Université Toulouse III Paul Sabatier

Méthode numérique pour les EDP

M1 MApI3

Problèmes Variationnels

Sujet 1

Auteurs :
Morgan Perret
Antoine Perrot
Tanguy Samelor
Wendy Revailler
Adèle Georgeot

Sous la direction de :
Pr. Jacek Narski

April 22, 2020

Remerciements

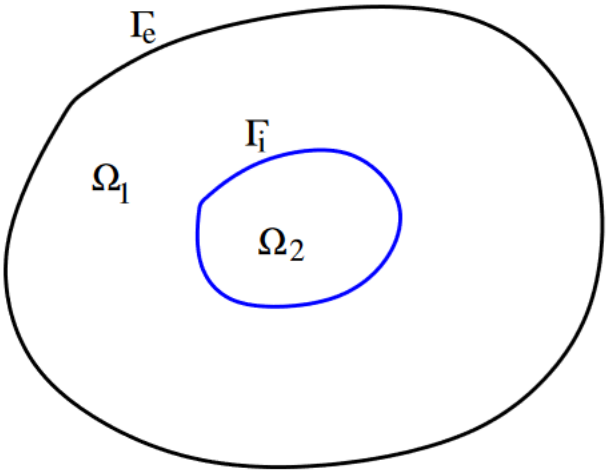
Nous souhaitons remercier nos responsables de cours, Monsieur Jacek Narski et Monsieur Stefan Le Coz, pour le temps qu'ils nous ont consacré lors de leurs différentes interventions au sein du parcours afin de nous apporter les outils méthodologiques indispensables à la conduite de cette recherche.

Contents

1 Introduction

L'approche variationnelle d'un problème est extrêmement utilisée au sein de la communauté scientifique pour la résolution de problèmes aux équations aux dérivées partielles. Nous retrouvons notamment cette méthode dans la mécanique pour la résolution d'un système de l'élasticité linéarisée en mécanique du solide ou encore la résolution des équations de Stokes en mécanique des fluides.

Dans le cadre de ce projet nous nous intéresserons à résoudre par l'approche variationnelle quatre problèmes qui se trouvent dans l'espace Ω suivant :



Espace Ω

Nous avons également quelques détails supplémentaires sur cet espace.

$$\Omega \text{ ouvert borné de } \mathbb{R}^n$$
$$\partial\Omega = \Gamma_e \text{ est de classe } \mathcal{C}^2$$
$$\Omega_2 \text{ ouvert borné de } \mathbb{R}^n \text{tel que } \overline{\Omega_2} \subset \Omega$$
$$\partial\Omega_2 = \Gamma_i \text{ est de classe } \mathcal{C}^2$$
$$\Omega_1 = \Omega \backslash \overline{\Omega_2}$$
$$n \text{ la normale unitaire à } \Gamma_i, \text{ extérieure à } \Omega_1$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} \text{ désigne la dérivée normale de } u \text{ sur } \Gamma_i$$

2 Étude du problème $(\mathcal{P}_{\alpha,\beta})$

Nous pouvons donc commencer ce projet par étudier notre premier problème. Tout d'abord, nous pouvons définir la fonction suivante. Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ deux réels positifs. On définit la fonction $a \in L^\infty(\Omega)$ par

$$a_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x \in \Omega_1 \\ \beta & \text{si } x \in \Omega_2 \end{cases}$$

Dans cette partie nous nous intéressons au problème $(\mathcal{P}_{\alpha,\beta})$ suivant :

$$\text{Déterminer } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que}$$
$$-\operatorname{div}\left(a_{\alpha,\beta}(x)\nabla u(x)\right) = f(x) \quad \text{ dans } \Omega$$

2.1 Existence et Unicité de la solution

2.1.1 Problème variationnel

Nous pouvons commencer par mettre notre problème sous la forme variationnelle. Pour ce faire, nous réalisons les opérations suivantes :
Soient $f \in L^2(\Omega)$, u solution de $(\mathcal{P}_{\alpha,\beta})$, et $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \operatorname{div}\left[a_{\alpha,\beta}(x)\nabla u(x)\right] v(x)dx &= -\int_{\Omega_1} \operatorname{div}\left(\alpha\nabla u(x)\right) v(x)dx - \int_{\Omega_2} \operatorname{div}(\beta\nabla u(x))v(x)dx \\
\textit{or } \operatorname{div}(\nabla u) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \Delta u \\
&= -\int_{\Omega_1} \alpha\Delta u \cdot v dx - \int_{\Omega_2} \beta\Delta u \cdot v dx
\end{aligned}$$

Formule de Green

Soit Ω un ouvert normé de $\mathbb{R}^2$ globalement lipschitzien et $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
Si $u \in H^1(\Omega)$, $\Delta u \in L^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$
Alors

$$\int_\Omega \Delta u v = -\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v ds$$

Nous posons N comme étant le vecteur unitaire normal à l'extérieur de Ω_1. De plus, si n est la normale à Γ_i, extérieure à Ω_1, alors $-n$ est celle qui est extérieure à Ω_2. Par conséquent, nous sommes dans le cadre de la formule de Green et avons alors :

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\Omega_1} \alpha \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega_1} \alpha \frac{\partial u}{\partial N} v dx + \int_{\bar{\Omega}_2} \beta \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Gamma_i} \beta \frac{\partial u}{\partial(-n)} v dx \\
&= \alpha \left[\int_{\Omega_1} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Gamma_e} \frac{\partial u}{\partial(-n)} v dx - \int_{\Gamma_i} \frac{\partial u}{\partial n} v dx \right] \\
&+ \beta \left[\int_{\bar{\Omega}_2} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Gamma_i} \frac{\partial u}{\partial(-n)} v dx \right] \\
&= \int_{\Omega} a_{\alpha,\beta} \nabla u \cdot \nabla v dx + \underbrace{\int_{\Gamma_e} \frac{\partial u}{\partial n} v dx}_{=0 \ car \ v \ est \ dans \ H_0^1(\Omega)} - \int_{\Gamma_i} (\underbrace{\alpha - \beta}_{par \ continuite \ |\alpha-\beta| \to 0 \ sur \ \Gamma_i}) \frac{\partial u}{\partial n} v dx \\
&= \int_{\Omega} f v dx
\end{aligned}
$$

Par conséquent nous avons le problème variationnel suivant :

$$
\begin{gathered}
\text{Chercher } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\
a(u,v) = \int_\Omega a_{\alpha,\beta} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx = L(v)
\end{gathered}
$$

Avec a une forme bilinéaire et L une forme linéaire

2.1.2 Continuité de a

Montrons que a est continue.
Soit $u, v \in H_0^1(\Omega)$

$$
\begin{aligned}
|a(u,v)| &= |\int_\Omega a_{\alpha,\beta} \nabla u \cdot \nabla v dx| \\
&\leq \underbrace{max(\alpha, \beta)}_{M} \int_\Omega |\nabla u \cdot \nabla v| dx \\
\textit{Cauchy Schwarz} \quad & \\
&\leq M \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq M \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\
\text{car } \|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 \quad &
\end{aligned}
$$

Par conséquent a est continue.

2.1.3 Coercivité de a

Avant de nous intéresser à la coercivité de a, nous allons rappeler un résultat qui nous sera essentiel pour la suite de ce projet.

Inégalité de Poincaré
Soit I borné. Alors il existe une constante $C = C(|I|)$ telle que $\forall u \in H_0^1(I)$ On a :

$$\|u\|_{H^1} \leq C \|u'\|_{L^2}$$

Autrement dit, si I est borné $\|u'\|_{L^2}$ fournit une norme équivalente à la norme usuelle sur $H_0^1(I)$.

Montrons que a est coercive.
Soit $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_\Omega a_{\alpha,\beta}(\nabla u)^2 dx \\
&\geq \underbrace{min(\alpha,\beta)}_{m} \int_\Omega (\nabla u)^2 dx \\
&= \underbrace{m}_{>0} \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \frac{m}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{m}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
Poincare & \\
&\geq \frac{m}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega_1)} + \frac{m}{2c^2}\|u\|^2_{L^2(\Omega_1)} \\
&\geq \frac{m}{2} min(1, \frac{1}{c^2})\|u\|^2_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons montré que a est continue coercive.

2.1.4 Continuité de L

Montrons que L est continue.
Soit $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
|L(v)| &= |\int_\Omega fv dx| \\
&\leq \int_\Omega |fv| dx \\
Cauchy\ Schwarz & \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons démontré la continuité de L.

2.1.5 Existence et Unicité

Pour résumer ce que nous avons vu jusqu'à présent, nous avons un problème variationnel sur l'espace $H_0^1(\Omega)$ qui est Hilbertien, a qui est une forme bi-linéaire continue coercive et L qui est une forme linéaire continue.

Nous sommes par conséquent dans le cadre du théorème de Lax Milgram et pouvons donc en déduire à l'aide de ce théorème qu'il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega),\ a(u,v) = L(v)$$

2.2 Cas particulier - $f = 0$ dans Ω_2

Nous pouvons étudier l'inégalité obtenue lorsque l'on pose $f = 0$ dans Ω_2. Nous savons que $\forall u \in H_0^1(\Omega)$, $a(u,u) = L(u)$ et pouvons en déduire :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} a_{\alpha,\beta}(\nabla u)^2 dx &= \int_{\Omega 1} \alpha(\nabla u)^2 dx + \int_{\Omega 2} \beta(\nabla u)^2 dx \\
&= \int_{\Omega_1} f u dx + 0
\end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\alpha \int_{\Omega_1} (\nabla u)^2 dx &= \alpha \|\nabla u_{|\Omega_1}\|^2_{L^2(\Omega_1)} \\
&\leq \alpha \int_{\Omega_1} (\nabla u)^2 dx + \beta \int_{\Omega_2} (\nabla u)^2 dx \\
&= \int_{\Omega_1} f u dx \\
Cauchy\ Schwarz & \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega_1)} \|\nabla u_{|\Omega_1}\|_{L^2(\Omega_1)} \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega_1)} \|u_{|\Omega_1}\|_{H^1(\Omega_1)}
\end{aligned}$$

De plus, nous avons que:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} (\nabla u)^2 dx &= \int_{\Omega_1} \frac{1}{2}(\nabla u)^2 + \frac{1}{2}(\nabla u)^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\|\nabla u_{|\Omega_1}\|^2_{L^2(\Omega_1)} + \frac{1}{2}\|\nabla u_{|\Omega_1}\|^2_{L^2(\Omega_1)} \\
Poincare & \\
&\geq \frac{1}{2}\|\nabla u_{|\Omega_1}\|^2_{L^2(\Omega_1)} + \frac{1}{2c^2}\|u_{|\Omega_1}\|^2_{L^2(\Omega_1)} \\
&\geq min(\frac{1}{2}, \frac{1}{2c^2})\|u_{|\Omega_1}\|^2_{H^1(\Omega_1)} \text{ par définition de la norme } H^1
\end{aligned}$$

Lorsque nous regroupons les inégalités, nous obtenons

$$\alpha\ min(\frac{1}{2}, \frac{1}{2c^2})\|u_{|\Omega_1}\|^2_{H^1(\Omega_1)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega_1)} \|u_{|\Omega_1}\|_{H^1(\Omega_1)}$$

Par conséquent, nous trouvons donc bien :

$$\|u_{|\Omega_1}\|_{H^1(\Omega_1)} \leq \underbrace{\frac{2}{\alpha}\ max(1, c^2)}_{C_1} \|f\|_{L^2(\Omega_1)}$$

2.3 Autre résultat du problème $(\mathcal{P}_{\alpha,\beta})$

Pour tout $u \in H^1(\Omega)$, nous pouvons commencer par poser

$$u_1 = u\big|_{\Omega_1} \quad \text{et} \quad u_2 = u\big|_{\Omega_2}$$

Nous souhaitons dans cette partie montrer la relation suivante :
Soit u est la solution de $(\mathcal{P}_{\alpha,\beta})$, alors u_1 et u_2 vérifient :

$$(\mathcal{E})\ -\alpha\Delta u_1 = f\big|_{\Omega_1} \quad \text{dans } \Omega_1, \quad -\beta\Delta u_2 = f\big|_{\Omega_2} \quad \text{dans } \Omega_2, \quad u_1\big|_{\Gamma_i} = u_2\big|_{\Gamma_i}$$

De plus $\frac{\partial u_1}{\partial n}\big|_{\Gamma_i}$ et $\frac{\partial u_2}{\partial n}\big|_{\Gamma_i}$ vérifient une relation $(\mathcal{C})$ que l'on déterminera au cours de la démonstration.

De plus, nous prouverons également la réciproque qui se formule de la manière suivante :

Soit $u_1 \in H^1(\Omega_1), u_2 \in H^1(\Omega_2)$, et si u_1 et u_2 vérifient $(\mathcal{E})$ et $(\mathcal{C})$ alors la fonction u égale à u_1 sur Ω_1 et à u_2 sur Ω_2 est solution de $(\mathcal{P}_{\alpha,\beta})$

2.3.1 Démonstration de la relation

Soit $u \in H^1(\Omega)$ solution de $(\mathcal{P}_{\alpha,\beta})$
Nous avons par conséquent $\forall v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\forall x \in \Omega,\ -\operatorname{div}\left[a_{\alpha,\beta}(x)\nabla u(x)\right] = f(x)$$

En particulier nous avons :

$$\forall x \in \Omega_1,\ -\operatorname{div}\left[\alpha\nabla u(x)\right] = -\alpha\Delta u(x) = f(x)$$

et

$$\forall x \in \Omega_2,\ -\operatorname{div}\left[\beta\nabla u(x)\right] = -\beta\Delta u(x) = f(x)$$

Par conséquent :

$$-\alpha\Delta u_1 = f\big|_{\Omega_1} \quad \textit{dans } \Omega_1, \quad -\beta\Delta u_2 = f\big|_{\Omega_2} \quad \textit{dans } \Omega_2$$

De plus, comme $u_{|\Omega_1} = u_1$ et que $u_{|\Omega_2} = u_2$, nous avons également que $u \in H_0^1(\Omega)$. Nous avons par conséquent $u_1 = u_2$ sur Γ_i. Nous savons également que Γ_i la frontière commune à Ω_1 et Ω_2 est de classe $\mathcal{C}^2$.
Nous pouvons maintenant chercher la relation $(\mathcal{C})$ qui est vérifiée par $\frac{\partial u_1}{\partial n}\big|_{\Gamma_i}$ et $\frac{\partial u_2}{\partial n}\big|_{\Gamma_i}$. Si u est solution, nous avons alors $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega fv dx = \int_\Omega a_{\alpha,\beta}\nabla u\nabla v dx \\
\Longleftrightarrow\ & \int_\Omega fv dx = \int_{\Omega_1} \alpha\nabla u_1\nabla v dx + \int_{\Omega_2} \beta\nabla u_2\nabla v dx \\
\Longleftrightarrow\ & \int_\Omega fv dx = \int_{\Omega_1} \underbrace{-\alpha\Delta u_1}_{f_{|\Omega_1}} v dx - \int_{\Gamma_e} \alpha\frac{\partial u_1}{\partial n}\underbrace{v}_{=0} dx + \int_{\Gamma_i} \alpha\frac{\partial u_1}{\partial n} v dx + \int_{\Omega_2} \underbrace{-\beta\Delta u_2}_{f_{|\Omega_2}} v dx \\
& \qquad - \int_{\Gamma_i} \beta\frac{\partial u_2}{\partial n} v dx
\end{aligned}$$

$$\iff 0 = \int_{\Gamma_i} \alpha \frac{\partial u_1}{\partial n} - \beta \frac{\partial u_2}{\partial n} v dx$$

$$\Longrightarrow \alpha \frac{\partial u_1}{\partial n}_{|\Gamma_i} = \beta \frac{\partial u_2}{\partial n}_{|\Gamma_i} \ (\mathcal{C}) \text{ car ceci est valable } \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

2.3.2 Démonstration de la réciproque

Soit $u_1 \in H^1(\Omega_1)$, $u_2 \in H^1(\Omega_2)$ vérifiant $(\mathcal{E})$ et $(\mathcal{C})$.

Prenons alors $u = u_1 \mathbb{I}_{\Omega_1} + u_2 \mathbb{I}_{\Omega_2}$

Nous remarquons que nous avons la continuité sur la frontière, cela vient de :

$$u_{|\Gamma_i} = u_{1|\Gamma_i} = u_{2|\Gamma_i}$$

Par conséquent, $u \in H^1(\Omega)$. De plus, on en déduit que $u \in H_0^1(\Omega)$, car nous prenons $u_{1|\Gamma_e} = 0$

Donc $\forall v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega a_{\alpha,\beta} \nabla u \nabla v dx &= \int_{\Omega_1} \underbrace{-\alpha \Delta u_1}_{f_{|\Omega_1}} v dx - \int_{\Gamma_e} \alpha \frac{\partial u_1}{\partial n} \underbrace{v}_{=0} dx + \int_{\Gamma_i} \alpha \frac{\partial u_1}{\partial n} v dx + \int_{\Omega_2} \underbrace{-\beta \Delta u_2}_{f_{|\Omega_2}} v dx \\
&\quad - \int_{\Gamma_i} \beta \frac{\partial u_2}{\partial n} v dx \\
&= \int_{\Omega_1} f_{|\Omega_1} v dx + \int_{\Omega_2} f_{|\Omega_2} v dx \\
&= \int_\Omega f v dx
\end{aligned}$$

Pour conclure, u solution du problème variationnel $(\mathcal{PV}_{\alpha,\beta})$ est équivalent à u solution du problème $(\mathcal{P}_{\alpha,\beta})$.

Dans toute la suite du projet, nous considérerons que $f = 0$ dans $\Omega_2, \alpha = 1, \beta = \varepsilon$, et on pose $a_{\alpha,\beta} = a_{1,\varepsilon} = a_\varepsilon$.

Le problème $(\mathcal{P}_{\alpha,\beta})$ sera noté $(\mathcal{P}_\varepsilon)$. On notera u_ε la solution de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ correspondant à ces données.

3 Étude du deuxième problème

Nous allons dans cette partie nous intéresser à un cas particulier que l'on résoudra par une approche variationnelle. Ce problème est le suivant :

$$\begin{gathered}\text{Pour } g \in H^{1/2}(\Gamma_i),\\ \text{Déterminer } v \in H^1(\Omega_2), \text{ tel que}\\ -\Delta v = 0 \quad \text{dans } \Omega_2, \quad v|_{\Gamma_i} = g\end{gathered}$$

3.1 Existence et Unicité de la solution

3.1.1 Problème variationnel

Comme pour le premier problème, nous cherchons à le mettre sous la forme variationnelle. Cependant, nous ne sommes pas sur un espace vectoriel ; par conséquent, nous devons réaliser un relèvement. Nous cherchons donc $v = \widetilde{v} + p$ où $\widetilde{v} \in H_0^1(\Omega_2)$ et $p \in \{u \in H^1(\Omega_2) | u_{|\Gamma_i}\}$ connue.

Soit $w \in H_0^1(\Omega_2)$,

$$\begin{aligned}-\int_{\Omega_2} \Delta v w dx &= \int_{\Omega_2} \nabla v \nabla w dx - \int_{\Gamma_i} \frac{\partial v}{\partial N} w ds\\ &= \int_{\Omega_2} \nabla \widetilde{v} \nabla w dx + \int_{\Omega_2} \nabla p \nabla w dx\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons le problème variationnel réduit suivant :

$$\begin{gathered}\text{Chercher } \widetilde{v} \in H_0^1(\Omega_2) \text{ tel que}\\ b(\widetilde{v}, w) = \int_{\Omega_2} \nabla \widetilde{v} \nabla w dx = -\int_{\Omega_2} \nabla p \nabla w dx = l(w), \ \forall w \in H_0^1(\Omega_2)\end{gathered}$$

3.1.2 Continuité de b

Montrons que b est continue.

Soit $v, w \in H_0^1(\Omega_2)$,

$$\begin{aligned} &\overset{Cauchy\ Schwarz}{|b(v,w)|} \leq \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_2)} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega_2)} \\ &\leq \|\nabla v\|_{H^1(\Omega_2)} \|\nabla w\|_{H^1(\Omega_2)} \end{aligned}$$

Par conséquent, b est continue.

3.1.3 Coercivité de b

Nous pouvons montrer maintenant que b est coercive et le faisons de la manière suivante :

Soit $v \in H_0^1(\Omega_2)$,

$$\begin{aligned} b(v,v) &= \int_{\Omega_2} (\nabla v)^2 dx \\ &> min(\frac{1}{2}, \frac{1}{2c^2}) \|v_{|\Omega_2}\|^2_{H^1(\Omega_2)} \end{aligned}$$

Nous avons donc b continue coercive. Afin d'entrer dans le cadre du théorème de Lax-Milgram, il reste à montrer la continuité de l.

3.1.4 Continuité de l

Montrons maintenant la continuité de l. Pour ce faire, nous réalisons les opérations suivantes :

Soit $w \in H_0^1(\Omega_2)$,

$$\begin{aligned} |l(w)| &= |\int_{\Omega_2} \nabla p \nabla w dx| \\ &\leq \|p\|_{H^1(\Omega_2)} \|w\|_{H^1(\Omega_2)} \end{aligned}$$

Par conséquent l est continue.

3.1.5 Existence et Unicité

Pour résumer ce que nous avons vu jusqu'à présent, nous avons un problème variationnel sur l'espace $H_0^1(\Omega)$ qui est Hilbertien, avons b qui est une forme bi-linéaire continue coercive et l qui est une forme linéaire continue.

Nous sommes par conséquent dans le cadre du théorème de Lax Milgram et pouvons en déduire à l'aide de ce théorème qu'il existe un unique $v \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\forall w \in H^1(\Omega),\ b(v,w) = l(w)$$

3.2 Propriété de la solution du problème

Nous pouvons chercher une propriété de la solution du problème.

Soit $v = \widetilde{v} + p$ solution du problème.
Soit $w \in H_0^1(\Omega_2)$

Nous avons donc :

$$\int_{\Omega_2} \nabla\widetilde{v}\nabla w dx = -\int_{\Omega_2} \nabla p \nabla w dx$$

En prenant, $w = \widetilde{v}$, nous avons alors

$$\int_{\Omega_2} (\nabla\widetilde{v})^2 dx = -\int_{\Omega_2} \nabla p \nabla w dx$$

Donc

$$\begin{aligned} min(\frac{1}{2}, \frac{1}{2c^2})\|\widetilde{v}\|^2_{L^2(\Omega_2)} &\leq \|\widetilde{v}\|^2_{L^2(\Omega_2)} \\ &\leq \|p\|_{H^1(\Omega_2)}\|\widetilde{v}\|_{L^2(\Omega_2)} \\ &\leq \|p\|_{H^1(\Omega_2)}\|\widetilde{v}\|_{H^1(\Omega_2)} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|\widetilde{v}\|_{H^1(\Omega_2)} \leq \underbrace{K}_{constante} \|p\|_{H^1(\Omega_2)}$$

Or

$$\begin{aligned} \|v\|_{H^1(\Omega_2)} &= \|\widetilde{v} + p\|_{H^1(\Omega_2)} \\ &\leq \|\widetilde{v}\|_{H^1(\Omega_2)} + \|p\|_{H^1(\Omega_2)} \\ &\leq (K+1)\|p\|_{H^1(\Omega_2)} \end{aligned}$$

et ce

$$\forall p \in u \in H^1(\Omega_2) | u_{|\Gamma_i} = g = H_g(\Omega_2)$$

En particulier nous avons donc

$$\|v\|_{H^1(\Omega_2)} \leq C_2 \inf_{p \in H_g(\Omega_2)} \|p\|_{H^1(\Omega_2)} = C_2\|g\|_{H^{1/2}(\Omega_2)}$$

Si l'on s'intéresse à u_ϵ solution de $(\mathcal{P}_\epsilon)$, nous avons alors $\forall v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega a_\epsilon \nabla u_\epsilon \nabla v dx = \int_\Omega f v dx$$

Nous avons vu précédemment que si u_ϵ était solution de $(\mathcal{P}_\epsilon)$ alors $u_1 = u_{\epsilon|\Omega_1}$ et $u_2 = u_{\epsilon|\Omega_2}$ vérifiant $(\mathcal{E})$ et $(\mathcal{C})$.

En particulier nous avons donc si $u_2 \in H^1(\Omega_2)$

$$\begin{aligned} -\beta\Delta u_2 &= -\epsilon\Delta u_2 \\ &= f_{|\Omega_2} \\ &= 0 \\ &\Longrightarrow -\Delta u_2 = 0 \; dans \; \Omega_2 \end{aligned}$$

De plus,

$$u_{2|\Gamma_i} = u_{1|\Gamma_i} = u_{\epsilon|\Gamma_i} \in H^{1/2}(\Gamma_i)$$

Nous pouvons alors en déduire que

$$\|u_2\|_{H^1(\Omega_2)} = \|u_{\epsilon|\Omega_2}\|_{H^1(\Omega_2)} \leq C_2\|u_{1|\Gamma_i}\|_{H^{1/2}(\Gamma_i)}$$

Or d'après ce que l'on a montré plus tôt dans le projet, nous savons que

$$\|u_{1|\Gamma_i}\|_{H^1(\Omega_1)} \leq C_1\|f\|_{L^2(\Omega_1)}$$

Nous pouvons en conclure que nous trouvons finalement

$$\|u_{\epsilon|\Omega_2}\|_{H^1(\Omega_2)} \leq C_2C_1\|f\|_{L^2(\Omega_1)} = C_3\|f\|_{L^2(\Omega_1)}$$

4 Étude des derniers problèmes

Dans cette dernière partie nous allons utiliser une approche variationnelle pour ces problèmes qui clôtureront notre projet.

4.1 Existence et unicité de la solution du premier problème

Pour commencer, nous étudierons le premier problème $(\mathcal{P}_0)$ suivant :

$$\begin{gathered} \text{Déterminer } u \in H^1(\Omega_1) \text{ tel que} \\ -\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega_1, \quad u|_{\Gamma_e} = 0, \quad \tfrac{\partial u}{\partial n}\big|_{\Gamma_i} = 0 \end{gathered}$$

4.1.1 Problème variationnel

Comme pour les deux autres problèmes, nous allons débuter notre étude par la mise sous forme variationnelle de notre problème. Pour ce faire, nous faisons comme suit :

Soit $v \in \{u \in H^1(\Omega_1) | u_{|\Gamma_e} = 0\}$, nous avons

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega_1} \Delta u v dx &= \int_{\Omega_1} f v dx \\ \Longleftrightarrow \int_{\Omega_1} \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial u}{\partial N} v \; ds &= \int_{\Omega_1} f v dx \\ \Longleftrightarrow \int_{\Omega_1} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Gamma_e} \frac{\partial u}{\partial(-n)} v \; ds + \int_{\Gamma_i} \frac{\partial u}{\partial n} * v dx &= \int_{\Omega_1} f v dx \\ \Longleftrightarrow \int_{\Omega_1} \nabla u \nabla v dx &= \int_{\Omega_1} f v dx \\ \text{car v=0 sur } \Gamma_e & \end{aligned}$$

Le problème variationnel s'écrit alors :

$$\text{Déterminer } v \in H^1(\Omega_1) \text{ tel que}$$
$$a_2(u,v) = \int_{\Omega_1} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega_1} f v dx = L_2(v)$$

4.1.2 Existence et unicité

Nous avons précédemment vu dans la première partie du projet des résultats qui nous permettent d'en déduire que a_2 et L_2 satisfont les conditions du théorème de Lax Milgram. Par conséquent, comme $\{u \in H^1(\Omega_1) | u_{|\Gamma_e} = 0\}$ est hilbertien, nous pouvons en déduire :

$$\exists! \; solution \; u_0 \in \{u \in H^1(\Omega_1) | u_{|\Gamma_e} = 0\}$$

4.2 Existence et unicité du second problème

Pour terminer, nous étudierons le second problème suivant :

$$\text{Déterminer } v \in H^1(\Omega_2) \text{ tel que}$$
$$-\Delta v = 0 \quad \text{dans } \Omega_2, \quad v|_{\Gamma_i} = u_0|_{\Gamma_i}$$

4.2.1 Problème variationnel

Pour ce dernier problème nous allons également le mettre sous la forme variationnelle. Cependant, nous ne travaillons pas ici sur un espace vectoriel ; par conséquent, nous devons réaliser un relèvement.

Pour ce faire, nous posons $v = v_1 + r$ avec $v_1 \in H_0^1(\Omega_2)$ et $r \in H^1(\Omega_2)$ connue tel que $r_{|\Gamma_i} = u_{0|Gamma_i}$.

Soit $w \in \{u \in H^1(\Omega_2) | u_{|\Gamma_i} = u_{0|\Gamma_i}\}$,

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega_2} \Delta v w dx = 0 &\iff \int_{\Omega_2} \nabla v \nabla w dx - \int_{\Gamma_i} \frac{\partial v}{\partial N} w ds = 0 \\
&\iff \int_{\Omega_2} \nabla (v_1 + r) \nabla w dx - \int_{\Gamma_i} \frac{\partial (v_1 + r)}{\partial N} w ds = 0 \\
&\iff \int_{\Omega_2} (\nabla v_1 + \nabla r) \nabla w dx - \underbrace{\int_{\Gamma_i} (\frac{\partial v_1}{\partial N} + \frac{\partial r}{\partial N}) w ds}_{=0} = 0 \\
&\iff \int_{\Omega_2} \nabla v_1 \nabla w dx = - \int_{\Omega_2} \nabla r \nabla w ds
\end{aligned}$$

Nous avons donc le problème variationnel suivant :

$$\text{Déterminer } v_1 \in H_0^1(\Omega_2) \text{ tel que}$$
$$\int_{\Omega_2} \nabla v_1 \nabla w dx = - \int_{\Omega_2} \nabla r \nabla w ds$$

4.2.2 Existence et unicité

Nous avons déjà vu précédemment au cours du projet des résultats qui nous permettent d'en déduire que a_3 et L_3 satisfont les conditions du théorème de Lax Milgram. Par conséquent, comme $\{u \in H^1(\Omega_2) | u_{|\Gamma_i}\}$ est hilbertien, nous pouvons en déduire :

$$\exists! \; solution \; v_0 \in \{u \in H^1(\Omega_2) | u_{|\Gamma_i} = 0\}$$

4.3 Relation entre u_0 et v_0

Nous pouvons à présent nous intéresser à extraire des deux problèmes précédents une relation entre les solutions u_0 et v_0.

Soit u_ϵ solution de $(\mathcal{P}_\epsilon)$
Par conséquent,

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega_1} \nabla u_\epsilon \nabla v dx + \int_{\Omega_2} \epsilon \nabla u_\epsilon \nabla v dx = \int_{\Omega_1} f v dx$$

De plus, soit u_0 solution de $(\mathcal{P}_0)$
Par conséquent,

$$\forall v \in \{u \in H^1(\Omega_1) | u_{|\Gamma_e} = 0\}, \int_{\Omega_1} \nabla u_0 \nabla v dx = \int_{\Omega_1} f v dx$$

Nous pouvons alors poser $v = \mathbb{I}_{\Omega_1}(u_0 - u_\epsilon) + \mathbb{I}_{\Omega_2}(v_0 - u_\epsilon)$, nous remarquons alors que

$$v \in (H_0^1(\Omega) \cap \{u \in H^1(\Omega_1) | u_{|\Gamma_e} = 0\})$$

Donc nous avons,

$$\int_{\Omega_1} \nabla u_\epsilon \nabla (u_0 - u_\epsilon) dx + \epsilon \int_{\Omega_2} \nabla u_\epsilon \nabla (v_0 - u_\epsilon) dx = \int_{\Omega_1} \nabla u_0 \nabla (u_0 - u_\epsilon) dx$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\epsilon \int_{\Omega_2} \nabla u_\epsilon \nabla (v_0 - u_\epsilon) dx = \int_{\Omega_1} |\nabla u_0 - \nabla u_\epsilon|^2 dx$$

Avant de continuer à aller plus loin dans notre raisonnement, il nous faut rappeler certains résultats.

$$\begin{aligned} \|u_{\epsilon|\Omega_1}\|_{H^1(\Omega_1)} &\leq C_1 \|f\|_{L^2(\Omega_1)} \\ \|u_{\epsilon|\Omega_2}\|_{H^1(\Omega_2)} &\leq C_3 \|f\|_{L^2(\Omega_1)} \\ \|v_0\|_{H^1(\Omega_2)} &\leq C_4 \|f\|_{L^2(\Omega_1)} \end{aligned}$$

D'un coté nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} |\nabla u_0 - \nabla u_\epsilon|^2 dx &= \|\nabla u_0 - \nabla u_\epsilon\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \\ &\geq \underbrace{min(\frac{1}{2}, \frac{1}{2c^2})}_{m} \|u_{\epsilon|\Omega_1} - u_0\|_{H^1(\Omega_1)}^2 \end{aligned}$$

D'un autre coté nous avons,

$$\begin{aligned}
\epsilon \int_{\Omega_2} \nabla u_\epsilon (\nabla v_0 - \nabla u_\epsilon) dx &\overset{\textit{Cauchy Schwarz}}{\leq} \epsilon \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2(\Omega_2)} \|\nabla v_0\|_{L^2(\Omega_2)} - \epsilon \|\nabla u_\epsilon\|^2_{L^2(\Omega_2)} \\
&\leq \epsilon \|u_\epsilon\|_{H^1(\Omega_2)} \|v_0\|_{H^1(\Omega_2)} - m\epsilon \|u_\epsilon\|^2_{H^1(\Omega)} \\
&\leq \epsilon C_3 C_4 \|f\|^2_{L^2(\Omega_1)} - \underbrace{m\epsilon \|u_\epsilon\|^2_{H^1(\Omega_2)}}_{\geq 0} \\
&\leq \epsilon C_3 C_4 \|f\|^2_{L^2(\Omega_1)}
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons donc

$$\|u_{\epsilon|\Omega_1} - u_0\|^2_{H^1(\Omega_1)} \leq \epsilon \underbrace{\frac{C_3 C_4}{m}}_{C_5(indep\ de\ \epsilon)} \|f\|^2_{L^2(\Omega_1)}$$

En passant à la racine nous trouvons alors :

$$\|u_{\epsilon|\Omega_1} - u_0\|_{H^1(\Omega_1)} \leq \sqrt{\epsilon C_5} \|f\|_{L^2(\Omega_1)}$$

5 Conclusion

Nous avons étudié au cours de ce projet plusieurs problèmes : nous les avons résolus par une approche variationnelle. Cette approche était particulièrement appropriée pour la résolution de nos problèmes et pour l'obtention de propriétés sur ces problèmes.
Pour un futur projet, il serait intéressant de réaliser un exemple de ces problèmes dans le cadre d'un problème de mécanique afin de pouvoir le modéliser numériquement.