

# **TP 2 : Modulation FM**

Traitement du Signal

ISGE/IC 2

Année académique 2018-2019

Groupe 4

21 janvier 2026

## Table des matières

# 1 Préparation

## 1.1 Expression d'un signal modulé FM et de sa fréquence instantanée

Un signal modulé en fréquence (FM) s'écrit sous la forme générale :

$$s_{FM}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi(t)) \quad (1)$$

où :

- $A_c$  : amplitude de la porteuse
- $f_c$  : fréquence de la porteuse
- $\varphi(t)$  : phase instantanée

La phase instantanée est définie par :

$$\varphi(t) = 2\pi K_f \int_0^t x(\tau) d\tau \quad (2)$$

où  $K_f$  est la constante de sensibilité en fréquence (en Hz/V) et  $x(t)$  est le signal modulant.

La **fréquence instantanée**  $f_i(t)$  est définie comme la dérivée de la phase totale par rapport au temps :

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} (2\pi f_c t + \varphi(t)) = f_c + K_f \cdot x(t) \quad (3)$$

La fréquence instantanée varie donc autour de la fréquence porteuse  $f_c$  en fonction du signal modulant  $x(t)$ .

## 1.2 Cas du signal modulant sinusoïdal

Dans le cas où le signal modulant est une sinusoïde :

$$x(t) = A_x \cos(2\pi f_x t) \quad (4)$$

### 1.2.1 Fréquence instantanée

La fréquence instantanée devient :

$$f_i(t) = f_c + K_f \cdot A_x \cos(2\pi f_x t) = f_c + \Delta f \cos(2\pi f_x t) \quad (5)$$

où  $\Delta f = K_f \cdot A_x$  est appelée la **déviation maximale en fréquence**.

### 1.2.2 Indice de modulation

L'**indice de modulation**  $\beta$  est défini par :

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_x} \quad (6)$$

où  $f_x$  est la fréquence du signal modulant.

### 1.2.3 Relation entre $K_f$ et $\Delta f$

De la définition de la déviation en fréquence, on obtient :

$$\Delta f = K_f \cdot A_x \quad \Rightarrow \quad K_f = \frac{\Delta f}{A_x} \quad (7)$$

L'indice de modulation peut également s'écrire :

$$\beta = \frac{K_f \cdot A_x}{f_x} \quad (8)$$

## 1.3 Différence entre modulation FM "NFM" et "WFM"

Il existe deux types principaux de modulation FM selon la valeur de l'indice de modulation  $\beta$  :

### 1.3.1 NFM (Narrow Band FM - FM à bande étroite)

- **Condition :**  $\beta \ll 1$  (typiquement  $\beta < 0.5$ )
- **Bande passante :**  $BW \approx 2f_x$
- **Caractéristiques :**
  - Occupation spectrale réduite
  - Efficacité spectrale élevée
  - Qualité audio limitée
- **Applications :**
  - Communications radio bidirectionnelles
  - Radio amateur
  - Communications professionnelles (police, pompiers)

### 1.3.2 WFM (Wide Band FM - FM à large bande)

- **Condition :**  $\beta \gg 1$  (typiquement  $\beta > 1$ )
- **Bande passante :**  $BW \approx 2\Delta f$
- **Caractéristiques :**
  - Occupation spectrale importante
  - Excellente qualité audio
  - Meilleure résistance au bruit
  - Rapport signal/bruit amélioré
- **Applications :**
  - Radio FM commerciale (88-108 MHz)
  - Diffusion audio haute qualité
  - Télévision analogique (son)

## 1.4 Bande de Carson

La **règle de Carson** permet d'estimer la bande passante nécessaire pour transmettre un signal modulé en FM. Elle stipule que 98% de la puissance du signal FM est contenue dans une bande de fréquence donnée par :

$$BW_{Carson} = 2(\Delta f + f_x) = 2f_x(\beta + 1) \quad (9)$$

où :

- $\Delta f$  : déviation maximale en fréquence
- $f_x$  : fréquence du signal modulant
- $\beta$  : indice de modulation

#### 1.4.1 Cas particuliers

1. Pour NFM ( $\beta \ll 1$ ) :

$$BW_{Carson} \approx 2f_x \quad (10)$$

La bande passante est principalement déterminée par la fréquence du signal modulant.

2. Pour WFM ( $\beta \gg 1$ ) :

$$BW_{Carson} \approx 2\Delta f \quad (11)$$

La bande passante est principalement déterminée par la déviation en fréquence.

#### 1.4.2 Exemple numérique

Avec les paramètres du TP :

- $A_x = 1 \text{ V}$
- $f_x = 10 \text{ Hz}$
- $f_c = 100 \times f_x = 1000 \text{ Hz}$

Le tableau suivant présente les résultats pour différentes valeurs de  $\Delta f$  :

$\Delta f$ (Hz)	$K_f$ (Hz/V)	$\beta$	$BW_{Carson}$ (Hz)	Type
1	1.0	0.10	22	NFM
10	10.0	1.00	40	Transition
50	50.0	5.00	120	WFM
100	100.0	10.00	220	WFM

TABLE 1 – Caractéristiques du signal FM pour différentes déviations

#### Observations :

- Pour  $\Delta f = 1 \text{ Hz}$  :  $\beta = 0.10 \Rightarrow$  NFM (bande étroite)
- Pour  $\Delta f = 10 \text{ Hz}$  :  $\beta = 1.00 \Rightarrow$  Zone de transition
- Pour  $\Delta f = 50 \text{ Hz}$  :  $\beta = 5.00 \Rightarrow$  WFM (large bande)
- Pour  $\Delta f = 100 \text{ Hz}$  :  $\beta = 10.00 \Rightarrow$  WFM (très large bande)

Plus l'indice de modulation augmente, plus la bande passante nécessaire est importante, mais meilleure est la qualité du signal et sa résistance au bruit.

## 2 Partie I : Analyse théorique du signal modulé FM sous Matlab

### 2.1 Objectif

Cette partie vise à analyser les caractéristiques d'un signal modulé en fréquence (FM) à l'aide de Matlab. Nous allons générer un signal modulant sinusoïdal, le moduler en FM avec différents paramètres, et observer l'effet de la variation de la déviation en fréquence sur le signal modulé et son spectre.

### 2.2 Paramètres du signal

Les paramètres utilisés pour cette analyse sont :

- Signal modulant :  $x(t) = A_x \cos(2\pi f_x t)$
- Amplitude du signal modulant :  $A_x = 1$  V
- Fréquence du signal modulant :  $f_x = 10$  Hz
- Fréquence de la porteuse :  $f_c = 100 \times f_x = 1000$  Hz
- Fréquence d'échantillonnage :  $f_s = 10000$  Hz
- Durée du signal :  $T = 1$  s

### 2.3 Question 1 : Génération du signal modulant

Le signal modulant est généré sous Matlab avec le code suivant :

```

1 % Parametres
2 Ax = 1; % Amplitude (1V)
3 fx = 10; % Frequence (10 Hz)
4 fs = 10000; % Frequence d'echantillonnage
5 T = 1; % Duree (1 seconde)
6 t = 0:1/fs:T-1/fs; % Vecteur temps
7
8 % Signal modulant
9 x = Ax * cos(2*pi*fx*t);

```

Listing 1 – Génération du signal modulant

### 2.4 Question 2 : Génération du signal modulé FM avec fmmod

La fonction `fmmod` de Matlab permet de générer un signal modulé en FM. Sa syntaxe est :

```

1 s_FM = fmmod(x, fc, fs, delta_f);

```

où :

- `x` : signal modulant
- `fc` : fréquence de la porteuse
- `fs` : fréquence d'échantillonnage
- `delta_f` : déviation en fréquence  $\Delta f$

## 2.5 Question 3 : Tracé de l'allure du signal modulé

Le signal modulé FM est tracé pour observer sa forme temporelle. On peut constater que l'amplitude reste constante (caractéristique de la modulation FM), mais la fréquence instantanée varie en fonction du signal modulant.

## 2.6 Question 4 : Effet de la variation de la déviation en fréquence

Nous testons différentes valeurs de déviation en fréquence :  $\Delta f = 1, 10, 50, 100 \text{ Hz}$ .

### Observations :

- **$\Delta f = 1 \text{ Hz} (\beta = 0.1)$**  : Le signal FM varie peu en fréquence, les oscillations sont presque régulières. C'est un cas de NFM.
- **$\Delta f = 10 \text{ Hz} (\beta = 1)$**  : La variation de fréquence devient visible, on observe une modulation de la fréquence instantanée.
- **$\Delta f = 50 \text{ Hz} (\beta = 5)$**  : La variation de fréquence est importante, le signal FM présente des zones de compression et d'étirement temporel marquées. C'est un cas de WFM.
- **$\Delta f = 100 \text{ Hz} (\beta = 10)$**  : La variation de fréquence est très importante, l'effet de modulation est maximal.

**Conclusion :** Plus la déviation en fréquence  $\Delta f$  augmente, plus l'indice de modulation  $\beta$  augmente, et plus la variation de la fréquence instantanée est importante. Cela se traduit visuellement par des zones où les oscillations sont plus rapprochées (haute fréquence) ou plus espacées (basse fréquence).

## 2.7 Question 5 : Spectre d'amplitude du signal modulé FM

Le spectre d'amplitude du signal modulé FM est obtenu par transformée de Fourier rapide (FFT).

```

1 % Calcul de la FFT
2 N = length(s_FM);
3 S_FM_f = fft(s_FM);
4 S_FM_f = fftshift(S_FM_f);
5 f = (-N/2:N/2-1)*(fs/N);
6
7 % Spectre d'amplitude
8 amplitude_spectrum = abs(S_FM_f)/N;

```

Listing 2 – Calcul du spectre d'amplitude

### Observations sur l'effet de la variation de $\Delta f$ :

- Pour  $\beta \ll 1$  (NFM) : Le spectre présente principalement la porteuse et deux raies latérales (comme en AM). L'occupation spectrale est de l'ordre de  $2f_x$ .
- Pour  $\beta \gg 1$  (WFM) : Le spectre présente de nombreuses raies latérales espacées de  $f_x$  de part et d'autre de la porteuse. L'occupation spectrale augmente avec  $\Delta f$ .

### Occupation spectrale :

Selon la règle de Carson, l'occupation spectrale est donnée par :

$$BW_{Carson} = 2(\Delta f + f_x)$$

$\Delta f$ (Hz)	$\beta$	Occupation spectrale (Hz)
1	0.10	22
10	1.00	40
50	5.00	120
100	10.00	220

TABLE 2 – Occupation spectrale pour différentes déviations

**Commentaire :** Plus la déviation en fréquence augmente, plus le spectre s'élargit et plus l'occupation spectrale est importante. Cela confirme que la modulation FM nécessite une bande passante plus large que la modulation AM, mais offre en contrepartie une meilleure résistance au bruit.

## 2.8 Question 6 : Démodulation avec `fmdemod`

La fonction `fmdemod` de Matlab permet de démoduler un signal FM :

```
1 x2 = fmdemod(s_FM, fc, fs, delta_f);
```

Listing 3 – Démodulation FM

Cette fonction effectue la démodulation en calculant la dérivée de la phase instantanée du signal FM.

## 2.9 Question 7 : Comparaison signal modulant et signal démodulé

En traçant sur la même figure le signal modulant  $x(t)$  et le signal démodulé  $x_2(t)$ , on observe :

- Les deux signaux sont quasiment identiques (superposés)
- La démodulation FM permet de récupérer fidèlement le signal modulant
- Il peut y avoir un léger décalage temporel dû au traitement numérique
- L'amplitude est correctement restituée

**Résultat :** La démodulation FM fonctionne correctement et permet de récupérer le signal d'origine sans distorsion significative.

## 2.10 Question 8 : Démodulation avec erreur de fréquence

On suppose maintenant que l'oscillateur de réception délivre une sinusoïde de fréquence  $f_r = f_c + 1$  Hz au lieu de  $f_c$ .

**Simulation :**

```
1 % Demodulation avec erreur de frequence
2 fr = fc + 1; % Frequence de reception decalee
3 s_FM_shifted = fmmod(x, fr, fs, delta_f);
4 x2_error = fmdemod(s_FM, fr, fs, delta_f);
```

Listing 4 – Démodulation avec erreur de fréquence

**Observations :**

- Le signal démodulé  $x_2$  présente une composante continue (offset DC)
- Le signal démodulé est décalé verticalement par rapport au signal original
- La forme du signal est préservée mais avec un décalage d'amplitude

— L'erreur de fréquence de 1 Hz introduit une erreur systématique dans la démodulation

**Remarques :**

1. Une erreur de fréquence entre l'émetteur et le récepteur introduit une composante continue dans le signal démodulé.
2. Cette erreur peut être corrigée par :
  - Un filtrage passe-haut pour éliminer la composante continue
  - Une boucle à verrouillage de phase (PLL) pour synchroniser les oscillateurs
  - Un système de contrôle automatique de fréquence (AFC)
3. En pratique, les récepteurs FM utilisent des PLL pour assurer une synchronisation précise avec la fréquence de la porteuse.

### 3 Partie II : Démodulation FM en présence de bruit

#### 3.1 Objectif

Cette partie vise à étudier le comportement d'un démodulateur FM en présence d'un signal modulé FM bruité. Nous allons analyser l'effet du bruit gaussien (AWGN) sur la qualité de la démodulation et déterminer le seuil de SNR à partir duquel le signal n'est plus correctement démodulé.

#### 3.2 Question 1 : Génération du signal modulé FM bruité

Le signal FM bruité est généré en ajoutant un bruit blanc gaussien (AWGN) au signal modulé FM :

```

1 % Signal FM
2 s_FM = fmmod(x, fc, fs, delta_f);
3
4 % Ajout de bruit AWGN
5 SNR_dB = 20; % Rapport signal/bruit en dB
6 s_FM_noisy = awgn(s_FM, SNR_dB, 'measured');
```

Listing 5 – Génération du signal FM bruité

La fonction `awgn` ajoute un bruit blanc gaussien avec un rapport signal/bruit (SNR) spécifié en dB.

#### 3.3 Question 2 : Démodulation du signal FM bruité

Le signal FM bruité est démodulé avec la fonction `fmdemod` :

```
1 x2_noisy = fmdemod(s_FM_noisy, fc, fs, delta_f);
```

Listing 6 – Démodulation du signal bruité

##### Commentaire du résultat :

- Pour un SNR élevé ( $> 20$  dB) : Le signal démodulé est très proche du signal original, le bruit est faible.
- Pour un SNR moyen (10-20 dB) : Le signal démodulé présente du bruit mais reste exploitable, la forme du signal est reconnaissable.
- Pour un SNR faible ( $< 10$  dB) : Le signal démodulé est fortement bruité, la qualité se dégrade significativement.

#### 3.4 Question 3 : Seuil de démodulation correcte

Pour déterminer à partir de quelle valeur du SNR le signal n'est plus correctement démodulé, nous testons différentes valeurs de SNR et calculons l'erreur quadratique moyenne (MSE) entre le signal original et le signal démodulé.

```

1 SNR_values = 0:2:30; % SNR de 0 à 30 dB
2 MSE_values = zeros(size(SNR_values));
3
4 for i = 1:length(SNR_values)
    SNR_dB = SNR_values(i);
```

```

6 s_FM_noisy = awgn(s_FM, SNR_dB, 'measured');
7 x2_noisy = fmdemod(s_FM_noisy, fc, fs, delta_f);
8
9 % Calcul de l'erreur quadratique moyenne
10 MSE_values(i) = mean((x - x2_noisy).^2);
11 end

```

Listing 7 – Analyse du seuil de SNR

**Résultats attendus :**

- **Seuil de démodulation** : Le signal FM peut être correctement démodulé pour un SNR supérieur à environ 10-12 dB.
- **Effet de seuil** : En dessous de ce seuil, la qualité de démodulation se dégrade rapidement (effet de seuil FM).
- **Avantage de la FM** : Pour un SNR suffisant, la modulation FM offre une meilleure résistance au bruit que la modulation AM, grâce à l'effet de capture et à la possibilité d'utiliser des indices de modulation élevés.

### 3.5 Question 5 : Cohérence avec l'espacement de sous-porteuses

Pour un signal stéréo, on se retrouve avec un signal multiplex occupant en bande de base une largeur  $W = 53$  kHz. La question est de savoir si cela est cohérent avec un espacement de sous-porteuses de 200 kHz.

**Analyse :**

- Signal multiplex stéréo FM :  $W = 53$  kHz
- Espace entre sous-porteuses :  $\Delta f_{spacing} = 200$  kHz
- Déviation maximale en FM stéréo :  $\Delta f = 75$  kHz (norme FM)

Selon la règle de Carson, la bande passante nécessaire pour transmettre le signal FM stéréo est :

$$BW_{Carson} = 2(\Delta f + W) = 2(75 + 53) = 256 \text{ kHz} \quad (12)$$

**Conclusion :**

Avec un espacement de 200 kHz entre les sous-porteuses, il y aurait un chevauchement spectral entre les canaux adjacents, car la bande passante nécessaire (256 kHz) est supérieure à l'espacement (200 kHz).

**Réponse :** Non, ce n'est pas cohérent. Pour éviter les interférences entre canaux adjacents, l'espacement devrait être au minimum égal à la bande de Carson, soit environ 260 kHz. En pratique, la norme FM utilise un espacement de 200 kHz, mais avec des techniques de filtrage et de limitation de bande pour réduire les interférences.

## 4 Conclusion

Ce TP nous a permis d'étudier en détail la modulation et la démodulation FM, tant sur le plan théorique que pratique avec Matlab.

### 4.1 Points clés

1. **Modulation FM :** La fréquence instantanée varie proportionnellement au signal modulant, tandis que l'amplitude reste constante.
2. **Indice de modulation :** Le paramètre  $\beta = \Delta f / f_x$  détermine le type de modulation (NFM ou WFM) et l'occupation spectrale.
3. **Règle de Carson :** La bande passante nécessaire est  $BW = 2(\Delta f + f_x)$ , ce qui montre que la FM nécessite plus de bande passante que l'AM.
4. **Démodulation :** La fonction `fmdemod` permet de récupérer fidèlement le signal modulant à partir du signal FM.
5. **Sensibilité au bruit :** La FM présente un effet de seuil : au-dessus d'un certain SNR (environ 10-12 dB), la qualité est excellente ; en dessous, elle se dégrade rapidement.
6. **Erreur de fréquence :** Une erreur de synchronisation entre émetteur et récepteur introduit une composante continue dans le signal démodulé.

### 4.2 Avantages de la modulation FM

- Meilleure résistance au bruit que l'AM (pour SNR suffisant)
- Amplitude constante (moins sensible aux non-linéarités)
- Possibilité d'améliorer le SNR en augmentant  $\beta$  (au prix d'une bande passante plus large)
- Effet de capture : le signal le plus fort domine

### 4.3 Inconvénients de la modulation FM

- Occupation spectrale importante (surtout en WFM)
- Complexité accrue des circuits de modulation/démodulation
- Effet de seuil : performances médiocres pour SNR faible
- Nécessité d'une synchronisation précise en fréquence