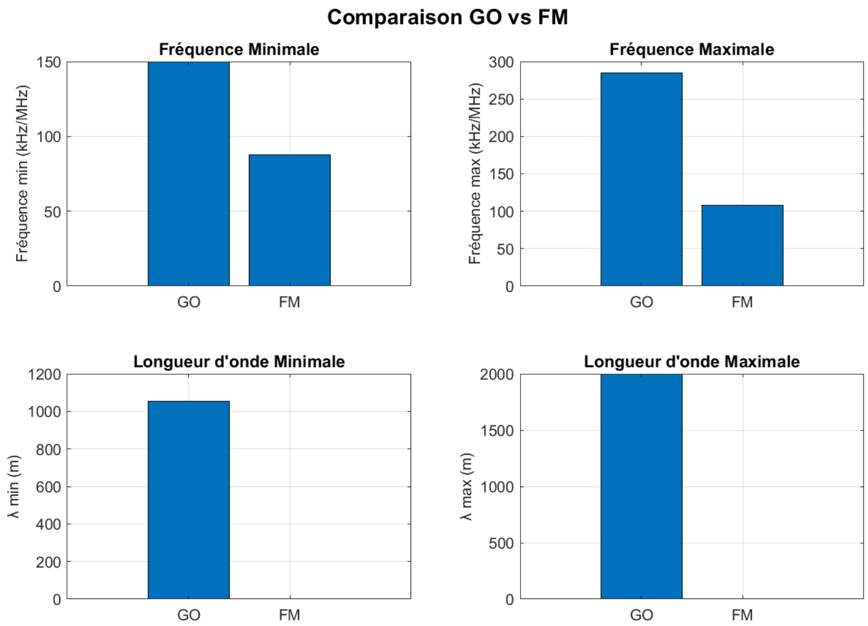


FIGURE 11 – Comparaison GO vs FM

# 5 Problème 2 : Étude du modulateur FM

Ce problème étudie deux cas de modulation FM : NFM (Narrow Band FM) pour $\beta < 1$ et WFM (Wide Band FM) pour $\beta > 1$.

## 5.1 Partie 1 : Narrow Band FM (NFM)

### 5.1.1 Paramètres

- Indice de modulation : $\beta = 0{,}1$
- Fréquence porteuse : $f_p = 100$ MHz
- Fréquence modulante : $f_m = 10$ kHz
- Amplitude modulante : $A_m = 1$ V
- Résistance de charge : $R = 50\ \Omega$

### 5.1.2 Question 1 : Expression de $\theta(t)$ et calcul de $k$

**Raisonnement détaillé :**

La phase totale d'un signal FM est composée de deux termes :

$$\theta(t) = \underbrace{2\pi f_p t}_{\text{phase porteuse}} + \underbrace{\varphi(t)}_{\text{phase modulée}} \tag{45}$$

La phase modulée $\varphi(t)$ est l'intégrale du signal modulant multipliée par la sensibilité $k$ :

$$\varphi(t) = 2\pi k \int_0^t x(\tau) d\tau \tag{46}$$

Pour un signal modulant sinusoïdal $x(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$, calculons l'intégrale :

$$\int_0^t A_m \cos(2\pi f_m \tau) d\tau = A_m \left[\frac{\sin(2\pi f_m \tau)}{2\pi f_m}\right]_0^t \tag{47}$$

$$= \frac{A_m}{2\pi f_m} \sin(2\pi f_m t) \tag{48}$$

Donc :

$$\varphi(t) = 2\pi k \cdot \frac{A_m}{2\pi f_m} \sin(2\pi f_m t) = \frac{k A_m}{f_m} \sin(2\pi f_m t) \tag{49}$$

Par définition, l'indice de modulation est :

$$\beta = \frac{k A_m}{f_m} \tag{50}$$

On peut donc écrire :

$$\varphi(t) = \beta \sin(2\pi f_m t) \tag{51}$$

Et la phase totale devient :

$$\theta(t) = 2\pi f_p t + \beta \sin(2\pi f_m t) \tag{52}$$

**Calcul de la sensibilité $k$ :**

De la relation $\beta = \frac{kA_m}{f_m}$, on tire :

$$k = \frac{\beta \cdot f_m}{A_m} = \frac{0{,}1 \times 10000}{1} = 1000 \text{ Hz/V} \tag{53}$$

**Interprétation :**

— $k = 1000$ Hz/V signifie qu'une variation de 1 V du signal modulant produit une variation de 1000 Hz de la fréquence instantanée

— Avec $\beta = 0{,}1 < 1$, on est en mode NFM (bande étroite)

**Résultat :**

$$\theta(t) = 2\pi \times 100 \times 10^6 \times t + 0{,}1 \sin(2\pi \times 10^4 \times t)$$

Sensibilité : $k = 1000$ Hz/V

### 5.1.3 Question 2 : Forme de $s(t)$ avec développement de Bessel

**Raisonnement théorique :**

Le signal FM s'écrit :

$$s(t) = A_p \cos(\theta(t)) = A_p \cos(2\pi f_p t + \beta \sin(2\pi f_m t)) \tag{54}$$

Pour $\beta \ll 1$ (NFM), on peut utiliser les approximations de Taylor :

$$\cos(\beta \sin(\alpha)) \approx 1 - \frac{\beta^2}{2}\sin^2(\alpha) \approx 1 \tag{55}$$

$$\sin(\beta \sin(\alpha)) \approx \beta \sin(\alpha) \tag{56}$$

En utilisant la formule trigonométrique :

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \tag{57}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} s(t) &\approx A_p[\cos(2\pi f_p t) \cdot 1 - \sin(2\pi f_p t) \cdot \beta \sin(2\pi f_m t)] \\ &= A_p \cos(2\pi f_p t) - \beta A_p \sin(2\pi f_p t)\sin(2\pi f_m t) \end{aligned} \tag{58}$$

En utilisant la formule $\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$ :

$$\begin{aligned} s(t) &\approx A_p \cos(2\pi f_p t) \\ &\quad - \frac{\beta A_p}{2}[\cos(2\pi(f_p - f_m)t) - \cos(2\pi(f_p + f_m)t)] \end{aligned} \tag{59}$$

**Interprétation spectrale :**

Le spectre NFM contient :

— Une porteuse à $f_p$ d'amplitude $A_p$

— Une bande latérale inférieure à $f_p - f_m$ d'amplitude $\frac{\beta A_p}{2}$

— Une bande latérale supérieure à $f_p + f_m$ d'amplitude $\frac{\beta A_p}{2}$

C'est similaire à l'AM ! La différence est que les bandes latérales sont en opposition de phase.

### 5.1.4 Question 3 : Puissance transmise

**Raisonnement :**
Pour un signal sinusoïdal $s(t) = A_p \cos(2\pi f_p t)$ dans une charge $R$, la puissance moyenne est :

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{s^2(t)}{R} dt = \frac{A_p^2}{2R} \tag{60}$$

En FM, l'amplitude reste constante à $A_p$, donc la puissance ne dépend pas de la modulation :

$$P = \frac{A_p^2}{2R} = \frac{1^2}{2 \times 50} = \frac{1}{100} = 0{,}01 \text{ W} = 10 \text{ mW} \tag{61}$$

**Conversion en dB et dBm :**
En dB (par rapport à 1 W) :

$$P_{dB} = 10 \log_{10}\left(\frac{P}{1 \text{ W}}\right) = 10 \log_{10}(0{,}01) = -20 \text{ dB} \tag{62}$$

En dBm (par rapport à 1 mW) :

$$P_{dBm} = 10 \log_{10}\left(\frac{P}{1 \text{ mW}}\right) = 10 \log_{10}(10) = 10 \text{ dBm} \tag{63}$$

**Résultats :**
— $P = 10$ mW
— $P = -20$ dB
— $P = 10$ dBm

### 5.1.5 Question 4 : Largeur du canal

**Raisonnement :**
Pour NFM ($\beta \ll 1$), la règle de Carson simplifiée donne :

$$BW \approx 2f_m \tag{64}$$

Car $\Delta f = \beta \cdot f_m \ll f_m$, donc $BW = 2(\Delta f + f_m) \approx 2f_m$.
Application numérique :

$$BW = 2 \times 10 = 20 \text{ kHz} \tag{65}$$

**Comparaison avec AM :**
En AM, la bande passante est aussi $BW_{AM} = 2f_m = 20$ kHz. Pour NFM, on obtient la même bande passante qu'en AM, mais avec une meilleure résistance au bruit.

**Résultat :** $BW = 20$ kHz

## 5.2 Partie 2 : Wide Band FM (WFM)

### 5.2.1 Paramètres

— Indice de modulation : $\beta = 6$
— Fréquence porteuse : $f_p = 100$ MHz
— Fréquence modulante : $f_m = 10$ kHz
— Amplitude porteuse : $V_p = 1$ V
— Résistance : $R = 50\ \Omega$

### 5.2.2 Question 1 : Décomposition avec coefficients de Bessel

**Théorie des fonctions de Bessel :**
Pour un signal FM avec indice $\beta$ quelconque, le développement en série de Fourier fait intervenir les fonctions de Bessel de première espèce $J_n(\beta)$ :

$$s(t) = A_p \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \cos(2\pi(f_p + nf_m)t) \tag{66}$$

Le spectre contient donc une infinité de raies espacées de $f_m$, mais seules celles avec $|J_n(\beta)| > 0{,}1$ sont significatives (contiennent plus de 1% de la puissance).

**Pour $\beta = 6$, les coefficients de Bessel sont :**

| $n$ | $J_n(6)$ | $\lvert J_n(6)\rvert$ | Significatif ? |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,1506 | 0,1506 | Oui |
| 1 | -0,2767 | 0,2767 | Oui |
| 2 | 0,3621 | 0,3621 | Oui |
| 3 | -0,2458 | 0,2458 | Oui |
| 4 | 0,1148 | 0,1148 | Oui |
| 5 | -0,0437 | 0,0437 | Non ($< 0{,}1$) |
| 6 | 0,0138 | 0,0138 | Non ($< 0{,}1$) |

**Interprétation :**
On conserve les termes pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$, soit 5 valeurs. Comme le spectre est symétrique ($J_{-n} = (-1)^n J_n$), on a :
- 1 raie centrale (n=0)
- 4 paires de raies latérales (n=±1, ±2, ±3, ±4)

Total : $1 + 2 \times 4 = 9$ raies significatives.

**Résultat :** On conserve 5 termes ($n = 0$ à 4), soit 9 raies significatives dans le spectre.

### 5.2.3 Question 3 : Largeur du canal

**Raisonnement avec la règle de Carson :**
Pour WFM, la règle de Carson donne :

$$BW = 2(\Delta f + f_m) = 2(k_f A_m + f_m) = 2(\beta f_m + f_m) = 2f_m(\beta + 1) \tag{67}$$

Application numérique :

$$BW = 2 \times 10 \times (6 + 1) = 2 \times 10 \times 7 = 140 \text{ kHz} \tag{68}$$

**Vérification avec les coefficients de Bessel :**
Avec 4 paires de raies significatives espacées de $f_m = 10$ kHz :

$$BW_{pratique} \approx 2 \times 4 \times f_m = 80 \text{ kHz} \tag{69}$$

La règle de Carson (140 kHz) est plus large car elle garantit 98% de la puissance, tandis que le critère $|J_n| > 0{,}1$ ne capture qu'environ 95% de la puissance.

**Résultat :** $BW = 140$ kHz (règle de Carson)

#### 5.2.4 Question 6 : Puissance transmise

**Raisonnement :**

Comme en NFM, la puissance en FM ne dépend que de l'amplitude de la porteuse :

$$P = \frac{V_p^2}{2R} = \frac{1^2}{2 \times 50} = 0{,}01 \text{ W} = 10 \text{ mW} = 10 \text{ dBm} \tag{70}$$

**Remarque importante :**

La puissance totale transmise est la même en NFM et WFM (10 mW), mais en WFM elle est répartie sur plus de raies spectrales (9 au lieu de 3). C'est le principe de l'échange bande passante contre qualité en FM.

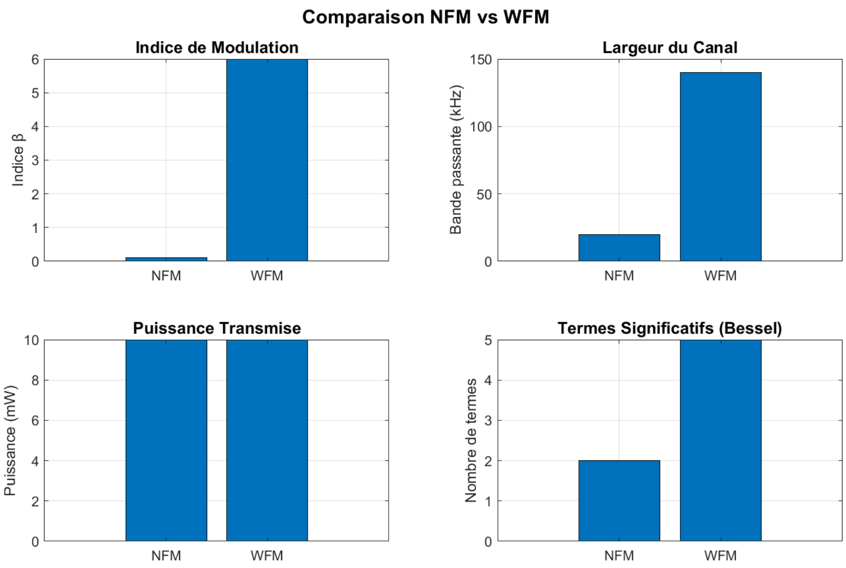


FIGURE 12 – Comparaison NFM vs WFM

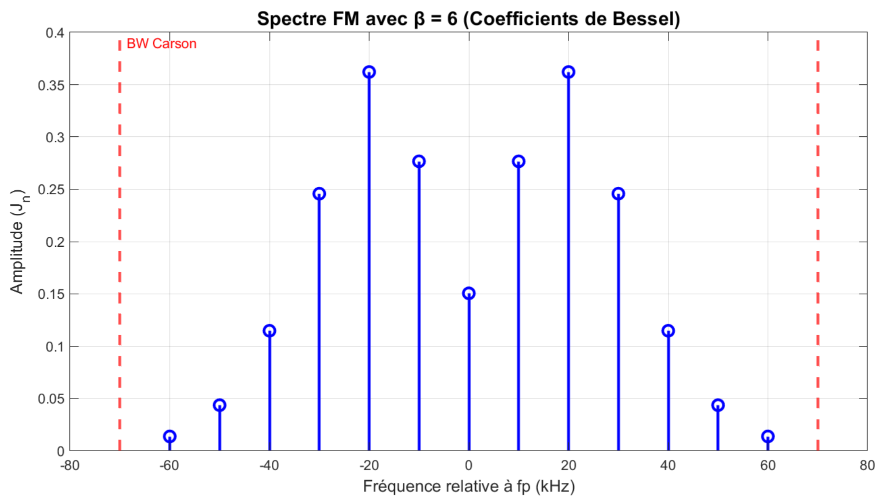


FIGURE 13 – Spectre WFM avec coefficients de Bessel

# Conclusion

Ces travaux dirigés nous ont permis d'approfondir notre compréhension des modulations d'amplitude (AM) et de fréquence (FM) à travers des exercices concrets et des simulations Matlab.

## Synthèse des résultats

### Modulation AM (Exercices 1 et 2)

Nous avons étudié les caractéristiques fondamentales de la modulation AM :

— **Structure spectrale :** Un signal AM présente une porteuse et deux bandes latérales symétriques

— **Taux de modulation :** Détermine l'amplitude des bandes latérales et la qualité de la modulation

— **Répartition des puissances :** La majorité de la puissance est dans la porteuse (inefficace énergétiquement)

— **Bande passante :** $BW = 2f_m$, proportionnelle à la fréquence modulante

— **Démodulation :** Peut être réalisée de façon synchrone (cohérente) ou par détection d'enveloppe

L'exercice 2 a montré comment un signal multi-fréquences génère plusieurs paires de bandes latérales, et comment le filtrage permet de sélectionner une composante particulière avant démodulation.

### Modulation FM (Exercice 3)

L'étude de la modulation FM a mis en évidence :

— **Excursion en fréquence :** $\Delta f = k_f \times A_x$, proportionnelle à l'amplitude du signal modulant

— **Indice de modulation :** $\beta = \Delta f / f_x$, paramètre clé qui détermine le type de FM

— **Classification :** NFM ($\beta < 1$) vs WFM ($\beta > 1$)

— **Bande de Carson :** $BW = 2(\Delta f + f_x)$, plus large que l'AM

— **Démodulation :** Cohérente pour NFM, nécessite un discriminateur ou une PLL pour WFM

## Comparaison AM vs FM

| **Critère** | **AM** | **FM** |
|---|---|---|
| Bande passante | $2f_m$ | $2(\Delta f + f_m)$ |
| Efficacité spectrale | Bonne | Moyenne |
| Résistance au bruit | Moyenne | Excellente |
| Complexité | Simple | Moyenne |
| Efficacité énergétique | Faible | Bonne |
| Applications | Radio GO/PO | Radio FM, TV |

TABLE 2 – Comparaison AM vs FM

## Applications pratiques

Les connaissances acquises dans ces TD trouvent des applications directes dans :

- **Radiodiffusion :** AM pour les ondes longues/moyennes, FM pour la bande 88-108 MHz
- **Télévision :** Modulation d'amplitude pour l'image, FM pour le son
- **Communications mobiles :** Techniques dérivées (QAM, FSK, etc.)
- **Stéréophonie :** Multiplexage de canaux en FM

## Apports des simulations Matlab

Les simulations Matlab ont été essentielles pour :

- Visualiser les signaux dans les domaines temporel et fréquentiel
- Valider les calculs théoriques
- Comprendre l'impact des paramètres sur les signaux modulés
- Expérimenter avec différentes configurations

## Conclusion générale

Ces travaux dirigés ont permis de consolider notre compréhension des modulations AM et FM, tant sur le plan théorique que pratique. Les calculs mathématiques, couplés aux simulations Matlab, ont fourni une vision complète de ces techniques fondamentales en télécommunications.

La maîtrise de ces concepts est essentielle pour aborder des techniques de modulation plus avancées (modulations numériques, modulations multi-porteuses, etc.) utilisées dans les systèmes de communication modernes.