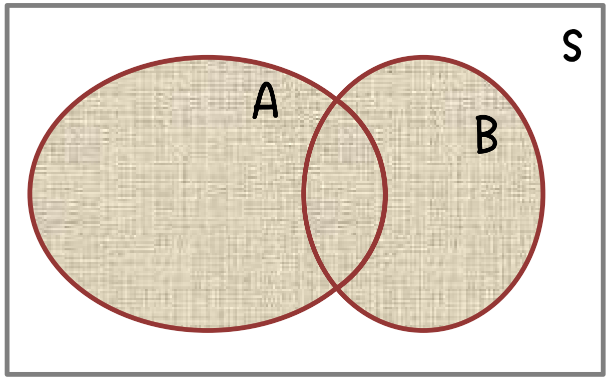
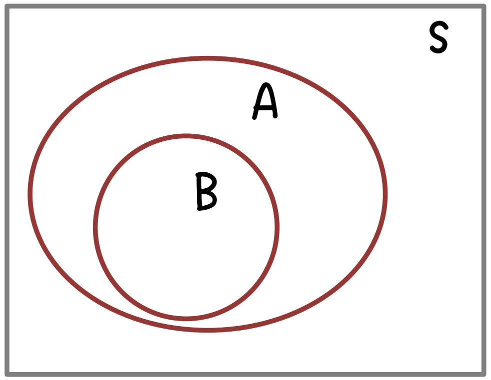
6 Hukum Peluang

Hukum Penjumlahan

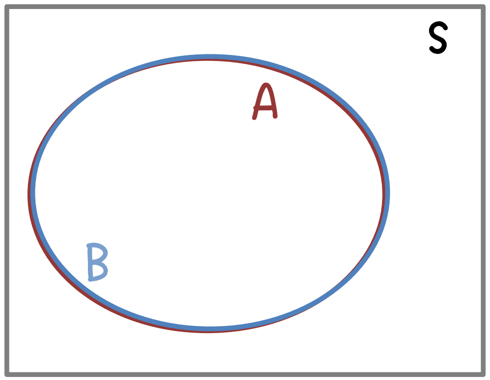
Untuk sebarang kejadian A dan B berlaku :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

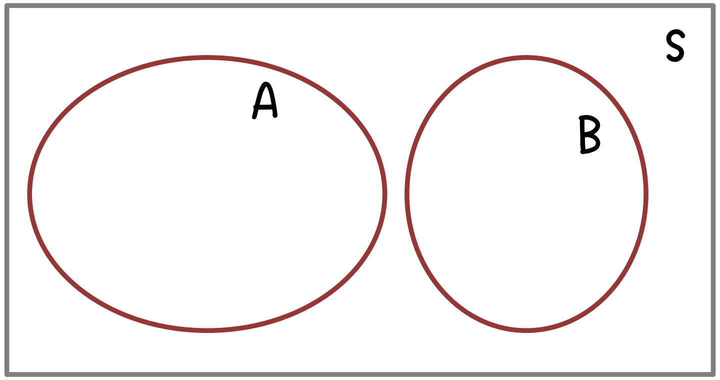




$P(A \cup B) = P(A)$



$P(A \cup B) = P(A)$ atau $P(B)$



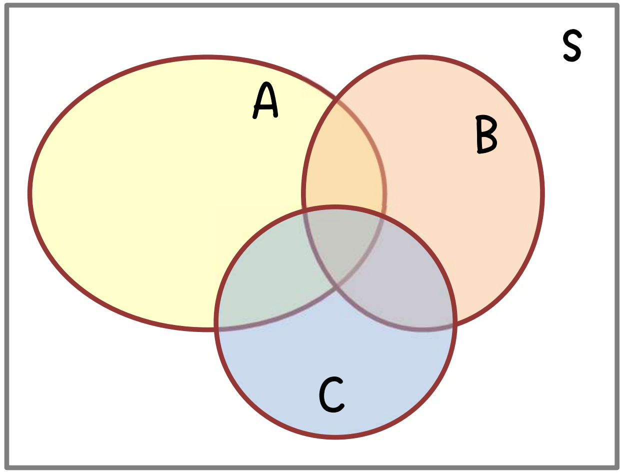
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Kejadian *Mutually Exclusive*

CORRECTION

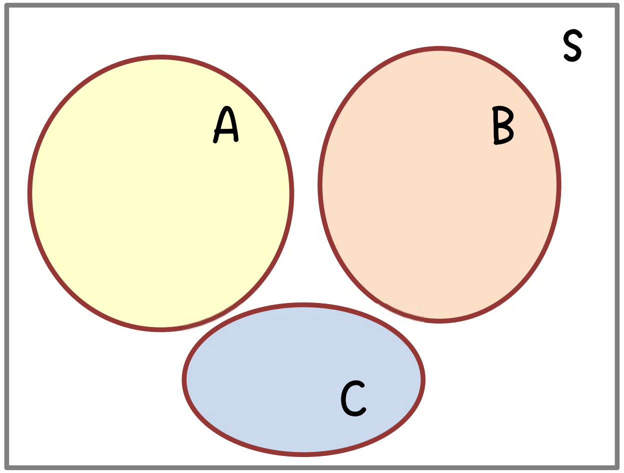
Kejadian Saling Lepas

Dipertemuan sebelumnya saya menuliskan ini sebagai kejadian SALING BEBAS

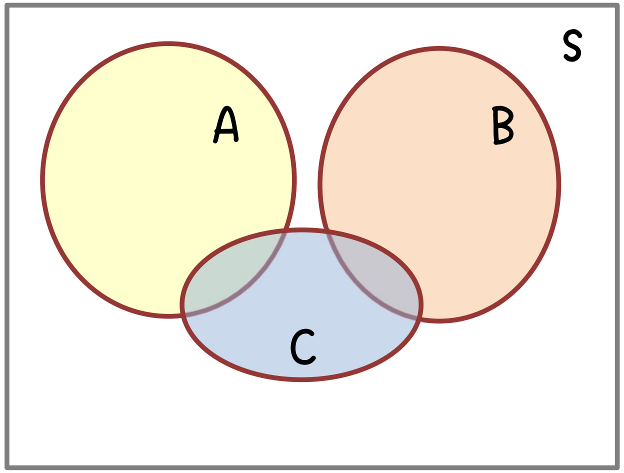


$P(A \cup B \cup C) = \ldots ?$

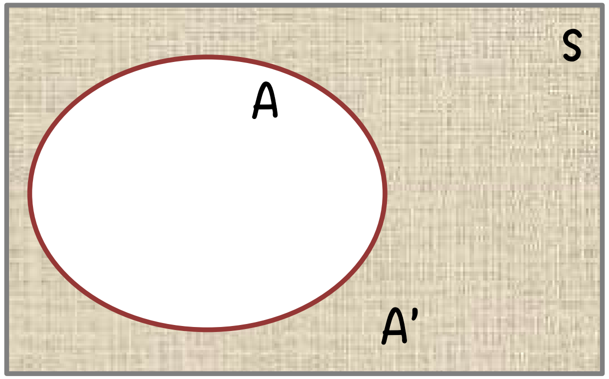
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$



$P(A \cup B \cup C) = \ldots ?$



$P(A \cup B \cup C) = \ldots ?$



Kejadian Komplementer

$$P(A) = 1 - P(A')$$

$A \cup A' = S$

$P(A \cup A') = P(S)$

$P(A) + P(A') = 1$

$P(A) = 1 - P(A')$

Latihan

1. Bila A dan B adalah dua kejadian saling terpisah dengan $P(A)=0.3$ dan $P(B)=0.5$ Hitunglah:

   a. $P(A \cup B)$

   b. $P(A')$

   c. $P(A' \cap B)$

2. Bila A,B dan C adalah kejadian yang saling terpisah dan $P(A)=0.2$; $P(B)=0.3$ dan $P(C)=0.2$, hitunglah:

   a. $P(A \cup B \cup C)$

   b. $P(A' \cap (B \cup C))$

   c. $P(B \cup C)$

3. Misalkan A,B,C dan D adalah kejadian dalam suatu semesta S. atau dengan kata lain $S = \{A,B,C,D\}$. Jika $P(D)=1/2P(C)$, $P(C)=4/3P(B)$, $P(B)=1/4P(A)$

   Tentukan $P(A)$

Latihan

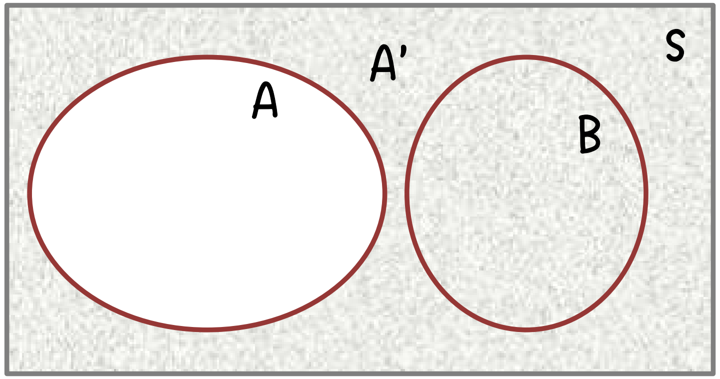
1. Bila A dan B adalah dua kejadian saling terpisah dengan $P(A)=0.3$ dan $P(B)=0.5$ Hitunglah:

   a. $P(A \cup B)$

   b. $P(A')$

   c. $P(A' \cap B)$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.3 + 0.5 = 0.8$
- $P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.3 = 0.7$
- $P(A' \cap B) = \ldots$



$P(A' \cap B) = P(B) = 0.5$

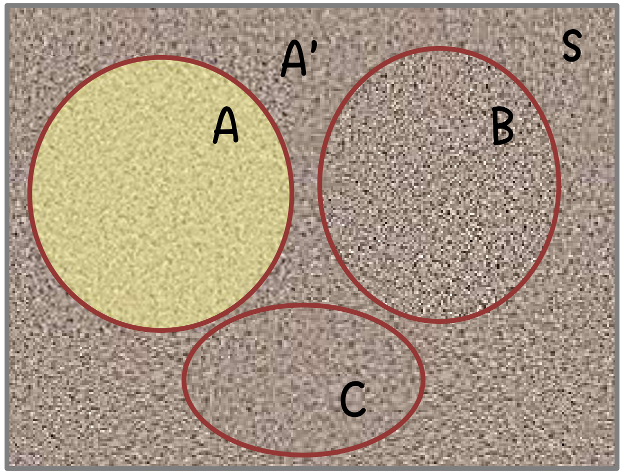
Latihan

2. Bila A,B dan C adalah kejadian yang saling terpisah dan $P(A)=0.2$; $P(B)=0.3$ dan $P(C)=0.2$, hitunglah:

   a. $P(A \cup B \cup C)$

   b. $P(A' \cap (B \cup C))$

   c. $P(B \cup C)$



- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$
  $= 0.2 + 0.3 + 0.2 = 0.7$

- $P(A' \cap (B \cup C)) = \ldots$
  $= P(B \cup C) = P(B) + P(C)$
  $= 0.3 + 0.2 = 0.5$

- $P(B \cup C) = 0.5$

Latihan

$P(S) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D)$

$1 = P(A) + P(B) + P(C) + P(D)$

Kita akan menyamakan variabelnya ke dalam P(A), dari yang diketahui:

$P(B) = 1/4P(A)$

$P(C) = 4/3P(B) = 4/3(1/4P(A)) = 1/3P(A)$

$P(D) = 1/2P(C) = 1/2(1/3P(A)) = 1/6P(A)$

karena:

$1 = P(A) + P(B) + P(C) + P(D)$

$1 = P(A) + 1/4\ P(A) + 1/3\ P(A) + 1/6\ P(A)$

$1 = 21/12\ P(A)$

$P(A) = 12/21 = 4/7$

3. Misalkan A,B,C dan D adalah kejadian dalam suatu semesta S. atau dengan kata lain S = {A,B,C,D}. Jika P(D)=1/2P(C), P(C)=4/3P(B), P(B)=1/4P(A)

   Tentukan P(A)

Konsep Dasar Peluang [part3]

Pertemuan 06 - Statistika

@harsawara

Contoh_01

Dari suatu kelompok yang terdiri dari 10 siswa kelas X dan 8 siswa kelas XI, 3 siswa akan diseleksi secara acak untuk membentuk sebuah komisi. Berapakah peluang terpilihnya paling sedikit 2 siswa kelas X?

Jawab:

peluang terpilihnya paling sedikit 2 siswa kelas X:

P(M) = terpilihnya 2 siswa kelas X dan 1 siswa kelas XI

$$P(M) = \frac{C_2^{10} \times C_1^8}{C_3^{18}} = \frac{45 \times 8}{816} = \frac{360}{816} = \frac{15}{34}$$

P(N) = terpilihnya 3 siswa kelas X dan 0 siswa kelas XI

$$P(N) = \frac{C_3^{10} \times C_0^8}{C_3^{18}} = \frac{120 \times 1}{816} = \frac{5}{34}$$

Maka peluang terpilihnya paling sedikit 2 siswa kelas X adalah

$$P(M \cup N) = \frac{15}{34} + \frac{5}{34} = \frac{20}{34} = \frac{10}{17}$$

Jadi, peluang terpilihnya paling sedikit 2 siswa kelas X adalah $\frac{10}{17}$

Contoh_02

Dua buah dadu dilantunkan satu kali secara bersamaan. Jika A adalah kejadian munculnya dua mata dadu yang jumlahnya 7 dan B adalah kejadian munculnya dua mata dadu yang jumlahnya 11, tentukanlah:

a. $P(A \cap B)$

b. $P(A \cup B)$

Jawab:

$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),$
$(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),$
$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),$
$(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),$
$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),$
$(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

$n(S) = 36$

$A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$
$n(A) = 6$

$B = \{(5, 6), (6, 5)\}$

$n(B) = 2$

a. $P(A \cap B) = 0$

b. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$= \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

7 Kejadian saling Bebas

Jika kemunculan atau terjadinya suatu kejadian tidak berpengaruh pada peluang satu kejadian lainnya

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Perhatikan percobaan pelantunan sekeping koin sebanyak dua kali. Misalkan A kejadian di mana angka diperoleh pada lantunan pertama dan B kejadian di mana angka diperoleh pada lantunan kedua.

Maka:

S = {(A, A), (A, G), (G, A), (G, G)}

A = kejadian munculnya angka pada lantunan ke-1

= {(A, A), (A, G)}

$$\mathrm{P}(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

B = kejadian munculnya angka pada lantunan ke-2

= {(A, A), (G, A)}

$$P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Tossing a Coin

HEAD TAIL

Gambar Angka

Perhatikan bahwa A dan B tidak saling lepas karena $A \cap B = \{(A, A)\}$

Namun dua kejadian tersebut bebas (independen) karena perolehan sisi angka pada pelantunan pertama tidak berpengaruh pada perolehan sisi angka pada pelantunan kedua.

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{2} . \frac{1}{2}$$
$$= P(A) . P(B)$$

Contoh_03

Sebuah kotak berisi 4 bola merah dan 4 bola putih. Dua bola diambil secara acak dari kotak tersebut dengan ketentuan sebagai berikut:

a. Bola pertama yang terambil dimasukkan kembali ke dalam kotak sebelum bola kedua diambil.

b. Bola pertama yang terambil tidak dimasukkan kembali ke dalam kotak sebelum bola kedua diambil.

Misalkan A kejadian bahwa bola pertama yang terambil berwarna merah dan misalkan B kejadian bola kedua yang terambil berwarna putih.

Apakah kejadian-kejadian dalam masing-masing kasus tersebut bebas atau tak bebas?

Jawab

a. $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{C_1^4 . C_1^4}{C_1^8 . C_1^8} = \frac{4.4}{8.8} = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$

$P(A).P(B) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A \cap B)$

Jadi, kejadian A dan B bebas

b. $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$P(B) = P(\text{merah, putih}) + P(\text{putih, putih})$

$P(B) = \frac{4}{8}.\frac{4}{7} + \frac{4}{8}.\frac{3}{7} = \frac{28}{56} = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = P(\text{merah, putih}) = \frac{4}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{2}{7}$

$P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq P(A \cap B)$

Jadi, kejadian A dan B tak bebas

Contoh_04

Berdasarkan penampilan yang telah lalu dalam lomba debat tingkat sekolah, peluang Kiran akan terpilih untuk lomba debat tingkat kota adalah $\frac{3}{4}$, peluang Lala akan terpilih $\frac{2}{3}$, dan peluang Mardi akan terpilih adalah $\frac{1}{2}$. Misalkan terpilihnya satu orang siswa tidak mempengaruhi peluang siswa lainnya. Hitunglah peluang dari tiap kejadian berikut.

a. Kiran dan Mardi terpilih, tetapi Lala tidak.

b. Paling sedikit satu dari tiga siswa tersebut terpilih.

Misalkan K kejadian bahwa Kiran terpilih untuk lomba depat tingkat kota, L kejadian Lala terpilih, dan M kejadian Mardi terpilih. Maka:

$$P(K) = \frac{3}{4}, P(L) = \frac{2}{3}, \text{dan } P(M) = \frac{1}{2}$$

a. Peluang Lala tidak terpilih adalah

$$P(\bar{L}) = 1 - P(L) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Maka $P(K).P(M).P(\bar{L}) = \frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{8}$

b. Misalkan A kejadian bahwa *paling sedikit satu* dari tiga siswa itu terpilih dan B kejadian bahwa tidak satupun dari mereka terpilih.

Perhatikan bahwa $A = \bar{B}$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\bar{B}) \\ &= 1 - P(B) \\ &= 1 - P(\bar{K}) \times P(\bar{L}) \times P(\bar{M}) \\ &= 1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{23}{24} \end{aligned}$$

8 Peluang Bersyarat

Peluang terjadinya suatu kejadian, dengan syarat kejadian lainnya sudah terjadi terlebih dahulu

Peluang terjadinya kejadian B, dengan syarat A dituliskan sebagai P(B|A) dan didefinisikan sebagai:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

dengan P(A) > 0

Contoh

Suatu populasi memiliki data sebagai berikut:

	Bekerja (E)	Tidak Bekerja (U)
Laki-laki (M)	460	40
Perempuan (F)	140	260

Tinjau dua buah kejadian dari seleksi acak tersebut:

M = kejadian terpilihnya laki-laki

E = kejadian terpilihnya yang telah bekerja

Maka peluang terpilihnya laki-laki yang telah bekerja (M|E) adalah

P(M|E) = P(M∩E)/P(E) = 460/(460+140) = 460/600 = 23/30

Bagaimana dengan

P(E|M) = ...?

Contoh lain ..

Misalkan sebuah dadu dilantunkan.
Keadian B adalah kejadian munculnya mata dadu dengan bilangan kuadrat sempurna.
Dadu dibuat sedemikian sehingga bilangan genap muncul dua kali lebih sering dibandingkan dengan bilangan ganjil.
Andaikan diketahui kejadian lainnya, yaitu A, yang merupakan kejadian yang menghasilkan mata dadu lebih dari 3.

Berapakah P(B|A)?

Jawab:

P(B|A) = P(A∩B) / P(A)
= (2/9) / (5/9)
= 2/5

8.1 Hukum Perkalian

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \longrightarrow P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$$

Jika kemunculan atau terjadinya suatu kejadian tidak berpengaruh pada peluang satu kejadian lainnya

7 Kejadian saling Bebas

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$