Solução do Desafio da Semana

Séries Temporais I – Data: 31 de outubro de 2025

Nome: Wendy Nascimento Silva

Matrícula: 2022101089

Desafio 2: Condição de Estabilidade do Preço
Considerando o sistema:

$$\begin{aligned} D_t &= \alpha_0 - \alpha_1 P_t, \qquad \alpha_0 > 0,\ \alpha_1 > 0, && (1)\\ O_t &= \beta_0 + \beta_1 P_t, \qquad \beta_0 < 0,\ \beta_1 > 0, && (2)\\ P_{t+1} &= P_t - \gamma\,(O_t - D_t), \qquad \gamma > 0, && (3) \end{aligned}$$

onde D_t e O_t são, respectivamente, demanda e oferta no período t, e P_t é o preço no período t. O parâmetro γ mede a intensidade do ajuste de preço em função do excesso de oferta (ou demanda).

Substituição de D_t e O_t na equação de ajuste
Substituindo (1) e (2) em (3):

$$\begin{aligned} P_{t+1} &= P_t - \gamma\big[(\beta_0 + \beta_1 P_t) - (\alpha_0 - \alpha_1 P_t)\big]\\ &= P_t - \gamma\big[(\beta_0 - \alpha_0) + (\beta_1 + \alpha_1) P_t\big]. \end{aligned}$$

Agrupando os termos em P_t:

$$P_{t+1} = \big(1 - \gamma(\beta_1 + \alpha_1)\big) P_t \ - \ \gamma(\beta_0 - \alpha_0). \tag{4}$$

Preço de equilíbrio P^*
No equilíbrio estacionário $P_{t+1} = P_t = P^*$. Substituindo em (4):

$$P^* = \big(1 - \gamma(\beta_1 + \alpha_1)\big) P^* - \gamma(\beta_0 - \alpha_0).$$

Rearranjando os termos:

$$\gamma(\beta_1 + \alpha_1) P^* = -\gamma(\beta_0 - \alpha_0).$$

Como $\gamma > 0$, segue

$$P^* = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\alpha_1 + \beta_1}. \tag{5}$$

Dinâmica dos desvios em relação ao equilíbrio
Defina o desvio em relação ao equilíbrio por

$$p_t \coloneqq P_t - P^*.$$

Subtraindo P^* em ambos os lados de (4) e usando que P^* satisfaz (5), obtém-se a equação homogênea para o desvio:

$$p_{t+1} = \big(1 - \gamma(\beta_1 + \alpha_1)\big)\, p_t. \tag{6}$$

Esta é uma recorrência linear de primeira ordem. A solução geral é

$$p_t = \big(1 - \gamma(\beta_1 + \alpha_1)\big)^t\, p_0,$$

onde p_0 é o desvio inicial.

Condição de estabilidade assintótica
Para que P_t convirja para P^* quando $t \to \infty$ (estabilidade assintótica), é necessário e suficiente que o fator multiplicativo satisfaça

$$\big|1 - \gamma(\beta_1 + \alpha_1)\big| < 1.$$

Resolvendo a desigualdade:

$$\begin{aligned} -1 &< 1 - \gamma(\beta_1 + \alpha_1) < 1 \\ &\implies -2 < -\gamma(\beta_1 + \alpha_1) < 0 \\ &\implies 0 < \gamma(\beta_1 + \alpha_1) < 2. \end{aligned}$$

Como $\beta_1 + \alpha_1 > 0$, dividimos por esse termo e obtemos a condição necessária e suficiente para estabilidade assintótica dos preços:

$$\boxed{0 < \gamma < \frac{2}{\alpha_1 + \beta_1}} \tag{7}$$

onde $\alpha_1 > 0$ e $\beta_1 > 0$ são as inclinações das funções de demanda e oferta, respectivamente.

Interpretação

- O parâmetro γ representa a velocidade (ou intensidade) do ajuste de preço em resposta ao excesso de oferta/escassez.
- Se γ satisfaz (7), então os desvios em relação ao equilíbrio decaem geometricamente e o preço converge para P^*.
- Se $\gamma = \dfrac{2}{\alpha_1 + \beta_1}$, a sequência P_t oscila (módulo 1) e não converge (caso de fronteira: os desvios alternam com mesma magnitude).
- Se $\gamma > \dfrac{2}{\alpha_1 + \beta_1}$, o fator multiplicativo tem módulo maior que 1, ocasionando oscilações divergentes (instabilidade): os preços oscilam com amplitude crescente.