Pertemuan 7

Peluang Bersyarat + Peluang Bayes

Statistika @harsawara

8 Peluang Bersyarat

Peluang terjadinya suatu kejadian, dengan syarat kejadian lainnya sudah terjadi terlebih dahulu

Peluang terjadinya kejadian B, dengan syarat A dituliskan sebagai P(B|A) dan didefinisikan sebagai:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

dengan $P(A) > 0$

Contoh

Suatu populasi memiliki data sebagai berikut:

	Bekerja (E)	Tidak Bekerja (U)
Laki-laki (M)	460	40
Perempuan (F)	140	260

Tinjau dua buah kejadian dari seleksi acak tersebut:

M = kejadian terpilihnya laki-laki

E = kejadian terpilihnya yang telah bekerja

Maka peluang terpilihnya laki-laki yang telah bekerja (M|E) adalah

$P(M|E) = P(M \cap E)/P(E) = 460/(460+140) = 460/600 = 23/30$

Bagaimana dengan

$P(E|M) = \ldots?$

Contoh lain ..

Misalkan sebuah dadu dilantunkan.
Keadian B adalah kejadian munculnya mata dadu dengan bilangan kuadrat sempurna.
Dadu dibuat sedemikian sehingga bilangan genap muncul dua kali lebih sering dibandingkan dengan bilangan ganjil.
Andaikan diketahui kejadian lainnya, yaitu A, yang merupakan kejadian yang menghasilkan mata dadu lebih dari 3.

Berapakah P(B|A)?

Jawab:

P(B|A) = P(A∩B) / P(A)
= (2/9) / (5/9)
= 2/5

8.1 Hukum Perkalian

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$$

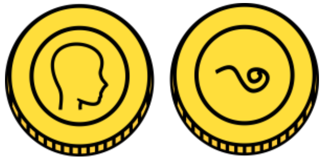
Jika kemunculan atau terjadinya suatu kejadian tidak berpengaruh pada peluang satu kejadian lainnya

7 Kejadian saling Bebas

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Contoh lagi ..

Percobaan : dua kali pelantunan sebuah koin setimbang.



HEAD TAIL

Gambar Angka

Didefinisikan :

- Kejadian A: munculnya Gambar pada pelantunan kedua
- Kejadian B: munculnya Gambar pada pelantunan pertama

GG	1/4
GA	1/4
AG	1/4
AA	1/4

$P(A|B) = \frac{1}{2}$

$P(A|\text{not } B) = \frac{1}{2}$

P(A) tidak berubah, baik itu B terjadi ataupun tidak ...

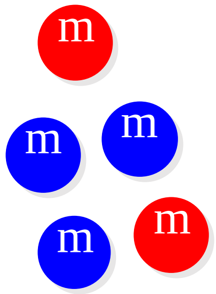
→ A dan B saling bebas

Contoh lain lagi ..

Sebuah kantong berisi 5 buah permen (2 diantaranya merah dan 3 biru). Dari kantong tersebut diambil 2 buah permen satu persatu tanpa pengembalian.

Didefinisikan :

- Kejadian A: permen kedua yang diambil adalah merah
- Kejadian B: permen pertama yang diambil adalah biru



$P(A|B) = P(2^{nd}\ \text{merah}|1^{st}\ \text{biru}) = 2/4 = 1/2$

$P(A|\text{not } B) = P(2^{nd}\ \text{merah}|1^{st}\ \text{merah}) = 1/4$

P(A) berubah, menyesuaikan dengan kejadian B ...

A dan B tidak saling bebas

Dua buah kejadian A dan B dikatakan kejadian **saling bebas** jika dan hanya jika :

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{or} \quad P(B|A) = P(B)$$

lainnya, dikatakan **tidak saling bebas**.

Lagi-lagi **Contoh** ..

Peluang suatu penerbangan yang telah terjadwal teratur berangkat tepat waktu P(B)=0.83; peluang sampai tepat waktu P(S)=0.82 dan peluang berangkat dan sampai tepat waktu P(B∩S)=0.78

Tentukan peluang pesawat:

a. Sampai tepat waktu jika diketahui berangkat tepat waktu

b. Berangkat tepat waktu jika diketahui sampai tepat waktu

$$P(S|B) = \frac{P(B \cap S)}{P(B)}$$

$$= \frac{0.78}{0.83} = 0.94$$

$$P(B|S) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)}$$

$$= \frac{0.78}{0.82} = 0.95$$

mengingatkan materi sebelumnya ...

Misalkan

Dalam suatu populasi tertentu, diketahui 10% penduduknya tergolong beresiko tinggi terkena serangan jantung. Tiga orang dipilih secara acak dari populasi tersebut. Berapakah peluang bahwa salah satu dari ketiganya beresiko tinggi terkena serangan jantung?

Didefinisikan :

H: high risk

N: not high risk

P(tepat satu high risk)

$= P(HNN) + P(NHN) + P(NNH)$

$= P(H)P(N)P(N) + P(N)P(H)P(N) + P(N)P(N)P(H)$

$= (.1)(.9)(.9) + (.9)(.1)(.9) + (.9)(.9)(.1)$

$= 3(0.1)(0.9)^2 = 0.243$

mengingatkan materi sebelumnya ...

Dari contoh sebelumnya, misalkan kita mendapatkan informasi tambahan bahwa 49% penduduknya adalah perempuan dan 8% diantaranya beresiko tinggi untuk terkena serangan jantung. Jika dipilih satu orang secara acak, berapakah peluang yang terpilih adalah perempuan yang beresiko tinggi terkena serangan jantung?

Didefinisikan :

H: high risk

F: female

Dari contoh diketahui

$P(F) = 0.49$

$P(H|F) = 0.08$

$P(\text{high risk female}) = P(H \cap F)$

$= P(F)P(H|F)$

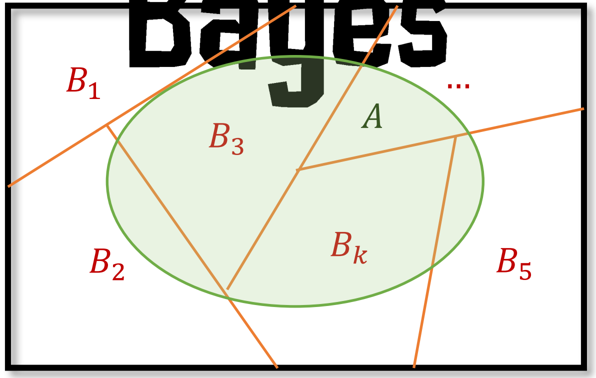
$= 0.49(0.08) = 0.0392$

Lanjutan kasus sebelumnya ..

Berdasarkan contoh sebelumnya,

Misalkan diketahui bahwa 49% dari populasi adalah perempuan dan 8% diantaranya beresiko tinggi untuk terkena serangan jantung. Sementara, laki-laki yang beresiko tinggi berjumlah 12%. Misalkan dipilih seseorang secara acak dan diketahui memiliki resiko tinggi terkena serangan, berapa peluang orang tersebut adalah laki-laki?

Aturan Bayes



Teorema

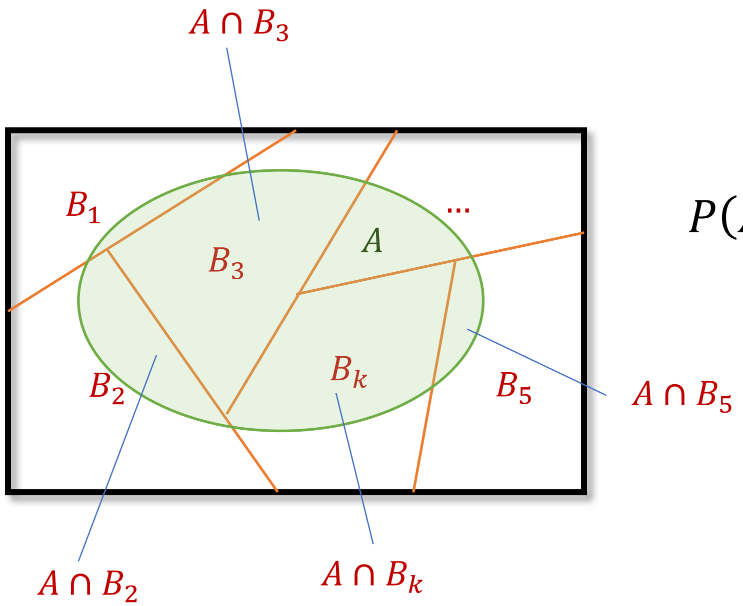
Misalkan $\{B_1, B_2, B_3, \dots\}$ adalah sekumpulan peristiwa yang membentuk partisi dari suatu ruang cuplikan S, di mana $P(B_i) \neq 0$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Misalkan A merupakan sebarang kejadian dalam S, sedemikian sehingga $P(A) \neq 0$.

Maka, untuk $k = 1,2, \dots, n$ berlaku

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cap A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i \cap A)}$$

$$= \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}$$

The Law of Total Probability



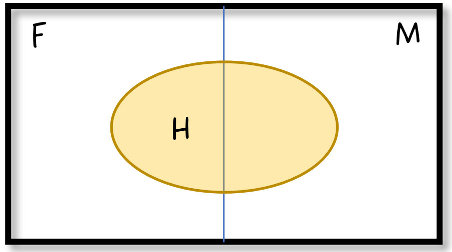
$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ \ldots + P(A \cap B_k)$$

$$= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots + P(B_k)P(A|B_k)$$

Contoh sebelumnya ..

Berdasarkan contoh sebelumnya,

Misalkan diketahui bahwa 49% dari populasi adalah perempuan dan 8% diantaranya beresiko tinggi untuk terkena serangan jantung. Sementara, laki-laki yang beresiko tinggi berjumlah 12%. Misalkan dipilih seseorang secara acak dan diketahui memiliki resiko tinggi terkena serangan, berapa peluang orang tersebut adalah laki-laki?



H = kejadian beresiko tinggi
F = kejadian terpilihnya perempuan
M = kejadian terpilihnya laki-laki
H|F = kejadian terpilihnya beresiko tinggi jika perempuan
H|M = kejadian terpilihnya beresiko tinggi jika laki-laki

P(F) = peluang terpilihnya perempuan = 0.49
P(M) = peluang terpilihnya laki-laki = 0.51
P(H|F) = peluang terpilihnya orang yang beresiko tinggi jika yang terpilih adalah perempuan = 0.08
P(H|M) = peluang terpilihnya orang yang beresiko tinggi jika yang terpilih adalah laki-laki = 0.12

Peluang yang terpilihnya adalah laki-laki jika diketahui orang tersebut seseorang yang beresiko tinggi terkena serangan jantung = P(M|H) adalah:

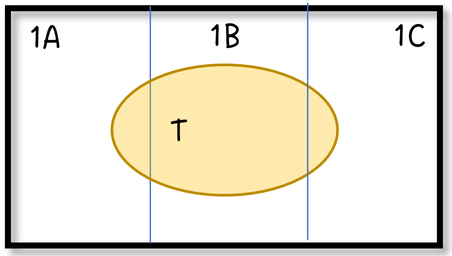
$$P(M|H) = \frac{P(M)P(H|M)}{P(M)P(H|M) + P(F)P(H|F)}$$

$$= \frac{0.51\,(0.12)}{0.51\,(0.12) + 0.49\,(0.08)} = 0.61$$

Contoh

Dalam suatu kejuaraan futsal angkatan diambil 3 kelas sebagai data penelitian, kelas 1A menghasilkan 9 gol, kelas 1B menghasilkan 6 gol, kelas 1C menghasilkan 11 gol. Jika kemudian diketahui bahwa sebenarnya 4 % gol dari kelas 1A tidak sah, 2,5 % dari 1B, dan 6 % dari 1C. Kemudian jika sebuah gol yang diamati secara acak adalah tidak sah.

Berapa peluang gol yang diamati itu berasal dari 1B?



1A	= kejadian gol berasal dari kelas 1A
1B	= kejadian gol berasal dari kelas 1B
1C	= kejadian gol berasal dari kelas 1C
T	= kejadian gol yang tidak sah
T|1A	= kejadian gol tidak sah berasal dari kelas 1A
T|1B	= kejadian gol tidak sah berasal dari kelas 1B
T|1C	= kejadian gol tidak sah berasal dari kelas 1C

P(1A)	= peluang terjadinya gol dari kelas 1A = 9/26 = 0.346
P(1B)	= peluang terjadinya gol dari kelas 1B = 6/26 = 0.231
P(1C)	= peluang terjadinya gol dari kelas 1C = 11/26 = 0.423

$P(T|1A)$ = peluang terjadinya gol tidak sah jika diketahui gol tersebut berasal dari kelas 1A
= 0.04

$P(T|1B)$ = peluang terjadinya gol tidak sah jika diketahui gol tersebut berasal dari kelas 1B
= 0.025

$P(T|1B)$ = peluang terjadinya gol tidak sah jika diketahui gol tersebut berasal dari kelas 1C
= 0.06

Peluang gol tersebut berasal dari 1B jika diketahui tidak sah = $P(1B|T)$ adalah

$$P(1B|T) = \frac{P(1B)P(T|1B)}{P(1A)P(T|1A) + P(1B)P(T|1B) + P(1C)P(T|1C)}$$

$$= \frac{P(0.231)P(0.025)}{P(0.346)P(0.04) + P(0.231)(0.025) + P(0.423)(0.06)}$$

$$= \frac{0.0058}{0.0138 + 0.0058 + 0.0254}$$

$$= 0.1289$$

Tugas 02

Tugas ini bersifat individual, jadi silahkan bekerja secara individu .. tuliskan jawaban secara lengkap dan tidak ambigu berkenaan dengan proses penyelesaiannya

Kumpulkan dalam bentuk softfile dalam format pdf dengan penamaan file: Tugas02 [Kelas] [Nama]_[NIM]

Link pengumpulan akan dishare digrup WA ya ..

SOAL Nomor 1

Dua buah dadu setimbang dilantunkan. Misalkan X_1 dan X_2 masing-masing menyatakan variabel acak mata dadu yang muncul untuk masing-masing dadu pertama dan dadu kedua.

Tentukan:

a. $Pr(X_1 + X_2 = 8)$

b. $Pr(X_1 + X_2 \geq 6 \mid X_1 \leq 2)$

c. Tentukan untuk setiap pasangan kejadian berikut (E_1 dan E_2), apakah termasuk kedalam kejadian bebas ataukah tidak:

1) $E_1 : X_1$ merupakan bilangan genap

   $E_2 : X_1 + X_2 \geq 8$

2) $E_1 : X_1 = X_2$

   $E_2 : X_1 + X_2 \geq 10$

3) $E_1 : X_1 \geq X_2$

   $E_2 : X_1 + X_2 \leq 3$

SOAL Nomor 2

Di suatu kota, hujan turun di sepertiga waktu per harinya. Jika hari hujan, lalu lintas akan padat dengan probabilitas 0.5, dan jika tidak hujan maka kepadatan lalu lintas akan terjadi dengan probabilitas 0.25. jika hari hujan dan lalu lintas padat, probabilitas Andi akan terlambat datang ke kantor adalah 0.5. Di sisi lain, probabilitas Andi akan terlambat jika kondisi tidak hujan dan lalu lintas tidak padat berkurang menjadi 0.125. Pada situasi yang lain (hujan dan lalu lintas tidak padat; tidak hujan dan lalu lintas padat) probabilitas Andi untuk datang terlambat adalah 0.25.

Jika dipilih sautu hari tertentu:

a. Tentukanlah probabilitas Andi tidak terlambat, pada kondisi hari tidak hujan dan lalu lintas padat

b. Tentukanlah probailitas Andi akan datang terlambat

c. Jika diketahui Andi datang terlambat, tentukan probabilitas pada waktu itu hari hujan

SOAL Nomor 3

Jika peluang melihat mobil di jalan raya dalam 30 menit adalah 0,95, berapa peluang melihat mobil di jalan raya dalam 10 menit? (asumsikan probabilitas bersifat konstan)

Note:

'Probabilitas bersifat konstan' pada dasarnya berarti ada tingkat probabilitas konstan untuk melihat mobil (misalnya, tidak ada kemungkinan memilih selama lalu lintas jam sibuk). Secara matematis hal ini dapat dinyatakan sebagai — probabilitas mengamati mobil dalam interval waktu yang tidak tumpang tindih dengan durasi waktu yang sama adalah sama dan bebas

Soal NOMOR 4

Misalkan A,B dan C adalah suatu kejadian dimana A dan C beririsan, B dan C beririsan sementara A dan B merupakan kejadian yang terpisah. Jika diketahui $P(A \cup C) = 2/3$, $P(B \cup C) = 3/4$ dan $P(A \cup B \cup C) = 11/12$, tentukan $P(A)$, $P(B)$ dan $P(C)$

SOAL Nomor 5

Konstruksilah sebuah kasus yang bersesuaian dengan kasus pada soal nomor 1, 2, 3 dan soal nomor 4! (bukan KASUS yang IDENTIK ya!)

Sediakan pula solusi yang mungkin dari kasus yang kalian kembangkan tersebut!