Expansão de Campos Eletromagnéticos Arbitrários em Termos de Funções de Onda Vetoriais

Wendel Lopes Moreira

18 de janeiro de 2015

Sumário

Parte I

Cálculo das Funções de Bessel

Capítulo 1

Teoria de Mie

Mie resolveu o problema do espalhamento de ondas eletromagnéticas por uma esféra dielétrica expandindo o campo incidente na forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \\ Z\mathbf{H}_i(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = E_0 \sum_{nm} \begin{bmatrix} G_{nm}^{TM} \\ G_{nm}^{TE} \end{bmatrix} \mathbf{M}_{nm}^i(\mathbf{r}) + \begin{bmatrix} G_{nm}^{TE} \\ -G_{nm}^{TM} \end{bmatrix} \mathbf{N}_{nm}^i(\mathbf{r}) \tag{1.1}$$

em que

$$\mathbf{M}_{nm}^i(\mathbf{r}) = j_p(kr)\mathbf{X}_{nm}(\hat{\mathbf{r}}) \tag{1.2}$$

$$\mathbf{N}_{nm}^i(\mathbf{r}) = \frac{i}{k}\nabla \times \mathbf{M}_{nm}^i(\mathbf{r}) \tag{1.3}$$

O campo espalhado é dado por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) \\ Z\mathbf{H}_s(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = E_0 \sum_{nm} \begin{bmatrix} b_n G_{nm}^{TM} \\ a_n G_{nm}^{TE} \end{bmatrix} \mathbf{M}_{nm}^s(\mathbf{r}) + \begin{bmatrix} a_n G_{nm}^{TE} \\ -b_n G_{nm}^{TM} \end{bmatrix} \mathbf{N}_{nm}^s(\mathbf{r}) \tag{1.4}$$

em que

$$\mathbf{M}_{nm}^s(\mathbf{r}) = h_p^{(2)}(kr)\mathbf{X}_{nm}(\hat{\mathbf{r}}) \tag{1.5}$$

$$\mathbf{N}_{nm}^s(\mathbf{r}) = \frac{i}{k}\nabla \times \mathbf{M}_{nm}^s(\mathbf{r}) \tag{1.6}$$

e o campo no interior da esfera por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_w(\mathbf{r}) \\ Z'\mathbf{H}_w(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = E_0 \sum_{nm} \begin{bmatrix} d_n G_{nm}^{TM} \\ c_n G_{nm}^{TE} \end{bmatrix} \mathbf{M}_{nm}^w(\mathbf{r}) + \begin{bmatrix} c_n G_{nm}^{TE} \\ -d_n G_{nm}^{TM} \end{bmatrix} \mathbf{N}_{nm}^w(\mathbf{r}) \tag{1.7}$$

em que

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{nm}^{w}(\mathbf{r}) &= j_p(k'r)\mathbf{X}_{nm}(\hat{\mathbf{r}}) && (1.8)\\ \mathbf{N}_{nm}^{w}(\mathbf{r}) &= \frac{i}{k}\nabla\times\mathbf{M}_{nm}^{w}(\mathbf{r}) && (1.9)\end{aligned}$$

sendo que $M = n_s/n_0$, n_s é o índice de refração da esfera, n_0 o índice de refração do meio externo, k é número de onda do meio externo e k' o do meio interno, Z é a impedância do meio externo e Z' a impedância do meio interno (esfera), e $k' = Mk$ e $Zk/Z'k' = \mu/\mu'$.

Os campos eletromagnéticos devem satisfazer as equações de Maxwell em pontos onde ε e μ sejam contínuos, e nas interfaces às seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}\times\left(\mathbf{E}_{\text{in}}-\mathbf{E}_{\text{out}}\right) &= 0 && (1.10)\\ \hat{\mathbf{r}}\times\left(\mathbf{H}_{\text{in}}-\mathbf{H}_{\text{out}}\right) &= 0 && (1.11)\end{aligned}$$

em que $\mathbf{E}_{\text{in}} = \mathbf{E}_w$ e $\mathbf{E}_{\text{out}} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s$ e em que $\mathbf{H}_{\text{in}} = \mathbf{H}_w$ e $\mathbf{H}_{\text{out}} = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s$.

Mas devemos notar que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{X}_{nm} &= i\mathbf{V}_{nm} && (1.12)\\ \hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{V}_{nm} &= i\mathbf{X}_{nm} && (1.13)\end{aligned}$$

e como

$$\mathbf{N}_{nm}(\mathbf{r}) = -\left(j_p'(kr)+\frac{j_p(kr)}{kr}\right)\mathbf{V}_{nm}(\hat{\mathbf{r}}) - \sqrt{p(p+1)}\frac{j_p(kr)}{kr}\mathbf{Y}_{nm}(\hat{\mathbf{r}}) \qquad (1.14)$$

então

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{M}_{nm}(\mathbf{r}) &= iu_p(kr)\mathbf{V}_{nm}(\hat{\mathbf{r}}) && (1.15)\\ \hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{N}_{nm}(\mathbf{r}) &= -i\left(u_p'(kr)+\frac{u_p(kr)}{kr}\right)\mathbf{X}_{nm}(\hat{\mathbf{r}}) && (1.16)\end{aligned}$$

Aqui convém introduzir as funções de Ricatti-Bessel $v_n(x) = xu_n(x)$ em que $u_n(x)$ são funções esféricas de Bessel, dadas por

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= xj_n(x) && (1.17)\\ \zeta_n(x) &= xh_n^{(2)}(x) && (1.18)\end{aligned}$$

As derivadas das funções de Ricatti-Bessel são dadas por $v_n'(x) = xu_n'(x) + u_n(x)$, de modo

$$\frac{v_n'(x)}{x} = u_n'(x) + \frac{u_n(x)}{x} \tag{1.19}$$

Da equação acima pode-se perceber que estas funções aparecerão junto ao termo $\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{N}_{nm}$. As funções de Ricatti-Bessel por sua vez aparecerão quando multiplicarmos a equação dos termos de $\mathbf{M}_{nm}$. Juntando-se todas estas informações, vamos obter para uma esfera de raio a:

$$\begin{bmatrix} \zeta_n(x) & -\frac{1}{M}\psi_n(Mx) \\ \zeta_n'(x) & -\frac{\mu}{\mu'}\psi_n'(Mx) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_n \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_n(x) \\ \psi_n'(x) \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

para o caso TE, isto é, os índices que acompanham $\mathbf{M}$

$$\begin{bmatrix} \zeta_n(x) & -\frac{\mu}{\mu'}\psi_n(Mx) \\ \zeta_n'(x) & -\frac{1}{M}\psi_n'(Mx) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_n(x) \\ \psi_n'(x) \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

para o caso TM, isto é, os índices que acompanham $\mathbf{N}$, e para simplificar fazemos $x = ka$, também conhecido como fator de tamanho.

As soluções desses dois sistemas de equações são simples. Para o caso em que $\mu' \approx \mu$ temos

$$\begin{bmatrix} b_n \\ d_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta^{TE}} \begin{bmatrix} -\psi_n'(Mx) & \frac{1}{M}\psi_n(Mx) \\ -\zeta_n'(x) & \zeta_n(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_n(x) \\ \psi_n'(x) \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

para o caso TE e para o caso TM

$$\begin{bmatrix} a_n \\ c_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta^{TM}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{M}\psi_n'(Mx) & \psi_n(Mx) \\ -\zeta_n'(x) & \zeta_n(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_n(x) \\ \psi_n'(x) \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

em que $\Delta^{TE/TM}$ são os determinantes das respectivas matrizes. Estas equações características são independentes do feixe incidente. Os coeficientes dos campos espalhados e dos campos dentro da partícula são independentes do índice m devido à simetria esférica do espalhador. Caso a esfera fosse deformada os modos azimutais não seriam mais degenerados. Se o índice de refração relativo M for igual a um não existe o espalhador, os coeficientes de espalhamentos são nulos como esperado. Se para um n particular a freqüência ou o raio é tal que um destes denominadores seja muito pequeno, o modo normal correspondente irá dominar no campo espalhado. Em geral, o campo é espalhado em uma superposição de modos normais. As freqüências para as quais (2.1) e (2.2) são exatamente satisfeitas são chamadas de MDR – *morphology dependent resonances* ou de freqüências naturais de uma esfera, são complexas e os modos associados são denominados virtuais. Se as partes imaginárias destas freqüências complexas forem pequenas quando comparadas as partes reais, a freqüência natural corresponde aproximadamente à freqüência real da onda EM incidente que excita os vários modos EM.

Onde a seção de choque de espalhamento é dada por[?]

$$C_{\text{scat}} = \frac{2\pi}{k^2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\Big(||a_n||^2 + ||b_n||^2\Big) \tag{1.24}$$

Esta função de x para M fixo tem vários traços: uma série de máximos e mínimos regularmente espaçados chamados de estrutura de interferência e uma estrutura de ondulações que são picos espaçados irregularmente representando os modos eletromagnéticos normais de uma esfera. Este último também é conhecido como *morphology dependent resonance* – MDR – ou por *whispering gallery mode* – WGM – onde a nomeclatura MDR é mais apropriada.

O grande significado das equações (2.1) e (2.2) está no fato de, se conhecermos os coeficientes $G^{TE/TM}$ do campo incidente, podemos determinar os campos espalhados. O *calcanhar de Aquiles* deste método está no fato de sabermos se é possível calcular estes coeficientes. Até então estes coeficientes eram dados por

$$E_0 j_p(kr)\begin{bmatrix} G_{pq}^{TE} \\ G_{pq}^{TM} \end{bmatrix} = \int d\Omega(\hat{\mathbf{r}})\ \mathbf{X}_{pq}^{*}(\hat{\mathbf{r}})\cdot\begin{bmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ Z\mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \tag{1.25}$$

que tem o problema da função radial do lado esquerdo, e de uma dependência radial do lado direito não explicitada. Neste trabalho mostramos que este problema tem solução, dada por

$$\begin{bmatrix} G_{pq}^{TM} \\ G_{pq}^{TE} \end{bmatrix} = i^p\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int d\Omega(\hat{\mathbf{k}}')\ \boldsymbol{\mathcal{X}}_{pq}^{*}(\hat{\mathbf{k}}')\cdot\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{k}}(\hat{\mathbf{k}}') \\ \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{k}}(\hat{\mathbf{k}}') \end{bmatrix} \tag{1.26}$$

em função das transformadas de Fourier dos campos incidentes. Ademais, mostramos três exemplos, além do da onda plana já conhecido, de cálculo destes coeficientes.

Capítulo 2

Cálculo dos coeficientes de Mie

2.1 Coeficientes de Mie

Como vimos, estamos interessados no cálculo dos coeficientes a_n, b_n, c_n e d_n dados pelas equações

$$\begin{bmatrix} b_n \\ d_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta^{TE}} \begin{bmatrix} -\psi_n'(Mx) & \frac{1}{M}\psi_n(Mx) \\ -\zeta_n'(x) & \zeta_n(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_n(x) \\ \psi_n'(x) \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

para o caso TE e para o caso TM

$$\begin{bmatrix} a_n \\ c_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta^{TM}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{M}\psi_n'(Mx) & \psi_n(Mx) \\ -\zeta_n'(x) & \zeta_n(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_n(x) \\ \psi_n'(x) \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

em que $\Delta^{TE/TM}$ são os determinantes das respectivas matrizes, dados por

$$\Delta^{TE} = -\psi_n'(Mx)\zeta_n(x) + \frac{1}{M}\psi_n(Mx)\zeta_n'(x) \tag{2.3}$$

$$\Delta^{TM} = -\frac{1}{M}\psi_n'(Mx)\zeta_n(x) + \psi_n(Mx)\zeta_n'(x) \tag{2.4}$$

As funções acima são conhecidas como funções de Riccati-Bessel, dadas por $\psi_n(x) = xj_n(x)$, $\chi_n(x) = -xy_n(x)^*$, $\zeta_n(x) = \psi_n(x) + i\chi_n(x) = xh_n^{(2)}(x)$ e $\xi_n(x) = \psi_n(x) - i\chi_n(x) = xh_n^{(1)}(x)$.

*Aqui usamos a notação mais comum, que segue van de Huslt. Alguns autores entretanto não utilizam o sinal negativo na função de Hankel. O fato de se utilizar uma função de Hankel ou outra está na definção de onda que que chega e onda que sai da origem.

Reescrevendo os determinantes, obtemos

$$b_n = \frac{M\psi_n'(Mx)\psi_n(x) - \psi_n(Mx)\psi_n'(x)}{M\psi_n'(Mx)\zeta_n(x) - \psi_n(Mx)\zeta_n'(x)} \tag{2.5}$$

$$d_n = \frac{M\zeta_n'(x)\psi_n(x) - M\zeta_n(x)\psi_n'(x)}{M\psi_n'(Mx)\zeta_n(x) - \psi_n(Mx)\zeta_n'(x)} \tag{2.6}$$

$$a_n = \frac{\psi_n'(Mx)\psi_n(x) - M\psi_n(Mx)\psi_n'(x)}{\psi_n'(Mx)\zeta_n(x) - M\psi_n(Mx)\zeta_n'(x)} \tag{2.7}$$

$$c_n = \frac{M\zeta_n'(x)\psi_n(x) - M\zeta_n(x)\psi_n'(x)}{\psi_n'(Mx)\zeta_n(x) - M\psi_n(Mx)\zeta_n'(x)} \tag{2.8}$$

em que usamos o Wronskiano das funções de Riccati-Bessel em que $W[\psi_n, \chi_n](x) = 1$, o que nos diz que

$$\zeta_n'\psi_n - \zeta_n\psi_n' = i(\psi_n\chi_n' - \psi_n'\chi_n) = iW[\psi_n, \chi_n] = i \tag{2.9}$$

e com isto obtemos os coeficientes para os campos externos

$$a_n = \frac{\psi_n'(Mx)\psi_n(x) - M\psi_n(Mx)\psi_n'(x)}{\psi_n'(Mx)\zeta_n(x) - M\psi_n(Mx)\zeta_n'(x)} \tag{2.10}$$

$$b_n = \frac{M\psi_n'(Mx)\psi_n(x) - \psi_n(Mx)\psi_n'(x)}{M\psi_n'(Mx)\zeta_n(x) - \psi_n(Mx)\zeta_n'(x)} \tag{2.11}$$

e para os campos internos

$$c_n = \frac{iM}{\psi_n'(Mx)\zeta_n(x) - M\psi_n(Mx)\zeta_n'(x)} \tag{2.12}$$

$$d_n = \frac{iM}{M\psi_n'(Mx)\zeta_n(x) - \psi_n(Mx)\zeta_n'(x)} \tag{2.13}$$

Vamos agora definir as funções de derivadas logarítmicas $A_n(x) = \psi_n'(x)/\psi_n(x)$, $B_n(x) = \zeta_n'(x)/\zeta_n(x)$, e as razões entre funções $C_n(x) = \psi_n(x)/\zeta_n(x)$ e $D_n(x) = \psi_n(x)/\psi_n(Mx)$, o que vai nos dar para os campos externos

$$a_n = C_n\frac{A_n(Mx)/M - A_n(x)}{A_n(Mx)/M - B_n(x)} \tag{2.14}$$

$$b_n = C_n\frac{A_n(Mx)M - A_n(x)}{A_n(Mx)M - B_n(x)} \tag{2.15}$$

e para os campos internos

$$c_n = D_n \frac{B_n(x) - A_n(x)}{A_n(Mx)/M - B_n(x)} \quad (2.16)$$

$$d_n = MD_n \frac{B_n(x) - A_n(x)}{A_n(Mx)M - B_n(x)} \quad (2.17)$$

2.1.1 Cálculo dos coeficientes de Mie

Vamos agora definir as funções de derivadas logarítmicas e uma razão entre duas funções de Bessel diferentes

$$A_n(x) = \frac{\psi_n'(x)}{\psi_n(x)} \quad (2.18)$$

$$B_n(x) = \frac{\zeta_n'(x)}{\zeta_n(x)} \quad (2.19)$$

$$C_n(x) = \frac{\psi_n(x)}{\zeta_n(x)} \quad (2.20)$$

Com uma pequena manipulação nas equações dos coeficientes, obtemos (para o caso dos campos espalhados)

$$a_n = C_n T_{a_n} \quad (2.21)$$

$$b_n = C_n T_{b_n} \quad (2.22)$$

em que

$$T_{a_n} = \frac{A_n(Mx)/M - A_n(x)}{A_n(Mx)/M - B_n(x)} \quad (2.23)$$

$$T_{b_n} = \frac{MA_n(Mx) - A_n(x)}{MA_n(Mx) - B_n(x)} \quad (2.24)$$

Deste modo estamos concentrando nossos cálculos nas derivadas logarítmicas. Outro de modo de se calcular consiste em tomar a relação entre duas funções

$$\rho_n = \frac{\psi_n}{\psi_{n+1}} \quad (2.25)$$

$$\gamma_n = \frac{\zeta_n}{\zeta_{n+1}} \quad (2.26)$$

e ainda as relações

$$A_n(x) = \rho_{n-1} - \frac{n}{x} \tag{2.27}$$

$$B_n(x) = \gamma_{n-1} - \frac{n}{x} \tag{2.28}$$

Deste modo vamos obter para os coeficientes

$$a_n = C_n U_a \tag{2.29}$$

$$b_n = C_n U_b \tag{2.30}$$

em que

$$U_a = \frac{\rho_{n-1}(mx)/m - \rho_{n-1}(x) + (1 - 1/m^2)(n/x)}{\rho_{n-1}(mx)/m - \gamma_{n-1}(x) + (1 - 1/m^2)(n/x)} \tag{2.31}$$

$$U_b = \frac{\rho_{n-1}(mx)m - \rho_{n-1}(x)}{\rho_{n-1}(mx)m - \gamma_{n-1}(x)} \tag{2.32}$$

Assim, calculamos ρ_n (ou A_n) via *downward recurrence*, utilizando o método de Lentz para calcular o valor inicial, e γ_n (ou B_n) via *upward recurrence*, calculando os valores iniciais manualmente, já que temos as funções tabeladas. Podemos nos valer da definição de $\psi_n = \rho_n \psi_{n+1}$ e $\zeta_n = \gamma_n \zeta_{n+1}$. Dividindo uma equação pela outra, obtemos imediatamente

$$\frac{\psi_n}{\zeta_n} = \frac{\rho_n}{\gamma_n} \frac{\psi_{n+1}}{\zeta_{n+1}} \tag{2.33}$$

ou seja, reajustando os termos e substituindo as definições

$$C_n = C_{n-1} \frac{\gamma_{n-1}}{\rho_{n-1}}. \tag{2.34}$$

Se em vez de calcularmos as razões ρ_n e γ_n, tivermos calculado as derivadas logarítmicas A_n e B_n, podemos fazer $\rho_{n-1} = A_n + n/x$ e $\gamma_{n-1} = B_n - n/x$, obtendo assim a relação de recorrência

$$C_n = C_{n-1} \frac{B_n + n/x}{A_n + n/x}. \tag{2.35}$$

Com isto temos todos os elementos de que necessitamos para calcular os coeficientes de Mie.

O mesmo raciocínio vale se quisermos calcular os campos internos. Temos então que $D_n = \psi_n(x)/\psi_n(Mx)$. Utilizando a definção de $\rho_n = \rho_n(x) = \psi_n(x)/\psi_{n+1}(x)$, e fazendo $\rho_n^M =$

$\psi_n(Mx)/\psi_{n+1}(Mx) = \rho_n(Mx)$, temos que

$$D_n = D_{n+1}\frac{\rho_n}{\rho_n^M} \tag{2.36}$$

ou, a relação inversa

$$D_n = D_{n-1}\frac{\rho_{n-1}^M}{\rho_{n-1}} \tag{2.37}$$

ou termos de derivadas logarítmicas

$$D_n = D_{n-1}\frac{A_n(Mx) - n/(Mx)}{A_n(x) - n/x} \tag{2.38}$$

O cálculo de ρ_n é feito via *downward recurrence*, com valor inicial ρ_N é calculado via método de Lentz. Deste modo, vamos ter que

$$\rho_{n-1} = S_{2n+1} - \frac{1}{\rho_n} \tag{2.39}$$

O cálculo de γ_n é feito via *upward recurrence*, com valor inicial calculado a partir das expressões para as funções de Riccati-Bessel, ou seja,

$$\gamma_n = \frac{1}{S_{2n+1} - \gamma_{n-1}} \tag{2.40}$$

sendo que

$$\gamma_0 = \frac{\zeta_0}{\zeta_1} \tag{2.41}$$

Temos ainda que $\zeta_n = \psi_n + i\chi_n$, $\psi_0 = \sin x$ e $\chi_0 = \cos x$ e ainda que

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{x}\psi_0 - \chi_0 && (2.42) \\ \chi_1 &= \frac{1}{x}\chi_0 - \psi_0 && (2.43) \\ & && (2.44) \end{aligned}$$

Com isto temos como calcular γ_0.

Capítulo 3

Funções de Bessel

Estamos interessados em calcular os coeficientes de Mie, coeficientes estes que depende das funções esféricas de Riccati-Bessel e Riccati-Hankel, dadas por

$$R_n(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} Z_{\nu+1/2}(x) = x z_n(x) \tag{3.1}$$

em que $R_n(x)$ são as chamadas funções de Riccati-Bessel, $Z_n(x)$ são as chamdas funções (cilíndricas) de Bessel e $z_n(x)$ são as funções esféricas de Bessel. Vamos tratar do cálculo destas três funções em conjunto.

3.0.2 Funções cilíndricas de Bessel

Os métodos modernos de cálculo das funções de Bessel são baseados em relações de recorrência

$$Z_{\nu-1}(x) + Z_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} Z_\nu(x) \tag{3.2}$$

$$Z_{\nu-1}(x) - Z_{\nu+1}(x) = 2Z'_\nu(x) \tag{3.3}$$

As relações assintóticas das funções de Bessel nos dão que

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{1}{2\pi\nu}} \left(\frac{ex}{2\nu}\right)^\nu \tag{3.4}$$

$$Y_\nu(x) \approx -\sqrt{\frac{2}{\pi\nu}} \left(\frac{ex}{2\nu}\right)^{-\nu} \tag{3.5}$$

que nos dá para valores de ν grandes

$$\alpha_\nu = \frac{J_{\nu-1}(x)}{J_\nu(x)} \approx \frac{2\nu}{x} \tag{3.6}$$

$$\beta_\nu = \frac{Y_{\nu-1}(x)}{Y_\nu(x)} \approx \frac{x}{2\nu} \tag{3.7}$$

o que faz com o módulo de β_ν se torne cada vez menor à medida em que ν se torna muito maior que $|x|$ enquanto α_ν cresce à mesma medida. Isto nos diz que para calcularmos Y_ν devemos usar a recorrência crescente em ν e para calcularmos J_ν devemos usar recorrência decrescente.

Podemos ainda dividir ambas as equações

$$Z_{\nu-1}(x) + Z_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} Z_\nu(x) \tag{3.8}$$

$$Z_{\nu-1}(x) - Z_{\nu+1}(x) = 2Z'_\nu(x) \tag{3.9}$$

por $Z_\nu(x)$, e definindo $D_\nu(x) = Z'_\nu(x)/Z_\nu(x)$ e $\gamma_\nu = Z_\nu(x)/Z_{\nu+1}(x)$, e $S_\nu(x) = \nu/x$, vamos obter

$$\gamma_{\nu-1} + \frac{1}{\gamma_\nu} = 2S_\nu \tag{3.10}$$

$$\gamma_{\nu-1} - \frac{1}{\gamma_\nu} = 2D_\nu \tag{3.11}$$

Somando/subtraindo as duas equações obtemos

$$\gamma_\nu = S_{\nu+1} + D_{\nu+1} \tag{3.12}$$

$$\frac{1}{\gamma_\nu} = S_\nu - D_\nu \tag{3.13}$$

A partir da equação acima obtemos duas relações de recorrência, uma para D_ν e outra para γ_ν, sendo que multiplicando uma pela outra vamos obter

$$(S_\nu - D_\nu)(S_{\nu+1} + D_{\nu+1}) = 1 \tag{3.14}$$

e ajustando os índices e somando as duas equações obtemos

$$\gamma_\nu + \frac{1}{\gamma_{\nu+1}} = S_{2(\nu+1)} \tag{3.15}$$

Esta equação pode ser escrita de modo a obtermos uma relação de recorrência crescente ou decrescente, de acordo com o caso em questão.

3.0.3 Funções esféricas de Bessel

As mesmas conclusões se aplicam para as funções esféricas de Bessel

$$z_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Z_{\nu+1/2}(x) \tag{3.16}$$

que obedecem relações de recorrência

$$z_{n-1}(x) + z_{n+1}(x) = (2n+1)\frac{z_n(x)}{x} \tag{3.17}$$

$$n z_{n-1}(x) - (n+1) z_{n+1}(x) = (2n+1) z_n'(x) \tag{3.18}$$

Sabendo que

$$\rho_n = \frac{R_n}{R_{n+1}} = \frac{z_n}{z_{n+1}} = \frac{Z_{n+1/2}}{Z_{n+3/2}} = \gamma_{n+1/2} \tag{3.19}$$

e que $c_n = z_n'/z_n$, vamos novamente dividir as equações por $z_n(x)$, o que vai nos dar

$$\rho_{n-1} + \frac{1}{\rho_n} = S_{2n+1} \tag{3.20}$$

$$n\rho_{n-1} - (n+1)\frac{1}{\rho_n} = (2n+1)c_n \tag{3.21}$$

Somando/subtraindo as duas equações obtemos

$$\rho_n = S_{n+2} + c_{n+1} \tag{3.22}$$

$$\frac{1}{\rho_n} = S_n - c_n \tag{3.23}$$

Multiplicando ambas as equações vamos obter

$$(S_{n+2} + c_{n+1})(S_n - c_n) = 1 \tag{3.24}$$

Ajustando os índices e somando obtemos também

$$\rho_n + \frac{1}{\rho_{n+1}} = S_{2n+3} \tag{3.25}$$

3.0.4 Funções de Riccati-Bessel

As relações de recorrência para as funções de Riccati-Bessel são obtidas da mesma forma, fazendo-se $R_n(x) = xz_n(x)$ nas equações acima, o que nos dá

$$R_{n-1}(x) + R_{n+1}(x) = (2n+1)\frac{R_n(x)}{x} \tag{3.26}$$
$$(n+1)R_{n-1}(x) - nR_{n+1}(x) = (2n+1)R'_n(x) \tag{3.27}$$

Vamos agora calcular as derivadas logarítmicas $C_n(x) = R'_n/R_n$. Dividindo ambos os lados das expressões para $R_n(x)$ vamos ter a derivada logarítmica

$$\rho_{n-1} + \frac{1}{\rho_n} = \frac{2n+1}{x} \tag{3.28}$$
$$(n+1)\rho_{n-1} - n\frac{1}{\rho_n} = (2n+1)C_n \tag{3.29}$$

Somando/subtraindo as duas equações obtemos

$$\rho_n = S_{n+1} + C_{n+1} \tag{3.30}$$
$$\frac{1}{\rho_n} = S_{n+1} - C_n \tag{3.31}$$

Multiplicando ambas as equações

$$\Big(S_{n+1} - C_n\Big)\Big(S_{n+1} + C_{n+1}\Big) = 1 \tag{3.32}$$

Ajustando os índices e somando obtemos também

$$\rho_n + \frac{1}{\rho_{n+1}} = S_{2n+3} \tag{3.33}$$

Estas relações de recorrência dependem da função cuja razão vai ser calculada e da direção em que a recorrência é aplicada. A vantagem computacional das derivadas logarítmicas e das razões está no fato de que estas quantidades são todas de ordens comparáveis e geralmente dentro de poucas ordens de magnitude da unidade, mesmo para argumentos complexos, assim minimizando problemas numéricos.

3.0.5 Cálculo das funções de Bessel

Como pudemos ver, todas as funções de Bessel obedecem a uma mesma regra, ou seja

$$J_n, Y_n \rightarrow \Big(S_n - D_n\Big)\Big(S_{n+1} + D_{n+1}\Big) = 1 \tag{3.34}$$

$$j_n, y_n \rightarrow \Big(S_n - c_n\Big)\Big(S_{n+2} + c_{n+1}\Big) = 1 \tag{3.35}$$

$$\psi_n, \chi_n \rightarrow \Big(S_{n+1} - C_n\Big)\Big(S_{n+1} + C_{n+1}\Big) = 1 \tag{3.36}$$

Deste modo, tomando um valor de $N >> x$, calculamos por recorrência descendente as derivadas logarítmicas D_n, C_n ou c_n, iniciando com $D_N = C_N = c_N = 0$. Chegando ao fim calculamos por recorrência ascendente usando

$$J_n, Y_n \rightarrow \gamma_n = S_{n+1} + D_{n+1} \tag{3.37}$$

$$j_n, y_n \rightarrow \rho_n = S_{n+2} + c_{n+1} \tag{3.38}$$

$$\psi_n, \chi_n \rightarrow \rho_n = S_{n+1} + C_{n+1} \tag{3.39}$$

Este método nos permite calcular todas as funções de Bessel de que necessitamos. Entretanto, se quisermos adicionar um termo a mais na fração continuada D_n, C_n ou c_n temos de recalcular a fração inteira. Vamos então ver um modo de calcular esta fração continuada pelo método de Lentz, que evita que tenhamos de recalcuar a fração continuada quando queremos aumentar a precisão do cálculo.

Capítulo 4

Frações continuadas

Estamos interessados em resolver o problema de econtrar o valor da função f dada por

$$f = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ldots}}} \tag{4.1}$$

que é melhor escrito como

$$f = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \frac{a_3}{b_3} \cdots \tag{4.2}$$

Deste modo, temos ainda que

$$f_0 = b_0 \tag{4.3}$$

$$f_1 = b_0 + \frac{a_1}{b_1} = \frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1} \tag{4.4}$$

$$f_2 = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + a_2/b_2} = \frac{(b_0 b_1 + a_1) b_2 + b_0 a_2}{b_2 b_1 + a_2} \tag{4.5}$$

e assim por diante. De uma forma geral podemos escrever

$$f_k = \frac{p_k}{q_k} \tag{4.6}$$

e pode-se mostrar ainda que

$$p_k = b_k p_{k-1} + a_k p_{k-2} \tag{4.7}$$

$$q_k = b_k q_{k-1} + a_k q_{k-2} \tag{4.8}$$

Deste modo, temos que $p_{-2} = 0$, $p_{-1} = 1$, $p_0 = b_0$, $q_{-2} = 1$, $q_{-1} = 0$, $q_0 = 1$, sendo que $a_0 = 1$. Já sabemos que esta série vale para os primeiros termos. Agora vamos calcular f_{k+1} dado por

$$f_{k+1} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{b_{k+1}p_k + a_{k+1}p_{k-1}}{b_{k+1}q_k + a_{k+1}q_{k-1}} = \frac{b_{k+1}(b_k p_{k-1} + a_k p_{k-2}) + a_{k+1}p_{k-1}}{b_{k+1}(b_k q_{k-1} + a_k q_{k-2}) + a_{k+1}q_{k-1}} \tag{4.9}$$

Vamos agora simplificar multiplicando a expressão acima por $1 = (1/b_{k+1})/(1/b_{k+1})$ e em seguida simplificando

$$f_{k+1} = \frac{(b_k + a_{k+1}/b_{k+1})p_{k-1} + a_k p_{k-2}}{(b_k + a_{k+1}/b_{k+1})q_{k-1} + a_k q_{k-2}} \tag{4.10}$$

que mantém a forma de convergência de $f_k \to f$.

Por outro lado, sabemos que

$$p_k = b_k p_{k-1} + a_k p_{k-2} \tag{4.11}$$
$$q_k = b_k q_{k-1} + a_k q_{k-2} \tag{4.12}$$

o que nos diz que

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = b_k + a_k \frac{p_{k-2}}{p_{k-1}} = b_k + \frac{a_k}{p_{k-1}/p_{k-2}} \tag{4.13}$$
$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = b_k + a_k \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} = b_k + \frac{a_k}{q_{k-1}/q_{k-2}} \tag{4.14}$$

Podemos fazer $P_k = p_k/p_{k-1}$ e $Q_k = q_k/q_{k-1}$, o que nos dá a partir da equação acima

$$P_k = b_k + \frac{a_k}{P_{k-1}} \tag{4.15}$$
$$Q_k = b_k + \frac{a_k}{Q_{k-1}} \tag{4.16}$$

Isto nos leva novamente a uma equação em frações continuadas. O último termo é o que contém a_1, o que nos dá, substituindo os valores conhecidos de $p_{-2} = 0$, $p_{-1} = 1$, $p_0 = a_0$, $q_{-2} = 1$, $q_{-1} = 0$, $q_0 = 1$, vamos obter

$$P_1 = b_1 + a_1/b_0 \tag{4.17}$$
$$Q_1 = b_1 \tag{4.18}$$

o que nos diz que a fração continuada Q_n é menor que a fração continuada P_k, ou seja,

$$\begin{aligned} p_k &= \tfrac{p_k}{p_{k-1}} p_{k-1} = \tfrac{p_k}{p_{k-1}} \tfrac{p_{k-1}}{p_{n-2}} p_{n-2} = \tfrac{p_k}{p_{k-1}} \tfrac{p_{k-1}}{p_{k-2}} \dots \tfrac{p_1}{p_0} p_0 && (4.19) \\ q_k &= \tfrac{q_k}{q_{k-1}} q_{k-1} = \tfrac{q_k}{q_{k-1}} \tfrac{q_{k-1}}{q_{k-2}} q_{k-2} = \tfrac{q_k}{q_{k-1}} \tfrac{q_{k-1}}{q_{k-2}} \dots \tfrac{q_1}{q_0} q_0 && (4.20) \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} p_k &= P_k P_{k-1} P_{k-2} \dots P_3 P_2 P_1 p_0 && (4.21) \\ q_k &= Q_k Q_{k-1} Q_{k-2} \dots Q_3 Q_2 Q_1 q_0 && (4.22) \end{aligned}$$

o que nos leva à equação final

$$f_k = \frac{P_k P_{k-1} P_{k-2} \dots P_3 P_2 P_1 a_0}{Q_k Q_{k-1} Q_{k-2} \dots Q_3 Q_2 Q_1} \tag{4.23}$$

Esta equação é a base do método de Lentz, e tem a vantagem de que é trivial calcular f_k a partir de f_{k-1}, enquanto a passagem de k para $k+1$ na fração continuada original é feita recalculando completamente a fração. Desta maneira, esta equação nos permite incrementar k às custas de duas adições e três divisões por passo até que P_k/Q_k seja indistinguível da unidade. Isto porque à medida em que f_k tende a f, temos que

$$f_k = \frac{a_0 \prod_{j=1}^{k} P_j}{b_0 \prod_{j=1}^{k} Q_j} \tag{4.24}$$

temos então que

$$f_{k+1} = \frac{a_0 \prod_{j=1}^{k+1} P_j}{b_0 \prod_{j=1}^{k+1} Q_j} = \left(\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} \right) \frac{a_0 \prod_{j=1}^{k} P_j}{b_0 \prod_{j=1}^{k} Q_j} = \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} f_k \tag{4.25}$$

Deste modo, obrigatoriamente temos que $P_{k+1}/Q_{k+1} \to 1$. Isto possibilita a máxima precisão para uma determinada representação de ponto flutuante, da maneira mais simples possivel e provavelmente com o mínimo de esforço computacional.

4.1 Calculando as frações continuadas

Estamos interessados em calcular a aproximação $f_k \to f$ dada por

$$f_k = \frac{P_k P_{k-1} P_{k-2} \dots P_3 P_2 P_1 a_0}{Q_k Q_{k-1} Q_{k-2} \dots Q_3 Q_2 Q_1} \tag{4.26}$$

em que podemos calcular

$$P_k = b_k + \frac{a_k}{P_{k-1}} \tag{4.27}$$

$$Q_k = b_k + \frac{a_k}{Q_{k-1}} \tag{4.28}$$

sabendo ainda que

$$P_1 = b_1 + \frac{a_1}{b_0} \tag{4.29}$$

$$Q_1 = b_1 \tag{4.30}$$

4.1.1 Calculando $\sqrt{\alpha}$

Vamos expandir em frações parciais um valor conhecido. Sabemos que $(\sqrt{\alpha})^2 = (1+x)^2 = \alpha$ e que $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 = x(2+x) + 1$. Com isto temos que $x(2+x) = \alpha - 1$, o que nos diz que $x = (\alpha-1)/(2+x)$. Substituindo x na expressão de x obtemos

$$x = \frac{\alpha-1}{2+}\frac{\alpha-1}{2+}\frac{\alpha-1}{2+}\frac{\alpha-1}{2}\cdots \tag{4.31}$$

Agora fazendo $\sqrt{\alpha} = 1 + x$,

$$\sqrt{\alpha} = 1 + \frac{\alpha-1}{2+}\frac{\alpha-1}{2+}\frac{\alpha-1}{2+}\frac{\alpha-1}{2}\cdots \tag{4.32}$$

Deste modo, temos todos os termos para calcularmos o valor de $\sqrt{\alpha}$.

4.1.2 Calculando as derivadas logarítmicas das funções de Bessel

Como pudemos ver, todas as derivadas logaríticas das funções de Bessel obedecem a uma fração continuada, ou seja

$$J_n, Y_n \rightarrow \Big(S_n - D_n\Big)\Big(S_{n+1} + D_{n+1}\Big) = 1 \tag{4.33}$$

$$n_n, y_n \rightarrow \Big(S_n - c_n\Big)\Big(S_{n+2} + c_{n+1}\Big) = 1 \tag{4.34}$$

$$\psi_n, \chi_n \rightarrow \Big(S_{n+1} - C_n\Big)\Big(S_{n+1} + C_{n+1}\Big) = 1 \tag{4.35}$$

Deste modo, podemos calcular as funções de Bessel. Transformando as expressões acima em uma relação direta, obtemos para a recorrência descendente

$$J_n, Y_n \quad \rightarrow \quad D_n = S_n - \frac{1}{S_{n+1} + D_{n+1}} \tag{4.36}$$

$$j_n, y_n \quad \rightarrow \quad c_n = S_n - \frac{1}{S_{n+2} + c_{n+1}} \tag{4.37}$$

$$\psi_n, \chi_n \quad \rightarrow \quad C_n = S_{n+1} - \frac{1}{S_{n+1} + C_{n+1}} \tag{4.38}$$

Vamos tomar o seguinte caso, para as funções de Riccati-Bessel

$$C_n = S_{n+1} - \frac{1}{S_{n+1} + C_{n+1}} \tag{4.39}$$

$$C_{n+1} = S_{n+2} - \frac{1}{S_{n+2} + C_{n+2}} \tag{4.40}$$

$$C_{n+2} = S_{n+3} - \frac{1}{S_{n+3} + C_{n+3}} \tag{4.41}$$

ou seja

$$C_n = S_{n+1} + \frac{-1}{S_{n+1} + S_{n+2}} + \frac{-1}{S_{n+2} + S_{n+3}} + \frac{-1}{S_{n+3} + S_{n+4}} \cdots \tag{4.42}$$

e como $S_m + S_l = S_{m+l}$, temos que

$$C_n = S_{n+1} + \frac{-1}{S_{2n+3}} + \frac{-1}{S_{2n+5}} + \frac{-1}{S_{2n+7}} + \frac{-1}{S_{2n+9}} \cdots \tag{4.43}$$

e com isto temos $b_0 = S_{n+1}$, $a_j = -1$, $b_j = S_{2(n+j)+1}$ sendo que $1 \leq j \leq \infty$.

Para as funções esféricas de Bessel temos uma relação semelhante, ou seja

$$c_n = S_n + \frac{-1}{S_{2n+3}} + \frac{-1}{S_{2n+5}} + \frac{-1}{S_{2n+7}} + \frac{-1}{S_{2n+9}} \cdots \tag{4.44}$$

e com isto temos $b_0 = S_n$, $a_j = -1$, $b_j = S_{2(n+j)+1}$ sendo que $1 \leq j \leq \infty$. Finalmente para as funções cilíndricas de Bessel vamos ter

$$D_n = S_n + \frac{-1}{S_{2n+2}} + \frac{-1}{S_{2n+4}} + \frac{-1}{S_{2n+6}} + \frac{-1}{S_{2n+8}} \cdots \tag{4.45}$$

e com isto temos $b_0 = S_n$, $a_j = -1$, $b_j = S_{2(n+j)}$ sendo que $1 \leq j \leq \infty$, lembrando que $S_n = n/x$.

4.1.3 Calculando as razões entre as funções de Bessel

As relações de recorrência para as razões $\gamma_\nu = Z_\nu/Z_{\nu+1}$ e $\rho_n = R_n/R_{n+1} = z_n/z_{n+1}$ são dadas por

$$\gamma_\nu + \frac{1}{\gamma_{\nu+1}} = S_{2(\nu+1)} \tag{4.46}$$
$$\rho_n + \frac{1}{\rho_{n+1}} = S_{2n+3} \tag{4.47}$$

Podemos simplificar as expressões fazendo

$$u_n + \frac{1}{u_{n+1}} = w_n \tag{4.48}$$

o que nos dá

$$u_n = w_n - \frac{1}{u_{n+1}} \tag{4.49}$$

ou seja

$$u_n = w_n + \frac{-1}{w_{n+1} +} \frac{-1}{w_{n+2} +} \frac{-1}{w_{n+3}} \cdots \tag{4.50}$$

fazendo com que $a_j = -1$ e $b_j = w_{n+j}$, ou seja, para o caso das funções cilíndricas de Bessel vamos ter que $a_j = -1$ e $b_j = 4S_{2(n+j+1)}$. Para as funções esféricas de Bessel e Riccati-Bessel temos $a_j = -1$ e $b_j = S_{2(n+j)+3}$ para $0 \leq j \leq \infty$.

Outra possibilidade é calcular em função de $1/u_n$, ou seja

$$u_n = w_n - \frac{1}{u_{n+1}} \tag{4.51}$$

o que nos dá que

$$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{w_n - \dfrac{1}{u_{n+1}}} \tag{4.52}$$

ou seja

$$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{w_n +} \frac{-1}{w_{n+1} +} \frac{-1}{w_{n+2}} \cdots \tag{4.53}$$

como mostrado em Barnett, o que nos dá que $b_0 = 0$, $b_j = w_{n+j-1}$, $a_1 = 1$ e $a_k = -1$,

$1 \leq j \leq \infty$ e $2 \leq k \leq \infty$. Com isto, vamos ter para o caso das funções cilíndricas de Bessel que $b_j = 4S_{2(n+j)}$ e para o caso das funções de Riccati-Bessel e esféricas de Bessel $b_j = S_{2(n+j)+1}$.

4.1.4 Algorítmo para o cálculo das frações continuadas

Para calcularmos a fração continuada

$$f = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \frac{a_3}{b_3} \cdots \tag{4.54}$$

usamos o seguinte algorítmo, sendo ϵ o menor número possível e δ a precisão estipulada:

$f_0 \leftarrow b_0$
`if(`$f_0 = 0$`){`$f_0 \leftarrow \epsilon$`}`
$P_0 \leftarrow f_0$
$Q_0 \leftarrow 0$
`for n in 1:N`
  $P_n \leftarrow b_n + a_n/P_{n-1}$
  `if(`$P_n = 0$`){`$P_n \leftarrow \epsilon$`}`
  $Q_n \leftarrow b_n + a_n Q_{n-1}$
  `if(`$Q_n = 0$`){`$Q_n \leftarrow \epsilon$`}`
  $Q_n \leftarrow 1/Q_n$
  $\Delta_n \leftarrow P_n Q_n$
  $f_n \leftarrow f_{n-1}\Delta_n$
  `if(`$||\Delta_n - 1|| < \delta$`){exit}`
`end for`

4.1.5 Cálculo das funções de Bessel

Até o momento somos capazes de calcular as derivadas logarítmicas e as razões entre funções de Bessel, utilizando o método de Lentz-Thomsom, sendo que os coeficientes estão resumidos nas Tabelas 4.1.5, 4.1.5 e 4.1.5. Para o cálculo das funções de Bessel, temos duas alternativas: para o caso do cálculo de um valor isolado utilizar a derivada logarítmica e a razão entre duas funções consecutivas, ou para o caso de um vetor calcular uma série e normalizar com os valores conhecidos, em geral para os índices 0 e 1.

Um detalhe importantíssimo quase nunca mencionado é que tanto as derivadas logarítmicas quanto as razões entre funções de Bessel estão relacionadas às "funções de Bessel", e não as funções de Hankel ou Neumann. Isto se deve ao fato de que podemos escrever as demais em

Tabela 4.1: Logarithmic derivatives of Bessel functions.

Função	Símbolo	b_0	a_j	b_j
Cilíndrica	D_n	S_n	-1	$S_{2(n+j)}$
Esférica	c_n	S_n	-1	$S_{2(n+j)+1}$
Riccati	C_n	S_{n+1}	-1	$S_{2(n+j)}$

Tabela 4.2: Ratio between Bessel functions, direct calculation.

Função	Símbolo	a_j	b_j
Cilíndrica	γ_n	-1	$S_{2(n+j+1)}$
Esférica/Riccati	ρ_n	-1	$S_{2(n+j+1)+1}$

Tabela 4.3: Ratio between Bessel functions, Barnett calculation.

Função	Símbolo	b_0	a_1	a_j	b_j
Cilíndrica	γ_n	0	1	-1	$S_{2(n+j)}$
Esférica/Riccati	ρ_n	0	1	-1	$S_{2(n+j)+1}$

função da primeira, ou seja, para o caso esférico (e por conseguinte de Riccati) vamos ter

$$y_n(x) = (-1)^{n+1} j_{-(n+1)} \tag{4.55}$$

e para o caso cilíndrico temos para as funções de Neumann

$$Y_\nu(z) \sin \nu\pi = J_\nu(z) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(z) \tag{4.56}$$

e para as funções de Hankel

$$H_\nu^{(1,2)} \sin \nu\pi = J_\nu(z) \pm iY_\nu(z) = \pm i(e^{\mp\nu\pi t} J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)) \tag{4.57}$$

Nos casos de $\nu = n$, n inteiro, temos

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) \tag{4.58}$$
$$Y_{-n}(z) = (-1)^n Y_n(z) \tag{4.59}$$

e para as funções de Hankel

$$H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{\nu\pi i} H_\nu^{(1)}(z) \tag{4.60}$$
$$H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-\nu\pi i} H_\nu^{(2)}(z) \tag{4.61}$$

Deste modo, no caso em que estamos interessados, vamos ter que

$$\rho_n = \frac{j_n}{j_{n+1}} \tag{4.62}$$

vai nos dar o valor para as funções esféricas de Bessel j_n. Se quisermos obter $\tilde{\rho}_n$ para as funções de Neumann vamos ter de fazer

$$\tilde{\rho}_n = \frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1} j_{-n-1}}{(-1)^{n+2} j_{-n-2}} \tag{4.63}$$

Resolvendo vamos ter que

$$\tilde{\rho}_n = -\frac{j_{-n-1}}{j_{-n-2}} = -\frac{1}{j_{-n-2}/j_{-n-1}} = -1/\rho_{-n-2} \tag{4.64}$$

Entretanto, relação semelhante para as funções de Hankel não é facilmente obtida.

Parte II

Harmônicos Esféricos Vetoriais

Capítulo 5

As ondas parciais

5.1 Definições

A expansão em termos de funções de onda esféricas vetoriais para campos eletromagnéticos arbitrários é dada pela expressão

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{array}\right] = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(\left[\begin{array}{c} G_{lm}^{TE} \\ G_{lm}^{TM} \end{array}\right]\mathbf{M}_{lm}(\mathbf{r}) + \left[\begin{array}{c} -G_{lm}^{TM} \\ G_{lm}^{TE} \end{array}\right]\mathbf{N}_{lm}(\mathbf{r})\right) \tag{5.1}$$

em que

$$\mathbf{M}_{lm}(\mathbf{r}) = j_l(kr)\mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \tag{5.2}$$

$$\mathbf{N}_{lm}(\mathbf{r}) = \frac{-i}{k}\nabla \times \mathbf{M}_{lm}(\mathbf{r}). \tag{5.3}$$

Sabendo que $\mathbf{X}_{lm} = \mathbf{L}Y_l^m/\sqrt{l(l+1)}$ e algumas propriedades vetorias obtemos

$$\mathbf{N}_{lm}(\mathbf{r}) = \left(j_l'(kr) + \frac{j_l(kr)}{kr}\right)\mathbf{V}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) + \sqrt{l(l+1)}\frac{j_l(kr)}{kr}\mathbf{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \tag{5.4}$$

uma vez que $\mathbf{V}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = -i\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$ e $\mathbf{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = \hat{\mathbf{r}}Y_l^m(\hat{\mathbf{r}})$. Com isto, conhecendo-se $G_{lm}^{TE/TM}$ podemos calcular os campos eletromagnéticos.

5.2 Cálculo dos harmônicos esféricos escalares

Para isto usamos as relações de recorrência dos polinômios de Legendre, dados pela fórmula de Rodrigues para $m > 0$

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l, \tag{5.5}$$

o que vai nos dar os harmônicos esféricos escalares

$$Y_l^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}. \tag{5.6}$$

Temos também as seguintes relações

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x), \tag{5.7}$$

e para os harmônicos esféricos escalares

$$Y_l^{-m}(\theta,\phi) = (-1)^m Y_l^{m*}(\theta,\phi). \tag{5.8}$$

Devido a instabilidade numérica, alguns programas utilizam os polinômios associados de Legendre normalizados. Utilizaremos deste modo, a seguinte normalização

$$Q_l^m(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(x) \tag{5.9}$$

o que vai nos dar diretamente

$$Y_l^m(\theta,\phi) = Q_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}, \tag{5.10}$$

e além disso, a relação

$$Q_l^{-m}(x) = (-1)^m Q_l^m(x) \tag{5.11}$$

também será válida.

Estes polinômios são calculados via relação de recorrência, basicamente em três termos, utilizando

$$P_l^m(x) = \frac{2l-1}{l-m}P_{l-1}^m(x) - \frac{l+m-1}{l-m}P_{l-2}^m(x) \tag{5.12}$$

$$P_l^l(x) = -(2l-1)\sqrt{1-x^2}P_{l-1}^{l-1}(x) \tag{5.13}$$

$$P_l^{l-1}(x) = (2l-1)xP_{l-1}^{l-1}(x) \tag{5.14}$$

ou para os polinômios normalizados

$$Q_l^m(x) = \sqrt{\frac{(2l-1)(2l+1)}{(l-m)(l+m)}}Q_{l-1}^m(x) - \sqrt{\frac{2l+1}{2l-3}}\sqrt{\frac{(l-m-1)(l+m-1)}{(l-m)(l+m)}}Q_{l-2}^m(x) \tag{5.15}$$

$$Q_l^l(x) = -\sqrt{\frac{2l-1}{2l}}\sqrt{1-x^2}Q_{l-1}^{l-1}(x) \tag{5.16}$$

$$Q_l^{l-1}(x) = \sqrt{2l+1}xQ_{l-1}^{l-1}(x) \tag{5.17}$$

Sabendo que $P_0^0 = 1$ temos que $Q_0^0 = 1/\sqrt{4\pi}$, podemos primeiramente calcular os elementos da diagonal utilizando a recorrência em P_l^l ou Q_l^l, depois calcular a diagonal inferior para $m > 0$ por meio de P_l^{l-1} ou Q_l^{l-1}. Os demais termos são calculados pela forma geral de P_l^m ou de Q_l^m, e os termos para $m < 0$ por meio da relação de paridade. Para efeito de comparação utilizamos a biblioteca `gsl` (Gnu Scientific Library) que nos fornece tanto P_l^m quanto Q_l^m, como definimos, e também o *software* `scilab`, que nos fornece P_l^m e $\sqrt{2\pi}Q_l^m$.

5.2.1 Caso para $\theta = 0$

Sabemos que

$$Y_l^m(0,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{m,0}. \tag{5.18}$$

Para demonstrar isto utilizaremos as relações de recorrências dos polinômios associados de Legendre. Para o caso $\theta = 0$ temos que $x = \cos\theta = 1$, o que nos dá, para $l = 1$

$$P_1^1(1) = 0 \tag{5.19}$$

$$P_1^0(1) = (2l-1)P_0^0(1) = P_0^0(1) \tag{5.20}$$

para $l > 2$

$$P_l^m(1) = \frac{2l-1}{l-m}P_{l-1}^m(1) - \frac{l+m-1}{l-m}P_{l-2}^m(1) \tag{5.21}$$

$$P_l^l(1) = 0 \tag{5.22}$$

$$P_l^{l-1}(1) = (2l-1)P_{l-1}^{l-1}(1) = 0 \tag{5.23}$$

com isto temos que só serão diferentes de zero os termos com $m = 0$, e para eles

$$P_l^0(1) = \frac{2l-1}{l}P_{l-1}^m(1) - \frac{l-1}{l}P_{l-2}^m(1) \tag{5.24}$$

$$\tag{5.25}$$

Para $l = 2$ temos que $P_1^0 = P_0^0 = 1$, o que nos diz que

$$P_2^0(1) = \frac{2l-1}{l} - \frac{l-1}{l} = 1 \tag{5.26}$$

e com isto mostramos que $P_l^0(1) = 1$. Sendo assim, fica claro que

$$Q_l^m(1) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{m,0} \tag{5.27}$$

e por conseguinte

$$Y_l^m(0,\phi) = Q_l^m(1) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{m,0} \tag{5.28}$$

5.2.2 Método das listas

Vamos de agora em diante escrever tudo como uma lista contínua dada por l, em que um determinado para (p,q) ocupa a posição $l = p(p+1)+q$. Numa lista com p máximo igual p_M, vamos ter um total de $l_M = p_M(p_M+2)$ elementos. A rotina para cálculos dos polinômios de Legendre via relação de recorrência é muito mais rápida que utilizando a biblioteca `gsl`, já que necessitamos de todas ordens dos polinômios de Legendre, ao passo que o ao calcular um a um, os termos utilizados na recorrência são deixados de lado, sendo novamente calculados na próxima sequência.

5.3 Harmônicos esféricos vetoriais

5.3.1 Vetores complexos

Vamos ao longo deste trabalho utilizar uma base complexa definida como

$$\hat{\mathbf{e}}_{+} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_x + \hat{\mathbf{e}}_y}{\sqrt{2}} \tag{5.29}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_{-} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_x - \hat{\mathbf{e}}_y}{\sqrt{2}}. \tag{5.30}$$

Os vetores são definidos como $\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{e}}_x + A_y\hat{\mathbf{e}}_y$, sendo que $A_x = \hat{\mathbf{e}}_x \cdot \mathbf{A}$, deste modo temos $A_\pm = \hat{\mathbf{e}}_\pm \cdot \mathbf{A}$ e assim $\mathbf{A} = A_+\hat{\mathbf{e}}_- + A_-\hat{\mathbf{e}}_+$. Entretanto, convém notar que $\hat{\mathbf{e}}_\pm^* = \hat{\mathbf{e}}_\mp$, o que inverte o sinal do termo da base. Assim, um vetor $\mathbf{U}$ é dado por

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_- \cdot \mathbf{U} \\ \hat{\mathbf{e}}_z \cdot \mathbf{U} \\ \hat{\mathbf{e}}_+ \cdot \mathbf{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_- \\ U_z \\ U_+ \end{bmatrix}. \tag{5.31}$$

Deste modo, há de se tomar extremo cuidado ao fazer produtos escalares e vetoriais com estas componentes complexas. O produto vetorial é dado por

$$\mathbf{U} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = i \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_- & \hat{\mathbf{e}}_z & \hat{\mathbf{e}}_+ \\ A_- & A_z & A_+ \\ B_- & B_z & B_+ \end{vmatrix} = i \begin{bmatrix} A_-B_z - A_zB_- \\ A_+B_- - A_-B_z \\ A_zB_+ - A_+B_- \end{bmatrix}. \tag{5.32}$$

5.4 Definições de VSH

Devemos calcular os harmônicos esféricos vetoriais em função dos harmônicos esféricos escalares. Para compararmos vamos utilizar os diversos tipos de definição para compararmos os resultados. Podemos facilmente definir os VSH como sendo

$$\mathbf{Y}_{lm} = \hat{\mathbf{r}} Y_{lm} \tag{5.33}$$

$$\mathbf{X}_{lm} = \frac{\mathbf{L} Y_{lm}}{\sqrt{l(l+1)}} \tag{5.34}$$

$$\mathbf{V}_{lm} = -i\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm}, \tag{5.35}$$

e ainda pode-se facilmente mostrar que $\mathbf{X}_{lm}$ e $\mathbf{V}_{lm}$ mantém a seguinte relação

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{lm} &= -i\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{V}_{lm}, \qquad (5.36) \\ \mathbf{V}_{lm} &= -i\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm}. \qquad (5.37) \end{aligned}$$

Deste modo, podemos calcular $\mathbf{Y}_{lm}$ diretamente, e $\mathbf{X}_{lm}$ também quase que diretamente, e $\mathbf{V}_{lm}$ pode ser obtido por meio das expressões diretas ou pelo produto vetorial. Além disso temos também os VSH definidos como $\mathbf{Y}^m_{j,l}$, dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^m_{j,j-1} &= \sqrt{\frac{j}{2j+1}}\mathbf{Y}_{jm} + \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\mathbf{V}_{jm} \qquad (5.38) \\ \mathbf{Y}^m_{j,j} &= \mathbf{X}_{jm} \qquad (5.39) \\ \mathbf{Y}^m_{j,j+1} &= -\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\mathbf{Y}_{jm} + \sqrt{\frac{j}{2j+1}}\mathbf{V}_{jm} \qquad (5.40) \end{aligned}$$

Estas expressões podem ser facilmente invertidas, de onde podemos tirar

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{jm} &= \sqrt{\frac{j}{2j+1}}\mathbf{Y}^m_{j,j-1} + \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\mathbf{Y}^m_{j,j+1} \qquad (5.41) \\ \mathbf{X}_{jm} &= \mathbf{Y}^m_{j,j} \qquad (5.42) \\ \mathbf{V}_{jm} &= \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\mathbf{Y}^m_{j,j-1} - \sqrt{\frac{j}{2j+1}}\mathbf{Y}^m_{j,j+1} \qquad (5.43) \end{aligned}$$

5.5 Formas explícitas

Ulilizaremos em muitas ocasiões as definições

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}}\sin\theta\cos\phi + \hat{\mathbf{y}}\sin\theta\sin\phi + \hat{\mathbf{z}}\cos\theta = \frac{\sin\theta e^{-i\phi}}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{e}}_+ + \frac{\sin\theta e^{i\phi}}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{e}}_- + \cos\theta\hat{\mathbf{z}}, \qquad (5.44)$$

e também

$$\mathbf{L} = \frac{L_-}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{e}}_+ + \frac{L_+}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{e}}_- + L_z\hat{\mathbf{z}}. \qquad (5.45)$$

Sabendo que $L_\pm Y_l^m = c_{lm}^\pm Y_l^{m\pm1}$, sendo que $c_{lm}^\pm = \sqrt{l(l+1) - m(m\pm1)}$, temos

$$K_{+,l}^{m,q} = \sqrt{\frac{(l+m)(l+q)}{(2l-1)(2l+1)}} \tag{5.46}$$

$$K_{-,l}^{m,q} = \sqrt{\frac{(l-m)(l-q)}{(2l-1)(2l+1)}} \tag{5.47}$$

$$K_{0,l}^{m,q} = \sqrt{\frac{(l-m)(l+q)}{(2l-1)(2l+1)}} \tag{5.48}$$

vamos ter[?]

$$\cos\theta\ Y_l^m = K_{0,l+1}^{m,m} Y_{l+1}^m + K_{0,l}^{m,m} Y_{l-1}^m \tag{5.49}$$

$$\sin\theta e^{i\phi}\ Y_l^m = K_{-,l}^{m,m+1} Y_{l-1}^{m+1} - K_{+,l+1}^{m,m+1} Y_{l+1}^{m+1} \tag{5.50}$$

$$\sin\theta e^{-i\phi}\ Y_l^m = K_{-,l+1}^{m,m-1} Y_{l+1}^{m-1} - K_{+,l}^{m,m-1} Y_{l-1}^{m-1} \tag{5.51}$$

o que vai nos dar para $\mathbf{V}_{lm} = -i\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm}$

$$\mathbf{V}_{lm} = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \begin{bmatrix} -(l+1)K_{+,l}^{m,m-1} Y_{l-1}^{m-1}/\sqrt{2} - lK_{-,l+1}^{m,m-1} Y_{l+1}^{m-1}/\sqrt{2} \\ (l+1)K_{0,l}^{m,m} Y_{l-1}^m - lK_{0,l+1}^{m,m} Y_{l+1}^m \\ (l+1)K_{-,l}^{m,m+1} Y_{l-1}^{m+1}/\sqrt{2} + lK_{+,l+1}^{m,m+1} Y_{l+1}^{m+1}/\sqrt{2} \end{bmatrix} \tag{5.52}$$

$$\mathbf{Y}_{lm} = \begin{bmatrix} -K_{+,l}^{m,m-1} Y_{l-1}^{m-1}/\sqrt{2} + K_{-,l+1}^{m,m-1} Y_{l+1}^{m-1}/\sqrt{2} \\ K_{0,l}^{m,m} Y_{l-1}^m + K_{0,l+1}^{m,m} Y_{l+1}^m \\ K_{-,l}^{m,m+1} Y_{l-1}^{m+1}/\sqrt{2} - K_{+,l+1}^{m,m+1} Y_{l+1}^{m+1}/\sqrt{2} \end{bmatrix} \tag{5.53}$$

$$\mathbf{X}_{lm} = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \begin{bmatrix} c_-^{l,m} Y_l^{m-1}/\sqrt{2} \\ mY_l^m \\ c_+^{l,m} Y_l^{m+1}/\sqrt{2} \end{bmatrix} \tag{5.54}$$

Os outros harmônicos esféricos vetoriais são dados por[?]

$$\mathbf{Y}_{l,l-1}^{m} = \begin{bmatrix} \frac{c_-^{l-1,m}}{\sqrt{2l(2l-1)}} Y_{l-1,m-1} \\ \frac{m}{\sqrt{l(2l-1)}} Y_{l-1,m} \\ \frac{c_+^{l-1,m}}{\sqrt{2l(2l-1)}} Y_{l-1,m+1} \end{bmatrix} \tag{5.55}$$

$$\mathbf{Y}_{l,l}^{m} = \begin{bmatrix} \frac{c_-^{lm}}{\sqrt{2l(l+1)}} Y_{l,m-1} \\ \frac{m}{\sqrt{l(l+1)}} Y_{l,m} \\ \frac{c_+^{lm}}{\sqrt{2l(l+1)}} Y_{l,m+1} \end{bmatrix} \tag{5.56}$$

$$\mathbf{Y}_{l,l+1}^{m} = \begin{bmatrix} \frac{c_-^{l+1,m}}{\sqrt{2(l+1)(2l+3)}} Y_{l+1,m-1} \\ \frac{m}{\sqrt{(l+1)(2l+3)}} Y_{l+1,m} \\ \frac{c_+^{l+1,m}}{\sqrt{2(l+1)(2l+3)}} Y_{l+1,m+1} \end{bmatrix} \tag{5.57}$$

5.6 Comparações

Primeiramente vamos começar com $\mathbf{Y}_{lm} = \hat{\mathbf{r}} Y_{lm}$, fazendo a multiplicação. Temos

$$\mathbf{Y}_{lm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} \\ \sqrt{2}\cos\theta \end{bmatrix} Y_l^m(\theta, \phi) \tag{5.58}$$

e vamos comparar com a forma explícita. Calculamos então $\mathbf{Y}_{lm}$ por meio de $-i\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm}$ e comparamos com a expressão explícita. Fazendo

$$-i\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_- & \hat{\mathbf{e}}_z & \hat{\mathbf{e}}_+ \\ r_- & r_z & r_+ \\ X_- & X_z & X_+ \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} r_- X_z - r_z X_- \\ r_+ X_- - r_- X_+ \\ r_z X_+ - r_+ X_z \end{bmatrix}, \tag{5.59}$$

podemos comparar os valores de $\mathbf{V}_{lm}$ obtidos pela fórmula explícita e pela fórmula direta.

Podemos ainda comparar com os resultados de $\mathbf{Y}_{l,j}^{m}$. Com isto, verificamos dois a dois os valores para $\mathbf{Y}_{lm}$ e $\mathbf{V}_{lm}$. E finalmente, podemos conferir os valores de $\mathbf{Y}_{l,j}^{m}$ com $\mathbf{X}_{lm}$, $\mathbf{Y}_{lm}$ e $\mathbf{V}_{lm}$ por meio dos multipolos de Hansen.

5.7 Multipolos de Hansen

Os multipolos de Hansen são definidos como se segue

$$\mathbf{M}_{lm} = u_l(kr)\mathbf{X}_{lm} \tag{5.60}$$

$$\mathbf{N}_{lm} = -\frac{i}{k}\nabla \times \mathbf{M}_{lm} \tag{5.61}$$

A grande virtude destes multipolos é que eles são ótimos para decompor campos que são mutuamente rotacionais (como requer as leis de Faraday e Ampére) ou divergentes (como requer a lei de Gauss):

$$\nabla \cdot \mathbf{M}_{lm} = 0 \tag{5.62}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{N}_{lm} = 0 \tag{5.63}$$

e também

$$\nabla \times \mathbf{M}_{lm} = ik\mathbf{N}_{lm} \tag{5.64}$$

$$\nabla \times \mathbf{N}_{lm} = ik\mathbf{M}_{lm} \tag{5.65}$$

o que mostra como $\mathbf{M}_{lm}$ e $\mathbf{N}_{lm}$ são ideais para descrever em multipolos os campos elétrico e magnético, ligados pelas leis de Ampère e de Faraday.

Vamos então expandir as definições e verificar as formas explícitas destes multipolos.

$$\mathbf{M}_{lm} = j_l(kr)\mathbf{Y}^m_{l,l} \tag{5.66}$$

$$\mathbf{N}_{lm} = \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}}j_{l-1}(kr)\mathbf{Y}^m_{l,l-1} - \sqrt{\frac{l}{2l+1}}j_{l+1}(kr)\mathbf{Y}^m_{l,l+1} \tag{5.67}$$

ou na forma diferencial

$$\mathbf{M}_{lm} = j_l(kr)\mathbf{X}_{lm} \tag{5.68}$$

$$\mathbf{N}_{lm} = \left(j_l'(kr) + \frac{j_l(kr)}{kr}\right)\mathbf{V}_{lm} + \sqrt{l(l+1)}\frac{j_l(kr)}{kr}\mathbf{Y}_{lm} \tag{5.69}$$

Como podemos ver, estas relações nos permitem construir soluções completamente gerais para as equações dos campos eletromagnéticos de uma maneira que é intuitiva, razoável e matematicamente e numericamente tratável, de modo que poderemos daqui em diante usar identidades e relações entre os harmônicos esféricos vetorias e/ou as equações de Bessel, Neumann e Hankel.

5.7.1 Relações de recorrência para funções esféricas de Bessel

As seguintes relações de recorrência são válidas para as funções esféricas de Bessel:

$$f_{n-1} + f_{n+1} = (2n+1)\frac{f_n}{x} \tag{5.70}$$

$$nf_{n-1} - (n+1)f_{n+1} = (2n+1)f_n' \tag{5.71}$$

$$(n+1)\frac{f_n}{x} + f_n' = f_{n-1} \tag{5.72}$$

$$n\frac{f_n}{x} - f_n' = f_{n+1}. \tag{5.73}$$

De posse destas relações, temos diretamente que

$$\mathbf{N}_{lm} = \left(\frac{l+1}{2l+1}j_{l-1} - \frac{l}{2l+1}j_{l+1}\right)\mathbf{V}_{lm} + \frac{\sqrt{l(l+1)}}{2l+1}\Big(j_{l-1} + j_{l+1}\Big)\mathbf{Y}_{lm} \tag{5.74}$$

Com isto temos todos os harmônicos esféricos vetorias e multipolos de Hansen definidos.

5.7.2 Harmônicos esféricos vetoriais para $l = 0$

Para $l = 0$ temos

$$\mathbf{X}_{00} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{5.75}$$

mas

$$\mathbf{Y}_{00} = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \begin{bmatrix} \sin\theta e^{-im\phi} \\ \sqrt{2}\cos\theta \\ \sin\theta e^{im\phi} \end{bmatrix}, \tag{5.76}$$

e finalmente, devida à dependência nas componentes de $\mathbf{X}_{00}$,

$$\mathbf{V}_{00} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5.77}$$

Capítulo 6

Exemplos de expansões

6.1 Onda Plana

Para o caso da onda plana cujos campos elétrico e magnético são dados por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ Z\mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = E_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{u}} \end{bmatrix}, \tag{6.1}$$

As componentes de $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{lm}$ são dadas por

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{lm} = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \begin{bmatrix} c_-^{lm} Y_l^{m-1}/\sqrt{2} \\ mY_l^m \\ c_+^{lm} Y_l^{m+1}/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \begin{bmatrix} c_-^{lm} Q_l^{m-1} e^{i(m-1)\zeta}/\sqrt{2} \\ mQ_l^m e^{im\zeta} \\ c_+^{lm} Q_l^{m+1} e^{i(m+1)\zeta}/\sqrt{2} \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

de modo que os BSC definidos como sendo

$$\begin{bmatrix} G_{lm}^{TE} \\ G_{lm}^{TM} \end{bmatrix} = i^l 4\pi \boldsymbol{\mathcal{X}}_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{u}} \end{bmatrix}. \tag{6.3}$$

Tomando $\hat{\mathbf{u}} = (u_-, u_z, u_+)$ e do mesmo modo $\hat{\mathbf{k}} = (k_-, k_z, k_+)$, temos

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{u}} = i \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_- & \hat{\mathbf{e}}_z & \hat{\mathbf{e}}_+ \\ k_- & k_z & k_+ \\ u_- & u_z & u_+ \end{vmatrix} = i \begin{bmatrix} k_- u_z - k_z u_- \\ k_+ u_- - k_- u_+ \\ k_z u_+ - k_+ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_- \\ \alpha_z \\ \alpha_+ \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

e assim

$$\begin{bmatrix} G^{TE}_{lm} \\ G^{TM}_{lm} \end{bmatrix} = \frac{4\pi i^l}{\sqrt{l(l+1)}}\left(\frac{c^{lm}_{-} Y^{m-1*}_l}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} u_- \\ \alpha_- \end{bmatrix} + m Y^{m*}_l \begin{bmatrix} u_z \\ \alpha_z \end{bmatrix} + \frac{c^{lm}_{+} Y^{m+1*}_l}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} u_+ \\ \alpha_+ \end{bmatrix} \right) \tag{6.5}$$

temos a expressão geral para a onda plana genérica.

Para o caso particular de $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{e}}_z$ e $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{e}}_p$, em que $p = \pm(1)$, de modo que $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{u}} = -i\hat{\mathbf{e}}_p$,

$$\begin{bmatrix} G^{TE}_{lm} \\ G^{TM}_{lm} \end{bmatrix} = i^l 4\pi \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_p \begin{bmatrix} 1 \\ -ip \end{bmatrix} = 4\pi i^l \frac{c^{lm}_{-p} Y^{m+p}_l}{\sqrt{2l(l+1)}} \begin{bmatrix} 1 \\ -ip \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

Neste caso $Y^m_l(0,\zeta) = \sqrt{(2l+1)/4\pi}\,\delta_{m,0}$ o que nos dá

$$\begin{bmatrix} G^{TE}_{lm} \\ G^{TM}_{lm} \end{bmatrix} = 4\pi i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{c^{lm}_{-p}\delta_{m-p,0}}{\sqrt{2l(l+1)}} \begin{bmatrix} 1 \\ -ip \end{bmatrix} = i^l \sqrt{2\pi(2l+1)} \begin{bmatrix} 1 \\ -ip \end{bmatrix} \delta_{m,p} \tag{6.7}$$

Com estes valores podemos calcular os campos por meio da expansão em ondas parciais. Para o caso em que $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{e}}_+$,

$$\begin{bmatrix} G^{TE}_{lm} \\ G^{TM}_{lm} \end{bmatrix} = i^l \sqrt{2\pi(2l+1)}\,\delta_{m,1} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}. \tag{6.8}$$

Este resultado difere em $\sqrt{2}$ do resultado mostrado no Jackson devido ao fato de considerarmos a componente $\hat{\mathbf{e}}_\pm$ ao invés de $\hat{\mathbf{x}} \pm \hat{\mathbf{y}} = \sqrt{2}\hat{\mathbf{e}}_\pm$ como no feito no livro.

6.2 Guias de onda

Sabemos que os guias de onda obedecem à relação

$$Z^{TE/TM}\mathbf{H}_{\mathrm{T}} = \pm\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_{\mathrm{T}} \tag{6.9}$$

em que

$$Z^{TM} = \frac{k_z}{k} Z \tag{6.10}$$

$$Z^{TE} = \frac{k}{k_z} Z \tag{6.11}$$

Além disso, temos para o modo TM

$$\mathbf{E}_{\mathrm{T}} = \pm \frac{ik_z}{\gamma^2} \frac{d}{d\boldsymbol{\rho}} \psi \tag{6.12}$$

o que nos dá

$$Z^{TM} \mathbf{H}_{\mathrm{T}} = \frac{k_z}{k} Z \mathbf{H}_{\mathrm{T}} = \pm \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_{\mathrm{T}} \tag{6.13}$$

o que nos dá

$$Z \mathbf{H}_{\mathrm{T}} = \frac{ik}{\gamma^2} \hat{\mathbf{z}} \times \frac{d}{d\boldsymbol{\rho}} \psi \tag{6.14}$$

Agora podemos escrever os campos completos comos sendo

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{TM} &= \left[\hat{\mathbf{z}} \pm \frac{ik_z}{\gamma^2} \frac{d}{d\boldsymbol{\rho}} \right] \psi & (6.15) \\ -Z \mathbf{H}^{TM} &= \frac{k}{\gamma^2} \left[-i \hat{\mathbf{z}} \times \frac{d}{d\boldsymbol{\rho}} \right] \psi & (6.16) \end{aligned}$$

Para o modo TE

$$\mathbf{H}_{\mathrm{T}} = \pm \frac{ik_z}{\gamma^2} \frac{d}{d\boldsymbol{\rho}} \psi \tag{6.17}$$

e ainda

$$\pm Z^{TE} \mathbf{H}_{\mathrm{T}} = \pm \frac{k}{k_z} Z \mathbf{H}_{\mathrm{T}} = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_{\mathrm{T}} \tag{6.18}$$

e com isto

$$\pm Z \frac{k}{k_z} \mathbf{H}_{\mathrm{T}} = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_{\mathrm{T}} \tag{6.19}$$

Multiplicando ambos os lados por $-\hat{\mathbf{z}}\times$ vamos ter

$$\mathbf{E}_{\mathrm{T}} = \mp \frac{k}{k_z} \hat{\mathbf{z}} \times Z \mathbf{H}_{\mathrm{T}} = -\frac{ik}{\gamma^2} \hat{\mathbf{z}} \times \frac{d}{d\boldsymbol{\rho}} \psi \tag{6.20}$$

Assim, juntando as componentes obtemos

$$\mathbf{H}^{TE} = \left[\hat{\mathbf{z}} \pm \frac{ik_z}{\gamma^2}\frac{d}{d\boldsymbol{\rho}}\right]\psi \tag{6.21}$$

$$\mathbf{E}^{TE} = \frac{k}{\gamma^2}\left[-i\hat{\mathbf{z}} \times \frac{d}{d\boldsymbol{\rho}}\right]\psi \tag{6.22}$$

Assim, podemos ver que as equações para os campos mantém uma certa similaridade, e que podem ser escritas como sendo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}^{TM} \\ \mathbf{H}^{TE} \end{bmatrix} = \left[\hat{\mathbf{z}} \pm \frac{ik_z}{\gamma^2}\frac{d}{d\boldsymbol{\rho}}\right]\psi \tag{6.23}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}^{TE} \\ -Z\mathbf{H}^{TM} \end{bmatrix} = \frac{k}{\gamma^2}\left[-i\hat{\mathbf{z}} \times \frac{d}{d\boldsymbol{\rho}}\right]\psi \tag{6.24}$$

6.2.1 Definição das transformadas

Vamos definir as transformadas de Fourier como sendo

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') = \mathcal{F}^{-1}\left\{\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}')\right\} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k'\ \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}')e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'} \tag{6.25}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}') = \mathcal{F}\left\{\mathbf{E}(\mathbf{r}')\right\} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3r'\ \mathbf{E}(\mathbf{r}')e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'} \tag{6.26}$$

Podemos com isto demonstrar que

$$\mathcal{F}\left\{\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}')\right\} = i\mathbf{k}'\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}') \tag{6.27}$$

sendo que relações semelhantes valem para o gradiente de uma função escalar e para o produto vetorial.

6.2.2 Campos no interior de guias de onda

Os campos eletromagnéticos são definidos e correlacionados segunda as equações

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}^{TM}(\mathbf{r}) \\ Z\mathbf{H}^{TE}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = E_0\left[\hat{\mathbf{z}} + i\frac{k_z}{\gamma^2}\frac{d}{d\boldsymbol{\rho}}\right]g(\mathbf{r}) \tag{6.28}$$

e os demais campos por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}^{TE}(\mathbf{r}) \\ -Z\mathbf{H}^{TM}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = E_0 \frac{k}{\gamma^2} \left[-i\hat{\mathbf{z}} \times \frac{d}{d\boldsymbol{\rho}} \right] g(\mathbf{r}) \tag{6.29}$$

sendo que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho} &= x\hat{\mathbf{e}}_x + y\hat{\mathbf{e}}_y && (6.30) \\ \frac{d}{d\boldsymbol{\rho}} &= \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{e}}_y && (6.31) \end{aligned}$$

No domínio de Fourier estes campos são dados por

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{E}}^{TM}(\mathbf{k}) \\ Z\boldsymbol{\mathcal{H}}^{TE}(\mathbf{k}) \end{bmatrix} = E_0 \left[\hat{\mathbf{z}} - \frac{k_z \gamma'}{\gamma^2} \hat{\boldsymbol{\gamma}} \right] G(\mathbf{k}') \tag{6.32}$$

e ainda, sabendo que $\hat{\boldsymbol{\zeta}} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\boldsymbol{\gamma}}$

$$\begin{bmatrix} -Z\boldsymbol{\mathcal{H}}^{TM}(\mathbf{k}) \\ \boldsymbol{\mathcal{E}}^{TE}(\mathbf{k}) \end{bmatrix} = E_0 \frac{k\gamma'}{\gamma^2} \hat{\boldsymbol{\zeta}} G(\mathbf{k}') \tag{6.33}$$

Necessitamos neste caso verificar a transformada de $g(\mathbf{r})$. Para o caso dos guias de onda, temos que

$$g(\mathbf{r}') = \bar{g}(\boldsymbol{\rho}') e^{ik_z z'} \tag{6.34}$$

e que $\bar{g}(\boldsymbol{\rho})$ obedece a equação de onda em duas dimensões

$$\frac{d^2}{d\boldsymbol{\rho}^2} \bar{g}(\boldsymbol{\rho}') = -\gamma^2 \bar{g}(\boldsymbol{\rho}') \tag{6.35}$$

o que no domínio de Fourier fica

$$-\gamma'^2 \bar{G}(\boldsymbol{\gamma}') = -\gamma^2 \bar{G}(\boldsymbol{\gamma}') \tag{6.36}$$

o que nos diz que

$$\bar{G}(\boldsymbol{\gamma}') = G_\gamma(\zeta') \frac{\delta(\gamma' - \gamma)}{\gamma} \tag{6.37}$$

Deste modo, vamos ter que

$$\bar{G}(\mathbf{r}') = \sqrt{2\pi} G_\gamma(\zeta') \frac{\delta(\gamma' - \gamma)}{\gamma} \delta(k'_z - k_z) = \sqrt{2\pi} G_\gamma(\zeta') \frac{\delta(k' - k)}{k^2} \delta(k'_z/k - k_z/k) \quad (6.38)$$

Substituindo as expressões acima nas equações dos campos temos

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{E}}^{TM}(\mathbf{k}) \\ Z\boldsymbol{\mathcal{H}}^{TE}(\mathbf{k}) \end{bmatrix} = \left[\sqrt{2\pi} E_0 \left[\hat{\mathbf{z}} - \frac{k_z}{\gamma} \hat{\boldsymbol{\gamma}} \right] G_\gamma(\zeta') \delta(k'_z/k - k_z/k) \right] \frac{\delta(k' - k)}{k^2} \quad (6.39)$$

e para os outros campos

$$\begin{bmatrix} -Z\boldsymbol{\mathcal{H}}^{TM}(\mathbf{k}) \\ \boldsymbol{\mathcal{E}}^{TE}(\mathbf{k}) \end{bmatrix} = \left[\sqrt{2\pi} E_0 \frac{k}{\gamma} \hat{\boldsymbol{\zeta}} G_\gamma(\zeta') \delta(k'_z/k - k_z/k) \right] \frac{\delta(k' - k)}{k^2} \quad (6.40)$$

sendo que os termos entre colchetes (que excluem as deltas em k) são os termos dos campos com subíndice k. Podemos agora com estes campos calcular os coeficientes, que são dados por

$$\begin{bmatrix} G_{lm}^{TE} \\ G_{lm}^{TM} \end{bmatrix} = \frac{i^p}{E_0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int d\Omega(\hat{\mathbf{k}})\ \boldsymbol{\mathcal{X}}_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}') \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{k}}(\hat{\mathbf{k}}') \\ Z\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{k}}(\hat{\mathbf{k}}') \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

A integral em $d\Omega(\hat{\mathbf{k}}')$ pode ser escrita como uma integral em $d\zeta d\xi \sin\xi = d\zeta d(\cos\xi) = d\zeta d(k'_z/k)$. Com isto e com a presença de $\delta(k'_z/k - k_z/k)$, a integral em $d\Omega(\hat{\mathbf{k}}')$ vai se tornar uma integral simples em $d\zeta'$. Para isto, precisamos calcular

$$\alpha = \boldsymbol{\mathcal{X}}_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}') \cdot \left[\hat{\mathbf{z}} - \frac{k_z}{\gamma} \hat{\boldsymbol{\gamma}} \right] \quad (6.42)$$

$$\beta = \frac{k_z}{\gamma} \boldsymbol{\mathcal{X}}_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}') \cdot \hat{\boldsymbol{\zeta}} \quad (6.43)$$

e para isto precisamos saber como expressar o operador momento angular em coordenadas cilíndricas. Deste modo, sabendo que $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{lm}(\hat{\mathbf{k}}') = \boldsymbol{\mathcal{L}} Y_l^m(\hat{\mathbf{k}}')/\sqrt{l(l+1)}$, fazemos

$$\alpha^* = \boldsymbol{\mathcal{L}} Y_l^m(\hat{\mathbf{k}}') \cdot \left[\hat{\mathbf{z}} - \frac{k_z}{\gamma} \hat{\boldsymbol{\gamma}} \right] \quad (6.44)$$

$$\beta^* = \boldsymbol{\mathcal{L}} Y_l^m(\hat{\mathbf{k}}') \cdot \hat{\boldsymbol{\zeta}} \quad (6.45)$$

o que nos dá diretamente

$$\alpha^* = \left[\mathcal{L}_z - \frac{k_z}{\gamma}\mathcal{L}_\gamma\right] Y_l^m(\hat{\mathbf{k}}') \tag{6.46}$$

$$\beta^* = \frac{k}{\gamma}\mathcal{L}_\zeta Y_l^m(\hat{\mathbf{k}}') \tag{6.47}$$

Sabendo que

$$\mathcal{L}_\gamma = -i\left(-\frac{k_z'}{\gamma'}\right)\frac{\partial}{\partial\zeta'} = -\frac{k_z'}{\gamma'}\mathcal{L}_z \tag{6.48}$$

$$\mathcal{L}_\zeta = -i\left(k_z'\frac{\partial}{\partial\gamma'} - \gamma'\frac{\partial}{\partial k_z'}\right) \tag{6.49}$$

$$\mathcal{L}_z = -i\frac{\partial}{\partial\zeta'} \tag{6.50}$$

tem-se diretamente que (considerando-se as deltas de Dirac)

$$\alpha^* = -i\left(1 + \frac{k_z^2}{\gamma^2}\right)\frac{\partial}{\partial\zeta'}Y_l^m(\hat{\mathbf{k}}') \tag{6.51}$$

$$\beta^* = -i\frac{k}{\gamma}\left(k_z\frac{\partial}{\partial\gamma} - \gamma\frac{\partial}{\partial k_z}\right)Y_l^m(\hat{\mathbf{k}}') \tag{6.52}$$

e sabendo que

$$Y_l^m(\hat{\mathbf{k}}') = Q_l^m(k_z/k)e^{im\zeta'} \tag{6.53}$$

temos que

$$\alpha = m\frac{k^2}{\gamma^2}Q_l^m(k_z/k)e^{-im\zeta'} \tag{6.54}$$

$$\beta = -iQ_l^{m\prime}(k_z/k)e^{-im\zeta'} \tag{6.55}$$

Substituindo estas expressões nas expressões para campos e para os coeficientes, vamos ter

$$\begin{bmatrix} G_{lm}^{TE}[TM] \\ G_{lm}^{TM}[TE] \end{bmatrix} = \frac{2i^p m}{\sqrt{l(l+1)}}\frac{k^2}{\gamma^2}Q_l^m(k_z/k)\int d\zeta'\; G_\gamma(\zeta')e^{-im\zeta'} \tag{6.56}$$

e

$$\begin{bmatrix} G_{lm}^{TE}[TE] \\ -G_{lm}^{TM}[TM] \end{bmatrix} = \frac{2i^{p-1}}{\sqrt{l(l+1)}}Q_l^{m\prime}(k_z/k)\int d\zeta'\; G_\gamma(\zeta')e^{-im\zeta'} \tag{6.57}$$

em que

$$G_\gamma(\zeta')\frac{\delta(\gamma'-\gamma)}{\gamma} = \mathcal{F}\{\bar{g}(\boldsymbol{\rho})\} = \frac{1}{2\pi}\int d^2\rho\ \bar{g}(\boldsymbol{\rho})e^{-i\boldsymbol{\gamma}'\cdot\boldsymbol{\rho}'} \tag{6.58}$$

6.2.3 Calculo das componentes

Sabemos que

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{e^{-i\zeta}\hat{\mathbf{e}}_+ + e^{i\zeta}\hat{\mathbf{e}}_-}{\sqrt{2}} \tag{6.59}$$

$$\hat{\boldsymbol{\zeta}} = \frac{e^{-i\zeta}\hat{\mathbf{e}}_+ - e^{i\zeta}\hat{\mathbf{e}}_-}{\sqrt{2}i} \tag{6.60}$$

ou

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{e^{-i\zeta}\hat{\mathbf{e}}_+ + e^{i\zeta}\hat{\mathbf{e}}_-}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} e^{-i\zeta} \\ 0 \\ e^{i\zeta}\end{bmatrix} \tag{6.61}$$

e

$$\hat{\boldsymbol{\zeta}} = \frac{e^{-i\zeta}\hat{\mathbf{e}}_+ - e^{i\zeta}\hat{\mathbf{e}}_-}{\sqrt{2}i} = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -e^{-i\zeta} \\ 0 \\ e^{i\zeta}\end{bmatrix} \tag{6.62}$$

Temos que

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{lm} = \frac{\boldsymbol{\mathcal{L}}Y_l^m}{\sqrt{l(l+1)}} = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\begin{bmatrix} c_-^{lm}Q_l^{m-1}e^{i(m-1)\zeta}/\sqrt{2} \\ mQ_l^m e^{im\zeta} \\ c_+^{lm}Q_l^{m+1}e^{i(m+1)\zeta}/\sqrt{2}\end{bmatrix} \tag{6.63}$$

Se $\mathbf{A} = A_-\mathbf{e}_+ + A_+\mathbf{e}_- + A_z\mathbf{e}_z$, temos que $\mathbf{A}^* = A_-^*\mathbf{e}_- + A_+^*\mathbf{e}_+ + A_z^*\mathbf{e}_z$, ou seja, há uma inversão da posição dos termos. Deste modo

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{lm}^* = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\begin{bmatrix} c_+^{lm}Q_l^{m+1}e^{-i(m+1)\zeta}/\sqrt{2} \\ mQ_l^m e^{-im\zeta} \\ c_-^{lm}Q_l^{m-1}e^{-i(m-1)\zeta}/\sqrt{2}\end{bmatrix} \tag{6.64}$$

Assim sendo, temos que

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{lm} \cdot \hat{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{1}{2}\frac{e^{-im\zeta}}{\sqrt{l(l+1)}}\Big(c^{lm}_+ Q^{m+1}_l + c^{lm}_- Q^{m-1}_l\Big) \tag{6.65}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{lm} \cdot \hat{\boldsymbol{\zeta}} = \frac{i}{2}\frac{e^{-im\zeta}}{\sqrt{l(l+1)}}\Big(c^{lm}_+ Q^{m+1}_l - c^{lm}_- Q^{m-1}_l\Big) \tag{6.66}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{lm} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} = m\frac{e^{-im\zeta}}{\sqrt{l(l+1)}} Q^m_l \tag{6.67}$$

Agora precisamos fazer

$$\left[\hat{\mathbf{z}} - \frac{k_z}{\gamma}\hat{\boldsymbol{\gamma}}\right] \cdot \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{lm} = \frac{e^{-im\zeta}}{\sqrt{l(l+1)}}\Big(mQ^m_l - \frac{1}{2}\frac{k_z}{\gamma}\big(c^{lm}_+ Q^{m+1}_l + c^{lm}_- Q^{m-1}_l\big)\Big) \tag{6.68}$$

Agora vamos comparar α e β, dados por

$$\alpha = m\frac{k^2}{\gamma^2} Q^m_l(k_z/k) \tag{6.69}$$

$$\beta = -iQ^{m\prime}_l(k_z/k) \tag{6.70}$$

com seus semelhantes dados por

$$\alpha_0 = mQ^m_l - \frac{1}{2}\frac{k_z}{\gamma}\big(c^{lm}_- Q^{m-1}_l + c^{lm}_+ Q^{m+1}_l\big) \tag{6.71}$$

$$\beta_0 = \frac{-i}{2}\frac{k}{\gamma}\Big(c^{lm}_- Q^{m-1}_l - c^{lm}_+ Q^{m+1}_l\Big) \tag{6.72}$$

o que nos diz que devemos ter

$$m\frac{k^2}{\gamma^2} Q^m_l(k_z/k) = mQ^m_l - \frac{1}{2}\frac{k_z}{\gamma}\big(c^{lm}_+ Q^{m+1}_l + c^{lm}_- Q^{m-1}_l\big) \tag{6.73}$$

$$2\frac{\gamma}{k} Q^{m\prime}_l = c^{lm}_- Q^{m-1}_l - c^{lm}_+ Q^{m+1}_l \tag{6.74}$$

O primeiro termo nos dá que

$$-2m\frac{k_z}{\gamma} Q^m_l(k_z/k) = c^{lm}_- Q^{m-1}_l + c^{lm}_+ Q^{m+1}_l \tag{6.75}$$

6.2.4 Limites da expansão

Sabemos que as funções de Bessel $J_n(x)$ têm uma aproximação para a série crescente dada por

$$J_\nu(x) \approx \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \tag{6.76}$$

para $0 \leq x \leq \sqrt{\nu+1}$. Como

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x) \tag{6.77}$$

vamos ter que tanto $J_n(x)$ quanto $j_n(x)$ são proporcionais a x^n. Desta forma, para um dado x_0, à medida que aumentamos a ordem n da função de Bessel, a função $\Gamma(n)$ cresce muito mais rápido que x^m, o que faz com este termo tenda a zero. Com isto podemos impor um limite para a expansão em ondas parciais. Este limite deve ser uma função de k e da maior distância envolvida na expansão, dada por x_M, para $x > 8$ em torno de $1.5x_M$, ou seja, para um $x_M = 20$ a expansão pode ser truncada em $l_{max} = 30$.

6.2.5 Guias de onda

Os guias de onda podem, para os casos estudados, retangular ou cilíndrico. Neste caso, vamos ter uma origem arbitrária dentro destes guias de onda dada por $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, o modo propagante TE ou TM, o comprimento de onda incidente λ que nos dá um $k = 2\pi/\lambda$ além dos modos propagantes γ_{lm} dados em função da geometria do guia, seja as dimensões laterais do guia de onda retangular a, b ou do raio do guia de onda cilíndrico R, que nos dão os parâmetros G_γ^q.

$$\left[\begin{array}{c} G_{lm}^{TE}[TM] \\ G_{lm}^{TM}[TE] \end{array}\right] = \frac{2i^p q}{\sqrt{l(l+1)}} \frac{k^2}{\gamma^2} Q_{lm}\left(\frac{k_z}{k}\right) G_\gamma^q, \tag{6.78}$$

$$\left[\begin{array}{c} -G_{lm}^{TM}[TM] \\ G_{lm}^{TE}[TE] \end{array}\right] = \frac{2i^{p-1}}{\sqrt{l(l+1)}} Q'_{lm}\left(\frac{k_z}{k}\right) G_\gamma^q. \tag{6.79}$$

Neste caso, necessitamos calcular os parâmetros G_γ^q, para cada tipo de guia de onda.

6.2.6 Derivada de $Q_{lm}(x)$

Conhecendo a relação de recorrência em relação à derivada dos polinomios de Legendre

$$(1-x^2)P_l^{m\prime} = -lxP_l^m + (l+m)P_{l-1}^m, \tag{6.80}$$

que vai nos dar

$$Q_l^{m\prime} = -\frac{lx}{1-x^2}Q_l^m + \sqrt{\frac{2l+1}{2l-1}}\frac{\sqrt{(l+m)(l-m)}}{1-x^2}Q_{l-1}^m. \tag{6.81}$$

Como $P_0^0 = 1$, implica que este termo tem derivada zero, ou seja, $P_0^{0\prime} = 0$, e a relação de recorrência é válida para $l \geq 1$. Com isto

$$(1-x^2)Q_1^{m\prime} = -xQ_1^m + \sqrt{3}\sqrt{(1+m)(1-m)}Q_0^m, \tag{6.82}$$

o que nos dá que:

$$Q_1^{-1\prime} = -\frac{x}{1-x^2}Q_1^{-1} \tag{6.83}$$

$$Q_1^{0\prime} = -\frac{x}{1-x^2}Q_1^0 + \frac{\sqrt{3}}{1-x^2}Q_0^0 \tag{6.84}$$

$$Q_1^{1\prime} = -\frac{x}{1-x^2}Q_1^1 \tag{6.85}$$

6.3 Guia de onda retangular

Os campos no interior dos guias de onda são dados por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}^{TM} \\ Z\mathbf{H}^{TE} \end{bmatrix} = \left[\hat{\mathbf{z}} \pm \frac{ik_z}{\gamma^2}\frac{d}{d\boldsymbol{\rho}}\right]\psi \tag{6.86}$$

e por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}^{TE} \\ -Z\mathbf{H}^{TM} \end{bmatrix} = \frac{k}{\gamma^2}\left[-i\hat{\mathbf{z}} \times \frac{d}{d\boldsymbol{\rho}}\right]\psi \tag{6.87}$$

Sabemos que

$$\frac{d}{d\boldsymbol{\rho}} = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} \tag{6.88}$$

o que nos dá

$$\hat{\mathbf{z}} \times \frac{d}{d\boldsymbol{\rho}} = -\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial x} \tag{6.89}$$

Reescrevendo as equações gerais para os guias de onda temos

$$\mathbf{E}^{TM}(\mathbf{r}) = Z\mathbf{H}^{TE}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} i(k_z/\gamma^2)\partial_x \\ i(k_z/\gamma^2)\partial_y \\ 1 \end{bmatrix} g(\mathbf{r}), \tag{6.90}$$

e para

$$\mathbf{E}^{TE}(\mathbf{r}) = -Z\mathbf{H}^{TM}(\mathbf{r}) = i\frac{k}{\gamma^2} \begin{bmatrix} \partial_y \\ -\partial_x \\ 0 \end{bmatrix} g(\mathbf{r}) \tag{6.91}$$

Para o guia de onda retangular temos

$$g^{TE}(\mathbf{r}) = \cos(k_x x)\cos(k_y y)e^{ik_z z} \tag{6.92}$$

$$g^{TM}(\mathbf{r}) = \sin(k_x x)\sin(k_y y)e^{ik_z z}. \tag{6.93}$$

Desta forma, os modo transversais magnéticos são dados por

$$\mathbf{E}^{TM}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} i(k_z k_x/\gamma^2)\cos(k_x x)\sin(k_y y) \\ i(k_z k_y/\gamma^2)\sin(k_x x)\cos(k_y y) \\ \sin(k_x x)\sin(k_y y) \end{bmatrix} e^{ik_z z} \tag{6.94}$$

e por

$$Z\mathbf{H}^{TM}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} -i(kk_y/\gamma^2)\sin(k_x x)\cos(k_y y) \\ i(kk_x/\gamma^2)\cos(k_x x)\sin(k_y y) \\ 0 \end{bmatrix} e^{ik_z z}. \tag{6.95}$$

Por outro lado, os modo transversais elétricos são dados por

$$Z\mathbf{H}^{TE}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} -i(k_z k_x/\gamma^2)\sin(k_x x)\cos(k_y y) \\ -i(k_z k_y/\gamma^2)\cos(k_x x)\sin(k_y y) \\ \cos(k_x x)\cos(k_y y) \end{bmatrix} e^{ik_z z} \tag{6.96}$$

e ainda

$$\mathbf{E}^{TE}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} -i(kk_y/\gamma^2)\cos(k_x x)\sin(k_y y) \\ i(kk_x/\gamma^2)\sin(k_x x)\cos(k_y y) \\ 0 \end{bmatrix} e^{ik_z z}. \tag{6.97}$$

Assim sendo, temos todas as expressões para os campos eletromagnéticos. Para calcular os termos na base em que usamos devemos fazer

$$A_{\pm} = \frac{A_x \pm iA_y}{\sqrt{2}}. \tag{6.98}$$

6.3.1 Geometria do guia de onda retangular

Como sabemos, os modos TE/TM são dados por

$$g^{TE} = \cos(k_x x')\cos(k_y y')e^{ik_z z'} \tag{6.99}$$

$$g^{TM} = \sin(k_x x')\sin(k_y y')e^{ik_z z'} \tag{6.100}$$

para $0 \leq x' \leq a$ e $0 \leq y' \leq b$. Entretanto, estamos interessados em um ponto dado por $\boldsymbol{\rho}_0 = (x_0, y_0)$. Em ambos os casos temos $-x_0 \leq x' - x_0 \leq a - x_0$ e $-y_0 \leq y' - y_0 \leq b - y_0$, o que vai levar a uma geometria $x'' = x' - x_0$ para a expansão, e além disso teremos os campos reescritos como sendo $x' = x'' + x_0$, ou seja

$$g^{TE} = \cos\{k_x(x'' + x_0)\}\cos\{k_y(y'' + y_0)\}e^{ik_z(z''+z_0)} \tag{6.101}$$

$$g^{TM} = \sin\{k_x(x'' + x_0)\}\sin\{k_y(y'' + y_0)\}e^{ik_z(z''+z_0)}. \tag{6.102}$$

Para o modo TE temos que fazer a transformada de Fourier de

$$g^{TE}(\mathbf{r}') = \cos(k_x x')\cos(k_y y')e^{ik_z z'}e^{ik_z z'} \tag{6.103}$$

$$g^{TM}(\mathbf{r}') = \sin(k_x x')\sin(k_y y')e^{ik_z z'}e^{ik_z z'} \tag{6.104}$$

ou

$$g^{TE}(\mathbf{r}'') = \cos\{k_x(x'' + x_0)\}\cos\{k_y(y'' + y_0)\}e^{ik_z(z''+z_0)} \tag{6.105}$$

$$g^{TM}(\mathbf{r}'') = \sin\{k_x(x'' + x_0)\}\sin\{k_y(y'' + y_0)\}e^{ik_z(z''+z_0)}. \tag{6.106}$$

o que vai nos dar

$$g^{TE}(\mathbf{r}'') = e^{ik_z z_0}\left(\frac{e^{ik_x x''}e^{ik_x x_0} + e^{-ik_x x''}e^{-ik_x x_0}}{2}\right)\left(\frac{e^{ik_y y''}e^{k_y y_0} + e^{-ik_y y''}e^{-ik_y y_0}}{2}\right)e^{ik_z z''} \tag{6.107}$$

$$g^{TM}(\mathbf{r}'') = e^{ik_z z_0}\left(\frac{e^{ik_x x''}e^{ik_x x_0} - e^{-ik_x x''}e^{-ik_x x_0}}{2i}\right)\left(\frac{e^{ik_y y''}e^{k_y y_0} - e^{-ik_y y''}e^{-ik_y y_0}}{2i}\right)e^{ik_z z''} \tag{6.108}$$

Para obtermos estas expressões no espaço de Fourier temos de fazer

$$\mathcal{F}\left\{e^{ik_x x'}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dx'\; e^{-i(k_x'-k_x)x'} = \frac{2\pi}{\sqrt{2\pi}}\delta(k_x'-k_x) \tag{6.109}$$

o que vai nos dar

$$\begin{aligned}
G^{TE}(\mathbf{k}') &= \frac{(2\pi)^{3/2}}{4}e^{ik_z z_0}\Big(\delta(k_x'-k_x)e^{ik_x x_0}+\delta(k_x'+k_x)e^{-ik_x x_0}\Big)\times \\
&\times\;\Big(\delta(k_y'-k_y)e^{ik_y y_0}+\delta(k_y'+k_y)e^{-ik_y y_0}\Big)\delta(k_z'-k_z) \qquad (6.110)\\
G^{TM}(\mathbf{k}') &= -\frac{(2\pi)^{3/2}}{4}e^{ik_z z_0}\Big(\delta(k_x'-k_x)e^{ik_x x_0}-\delta(k_x'+k_x)e^{-ik_x x_0}\Big)\times \\
&\times\;\Big(\delta(k_y'-k_y)e^{ik_y y_0}-\delta(k_y'+k_y)e^{-ik_y y_0}\Big)\delta(k_z'-k_z). \qquad (6.111)
\end{aligned}$$

Multiplicando os termos temos

$$\begin{aligned}
G^{TE}(\mathbf{k}') &= \frac{(2\pi)^{3/2}}{4}e^{ik_z z_0}\Big[\Big(\delta(k_x'-k_x)\delta(k_y'-k_y)e^{ik_x x_0}e^{ik_y y_0}+\delta(k_x'+k_x)\delta(k_y'-k_y)e^{-ik_x x_0}e^{ik_y y_0}\Big)+ \\
&+\;\Big(\delta(k_x'-k_x)\delta(k_y'+k_y)e^{ik_x x_0}e^{-ik_y y_0}+\delta(k_x'+k_x)\delta(k_y'+k_y)e^{-ik_x x_0}e^{-ik_y y_0}\Big)\delta(k_z'-k_z)\Big] \\
G^{TM}(\mathbf{k}') &= -\frac{(2\pi)^{3/2}}{4}e^{ik_z z_0}\Big(\delta(k_x'-k_x)\delta(k_y'+k_y)e^{ik_x x_0}e^{ik_y y_0}-\delta(k_x'+k_x)\delta(k_y'+k_y)e^{-ik_x x_0}e^{-ik_y y_0}\Big)- \\
&-\;\Big(\delta(k_x'-k_x)\delta(k_y'+k_y)e^{ik_x x_0}e^{-ik_y y_0}-\delta(k_x'+k_x)\delta(k_y'+k_y)e^{-ik_x x_0}e^{-ik_y y_0}\Big)\delta(k_z'-k_z)
\end{aligned}$$

que juntando os termos dá

$$\begin{aligned}
G^{TE}(\mathbf{k}') &= \frac{(2\pi)^{3/2}}{4}e^{ik_z z_0}\Big[\Big(\delta(k_x'-k_x)\delta(k_y'-k_y)e^{i(k_x x_0+k_y y_0)}+\delta(k_x'+k_x)\delta(k_y'-k_y)e^{-i(k_x x_0-k_y y_0)}\Big)+ \\
&+\;\Big(\delta(k_x'-k_x)\delta(k_y'+k_y)e^{i(k_x x_0-k_y y_0)}+\delta(k_x'+k_x)\delta(k_y'+k_y)e^{-i(k_x x_0+k_y y_0)}\Big)\Big]\,\delta(k_z'-k_z) \\
G^{TM}(\mathbf{k}') &= -\frac{(2\pi)^{3/2}}{4}e^{ik_z z_0}\Big[\Big(\delta(k_x'-k_x)\delta(k_y'+k_y)e^{i(k_x x_0+k_y y_0)}-\delta(k_x'+k_x)\delta(k_y'+k_y)e^{-i(k_x x_0-k_y y_0)}\Big)+ \\
&-\;\Big(\delta(k_x'-k_x)\delta(k_y'+k_y)e^{i(k_x x_0-k_y y_0)}-\delta(k_x'+k_x)\delta(k_y'+k_y)e^{-i(k_x x_0+k_y y_0)}\Big)\Big]\,\delta(k_z'-k_z)
\end{aligned}$$

Fazendo $\phi_\pm = k_x x_0 \pm k_y y_0$ vamos ter

$$\begin{aligned}
G^{TE}(\mathbf{k}') &= \frac{(2\pi)^{3/2}}{4} e^{ik_z z_0} \Big[\Big(\delta(k'_x - k_x)\delta(k'_y - k_y) e^{i\phi_+} + \delta(k'_x + k_x)\delta(k'_y - k_y) e^{-i\phi_-} \Big) + \\
&+ \Big(\delta(k'_x - k_x)\delta(k'_y + k_y) e^{i\phi_-} + \delta(k'_x + k_x)\delta(k'_y + k_y) e^{-i\phi_+} \Big) \Big] \delta(k'_z - k_z) \\
G^{TM}(\mathbf{k}') &= -\frac{(2\pi)^{3/2}}{4} e^{ik_z z_0} \Big[\Big(\delta(k'_x - k_x)\delta(k'_y + k_y) e^{i\phi_+} - \delta(k'_x + k_x)\delta(k'_y + k_y) e^{-i\phi_-} \Big) + \\
&- \Big(\delta(k'_x - k_x)\delta(k'_y + k_y) e^{i\phi_-} - \delta(k'_x + k_x)\delta(k'_y + k_y) e^{-i\phi_+} \Big) \Big] \delta(k'_z - k_z)
\end{aligned}$$

Mudando para coordenadas cilíndricas, obtemos

$$\begin{aligned}
G^{TE}(\mathbf{k}') &= \frac{(2\pi)^{3/2}}{4} e^{ik_z z_0} \big[\delta(\zeta' - \zeta) e^{i\phi_+} + \delta(\zeta' + \zeta + \pi) e^{-i\phi_-} + \\
&+ \delta(\zeta' + \zeta) e^{i\phi_-} + \delta(\zeta' - \zeta + \pi) e^{-i\phi_+} \big] \frac{\delta(\gamma' - \gamma)}{\gamma} \delta(k'_z - k_z) \\
G^{TM}(\mathbf{k}') &= -\frac{(2\pi)^{3/2}}{4} e^{ik_z z_0} \big[\delta(\zeta' - \zeta) e^{i\phi_+} - \delta(\zeta' + \zeta + \pi) e^{-i\phi_-} + \\
&- \delta(\zeta' + \zeta) e^{i\phi_-} + \delta(\zeta' - \zeta + \pi) e^{-i\phi_+} \big] \frac{\delta(\gamma' - \gamma)}{\gamma} \delta(k'_z - k_z)
\end{aligned}$$

Recolocando os termos vamos ter

$$\begin{aligned}
G^{TE}(\mathbf{k}') &= \frac{\pi}{2} e^{ik_z z_0} \big[\delta(\zeta' + \zeta) e^{i\phi_-} + \delta(\zeta' - \zeta) e^{i\phi_+} + \\
&+ \delta(\zeta' + \zeta + \pi) e^{-i\phi_-} + \delta(\zeta' - \zeta + \pi) e^{-i\phi_+} \big] \frac{\delta(\gamma' - \gamma)}{\gamma} \big(\sqrt{2\pi}\, \delta(k'_z - k_z) \big) \\
G^{TM}(\mathbf{k}') &= \frac{\pi}{2} e^{ik_z z_0} \big[\delta(\zeta' + \zeta) e^{i\phi_-} - \delta(\zeta' - \zeta) e^{i\phi_+} + \\
&+ \delta(\zeta' + \zeta + \pi) e^{-i\phi_-} - \delta(\zeta' - \zeta + \pi) e^{-i\phi_+} \big] \frac{\delta(\gamma' - \gamma)}{\gamma} \big(\sqrt{2\pi}\, \delta(k'_z - k_z) \big)
\end{aligned}$$

Com isto obtemos os valores de

$$\begin{aligned}
G^{TE}_\gamma(\zeta') &= \frac{\pi}{2} e^{ik_z z_0} \big[\delta(\zeta' + \zeta) e^{i\phi_-} + \delta(\zeta' - \zeta) e^{i\phi_+} + \\
&+ \delta(\zeta' + \zeta + \pi) e^{-i\phi_-} + \delta(\zeta' - \zeta + \pi) e^{-i\phi_+} \big] \\
G^{TM}_\gamma(\zeta') &= \frac{\pi}{2} e^{ik_z z_0} \big[\delta(\zeta' + \zeta) e^{i\phi_-} - \delta(\zeta' - \zeta) e^{i\phi_+} + \\
&+ \delta(\zeta' + \zeta + \pi) e^{-i\phi_-} - \delta(\zeta' - \zeta + \pi) e^{-i\phi_+} \big]
\end{aligned}$$

Precisamos agora integrar

$$I = \int d\zeta' \; G_\gamma(\zeta') e^{-im\zeta'} \tag{6.112}$$

de modo que obteremos assim

$$\begin{aligned}
I^{TE}(\zeta') &= \frac{\pi}{2} e^{ik_z z_0} \int d\zeta' \Big[e^{-im\zeta'} \delta(\zeta' + \zeta) e^{i\phi_-} + e^{-im\zeta'} \delta(\zeta' - \zeta) e^{i\phi_+} + \\
&+ \; e^{-im\zeta'} \delta(\zeta' + \zeta + \pi) e^{-i\phi_-} + e^{-im\zeta'} \delta(\zeta' - \zeta + \pi) e^{-i\phi_+} \Big] \\
I^{TM}(\zeta') &= \frac{\pi}{2} e^{ik_z z_0} \int d\zeta' \Big[e^{-im\zeta'} \delta(\zeta' + \zeta) e^{i\phi_-} - e^{-im\zeta'} \delta(\zeta' - \zeta) e^{i\phi_+} + \\
&+ \; e^{-im\zeta'} \delta(\zeta' + \zeta + \pi) e^{-i\phi_-} - e^{-im\zeta'} \delta(\zeta' - \zeta + \pi) e^{-i\phi_+} \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I^{TE} &= \frac{\pi}{2} e^{ik_z z_0} \left[e^{im\zeta} e^{i\phi_-} + e^{-im\zeta} e^{i\phi_+} + e^{im\zeta} e^{im\pi} e^{-i\phi_-} + e^{-im\zeta} e^{im\pi} e^{-i\phi_+} \right] \\
I^{TM} &= \frac{\pi}{2} e^{ik_z z_0} \left[e^{im\zeta} e^{i\phi_-} - e^{-im\zeta} e^{i\phi_+} + e^{im\zeta} e^{im\pi} e^{-i\phi_-} - e^{-im\zeta'} e^{im\pi} e^{-i\phi_+} \right]
\end{aligned}$$

que pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
I^{TE} &= \frac{\pi}{2} e^{ik_z z_0} \left[e^{im\zeta} e^{i\phi_-} + e^{-im\zeta} e^{i\phi_+} + e^{im\zeta} (-1)^m e^{-i\phi_-} + e^{-im\zeta} (-1)^m e^{-i\phi_+} \right] \\
I^{TM} &= \frac{\pi}{2} e^{ik_z z_0} \left[e^{im\zeta} e^{i\phi_-} - e^{-im\zeta} e^{i\phi_+} + e^{im\zeta} (-1)^m e^{-i\phi_-} - e^{-im\zeta} (-1)^m e^{-i\phi_+} \right]
\end{aligned}$$

ou

$$I^{TE} = \frac{\pi}{2} e^{ik_z z_0} \left[e^{im\zeta} \Big(e^{i\phi_-} + (-1)^m e^{-i\phi_-} \Big) + e^{-im\zeta} \Big(e^{i\phi_+} + (-1)^m e^{-i\phi_+} \Big) \right] \tag{6.113}$$

$$I^{TM} = \frac{\pi}{2} e^{ik_z z_0} \left[e^{im\zeta} \Big(e^{i\phi_-} + (-1)^m e^{-i\phi_-} \Big) - e^{-im\zeta} \Big(e^{i\phi_+} + (-1)^m e^{-i\phi_+} \Big) \right] \tag{6.114}$$

Multiplicando por $1 = i^m i^{-m}$ temos

$$I^{TE} = \frac{\pi i^{-m}}{2} e^{ik_z z_0} \left[e^{im\zeta} \Big(i^m e^{i\phi_-} + (-i)^m e^{-i\phi_-} \Big) + e^{-im\zeta} \Big(i^m e^{i\phi_+} + (-i)^m e^{-i\phi_+} \Big) \right] \tag{6.115}$$

$$I^{TM} = \frac{\pi i^{-m}}{2} e^{ik_z z_0} \left[e^{im\zeta} \Big(i^m e^{i\phi_-} + (-i)^m e^{-i\phi_-} \Big) - e^{-im\zeta} \Big(i^m e^{i\phi_+} + (-i)^m e^{-i\phi_+} \Big) \right] \tag{6.116}$$

e agora podemos fazer

$$I^{TE} = \pi i^{-m} e^{ik_z z_0} \left[e^{im\zeta} \mathfrak{Re}\{i^m e^{i\phi_-}\} + e^{-im\zeta} \mathfrak{Re}\{i^m e^{i\phi_+}\} \right] \tag{6.117}$$

$$I^{TM} = \pi i^{-m} e^{ik_z z_0} \left[e^{im\zeta} \mathfrak{Re}\{i^m e^{i\phi_-}\} - e^{-im\zeta} \mathfrak{Re}\{i^m e^{i\phi_+}\} \right] \tag{6.118}$$

Vamos agora analizar o caso em que $\mathbf{r}_0 = (0,0,0)$. Com isto

$$I^{TE} = \frac{\pi}{2} \left[e^{im\zeta} \Big(1 + (-1)^m \Big) + e^{-im\zeta} \Big(1 + (-1)^m \Big) \right] \tag{6.119}$$

$$I^{TM} = \frac{\pi}{2} \left[e^{im\zeta} \Big(1 + (-1)^m \Big) - e^{-im\zeta} \Big(1 + (-1)^m \Big) \right] \tag{6.120}$$

Para m ímpar, temos que os termos zeram. Para m par, temos

$$I^{TE} = 2\pi \cos m\zeta \tag{6.121}$$

$$I^{TM} = 2\pi \sin m\zeta \tag{6.122}$$

6.4 Guia de onda cilíndrico

6.4.1 Campos no interior do guia de onda cilíndrico

As expressões para os campos eletromagnéticos propagantes no guia de onda cilíndrico são dadas em função de

$$\psi_m(\mathbf{k};\mathbf{r}) = J_m(\gamma\rho) e^{ism\phi} e^{ik_z z} \tag{6.123}$$

em que $s = \pm 1$ é a polaridade do campo. Para o caso das expressões para uma posição $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0$, podemos escrever $\psi_m(\mathbf{r}'')$ como uma convolução

$$\psi_m(\mathbf{k};\mathbf{r}+\mathbf{r}_0) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_{m-j}(\mathbf{k};\mathbf{r}_0)\psi_j(\mathbf{k};\mathbf{r}). \tag{6.124}$$

Para o modo TM temos que $\gamma = \chi_{mn}/R$, em que R é o raio do guia de onda e χ_{mn} é a n-ésima raiz da m-ésima função de Bessel $J_m(x)$. Para o modo TE temos que $\gamma = \chi'_{mn}/R$, em que χ'_{mn} é a n-ésima raiz da derivada da m-ésima função de Bessel $J'_m(x)$. Para ressaltarmos os modos do guia de onda, vamos usar então os subíndices M e N, para diferenciá-los dos índices de somatórios presentes ao longo do texto. Vamos escrever o gradiente transversal como sendo

$$\frac{d}{d\boldsymbol{\rho}} = \hat{\mathbf{e}}_- \partial_+ + \hat{\mathbf{e}}_+ \partial_- \tag{6.125}$$

e sambemos que

$$\partial_\pm \psi_m = \mp \frac{\gamma s}{\sqrt{2}} \psi_{m\pm s} \tag{6.126}$$

e por outro lado

$$-i\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{e}}_\pm = \mp \hat{\mathbf{e}}_\pm \tag{6.127}$$

de modo que

$$-i\hat{\mathbf{z}} \times \frac{d}{d\boldsymbol{\rho}} = \hat{\mathbf{e}}_- \partial_+ - \hat{\mathbf{e}}_+ \partial_- \tag{6.128}$$

o que nos dá diretamente que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}^{TM}(\mathbf{r}) \\ Z\mathbf{H}^{TE}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = E_0 \left[\hat{\mathbf{z}} + i\frac{k_z}{\gamma^2}\frac{d}{d\boldsymbol{\rho}} \right] g(\mathbf{r}) = E_0 \begin{bmatrix} (isk_z/\gamma)\psi_{M-s}(\mathbf{k};\mathbf{r})/\sqrt{2} \\ \psi_M(\mathbf{k};\mathbf{r}) \\ -(isk_z/\gamma)\psi_{M+s}(\mathbf{k};\mathbf{r})/\sqrt{2} \end{bmatrix} \tag{6.129}$$

e os demais campos por

$$\begin{bmatrix} -Z\mathbf{H}^{TM}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{E}^{TE}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = E_0 \frac{k}{\gamma^2} \left[-i\hat{\mathbf{z}} \times \frac{d}{d\boldsymbol{\rho}} \right] \psi_M(\mathbf{k};\mathbf{r}) = -s\frac{k}{\gamma}\frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \psi_{M-s}(\mathbf{k};\mathbf{r}) \\ 0 \\ \psi_{M+s}(\mathbf{k};\mathbf{r}) \end{bmatrix} \tag{6.130}$$

6.4.2 Expansão em ondas parciais

Assumindo $g(\mathbf{r}'') = \psi_M(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_0) = \sum_j \psi_{M-j}(\mathbf{r}_0)\psi_j(\mathbf{r}')$, vamos ter de fazer a transformada de Fourier de $g(\mathbf{r}'')$ na forma

$$G(\mathbf{k}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3r' \; \psi_M(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_0) e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'} \tag{6.131}$$

$$\tag{6.132}$$

Fazendo a integral em dz', teremos

$$G(\mathbf{k}') = \frac{\delta(k'_z - k_z)}{\sqrt{2\pi}} \sum_j \psi_{M-j}(\mathbf{k};\mathbf{r}_0) \int d\rho' \rho' J_j(\gamma'\rho') \int d\phi' e^{-i\boldsymbol{\gamma}'\cdot\boldsymbol{\rho}'} e^{isj\phi'} \tag{6.133}$$

Vamos ter então que fazer

$$I = \int d\phi' e^{-i\boldsymbol{\gamma}'\cdot\boldsymbol{\rho}'} e^{isj\phi'} \tag{6.134}$$

Sabendo que

$$e^{\pm ix\cos(\alpha-\beta)} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} (\pm i)^p J_p(x) e^{ip(\alpha-\beta)} \tag{6.135}$$

e que

$$\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\rho} = k_x x + k_y y = \gamma\rho(\cos\zeta\cos\phi + \sin\zeta\sin\phi) = \gamma\rho\cos(\zeta-\phi) \tag{6.136}$$

o que nos dá que

$$e^{-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\rho}} = e^{-i\gamma\rho\cos(\zeta-\phi)} = \sum_p (-i)^p J_p(\gamma\rho) e^{ip(\zeta-\phi)} \tag{6.137}$$

vamos ter

$$I = \sum_p (-i)^p J_p(\gamma'\rho') e^{ip\zeta'} \int d\phi' \; e^{-i(p-sj)\phi'} = 2\pi \sum_p (-i)^p J_p(\gamma'\rho') e^{ip\zeta'} \delta_{p,sj} \tag{6.138}$$

$$I = 2\pi(-i)^{sj} J_{sj}(\gamma'\rho') e^{isj\zeta'} \tag{6.139}$$

Vamos então verificar quanto vale $(-i)^{sj} J_{sj}$ usando o fato de que $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$. Para o caso de $s = -1$ temos $(-i)^{-j} J_{-j} = (i)^j (-1)^j J_j = (-i)^j J_j$. Para o caso em que $s = 1$, temos $(-i)^j J_j$. Deste modo, vemos que $(-i)^{sj} J_{sj} = (-i)^j J_j$ independente de s. Com isto temos

$$I = \int d\phi' e^{-i\boldsymbol{\gamma}'\cdot\boldsymbol{\rho}'} e^{isj\phi'} = 2\pi(-i)^j J_j(\gamma'\rho') e^{isj\zeta'} \tag{6.140}$$

Substituindo o valor da integral I vamos obter

$$G(\mathbf{k}') = \sqrt{2\pi}\delta(k_z' - k_z) \sum_j (-i)^j e^{isj\zeta'} \psi_{M-j}(\mathbf{k};\mathbf{r}_0) \int d\rho'\rho' J_j(\gamma\rho') J_j(\gamma'\rho') \tag{6.141}$$

e fazendo a integral em $d\gamma'$ obtemos o resultado final

$$G(\mathbf{k}') = \sqrt{2\pi} \left[\sum_j (-i)^j e^{isj\zeta'} \psi_{M-j}(\mathbf{k};\mathbf{r}_0) \right] \frac{\delta(\gamma'-\gamma)}{\gamma} \delta(k_z' - k_z) \tag{6.142}$$

de modo que o valor entre colchetes é

$$G_\gamma(\zeta') = \sum_j (-i)^j e^{isj\zeta'} \psi_{M-j}(\mathbf{k}; \mathbf{r}_0) \tag{6.143}$$

que vai ser usado na espressão geral de cálculo dos coeficientes, por meio da integral em ζ'. Assim, sendo m o coeficiente da expansão em ondas parciais, temos

$$G_\gamma^m = \int d\zeta' \; G_\gamma(\zeta') e^{-im\zeta'} = \sum_j (-i)^j \psi_{M-j}(\mathbf{k}; \mathbf{r}_0) \int d\zeta' \; e^{-is(sm-j)\zeta'} \tag{6.144}$$

que vai nos dar

$$G_\gamma^m = 2\pi \sum_j (-i)^j \psi_{M-j}(\mathbf{k}; \mathbf{r}_0) \delta_{j,sm} = 2\pi (-i)^{sm} \psi_{M-sm}(\mathbf{k}; \mathbf{r}_0) \tag{6.145}$$

Com isto temos a expressão para os coeficientes. Um caso especial é quando $\mathbf{r}_0 = 0$, o que faz com que $J_{M-sm}(0) = \delta_{m,sM}$, reduzindo o somatório da expansão a um somatório somente sobre l e com um único sM, ou seja

$$G_\gamma^m = 2\pi (-i)^M \delta_{m,sM} \tag{6.146}$$

6.5 Feixe de Bessel

Existem dois tipos de feixes de Bessel, dados por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ Z\mathbf{H} \end{bmatrix} = E_0 \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \nabla\nabla \cdot \mathbf{A}/k^2 \\ -i\nabla \times \mathbf{A}/k \end{bmatrix} \tag{6.147}$$

sendo que em um caso $\mathbf{A}_I = \psi_M \hat{\mathbf{z}}$ em outro caso $\mathbf{A}_{II} = \psi_{M-1}\hat{\mathbf{e}}_\pm$ e $\psi_M(\mathbf{k}; \mathbf{r})$ é o mesmo definido para guia de onda cilíndrico.

Podemos utilizar diretamente a expressão para o rotacional

$$\nabla \times \mathbf{A} = i \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_- & \hat{\mathbf{e}}_z & \hat{\mathbf{e}}_+ \\ \partial_- & \partial_z & \partial_+ \\ A_- & A_z & A_+ \end{vmatrix} = i \begin{bmatrix} \partial_- A_z - \partial_z A_- \\ \partial_+ A_- - \partial_- A_+ \\ \partial_z A_+ - \partial_+ A_z \end{bmatrix} \tag{6.148}$$

Sabendo da simetria cilíndrica do problema vamos utilizar

$$\begin{bmatrix} A_+ \\ A_- \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{i\phi} & ie^{i\phi} \\ e^{-i\phi} & -ie^{-i\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \end{bmatrix} \tag{6.149}$$

temos

$$\partial_\pm = \frac{e^{\pm i\phi}}{\sqrt{2}} \Big(\partial_\rho \pm \frac{i}{\rho} \partial_\phi \Big) \tag{6.150}$$

Usando o fato de que

$$\psi_m = J_m(\gamma\rho) e^{ism\phi} e^{ik_z z} \tag{6.151}$$

vamos ter que

$$\partial_\pm \psi_m = \frac{e^{\pm i\phi}}{\sqrt{2}} \Big(\partial_\rho \pm \frac{i}{\rho} \partial_\phi \Big) J_m(\gamma\rho) e^{ism\phi} e^{ik_z z} \tag{6.152}$$

Aplicando as derivadas e após alguma álgebra

$$\partial_\pm \psi_m = \mp \frac{\gamma s}{\sqrt{2}} \Big(\frac{m}{\gamma\rho} J_m(\gamma\rho) \mp s J'_m(\gamma\rho) \Big) e^{is(m\pm s)\phi} e^{ik_z z} \tag{6.153}$$

Das propriedades das funções de Bessel

$$\frac{m}{x} J_m(x) \pm J'_m(x) = J_{m\mp 1}(x) \tag{6.154}$$

temos então que

$$\partial_\pm \psi_m = \mp \frac{\gamma s}{\sqrt{2}} \psi_{m\pm s} \tag{6.155}$$

Fazendo $p = \pm(1)$, vamos ter

$$\partial_p \psi_m = -ps \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \psi_{m+ps} \tag{6.156}$$

A expressão acima vai ser amplamente utilizada.

Como já dissemos, existem dois tipos de feixes de Bessel, dados por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ Z\mathbf{H} \end{bmatrix} = E_0 \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \nabla\nabla \cdot \mathbf{A}/k^2 \\ -i\nabla \times \mathbf{A}/k \end{bmatrix} \tag{6.157}$$

sendo que em um caso $\mathbf{A}_I = \psi_M \hat{\mathbf{z}}$ em outro caso $\mathbf{A}_{II} = \psi_{M-1}\hat{\mathbf{e}}_\pm$ e $\psi_M(\mathbf{k};\mathbf{r})$ é o mesmo definido para guia de onda cilíndrico.

Assim, para o caso I vamos ter $\nabla\cdot\mathbf{A}_I = \nabla\cdot\hat{\mathbf{z}}\psi_m = \partial_z\psi_m = ik_z\psi_m$ cujo gradiente vai dar

$$ik_z\nabla\psi_m = ik_z\left[\frac{\gamma s}{\sqrt{2}}\Big(\psi_{m-s}\hat{\mathbf{e}}_+ - \psi_{m+s}\hat{\mathbf{e}}_-\Big) + ik_z\psi_m\hat{\mathbf{z}}\right] \tag{6.158}$$

o que nos dá

$$\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{is}{\sqrt{2}}\frac{k_z\gamma}{k^2}\Big(\psi_{m-s}\hat{\mathbf{e}}_+ - \psi_{m+s}\hat{\mathbf{e}}_-\Big) - \left(\frac{k_z}{k}\right)^2\psi_m\hat{\mathbf{z}} \tag{6.159}$$

e com isso

$$\mathbf{E}_I = \frac{is}{\sqrt{2}}\frac{k_z\gamma}{k^2}\Big(\psi_{m-s}\hat{\mathbf{e}}_+ - \psi_{m+s}\hat{\mathbf{e}}_-\Big) + \left(\frac{\gamma}{k}\right)^2\psi_m\hat{\mathbf{z}} \tag{6.160}$$

e o campo magnético por $-i\nabla\times\mathbf{A}/k$ o que nos dá

$$\mathbf{H}_I = \frac{is}{\sqrt{2}}\frac{\gamma}{k}\Big(\psi_{m-s}\hat{\mathbf{e}}_+ + \psi_{m+s}\hat{\mathbf{e}}_-\Big) \tag{6.161}$$

Para caso II vamos ter $\nabla\cdot\mathbf{A}_{II} = \nabla\cdot\hat{\mathbf{e}}_p\psi_{m-1} = \partial_p\psi_{m-1} = -ps(\gamma/\sqrt{2})\psi_{m+ps-1}$. O gradiente é então dado por $\nabla = \partial_-\hat{\mathbf{e}}_+ + \partial_+\hat{\mathbf{e}}_- + \partial_z\hat{\mathbf{z}}$ o que nos diz que vamos ter $\partial_+\partial_p\psi_{m-1}$, $\partial_-\partial_p\psi_{m-1}$, $\partial_z\partial_p\psi_{m-1}$. Sendo assim, vamos ter

$$\begin{aligned}
\partial_+\partial_p\psi_{m-1} &= -ps\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\partial_+\psi_{m+ps-1} = ps\frac{\gamma^2}{2}\psi_{(m-1)+s(p+1)} && (6.162)\\
\partial_-\partial_p\psi_{m-1} &= -ps\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\partial_-\psi_{m+ps-1} = -ps\frac{\gamma^2}{2}\psi_{(m-1)+s(p-1)} && (6.163)\\
\partial_z\partial_p\psi_{m-1} &= -ps\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\partial_z\psi_{m+ps-1} = -ips\frac{\gamma k_z}{\sqrt{2}}\psi_{(m-1)+ps} && (6.164)
\end{aligned}$$

O gradiente vai dar

$$-ps\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\nabla\psi_{m+ps-1} = -ps\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\left[\frac{\gamma s}{\sqrt{2}}\Big(\psi_{m+ps-s-1}\hat{\mathbf{e}}_+ - \psi_{m+ps+s-1}\hat{\mathbf{e}}_-\Big) + ik_z\psi_{m+ps-1}\hat{\mathbf{z}}\right] \tag{6.165}$$

o que nos dá

$$\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\cdot\mathbf{A} = -p\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{k}\right)^2\Big(\psi_{m+ps-s-1}\hat{\mathbf{e}}_+ - \psi_{m+ps+s-1}\hat{\mathbf{e}}_-\Big) + \frac{is}{\sqrt{2}}\frac{\gamma k_z}{k^2}\psi_{m+ps-1}\hat{\mathbf{z}}\right] \tag{6.166}$$

Necessitamos agora somar o potencial vetor $\mathbf{A} = \psi_{m-1}\hat{\mathbf{e}}_p$ que só tem uma componente. Vamos então reescrever o potencial como duas componentes dependentes de deltas de Kronecker de modo que possa ser incorporado às duas componentes do campo elétrico. Vamos escrever então $\mathbf{A} = \psi_{m-1}\big(\delta_{p,-1}\hat{\mathbf{e}}_- + \delta_{p,1}\hat{\mathbf{e}}_+\big)$, de modo que o campo elétrico seja escrito como

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{II} &= \left(\delta_{p,1}\psi_{m-1} - p\frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{k^2}\psi_{(m-1)+s(p-1)}\right)\hat{\mathbf{e}}_+ + \left(\delta_{p,-1}\psi_{m-1} + p\frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{k^2}\psi_{(m-1)+s(p+1)}\right)\hat{\mathbf{e}}_- + \\ &- \frac{ips}{\sqrt{2}}\frac{\gamma k_z}{k^2}\psi_{m+ps-1}\hat{\mathbf{z}} \qquad (6.167)\end{aligned}$$

O campo magnético depende do rotacional. Para o caso em que $\mathbf{A} = \psi\hat{\mathbf{e}}_+$ o que nos diz que o único termo não zero de $\mathbf{A}$ é A_-, o que vai nos dar para o campo magnético $\mathbf{H} = (\hat{\mathbf{z}}\partial_+ - \hat{\mathbf{e}}_+\partial_z)\psi/k$. Para o caso $\mathbf{A} = \psi\hat{\mathbf{e}}_-$ teremos o elemento não zero A_+ o que vai nos dar $\mathbf{H} = (-\hat{\mathbf{z}}\partial_- + \hat{\mathbf{e}}_-\partial_z)\psi/k$. Sendo assim, em um caso geral $\mathbf{A} = \psi\hat{\mathbf{e}}_p$ vamos ter $\mathbf{H} = p(\hat{\mathbf{z}}\partial_p - \hat{\mathbf{e}}_p\partial_z)\psi/k$. Substituindo as derivadas de ψ_{m-1} vamos obter

$$\mathbf{H}_{II} = \frac{p}{k}\Big(\hat{\mathbf{z}}\partial_p - \hat{\mathbf{e}}_p\partial_z\Big)\psi_{m-1} = -\Big(\frac{s}{\sqrt{2}}\frac{\gamma}{k}\psi_{m+ps-1}\hat{\mathbf{z}} + ip\frac{k_z}{k}\psi_{m-1}\hat{\mathbf{e}}_p\Big) \qquad (6.168)$$

6.5.1 Expansão em ondas parciais

A expansão em ondas parciais se dá em função dos campos eletromagnéticos no espaço de Fourier. Os campos por sua vez são escritos em função do potencial vetor $\mathbf{A}$, que por sua vez obedece a uma equação de onda $\nabla^2\mathbf{A} = -k^2\mathbf{A}$, o que faz com que, no espaço de Fourier $-k'^2\boldsymbol{\mathcal{A}} = -k^2\boldsymbol{\mathcal{A}}$, ou seja, $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{k}}\delta(k'-k)/k^2$. Deste modo, os campos

$$\begin{bmatrix}\mathbf{E}\\ Z\mathbf{H}\end{bmatrix} = E_0\begin{bmatrix}\mathbf{A} + \nabla\nabla\cdot\mathbf{A}/k^2\\ -i\nabla\times\mathbf{A}/k\end{bmatrix} \qquad (6.169)$$

no espaço de Fourier se tornam

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{k}}\\ Z\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{k}}\end{bmatrix} = E_0\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{k}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{k}}\\ \hat{\mathbf{k}}\times\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{k}}\end{bmatrix} \qquad (6.170)$$

Para o cálculo dos coeficientes vamos ter então que fazer

$$\begin{bmatrix}G_{lm}^{TE}\\ G_{lm}^{TM}\end{bmatrix} = i^p\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int d\Omega\ \boldsymbol{\mathcal{X}}_{lm}^*\cdot\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{k}}\\ \hat{\mathbf{k}}\times\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{k}}\end{bmatrix} \qquad (6.171)$$

Entretanto, sabemos que

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{lm}^*\cdot\big(\hat{\mathbf{k}}\times\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{k}}\big) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{k}}\cdot\big(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{lm}^*\times\hat{\mathbf{k}}\big) = -\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{k}}\cdot\big(\hat{\mathbf{k}}\times\boldsymbol{\mathcal{X}}_{lm}^*\big) = i\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{k}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{V}}_{lm}^* \qquad (6.172)$$

e deste modo

$$\left[\begin{array}{c} G_{lm}^{TE} \\ G_{lm}^{TM} \end{array}\right] = i^p \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int d\Omega \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\mathcal{X}}_{lm}^* \\ i\boldsymbol{\mathcal{V}}_{lm}^* \end{array}\right] \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{k}} \tag{6.173}$$

Sabendo que

$$\mathbf{X}_{lm} = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \left[\begin{array}{c} c_-^{l,m} Y_l^{m-1}/\sqrt{2} \\ m Y_l^m \\ c_+^{l,m} Y_l^{m+1}/\sqrt{2} \end{array}\right] \tag{6.174}$$

$$\mathbf{V}_{lm} = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \left[\begin{array}{c} -(l+1) K_{+,l}^{m,m-1} Y_{l-1}^{m-1}/\sqrt{2} - l K_{-,l+1}^{m,m-1} Y_{l+1}^{m-1}/\sqrt{2} \\ (l+1) K_{0,l}^{m,m} Y_{l-1}^m - l K_{0,l+1}^{m,m} Y_{l+1}^m \\ (l+1) K_{-,l}^{m,m+1} Y_{l-1}^{m+1}/\sqrt{2} + l K_{+,l+1}^{m,m+1} Y_{l+1}^{m+1}/\sqrt{2} \end{array}\right] \tag{6.175}$$

Do guia de onda cilíndrico sabemos que

$$\psi_M(\mathbf{k};\mathbf{k}') = \sqrt{2\pi} \left[\sum_j (-i)^j e^{isj\zeta'} \psi_{M-j}(\mathbf{k};\mathbf{r}_0)\right] \frac{\delta(k'-k)}{k^2} \delta(k_z'/k - k_z/k) \tag{6.176}$$

e como $d\Omega = \sin\xi d\xi d\zeta = d(k_z/k) d\zeta$, vamos ter

$$\left[\begin{array}{c} G_{lm}^{TE} \\ G_{lm}^{TM} \end{array}\right] = 2i^l \sum_j (-i)^j \psi_{M'-j}(\mathbf{k};\mathbf{r}_0) \int d\zeta \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\mathcal{X}}_{lm}^* \cdot \hat{\mathbf{u}} \\ i\boldsymbol{\mathcal{V}}_{lm}^* \cdot \hat{\mathbf{u}} \end{array}\right] e^{isj\zeta'} \tag{6.177}$$

em que M' e $\hat{\mathbf{u}}$ dependem do caso tratado.

Para efeito de comparação, devemos fazer o cálculo com $i\boldsymbol{\mathcal{V}}_{lm}^* \cdot \hat{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\mathcal{X}}_{lm}^* \cdot \left(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{u}}\right)$

6.5.2 Caso I

Sendo assim, em que M' e $\hat{\mathbf{u}}$ dependem do caso tratado. Sendo assim, vamos ter para o caso I que $M' = M$ e $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{z}}$ e que $Y_l^m(\hat{\mathbf{k}}) = Q_l^m(k_z/k) e^{im\zeta}$

$$\left[\begin{array}{c} G_{lm}^{TE} \\ G_{lm}^{TM} \end{array}\right] = \frac{4\pi i^{l-sm}}{\sqrt{l(l+1)}} \psi_{M-sm}(\mathbf{k};\mathbf{r}_0) \left[\begin{array}{c} m Q_l^m \\ i\Big((l+1) K_{0,l}^{m,m} Q_{l-1}^m - l K_{0,l+1}^{m,m} Q_{l+1}^m\Big) \end{array}\right] \tag{6.178}$$

Outro modo de comparar é usar as componentes do operador de momento angular. Sabemos que

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{lm} = \frac{\boldsymbol{\mathcal{L}} Y_l^m}{\sqrt{l(l+1)}} \tag{6.179}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}_{lm} = \frac{k\nabla Y_l^m}{\sqrt{l(l+1)}} \tag{6.180}$$

Para o caso I, sabendo que

$$r\hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla Q_l^m(z/r) = r\frac{\partial}{\partial_z} Q_l^m(z/r) \tag{6.181}$$

sendo que

$$r\frac{\partial}{\partial_z} Q_l^m(z/r) = rQ_l^{m\prime}\frac{\partial}{\partial_z}\left(\frac{z}{r}\right) \tag{6.182}$$

Sendo $r^2 = \rho^2 + z^2$ e fazendo $u = z/\rho$ vamos ter

$$\frac{\partial}{\partial_z}\left(\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial_u}\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right) \tag{6.183}$$

Resolvendo

$$\frac{\partial}{\partial_u}\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\left(1 - \frac{u^2}{1+u^2}\right) = \frac{1}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^3} = \left(\frac{\rho}{r}\right)^3 \tag{6.184}$$

Com isto temos

$$r\hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla Q_l^m(z/r) = \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 Q_l^{m\prime}(z/r) \tag{6.185}$$

o que nos dá imediatamente

$$\begin{bmatrix} G_{lm}^{TE} \\ G_{lm}^{TM} \end{bmatrix} = \frac{4\pi i^{l-sm}}{\sqrt{l(l+1)}} \psi_{M-sm}(\mathbf{k};\mathbf{r}_0) \begin{bmatrix} mQ_l^m \\ i(\gamma/k)^2 Q_l^{m\prime} \end{bmatrix} \tag{6.186}$$

Além disso, podemos usar o fato de que

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{z}} = i\big(k_+\hat{\mathbf{e}}_- - k_-\hat{\mathbf{e}}_+\big) = \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{\gamma}{k}\big(e^{i\zeta}\hat{\mathbf{e}}_- - e^{-i\zeta}\hat{\mathbf{e}}_+\big) \tag{6.187}$$

Assim, fazendo

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}^* \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{z}}) = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\gamma}{k} \big(\mathcal{X}_-^* \hat{\mathbf{e}}_- + \mathcal{X}_+^* \hat{\mathbf{e}}_+\big)\big(e^{i\zeta}\hat{\mathbf{e}}_- - e^{-i\zeta}\hat{\mathbf{e}}_+\big) = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\gamma}{k} \big(\mathcal{X}_+^* e^{i\zeta} - \mathcal{X}_-^* e^{-i\zeta}\big) \tag{6.188}$$

Temos ainda que $\mathcal{X}_\pm = c_\pm^{lm} Q_l^{m\pm1} e^{i(m\pm1)\zeta}$, o que faz com que

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}^* \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{z}}) = \frac{i}{2} \frac{\gamma}{k} \big(c_+^{lm} Q_l^{m+1} - c_-^{lm} Q_l^{m-1}\big) e^{-im\zeta} \tag{6.189}$$

Este resultado nos leva a mais uma expressão para o cálculo do coeficientes de forma. Com isto, temos a identidade tripla

$$\left(\frac{\gamma}{k}\right)^2 Q_l^{m\prime} = (l+1) K_{0,l}^{m,m} Q_{l-1}^m - l K_{0,l+1}^{m,m} Q_{l+1}^m = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{k} \Big(c_-^{lm} Q_l^{m-1} - c_+^{lm} Q_l^{m+1}\Big) \tag{6.190}$$

Neste caso, podemos expressar os coeficientes tanto em termos de polinômios de Legendre variando l, variando m ou pela derivada, de acordo com o que for mais conveniente.

6.5.3 Caso II

Para o caso II que $M' = M - 1$ e $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{e}}_\pm$. Para tanto vamos novamente usar $p = \pm(1)$ para determinar a polarização do potencial vetor, sendo então que $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{e}}_p$ e os as componentes dos harmônicos esféricos vetorias conjugados dadas por

$$X_p^* = c_p^{lm} Q_l^{m+p} e^{-i(m+p)\zeta'} \tag{6.191}$$

$$V_p^* = p\Big((l+1) K_{-p,l}^{m,m+p} Q_{l-1}^{m+p} + l K_{p,l+1}^{m,m+p} Q_{l+1}^{m+p}\Big) e^{-i(m+p)\zeta'} \tag{6.192}$$

sendo que, dado $\mathbf{U} = U_+\hat{\mathbf{e}}_- + U_-\hat{\mathbf{e}}_+ + U_z\hat{\mathbf{e}}_z$ temos $\mathbf{U}^* = U_+^*\hat{\mathbf{e}}_+ + U_-^*\hat{\mathbf{e}}_- + U_z^*\hat{\mathbf{e}}_z$ o que faz $\mathbf{U}^* \cdot \hat{\mathbf{e}}_p = U_{-p}^*$. Vamos ter ainda as constantes definidas como

$$c_\pm^{lm} = \sqrt{l(l+1) - m(m\pm1)} \tag{6.193}$$

$$K_{\pm,l}^{m,q} = \sqrt{\frac{(l\pm m)(l\pm q)}{(2l-1)(2l+1)}} \tag{6.194}$$

o que faz com que

$$c_p^{lm} = \sqrt{l(l+1) - m(m+p)} \tag{6.195}$$

$$K_{p,l}^{m,q} = \sqrt{\frac{(l+pm)(l+pq)}{(2l-1)(2l+1)}} \tag{6.196}$$

Substituindo então vamos ter

$$\begin{aligned}\left[\begin{array}{c} G_{lm}^{TE} \\ G_{lm}^{TM} \end{array}\right] &= \frac{2i^l}{\sqrt{l(l+1)}}\sum_j(-i)^j\psi_{M-1-j}\left[\begin{array}{c} c_{-p}^{lm}Q_l^{m-p} \\ ip\Big((l+1)K_{-p,l}^{m,m-p}Q_{l-1}^{m-p}+lK_{p,l+1}^{m,m-p}Q_{l+1}^{m-p}\Big) \end{array}\right]\times \\ &\times \int d\zeta\; e^{-i(m-p-sj)\zeta'}\end{aligned} \tag{6.197}$$

A integral vai nos dar então $2\pi\delta_{j,s(m-p)}$, e então

$$\left[\begin{array}{c} G_{lm}^{TE} \\ G_{lm}^{TM} \end{array}\right] = \frac{4\pi i^{l-s(m-p)}}{\sqrt{l(l+1)}}\psi_{M-1-s(m-p)}\left[\begin{array}{c} c_{-p}^{lm}Q_l^{m-p} \\ ip\Big((l+1)K_{-p,l}^{m,m-p}Q_{l-1}^{m-p}+lK_{p,l+1}^{m,m-p}Q_{l+1}^{m-p}\Big) \end{array}\right] \tag{6.198}$$

Para o caso de $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$, vamos ter uma $\delta_{M-1-s(m-p),0}$ que vai depender dos sinais de p e s. Comparativamente, podemos ver os valores de m que atendem esta delta na Tabela **??**

A outra forma de se calcular os coeficientes é por meio do cálculo de $\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{u}}$. Para o caso de $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{e}}_p$, sabendo que

$$\hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\gamma}{k}\left(e^{i\zeta}\hat{\mathbf{e}}_- + e^{-i\zeta}\hat{\mathbf{e}}_+\right) + \frac{k_z}{k}\hat{\mathbf{z}} \tag{6.199}$$

vamos obter

$$\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{e}}_p = ip\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\gamma}{k}e^{ip\zeta}\hat{\mathbf{z}} - \frac{k_z}{k}\hat{\mathbf{e}}_p\right) \tag{6.200}$$

Neste caso

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{lm}^*\cdot\hat{\mathbf{e}}_p = \frac{1}{\sqrt{2}}c_{-p}^{lm}Q_l^{m-p}e^{-i(m-p)\zeta} \tag{6.201}$$

Deste modo, temos também

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{lm}^*\cdot(\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{e}}_p) = \frac{ip}{\sqrt{2}}\left(m\frac{\gamma}{k}Q_l^m - \frac{k_z}{k}c_{-p}^{lm}Q_l^{m-p}\right)e^{-i(m-p)\zeta} \tag{6.202}$$

Outro modo é observar que

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{lm}^*\cdot(\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{e}}_p) = ip\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\frac{\gamma}{k}Q_l^m - \frac{k_z}{k}\boldsymbol{\mathcal{X}}_{lm}^*\cdot\hat{\mathbf{e}}_p\right)e^{-i(m-p)\zeta} \tag{6.203}$$

de modo que explicitamente temos

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{lm}^*\cdot(\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{e}}_p) = \frac{ip}{\sqrt{2}}\left(m\frac{\gamma}{k}Q_l^m - \frac{k_z}{k}c_{-p}^{lm}Q_l^{m-p}\right)e^{-i(m-p)\zeta} \tag{6.204}$$

De outro modo, temos também que

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{lm}^{*}\cdot(\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{e}}_p)+ip\frac{k_z}{k}\boldsymbol{\mathcal{X}}_{lm}^{*}\cdot\hat{\mathbf{e}}_p=\frac{ipm}{\sqrt{2}}\frac{\gamma}{k}Q_l^m e^{-i(m-p)\zeta} \tag{6.205}$$

o que vai nos permitir escrever um coeficiente em função do outro.

$$\begin{bmatrix} G_{lm}^{TE} \\ G_{lm}^{TM} \end{bmatrix}=2i^l\sum_j(-i)^j\psi_{M-1-j}(\mathbf{k};\mathbf{r}_0)\int d\zeta'\ \boldsymbol{\mathcal{X}}_{lm}^{*}\cdot\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_p \\ \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{e}}_p \end{bmatrix}e^{isj\zeta'} \tag{6.206}$$

Isto vai nos dar

$$\begin{bmatrix} G_{lm}^{TE} \\ G_{lm}^{TM}+ip(k_z/k)G_{lm}^{TE} \end{bmatrix}=\frac{4\pi i^{l-s(m-p)}}{\sqrt{2l(l+1)}}\psi_{M-1-s(m-p)}\begin{bmatrix} c_{-p}^{lm}Q_l^{m-p} \\ ipm(\gamma/k)Q_l^m \end{bmatrix} \tag{6.207}$$

Comparando as duas expressões vamos ter a identidade

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{lm}^{*}\cdot(\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{e}}_p)=i\boldsymbol{\mathcal{V}}_{lm}^{*}\cdot\hat{\mathbf{e}}_p \tag{6.208}$$

o que nos diz que $\boldsymbol{\mathcal{V}}_{lm}^{*}\cdot\hat{\mathbf{e}}_p=V_{-p}^{*}$, ou seja

$$m\frac{\gamma}{k}Q_l^m-\frac{k_z}{k}c_{-p}^{lm}Q_l^{m-p}=(l+1)K_{p,l}^{m,m-p}Q_{l-1}^{m-p}+lK_{-p,l+1}^{m,m-p}Q_{l+1}^{m-p} \tag{6.209}$$

Por último, vamos calcular o gradiente de Y_l^m. Para isto,

$$r\nabla=r\frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{r}}+\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}+\frac{r}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{6.210}$$

e lembrando que $Y_l^m=Q_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}$, temos

$$r\nabla=\left(-\frac{\rho}{r}Q_l^{m\prime}\hat{\boldsymbol{\theta}}+im\frac{r}{\rho}Q_l^m\hat{\boldsymbol{\phi}}\right)e^{im\phi} \tag{6.211}$$

e ainda de que $r\hat{\boldsymbol{\theta}}=z\hat{\boldsymbol{\rho}}-\rho\hat{\mathbf{z}}$ é possível separar os termos transversais do gradiente, obtendo

$$r\nabla=\left(-\frac{z\rho}{r^2}Q_l^{m\prime}\hat{\boldsymbol{\rho}}+im\frac{r}{\rho}Q_l^m\hat{\boldsymbol{\phi}}\right)e^{im\phi}+\frac{\rho^2}{r^2}Q_l^{m\prime}e^{im\phi}\hat{\mathbf{z}} \tag{6.212}$$

Agora usando

$$\begin{bmatrix} V_+ \\ V_- \end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2l(l+1)}}\begin{bmatrix} e^{i\phi} & ie^{i\phi} \\ e^{-i\phi} & -ie^{-i\phi} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -z\rho/r^2Q_l^{m\prime}e^{im\phi} \\ im(r/\rho)Q_l^m e^{im\phi} \end{bmatrix} \tag{6.213}$$

vamos ter

$$\begin{bmatrix} V_+ \\ V_- \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2l(l+1)}} \begin{bmatrix} \Big(z\rho/r^2 Q_l^{m\prime} + m(r/\rho) Q_l^m\Big) e^{i(m+1)\phi} \\ \Big(z\rho/r^2 Q_l^{m\prime} - m(r/\rho) Q_l^m\Big) e^{i(m-1)\phi} \end{bmatrix} \tag{6.214}$$

o que nos permite escrever

$$V_p = -\frac{1}{\sqrt{2l(l+1)}} \Big(z\rho/r^2 Q_l^{m\prime} + pm(r/\rho) Q_l^m\Big) e^{i(m+p)\phi} \tag{6.215}$$

Novamente, podemos usar V_{-p} e comparar com os resultados anteriores, novamente obtendo uma identidade tripla, neste caso

$$\begin{aligned} V_p &= -\frac{z\rho}{r^2} Q_l^{m\prime} - pm\frac{r}{\rho} Q_l^m & (6.216) \\ &= m\frac{\gamma}{k} Q_l^m - \frac{k_z}{k} c_p^{lm} Q_l^{m+p} & (6.217) \\ &= (l+1) K_{-p,l}^{m,m+p} Q_{l-1}^{m+p} + l K_{p,l+1}^{m,m+p} Q_{l+1}^{m+p} & (6.218) \end{aligned}$$

Parte III

Cálculos de Força Óptica

Capítulo 7

Cálculo da Força

A força vai depender de

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\epsilon}{2}\int d\Omega\ \hat{\mathbf{r}}\Big(||E||^2 + ||ZH||^2\Big) \tag{7.1}$$

o que por sua vez vai depender de

$$I_{lm}^{jk} = \int d\Omega\ \hat{\mathbf{r}}\ \mathbf{X}_{lm}^{*} \cdot \mathbf{X}_{jk} \tag{7.2}$$

$$J_{lm}^{jk} = \int d\Omega\ \hat{\mathbf{r}}\ \mathbf{X}_{lm}^{*} \cdot \mathbf{V}_{jk} \tag{7.3}$$

A primeira integral é facilmente resolvida, sabendo-se que

$$\mathbf{X}_{lm}^{*} \cdot \mathbf{X}_{jk} = \frac{c_{-}^{lm} c_{+}^{jk} Y_l^{m-1*} Y_j^{k+1} + 2mk Y_l^{m*} Y_j^{k} + c_{+}^{lm} c_{-}^{jk} Y_l^{m+1*} Y_j^{k-1}}{2\sqrt{l(l+1)j(j+1)}} \tag{7.4}$$

Por outro lado, temos que

$$r_{-} Y_l^m = \sin\theta e^{-i\phi} Y_l^m = -K_{+,l}^{m,m-1} Y_{l-1}^{m-1} + K_{-,l+1}^{m,m-1} Y_{l+1}^{m-1} \tag{7.5}$$

$$r_{z} Y_l^m = \cos\theta Y_l^m = K_{0,l}^{m,m} Y_{l-1}^{m} + K_{0,l+1}^{m,m} Y_{l+1}^{m} \tag{7.6}$$

$$r_{+} Y_l^m = \sin\theta e^{i\phi} Y_l^m = K_{-,l}^{m,m+1} Y_{l-1}^{m+1} - K_{+,l+1}^{m,m+1} Y_{l+1}^{m+1} \tag{7.7}$$

e deste modo temos que

Apêndice A

Mudança de coordenadas

Sistemas de coordenadas cartesiano $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$, circular $(\hat{\mathrm{e}}_-, \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathrm{e}}_+)$, cilíndrico $(\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\mathbf{z}})$, e esférico $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}})$. Os sistemas são definidos como $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ ou $r\hat{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ ou $r\hat{\mathbf{r}} = \rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\hat{\mathbf{z}}$, já que $\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$, ou ainda $r\hat{\mathbf{r}} = \rho(e^{-i\phi}\hat{\mathrm{e}}_+ + e^{i\phi}\hat{\mathrm{e}}_-)/\sqrt{2} + z\hat{\mathbf{z}}$. Temos ainda que $\cos\theta = z/r$, $\sin\theta = \rho/r$, $\cos\phi = x/\rho$ e $\sin\phi = y/\rho$. Das relações de amplitude, $r^2 = \rho^2 + z^2$ e $\rho^2 = x^2 + y^2$. Finalmente, obtemos $\rho\hat{\boldsymbol{\phi}} = \rho(\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}) = -y\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{y}}$, e $r\hat{\boldsymbol{\theta}} = r(\hat{\boldsymbol{\phi}} \times \hat{\mathbf{r}}) = z\hat{\boldsymbol{\rho}} - \rho\hat{\mathbf{z}}$. Deste modo, podemos passar de um sistema de referências para outro. As relações, escritas na forma matricial são dadas abaixo. As coordenadas cilíndricas são dadas por

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

e a relação inversa entre elas por

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

As coordenadas esféricas são dadas por

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

A relação de cilíndrica para esféricas

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

e a relação de esféricas para cilíndricas

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} \tag{A.5}$$

A relação de circular para cilíndrica

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sin\theta e^{i\phi} & \sqrt{2}\cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \cos\theta e^{i\phi} & -\sqrt{2}\sin\theta & \cos\theta e^{-i\phi} \\ ie^{i\phi} & 0 & -ie^{-i\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_- \\ \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{e}}_+ \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

As relações abaixo são relações dois a dois, sendo que temos de cilíndrica para esférica

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} \tag{A.7}$$

de esférica para cilíndrica

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} \tag{A.8}$$

No plano xy, de cartesiana para cilíndrica

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix} \tag{A.9}$$

e de cilíndrica pra cartesiana

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} \tag{A.10}$$

As relações entre cartesianas e circulares

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_+ \\ \hat{\mathbf{e}}_- \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix} \tag{A.11}$$

e de circulares para cartesianas.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_+ \\ \hat{\mathbf{e}}_- \end{bmatrix} \tag{A.12}$$

De cilíndrica para circular

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_+ \\ \hat{\mathbf{e}}_- \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{i\phi} & ie^{i\phi} \\ e^{-i\phi} & -ie^{-i\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} \tag{A.13}$$

e de circular pra cilíndrica.

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{-i\phi} & e^{i\phi} \\ -ie^{-i\phi} & ie^{i\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_+ \\ \hat{\mathbf{e}}_- \end{bmatrix} \tag{A.14}$$

A.1 Produtos vetoriais

Os produtos vetorias são triviais, exceto para o caso de vetores complexos, de modo que para $\mathbf{A} = A_-\hat{\mathbf{e}}_+ + A_z\hat{\mathbf{z}} + A_+\hat{\mathbf{e}}_-$ $\mathbf{B} = B_-\hat{\mathbf{e}}_+ + B_z\hat{\mathbf{z}} + B_+\hat{\mathbf{e}}_-$ vamos ter

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = i \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_- & \hat{\mathbf{z}} & \hat{\mathbf{e}}_+ \\ A_- & A_z & A_+ \\ B_- & B_z & B_+ \end{vmatrix} \tag{A.15}$$

sendo que $A_\pm = \hat{\mathbf{e}}_\pm \cdot \mathbf{A}$. Os vetores são representados como sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_- \\ A_z \\ A_+ \end{bmatrix} \tag{A.16}$$