Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

Campus Puebla

Métodos numéricos en ingeniería

Entrega proyecto

Parcial 1

“Ingeniería en biotecnología”

Integrantes:

Estrella de Alhely Hdz Mérida A01174160

Dimani Guadalupe Tlelo Reyes A01731786

Edgar Cano Cruz A01731282

José Alberto Loranca Tapia A01328448

Wendy Catherine Bárcenas Rodríguez A01423727

Profesor:

Dr. Adolfo Centeno Téllez

Septiembre 2019

Objetivos

El objetivo del presente proyecto se trata de definir la utilidad de los métodos numéricos para la Ingeniería en Biotecnología, enfocado en el área de la microbiología y el crecimiento microbiano. Además, se podrá delimitar la trascendencia del empleo de los métodos numéricos y se reconocerá los modelos matemáticos que posibilitan el cálculo del crecimiento en un cultivo bacteriano, de esta manera, se podrá lograr la resolución de una incógnita aplicada a la Biotecnología.

Introducción

Los métodos numéricos son técnicas para aproximar procedimientos matemáticos de gran importancia en la ingeniería, ya que sin estas aproximaciones no es posible resolver el procedimiento analíticamente o bien, el método analítico es intratable.

Ahora bien, el crecimiento de cultivos bacterianos se define como un aumento en el número de bacterias en una población más que en el tamaño de las células individuales, se trata de un proceso complejo que involucra numerosas reacciones anabólicas y catabólicas, que resultan en la división celular. Las diversas etapas del crecimiento bacteriano en condiciones de cultivo puro tienen una gran relevancia con el crecimiento en el medio ambiente, de ahí la aplicación en la biotecnología (Kaiser, G. 2020). De esta manera, el aumento en número o masa bacteriana se puede medir en función del tiempo en condiciones puras, donde se controlan los nutrientes y las condiciones ambientales del cultivo, siendo así cómo ocurre el crecimiento bacteriano de manera geométrica o exponencial.

No obstante, el tiempo de generación, que varía entre las bacterias, está controlado por muchas condiciones ambientales y por la naturaleza de las especies bacterianas. Por ejemplo, Clostridium perfringens, una de las bacterias de más rápido crecimiento, tiene un tiempo de generación óptimo de aproximadamente 10 minutos; Escherichia coli puede duplicarse cada 20 minutos; y la Mycobacterium tuberculosis de crecimiento lento tiene un tiempo de generación en el rango de 12 a

16 horas. Algunos investigadores han sugerido que ciertas poblaciones de bacterias que viven en las profundidades de la superficie de la Tierra pueden crecer a un ritmo extremadamente lento, reproduciéndose solo una vez cada varios miles de años. Asimismo, la composición del medio de crecimiento es un factor importante que controla la tasa de crecimiento, esta aumenta hasta un máximo cuando el medio proporciona un buen conjunto de nutrientes que funcionan como una buena fuente de energía y más intermediarios biosintéticos que la célula de otro modo tendría que fabricar por sí misma (Rogers, K. 2019).

Por otro lado, cuando las bacterias se colocan en un medio que proporciona todos los nutrientes necesarios para su crecimiento, se pueden observar varias fases distintas dentro de una curva de crecimiento, como la fase de retraso, la fase exponencial o logarítmica, la fase estacionaria y la fase de muerte.
Tras la inoculación en el nuevo medio, las bacterias no se reproducen inmediatamente y el tamaño de la población permanece constante. Durante este período, llamado fase de retraso, las células son metabólicamente activas y solo aumentan en tamaño celular; también están sintetizando las enzimas y los factores necesarios para la división celular y el crecimiento de la población en sus nuevas condiciones ambientales. Luego, la población entra en la fase logarítmica, en la que el número de células aumenta de forma logarítmica, y cada generación de células se produce en el mismo intervalo de tiempo que las anteriores, lo que da como resultado un aumento equilibrado de los componentes de cada célula. La fase logarítmica continúa hasta que se agotan los nutrientes o se acumulan productos tóxicos, momento en el que la tasa de crecimiento celular disminuye y algunas células pueden comenzar a morir. De ahí sucede la fase estacionaria, en la que el tamaño de una población de bacterias permanece constante, aunque algunas células continúan dividiéndose y otras comienzan a morir. En seguida sigue la fase final, la fase de muerte, caracterizada por una pérdida neta de células cultivables, en donde la muerte de las células de la población supera la formación de nuevas (Maier, R. 2009).

Descripción del problema

Los distintos medios y técnicas de cultivo son de gran importancia en un laboratorio de microbiología, debido a que se emplean para la identificación de microorganismos, por ejemplo bacterias que provocan enfermedades infecciosas, además, para la identificación y selección de antibióticos a los que son sensibles esas bacterias.

Un ingeniero en Biotecnología, que está interesado en conocer el número de bacterias en un medio de cultivo, desarrolla una ecuación en función del tiempo (t) que hay en un medio de cultivo en donde se introducen 500 bacterias que empiezan a reproducirse, al cabo de cierto tiempo se modifica el medio y la cantidad de bacterias tiende a disminuir. El número de bacterias al cabo de t (tiempo en minutos) está dado por la función:

f(t)= -t^2 + 40*t + 500

El presente proyecto consistirá en encontrar la raíz de esta ecuación con base en los métodos numéricos vistos en el primer parcial de la materia. Por medio del método de Bisección, conseguiremos la raíz a partir de un intervalo inicial, el cual será de x a x. Mientras que para el método de Secante, el cual se trata de un algoritmo de la raíz, se usarán una serie de raíces de las líneas secantes para aproximar la raíz de una función. Por otro lado, el método de Newton-Raphson busca un cero de la función por aproximaciones sucesivas a partir de un valor inicial, de esta manera, presenta mejores características de eficiencia, debido a que casi siempre converge a la solución y lo hace en un número reducido de iteraciones. No obstante, el último método, conocido como el método de Bairstow no será usado en el presente proyecto, debido a que la ecuación seleccionada es de segundo grado, y este método es un algoritmo eficiente de búsqueda de las raíces de un polinomio real de grado arbitrario, además se basa en la deflación, es decir, en la reducción del grado del polinomio, por lo tanto, no será necesaria la aplicación de este método.

Resultados

Método de Bisección

El método de bisección es un método de búsqueda incremental en el que el intervalo siempre se divide por la mitad. Si una función cambia de signo en un intervalo, se evalúa el valor de la función en el punto medio. Entonces se determina que la ubicación de la raíz se encuentra en el punto medio del subintervalo dentro del cual ocurre el cambio de signo (Chapra, 2015). En este caso, se evaluó la función de 46 a 55 y se hizo un total de 15 iteraciones para que se pudiera conseguir el valor de la raíz cuando la gráfica tocaba el eje x (en este caso t por el tiempo). De acuerdo a la ecuación cuadrática, se puede observar en qué momento hay el mayor número de bacterias en el medio, sin embargo, luego de alcanzar su punto máximo, el número de células vivas empieza a causa de los metabolitos secundarios que se generan y la falta de nutrientes.

Método de bisección								
Función	f(x)=-t^2 + 40*t + 500		t_i	46				
			t_u	55				
t	f(t)		t	f(t)				
-5.0000	275.0000		46	224				
-2.0000	416.0000		55	-325				
1.0000	539.0000							
4.0000	644.0000							
7.0000	731.0000							
10.0000	800.0000							
13.0000	851.0000	Iteración	t_i	t_u	t_r	$f(t_i)$	$f(t_r)$	$f(t)f(t_r)$
16.0000	884.0000	1	46.0000	55	50.5	224.0000	-30.2500	-6776.000000
19.0000	899.0000	2	46.0000	50.5	48.25	224.0000	101.9375	22834.000000
22.0000	896.0000	3	48.2500	50.5	49.375	101.9375	37.1094	3782.836914
25.0000	875.0000	4	49.3750	50.5	49.9375	37.1094	3.7461	139.015198
28.0000	836.0000	5	49.9375	50.5	50.21875	3.7461	-13.1729	-49.346737
31.0000	779.0000	6	49.9400	50.21875	50.07938	3.5964	-4.7688	-17.150514
34.0000	704.0000	7	49.9400	50.07938	50.00969	3.5964	-0.5813	-2.090745
37.0000	611.0000	8	49.9400	50.00969	49.97484	3.5964	1.5087	5.426040
40.0000	500.0000	9	49.9748	50.00969	49.99227	1.5087	0.4640	0.700060
43.0000	371.0000	10	49.9923	50.00969	50.00098	0.4640	-0.0586	-0.027188
46.0000	224.0000	11	49.9923	50.00098	49.99662	0.4640	0.2027	0.094064
49.0000	59.0000	12	49.9966	50.00098	49.9988	0.2027	0.0721	0.014610
52.0000	-124.0000	13	49.9988	50.00098	49.99989	0.0721	0.0067	0.000486
55.0000	-325.0000	14	49.9999	50.00098	50.00043	0.0067	-0.0259	-0.000175
58.0000	-544.0000	15	50.00	50.00043	50.00016	0.0067	-0.0096	-0.000065
61.0000	-781.0000							
				t_r	50.00016			
							ERROR	0.0001

Método de Secante

El segundo método a emplear en el presente proyecto, se le conoce como método de secante, se trata de un método que sirve para hallar los ceros de una función de forma iterativa. Se puede considerar como una variación del método de Newton-Raphson, sin embargo, en vez de obtener la derivada de la función en el punto elegido, aproxima la pendiente a la recta que conecta la función evaluada en el punto de elegido y en el punto de la previa iteración.

Asimismo, el método de secante es un algoritmo de la raíz de interés que emplea una serie de raíces de las líneas secantes con el objetivo de aproximar mejor la raíz de una función f(x). Es importante destacar, que a diferencia de los demás métodos, por ejemplo el de bisección que requiere de varias iteraciones, este procedimiento es bastante más exacto que el de bisección, el cual únicamente fracciona por mitades consecutivamente hasta llegar a un número muy cercano al verdadero, por lo que implicaría gastar el tiempo realizando bastantes iteraciones de más.

Para la ejecución de este método se comienza eligiendo un límite inferior y superior, en este caso fue de -6 y -9. En seguida se procede a realizar 5 iteraciones, dando como resultado el valor de -10, el cual si se compara con la gráfica previamente diseñada, se puede ver que el dato coincide. Es por esto que se habla de la eficacia de este método al compararlo con los demás. Así como se indicó previamente, el presente método proporcionó el valor de la raíz, para el cual la función f(x) será cero y ese valor fue de -10.

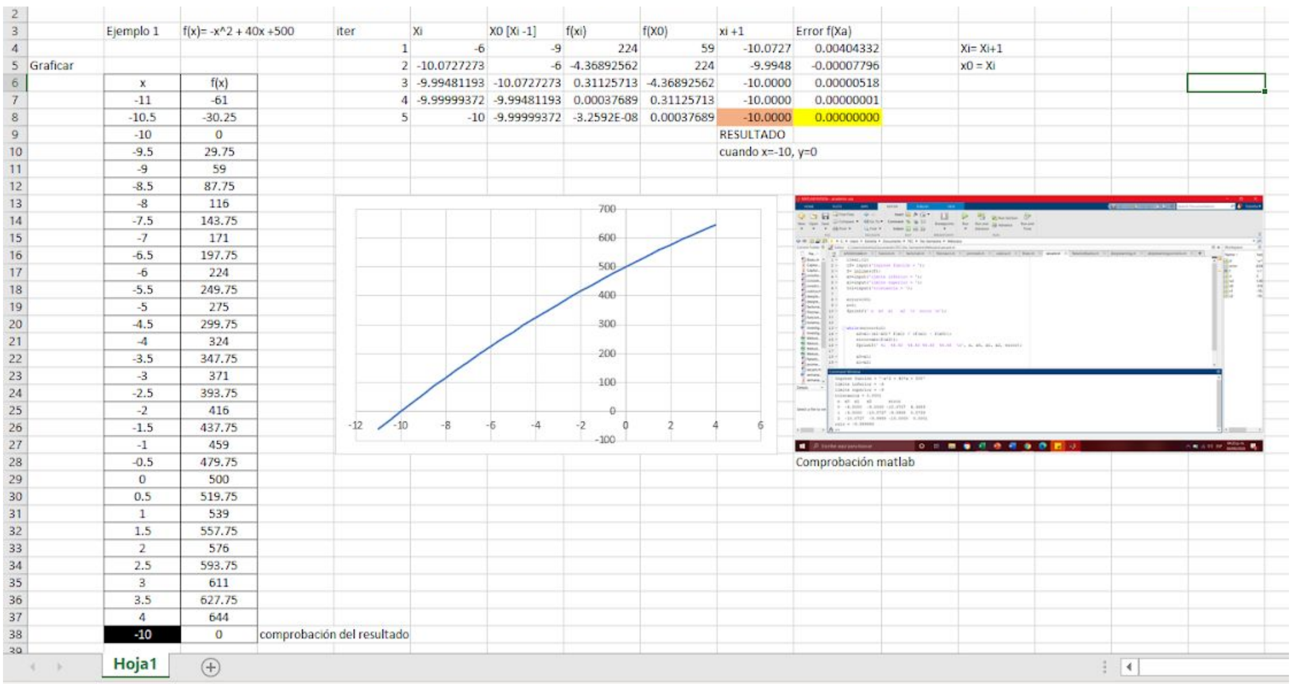

Figura 2. Método de secante para la función f(x)= -x^2 + 40x +500, usando Excel y corroborando en Matlab.

Método de Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson es un procedimiento algorítmico que nos ayuda a encontrar raíces de funciones, dado un conocido valor numérico cercano a la raíz. Es un método iterativo, para el cálculo de raíces cuadradas y de mayor grado (Chapra, 2007).

Para llevar a cabo este método tomamos un valor conocido, en este caso “-10” ya que es el valor que corta a la gráfica. bastó con hacer seis iteraciones y en todas la validación fue de éxito, dando como resultado -10, que al comprarla con la gráfica (*figura 3.*), coincide.

Este método es de utilidad para poder encontrar aproximaciones a cero y raíces. Por otro lado también puede ser usado para hallar los máximos y mínimos.

En el eje x podemos observar como en “-10” va en aumento el número de reproducción de células hasta alcanzar su punto más alto, sin embargo podemos observar que después de su pico empieza a disminuir la población ya que empieza a haber un déficit de nutrientes por la numerosa cantidad de células demandantes de estos que por ende los lleva a una reducción de su población.

Función:	f(t)= -t^2 + 40*t + 50
	f '(t) = -2t+ 40
x	f(x)
-13.00	-189.00
-11.50	-92.25
-10.00	0.00
-8.50	87.75
-7.00	171.00
-5.50	249.75
-4.00	324.00
-2.50	393.75
-1.00	459.00
0.50	519.75
2.00	576.00
3.50	627.75
5.00	675.00
6.50	717.75
8.00	756.00
9.50	789.75
11.00	819.00
12.50	843.75
14.00	864.00
15.50	879.75
17.00	891.00
18.50	897.75

n	Pn-1	f(Pn-1)	f '(Pn-1)	Pn	f(Pn)	E	Validacion 1	Validacion 2
1	-10.00	0.00	60.00	-10.00	0.00	0.000100	exito	exito
2	-10.00	0.00	60.00	-10.00	0.00	0.000100	exito	exito
3	-10.00	0.00	60.00	-10.00	0.00	0.000100	exito	exito
4	-10.00	0.00	60.00	-10.00	0.00	0.000100	exito	exito
5	-10.00	0.00	60.00	-10.00	0.00	0.000100	exito	exito
6	-10.00	0.00	60.00	-10.00	0.00	0.000100	exito	exito

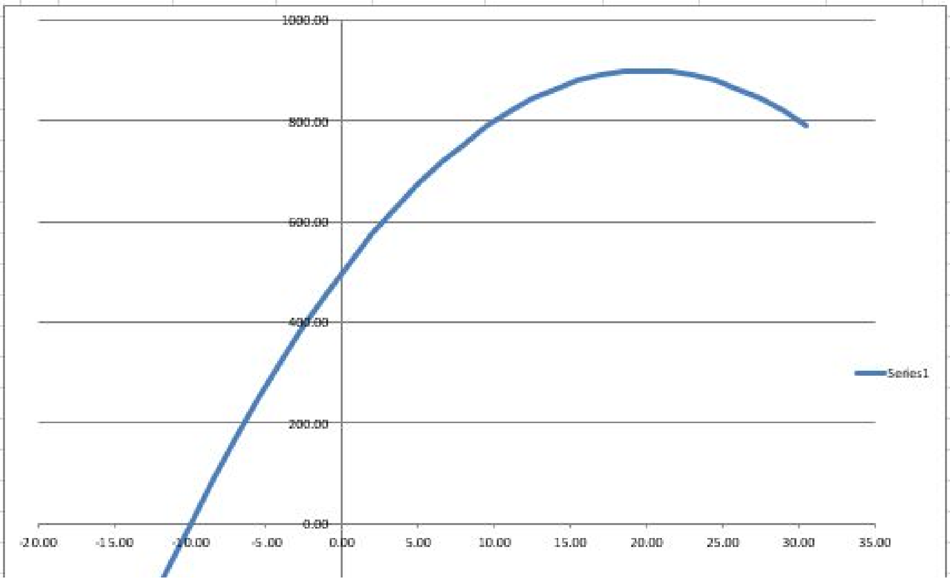

Figura 3. Método de Newton-Raphson para la función f(x)= -x^2 + 40x +500, usando Excel.

Método de Bairstow

Cómo último método a emplear en esta función es el método de Bairstow; este se define como un algoritmo eficiente para encontrar las raíces de cualquier polinomio real de grado arbitrario; a comparación de otros métodos, este emplea solamente aritmética real. Esta se basa en la reducción del polinomio hasta que esta se convierta a un grado cuadrático y gracias a esto se pueden formular sistemas de ecuaciones con un par de incógnitas. Debido a que nuestra función inicial es un polinomio de segundo grado, no es necesario utilizar este método, pues está ya está reducida y vuelve redundante encontrar sus raíces, error y delta en el Excel, para ello se requiere de los métodos previamente analizados. De igual manera para simular la función en Matlab se vuelve poco práctico, pues esta vuelve a presentar conflicto al calcular el porcentaje de la discriminante y en la recapitulación no puede demostrar un resultado. En conclusión, con un polinomio con estas características, vuelve innecesario la utilización de este método y se recomienda obtener los resultados con otros métodos.

Conclusiones

Si bien, de acuerdo a lo visto y presentado en esta primera entrega, es posible percibir que cada uno de los métodos funciona de manera distinta y por lo tanto resulta más conveniente usar uno en específico sobre los demás. Claro está que para algunos métodos no es necesario realizar tantas iteraciones para obtener un resultado acertado y correcto.

Referencias APA

- Chapra, S. (2015). Numerical Methods for Engineers. United States of America: McGraw-Hill Education.
- Maier, R. (2009). Bacterial growth. Science direct. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780123705198000031
- Rogers, K. (2019). Growth of bacterial populations. Británica. https://www.britannica.com/science/bacteria/The-importance-of-bacteria-to-humans
- Kaiser, G. 2020. Bacterial growth. Biology. https://bio.libretexts.org/Bookshelves/Microbiology/Book%3A_Microbiology_(Kaiser)/Unit_7%3A_Microbial_Genetics_and_Microbial_Metabolism/17%3A_Bacterial_Growth_and_Energy_Production/17.1%3A_Bacterial_Growth
- Chapra, S. and Canale, R. (2007). Métodos numéricos para ingenieros (5a. ed.). Distrito Federal: McGraw-Hill Interamericana.