



UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ARRAIAS  
CURSO DE MATEMÁTICA

WENES GOMES AQUINO

*Geometria Diferencial das Curvas Planas e a Desigualdade  
Isoperimétrica*

Arraias  
2012.

WENES GOMES AQUINO

*Geometria Diferencial das Curvas Planas e a Desigualdade  
Isoperimétrica*

Monografia apresentada ao Curso de  
Matemática da UFT, como requisito  
para a obtenção parcial do grau de  
LICENCIADO em Matemática.

**Orientador: Hudson Pina de Oliveira**

**Mestre em Matemática - UnB**

Arraias

2012.

WENES GOMES AQUINO

*Geometria Diferencial das Curvas Planas e a Desigualdade  
Isoperimétrica*

Monografia apresentada ao Curso de  
Matemática da UFT, como requisito  
para a obtenção parcial do grau de  
LICENCIADO em Matemática.

Aprovado em 17 de 02 de 2012

**BANCA EXAMINADORA**

---

Hudson Pina de Oliveira

Mestre em Matemática - UnB

---

Élis Gardel da Costa Mesquita

Mestre em Matemática - UnB

---

Fernando Sores de Carvalho

Mestre em Matemática - UFG

*A minha filha Gabriele, meus pais e irmãos.*

*Aos amigos, pelo apoio e companheirismo.*

## Resumo

Este trabalho visa uma introdução ao estudo de geometria diferencial das curvas planas com o objetivo de demonstrar o teorema fundamental das curvas planas e a desigualdade isoperimétrica, que é um dos primeiros problemas de característica global das curvas planas. As principais referências para o desenvolvimento deste trabalho são os livros de Manfredo Perdigão, Ketten Tenenblat e Hilário Alencar.

*Palavras-chaves:* Geometria diferencial, Desigualdade isoperimétrica, Fórmulas de Frenet.

## Agradecimentos

A DEUS pelo dom da vida, pela fé e perseverança para vencer os obstáculos. Aos meus pais, pela orientação, dedicação e incentivo nessa fase do meu curso de graduação e durante toda minha vida. Aos meus irmãos, que sempre estão dispostos a ajudar no que for necessário. Aos professores e colegas que colaboraram com as diversas discussões sobre a prática docente. Aos meus alunos de estágio, pelo respeito e carinho que tiveram e tem por mim sempre que me encontram. Aos professores do colegiado curso de matemática pelos seus ensinamentos e aos funcionários do curso, que durante esses anos, contribuíram de algum modo para o nosso enriquecimento pessoal e profissional. Ao professor Hudson pela orientação, amizade e principalmente, pela paciência, sem a qual este trabalho não se realizaria. Enfim, sou grato a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para realização deste trabalho.

*”Chegar a um denominador comum*

*Dá as coordenadas*

*Aparar as arestas*

*Sair pela tangente*

*Ver de outro ângulo*

*Retidão de caráter*

*O xis da questão*

*O círculo íntimo*

*A esfera do poder*

*Possibilidades infinitas*

*Perdas incalculáveis*

*Numa fração de segundos*

*No meio do caminho*

*Encontramos: semelhança,*

*equivalência, estrutura,*

*função, categoria”*

*Nilton José Machado*

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>6</b>
<b>1 Curvas Planas</b>	<b>7</b>
1.1 Curva Parametrizada Diferenciável . . . . .	7
1.2 Vetor Tangente; Curva Regular . . . . .	10
1.3 Reparametrização; Comprimento de Arco . . . . .	16
1.4 Campo de Vetores ao Longo de Curvas . . . . .	21
1.5 Teoria Local das Curvas Planas; Fórmulas de Frenet . . . . .	23
1.6 Interpretação Geométrica do Sinal da Curvatura . . . . .	30
1.7 Raio de Curvatura e Círculo Osculador . . . . .	30
1.8 Interpretação Geométrica da Curvatura . . . . .	32
1.9 Teorema Fundamental das Curvas Planas . . . . .	33
1.10 Determinando Curvas Regulares a Partir da Curvatura . . . . .	34
<b>2 Desigualdade Isoperimétrica</b>	<b>38</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>45</b>



## Introdução

A razão para o tema proposto está em complementar e expandir o conteúdo trabalhado nos cursos de cálculo diferencial e equações diferenciais, dando ferramentas de extrema importância para o avanço nos campos mais abstratos da Geometria Diferencial. Apresentaremos diversas características das curvas planas, onde serão analisados os comportamentos e propriedades básicas de algumas curvas, de forma clara e precisa, melhorando a compreensão de como esses traços são construídos e dando-lhe interpretações geométricas. Essencialmente, utilizaremos derivadas de primeira, segunda e terceira ordem e algumas noções elementares de Geometria Diferencial. Existem inúmeras maneiras de se obter curvas planas, isto se deve ao fato de que podemos representar curvas no plano de diversas formas. A mais conhecida é a representação paramétrica, pois estudos sobre curvas planas representadas parametricamente são bem conhecidos e facilmente encontrados em livros clássicos de Geometria Diferencial.

Como conclusão, fazemos uma abordagem de um problema clássico da matemática, o problema isoperimétrico, que surge do seguinte problema: *De todas as curvas fechadas simples no plano, de comprimento  $l$ , qual limita a maior área?* O problema dessa forma, já era conhecido pelos gregos, que também conheciam sua solução, um *círculo*. No entanto, demorou um longo tempo para que surgisse uma prova satisfatória para o fato do círculo ser uma solução do problema isoperimétrico. Apenas 1870, que K. Weierstrass deu uma prova completa da existência de uma solução, que surgiu como corolário de uma teoria desenvolvida por ele, na área de cálculo variacional. Mais tarde algumas provas mais diretas foram encontradas. A que apresentaremos aqui é devida a E. Schmidt (1939).

# Capítulo 1

## Curvas Planas

Intuitivamente, gostaríamos de pensar em uma curva no plano como um subconjunto que *tenha dimensão igual a 1*, por exemplo, o gráfico de funções de uma variável real ou figuras “*desenhadas*” com um único traço, sem tirar o lápis do papel. De forma um pouco mais precisa, uma curva é uma deformação contínua de um intervalo, ou ainda, a trajetória de um deslocamento de uma partícula no plano.

### 1.1 Curva Parametrizada Diferenciável

Nesta seção vamos estudar localmente uma curva  $\alpha$  no plano, isto é, fixado  $t_0$ , estudaremos como a curva  $\alpha(t)$  se comporta para valores de  $t$  próximos de  $t_0$ . Uma curva no plano é descrita dando-se as coordenadas de seus pontos como funções de uma variável independente.

**Definição 1.1.1.** Uma *curva parametrizada diferenciável* do plano é uma aplicação  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que a cada  $t \in I$  associa  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  onde as funções  $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$  são funções diferenciáveis de classe  $C^\infty$ , de um intervalo aberto  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^2$ . A variável  $t \in I$  é dita parâmetro da curva e o subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  dos pontos  $\alpha(t)$  (ver Figura 1.1).

O *traço* de  $\alpha$  é a imagem da aplicação  $\alpha$ :

$$\text{Traço } (\alpha) = \text{Im}(\alpha) = \{\alpha(t) \in \mathbb{R}^2 : t \in I\}.$$

O *gráfico* de  $\alpha$  é o conjunto

$$\text{Gráfico } (\alpha) = \{(t, \alpha(t)) \in \mathbb{R}^3 : t \in I\}$$

que, obviamente, é diferente do traço de  $\alpha$ .

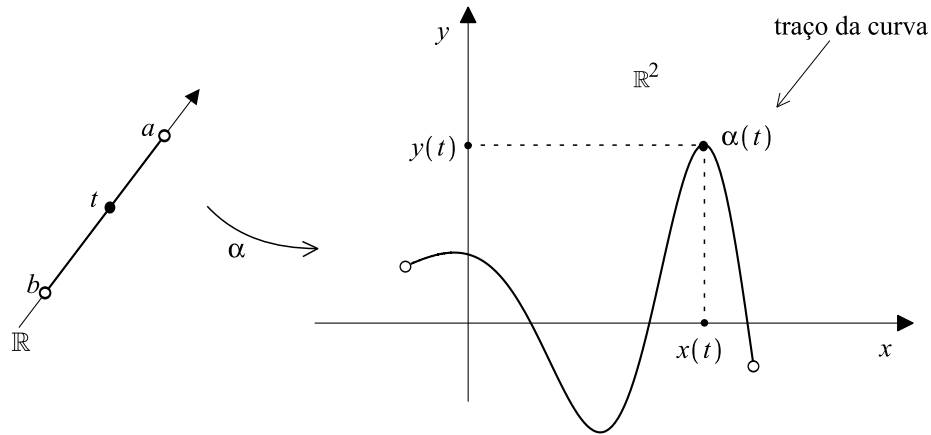


Figura 1.1: Curva parametrizada diferenciável

Observamos que uma curva parametrizada diferenciável do plano é uma aplicação  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  que a cada  $t$  associa  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , onde as funções  $x(t)$  e  $y(t)$  são diferenciáveis de classe  $C^\infty$ . Neste trabalho iremos denotar curva parametrizada diferenciável como *curva parametrizada*.

Vejamos alguns exemplos:

**Exemplo 1.1.1.** A aplicação  $\alpha : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in (0, 2\pi),$$

é uma curva parametrizada cujo traço é uma *circunferência* de centro na origem de raio igual a 1, menos um ponto. (ver Figura 1.2).

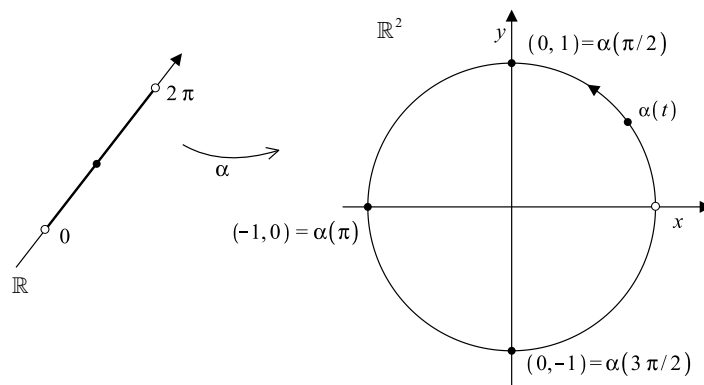


Figura 1.2: Circunferência

**Exemplo 1.1.2.** A aplicação  $\alpha : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\alpha(t) = (\cos t(2 \cos t - 1), \sin t(2 \cos t - 1)), \quad t \in [0, 2\pi),$$

é uma curva parametrizada cujo traço é um *cardióide* (ver Figura 1.3).

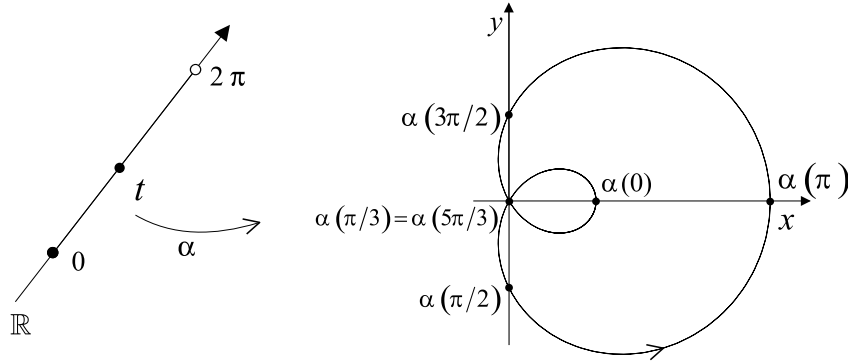


Figura 1.3: Cardióide

**Exemplo 1.1.3.** A aplicação  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\alpha(t) = (t, |t|), \quad t \in \mathbb{R},$$

não é uma curva parametrizada, já que  $|t|$  não é diferenciável em  $t = 0$ . Porém a restrição de  $\alpha$ , a qualquer intervalo que não contém o ponto  $t = 0$ , é uma curva parametrizada (ver Figura 1.4).

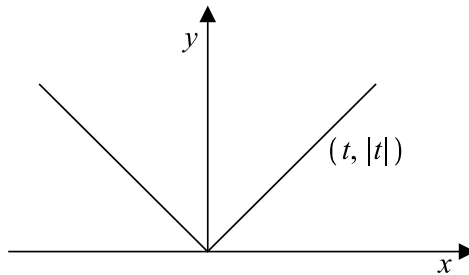


Figura 1.4: Módulo

Duas curvas parametrizadas podem ter o mesmo traço.

**Exemplo 1.1.4.** Considere

$$\alpha(t) = (t, 2t) \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad \beta(r) = (2r + 1, 4r + 2), \quad r \in \mathbb{R}.$$

Estas curvas tem o *mesmo traço* que é uma reta passando pela origem na direção do vetor  $(1, 2)$  (ver Figura 1.5).

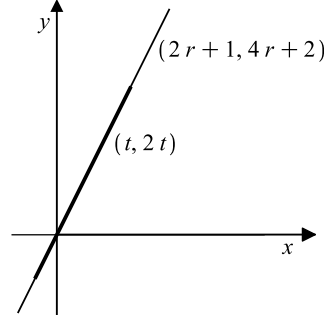


Figura 1.5: Curva com o mesmo traço

## 1.2 Vetor Tangente; Curva Regular

Para definirmos curva regular, precisamos definir o que é seu vetor tangente em cada ponto.

**Definição 1.2.1.** Seja  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada, que para cada  $t \in I$  associa  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . Do Cálculo Diferencial temos que

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$$

é chamado o *vetor tangente* a  $\alpha$  em  $t$ .

A definição de vetor tangente coincide com a noção intuitiva que temos de um vetor tangente a uma curva, isto é, um vetor cuja direção é a direção limite de cordas, determinadas por um ponto  $\alpha(t)$  e pontos próximos  $\alpha(t+h)$ , quando  $h$  tende para zero. De fato, fixado  $t \in I$ , para  $h \neq 0$  tal que  $t+h \in I$ ,

$$\frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h}$$

é o vetor de  $\alpha(t)$  a  $\alpha(t+h)$  multiplicado pelo escalar  $\frac{1}{h}$  (ver Figura 1.6). Observe que

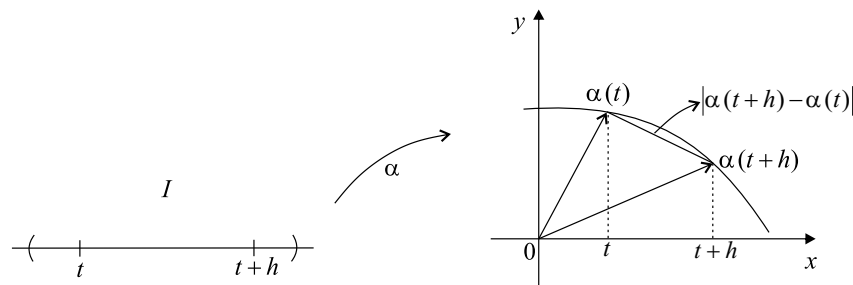


Figura 1.6: Vetor tangente.

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h}$  é exatamente a definição da derivada da função  $\alpha$  em  $t$ .

**Exemplo 1.2.1.** Considere  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\alpha(t) = (\cos t(2 \cos t - 1), \sin t(2 \cos t - 1)),$$

uma curva parametrizada. O vetor tangente por definição é a derivada da curva  $\alpha(t)$ , sabendo disto temos,

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{d}{dt}(\cos t(2 \cos t - 1), \sin t(2 \cos t - 1)) \\ &= (-\sin t(2 \cos t - 1) - \cos t(2 \sin t), \cos t(2 \cos t - 1) + \sin t(-2 \sin t)) \\ &= (-2 \sin t \cos t + \sin t - 2 \cos t \sin t, 2 \cos^2 t - \cos t - 2 \sin^2 t) \\ &= (-\sin 2t + \sin t - \sin 2t, 2 \cos 2t - \cos t) \\ &= (\sin t - 2 \sin 2t, 2 \cos 2t - \cos t). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\alpha'(t) = (\sin t - 2 \sin 2t, 2 \cos 2t - \cos t)$$

é o vetor tangente a  $\alpha$  em  $t$ .

Observe que um vetor tangente a uma curva  $\alpha$  é definido no parâmetro  $t$ , e não no ponto  $\alpha(t)$ , pois, como podemos observar no Exemplo 1.2.1  $\alpha\left(\frac{\pi}{3}\right) = \alpha\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0$  (ver Figura 1.3) e, no entanto,  $\alpha'\left(\frac{\pi}{3}\right) \neq \alpha'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ . Portanto, o vetor tangente ao traço da curva na origem de  $\mathbb{R}^2$  não está bem definido.

Para o desenvolvimento da teoria local das curvas é necessário que exista reta tangente à curva  $\alpha$  para cada valor do parâmetro  $t$ . Para isso, é suficiente que o vetor tangente a  $\alpha$  não seja nulo para todo  $t$ . Portanto restringiremos o nosso estudo apenas às curvas que satisfazem esta condição. Estas curvas são definidas a seguir.

**Definição 1.2.2.** Uma curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita *regular* se para todo  $t \in I$ ,  $\alpha'(t) \neq (0, 0)$ .

**Definição 1.2.3.** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular. A *reta tangente* à  $\alpha$  em  $t_0 \in I$  é a reta que passa por  $\alpha(t_0)$ , na direção de  $\alpha'(t_0)$ , isto é dada pela função

$$g(r) = \alpha(t_0) + r\alpha'(t_0), \quad r \in \mathbb{R}$$

(ver Figura 1.7).

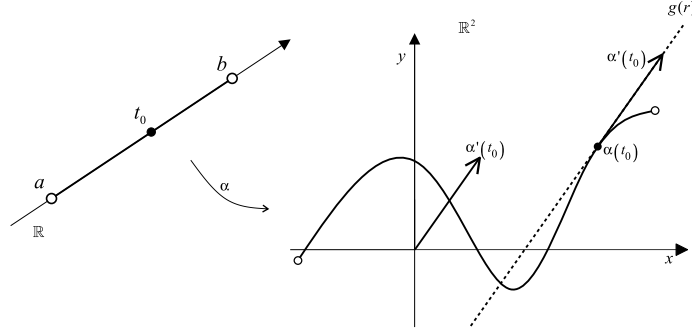


Figura 1.7: Vetor tangente e reta tangente a uma curva parametricada em um ponto.

**Exemplo 1.2.2.** Considere o círculo menos um ponto, a aplicação  $\alpha : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por,

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in (0, 2\pi).$$

Temos que  $\alpha$  é de classe  $C^\infty$  e

$$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq (0, 0), \quad \forall t \in (0, 2\pi).$$

Logo,  $\alpha$  é regular.

**Exemplo 1.2.3.** Consideremos a (*espiral logarítmica*) a aplicação  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\alpha(t) = e^t(\cos t, \sin t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(ver Figura 1.8) Temos que,

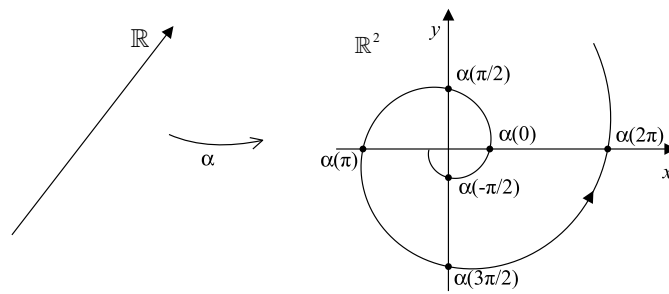


Figura 1.8: Espiral Logarítmica.

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases}$$

são de classe  $C^\infty$ . Além disso,  $\alpha'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t)$ . Assim

$$\begin{aligned}
\alpha'(t_0) = (0, 0) &\Leftrightarrow \begin{cases} e^{t_0} \cos t_0 - e^{t_0} \sin t_0 = 0 \\ e^{t_0} \sin t_0 + e^{t_0} \cos t_0 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \cos t_0 - \sin t_0 = 0 \\ \sin t_0 + \cos t_0 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \cos t_0 = \sin t_0 \\ \cos t_0 = -\sin t_0 \end{cases}
\end{aligned}$$

ou seja,  $\sin(t_0) = \cos(t_0)$ , que é uma contradição. Por consequência,  $\alpha'(t) \neq (0, 0)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Logo,  $\alpha$  é regular

**Exemplo 1.2.4.** Considere a *tratriz* a aplicação  $\alpha : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\alpha(t) = \left( \sin t, \cos t + \ln \left( \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) \right), \quad t \in (0, \pi).$$

(ver Figura 1.9)

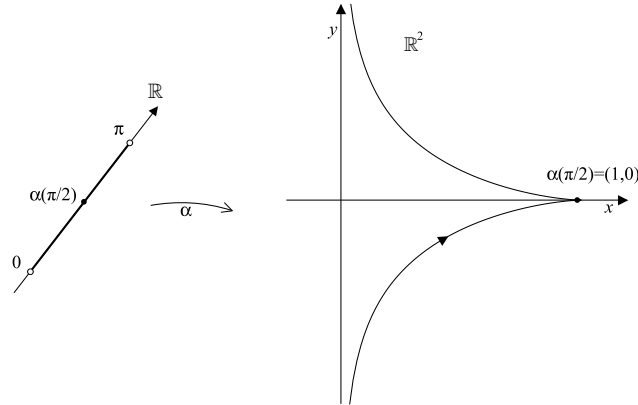


Figura 1.9: Tratriz.

Observamos que  $t \in (0, \pi)$  é equivalente a  $\frac{t}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Como  $\sin t$ ,  $\cos t$ ,  $\operatorname{tg} \frac{t}{2}$ ,  $\ln \left( \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right)$  estão definidas para  $t \in (0, \pi)$  e são de  $C^\infty$ .

Além disso,

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) &= \left( \cos t, -\sin t + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} \left( \sec^2 \frac{t}{2} \right) \frac{1}{2} \right) \\
&= \left( \cos t, -\sin t + \frac{1}{\sin t} \right).
\end{aligned}$$

Assim,



$$\begin{aligned}
\alpha'(t_0) = (0, 0) &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos t_0 = 0 \\ -\sin t_0 + \frac{1}{\sin t_0} = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \cos t_0 = 0 \\ \frac{-\sin^2 t_0 + 1}{\sin t_0} = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \cos t_0 = 0 \\ \sin^2 t_0 = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \cos t_0 = 0 \\ 1 - \cos^2 t_0 = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \cos t_0 = 0 \\ \cos^2 t_0 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow t_0 = \frac{\pi}{2}; \quad \{t \in (0, \pi)\}.
\end{aligned}$$

Logo,  $\alpha' \left( \frac{\pi}{2} \right) = (0, 0)$ , ou seja,  $\alpha$  não é regular.

Observamos que excluindo-se  $t = \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha$  seria regular.

*Observação 1.2.1.* Uma curva ser regular implica que seu traço tem reta tangente em todos os pontos e, portanto, não possui "pontas". No entanto, uma curva parametrizada cujo traço não possui "pontas" pode não ser regular. Mais ainda, duas curvas parametrizadas podem ter mesmo traço e uma ser regular e a outra não. Exemplo:

$$\alpha(t) = (t^3, t^3), \quad t \in \mathbb{R}$$

não é regular e

$$\beta(t) = (t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

é regular.

**Exemplo 1.2.5.** Um exemplo interessante de uma curva parametrizada regular, é dado por  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\alpha(t) = (t, f(t))$ , onde  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável. O traço de  $\alpha$  é igual ao gráfico de  $f(t)$ . Como  $\alpha'(t) = (1, f'(t)) \neq (0, 0), \forall t \in I$ ,  $\alpha$  é uma curva regular. Vamos mostrar que toda curva regular é dessa forma.

Uma demonstração do Teorema a seguir, pode ser visto em (GUIDORIZZI, 2002, p. 301).

**Teorema 1.2.1. (Teorema da Função Inversa)** *Seja*

$$F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

com  $\Omega$  aberto e  $F$  de classe  $C^k$  ( $1 \leq k < \infty$ ). Seja  $X_0 \in \Omega$  e seja  $Y_0 = F(X_0)$ . Nestas condições, se o determinante jacobiano de  $F$ , em  $X_0$ , for diferente de zero então existirá um aberto  $\Omega_1 \subset \Omega$ , com  $X_0 \in \Omega_1$ , tal que  $\Omega_2 = F(\Omega_1)$  será aberto, a restrição de  $F$  a  $\Omega_1$  será inversível e a inversa  $G$  será de classe  $C^k$  em  $\Omega_2$ .

**Proposição 1.2.1.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada e regular em  $t_0 \in I$ . Então, existe  $\delta_1 > 0$ , tal que, restrito ao intervalo  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ , o traço de  $\alpha$  coincide com o traço de uma curva  $\beta$  da forma  $\beta(t) = (t, f(t))$  ou  $\beta(t) = (f(t), t)$ , para uma função diferenciável  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ .*

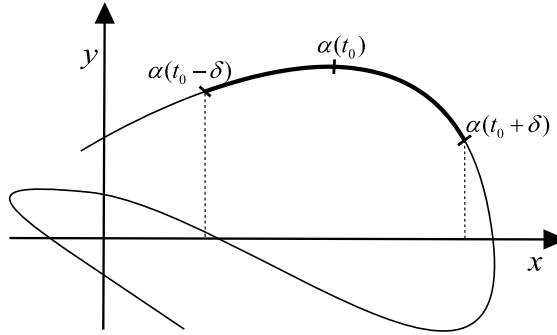


Figura 1.10: Traço de  $\alpha$  é igual ao traço de  $\beta$

*Demonstração.* Seja  $\alpha$  dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . Como  $\alpha$  é regular em  $t = t_0$ , temos que

$$\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0).$$

Vamos supor que  $x'(t_0) \neq 0$ . Nesse caso, pelo teorema da função inversa, existe um intervalo  $(t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1)$ , tal que a função  $x$  é um difeomorfismo, isto é, uma função diferenciável com inversa diferenciável, sobre  $J = x((t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1))$ . Seja  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\beta(t) = \alpha(x^{-1}(t))$ . Temos portanto, que  $\beta$  é uma curva diferenciável e

$$\beta(t) = (x(x^{-1}(t)), y(x^{-1}(t))) = (t, f(t)),$$

onde  $f$ , dada por  $f(t) = y(x^{-1}(t))$ , é uma função diferenciável. A prova, no caso em que  $y'(t_0) \neq 0$ , é análoga e, nesse caso, obtemos que o traço de  $\alpha$  coincide localmente em  $\alpha(t_0)$  com o traço de uma curva da forma  $\beta(t) = (f(t), t)$ .  $\square$

## 1.3 Reparametrização; Comprimento de Arco

Vamos definir a seguir como obter várias curvas tendo o mesmo traço.

**Definição 1.3.1.** Seja  $I$  e  $J$  intervalos abertos de  $\mathbb{R}$ ,  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular e  $h : J \rightarrow I$  uma função diferenciável ( $C^\infty$ ), cuja derivada de primeira ordem é não-nula em todos os pontos de  $J$  e tal que  $h(J) = I$ . Podemos então considerar uma nova curva  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por

$$\beta(t) = (\alpha \circ h)(t) = \alpha(h(t)).$$

A curva  $\beta$  é uma curva regular, que tem o mesmo traço que  $\alpha$ , chamada a *reparametrização de  $\alpha$  por  $h$* . A função  $h$  é dita *mudança de parâmetro* (ver Figura 1.11). Pela regra da cadeia, temos que

$$\beta'(t) = (x'(h(t))h'(t), y'(h(t))h'(t)),$$

ou ainda,

$$\beta'(t) = (\alpha \circ h)'(t) = \alpha'(h(t))h'(t).$$

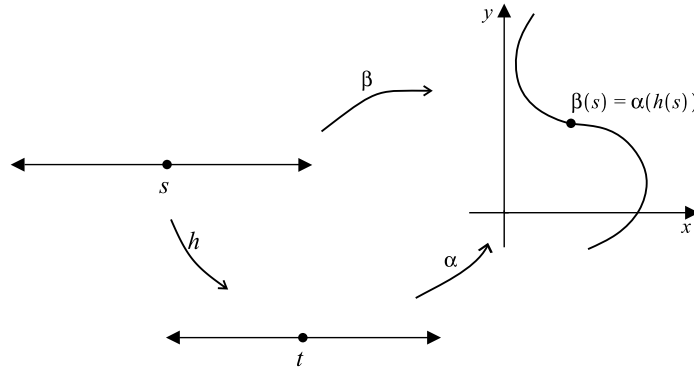


Figura 1.11: Reparametrização de  $\alpha$  por  $h$

**Definição 1.3.2.** A *orientação* de uma curva regular plana  $\alpha$  é o sentido de percurso do traço de  $\alpha$  (ver Figura 1.12).

**Exemplo 1.3.1.** Considere a circunferência de raio  $a$  dada por

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t), \quad t \in [0, 2\pi).$$

Seja  $h(s) = \frac{s}{a}$ ,  $s \in [0, 2\pi)$ . A reparametrização da curva  $\alpha$  por  $h$  é a curva

$$\beta(s) = \alpha \circ h(s) = \left( a \cos \frac{s}{a}, a \sin \frac{s}{a} \right).$$

Neste caso as curvas  $\alpha$  e  $\beta$  têm a mesma orientação.

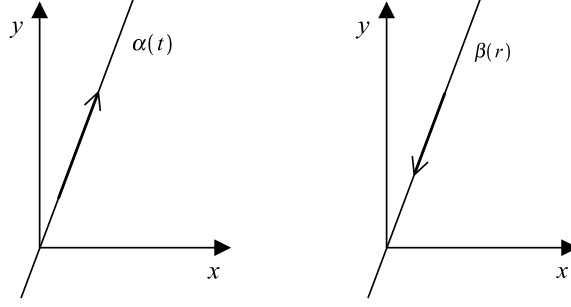


Figura 1.12: Orientação oposta

**Exemplo 1.3.2.** A curva regular

$$\beta(r) = (-2r + 1, -4r + 2), \quad r \in \mathbb{R}.$$

é uma reparametrização da curva

$$\alpha(t) = (t, 2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Basta considerar a mudança de parâmetro  $h(r) = -2r + 1, r \in \mathbb{R}$ . Neste caso as curvas  $\alpha$  e  $\beta$  têm orientação opostas (ver Figura 1.12).

Vamos considerar apenas reparametrizações onde a função mudança de parâmetro é estritamente crescente ou decrescente e portanto bijetora. Neste caso  $h'(t) \neq (0, 0)$  e, portanto se  $\alpha$  é uma curva regular em  $I$ , sua reparametrização  $\beta = \alpha \circ h$  também será curva regular em  $J$ .

Uma mudança de parâmetro  $h$  é uma função estritamente crescente ou decrescente, portanto é bijetiva. Além disso, se  $\beta$  é uma reparametrização de  $\alpha$  por  $h$ , então  $\alpha$  é uma reparametrização de  $\beta$  por  $h^{-1}$ .

Se  $h$  é estritamente crescente, dizemos que a reparametrização  $\beta = \alpha \circ h$  é positiva, ou que preserva a orientação de  $\alpha$ . No caso em que  $h$  é estritamente decrescente, a reparametrização é dita negativa, ou que reverte a orientação de  $\alpha$  (ver Figura 1.12).

A seguir vamos definir comprimento do arco para uma curva regular.

**Definição 1.3.3.** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular e fixemos  $t_0$  e  $t_1$  pontos do intervalo  $I$ . A aplicação

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt = \int_{t_0}^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt,$$

é denominada a *função comprimento de arco* da curva  $\alpha$  a partir de  $t_0$ . Esta função é diferenciável de Classe  $C^\infty$ , pois  $\alpha$  é uma curva regular.

**Exemplo 1.3.3.** Seja o círculo a aplicação  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\alpha(t) = (a + r \cos t, b + r \sin t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad e \quad r > 0.$$

o comprimento de  $\alpha$  é,

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^{2\pi} |\alpha'(t)| dt \\ &= \int_0^{2\pi} |(-r \sin t, r \cos t)| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r. \end{aligned}$$

Vejamos que o comprimento de uma curva pode ser finito, mesmo que o seu intervalo de definição tenha comprimento infinito.

**Exemplo 1.3.4.** Seja a espiral logarítmica a aplicação  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\alpha(t) = e^t(\cos t, \sin t), \quad t \in (-\infty, 0].$$

Temos

$$\begin{aligned} s(t) &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 |\alpha'(t)| dt \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 |(e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t))| dt \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2} dt \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^t \sqrt{2} dt \\ &= \sqrt{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} (e^0 - e^a) = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Observemos que  $\alpha(0) = (1, 0)$  (ver Figura 1.13).

**Definição 1.3.4.** Uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita uma curva *parametrizada pelo comprimento de arco* se, para cada  $t_0, t_1 \in I, t_0 \leq t_1$ , o comprimento de arco da curva  $\alpha$  de  $t_0$  a  $t_1$  é igual a  $t_1 - t_0$ . Isto é,

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = t_1 - t_0$$

(ver Figura 1.14).

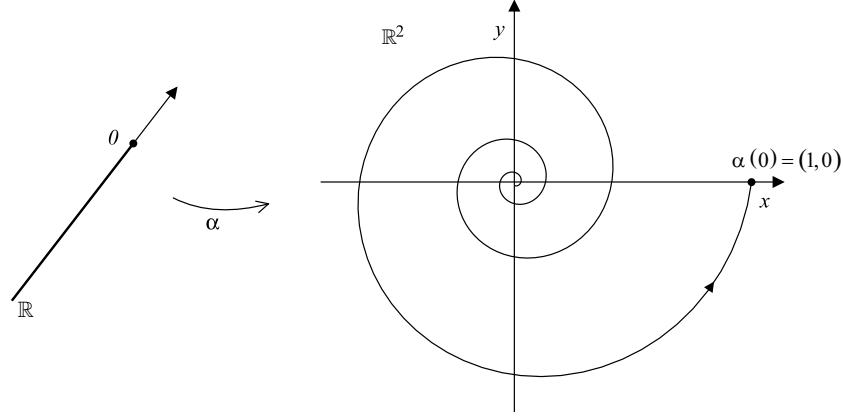


Figura 1.13: Domínio da parametrização com comprimento infinito e comprimento finito.

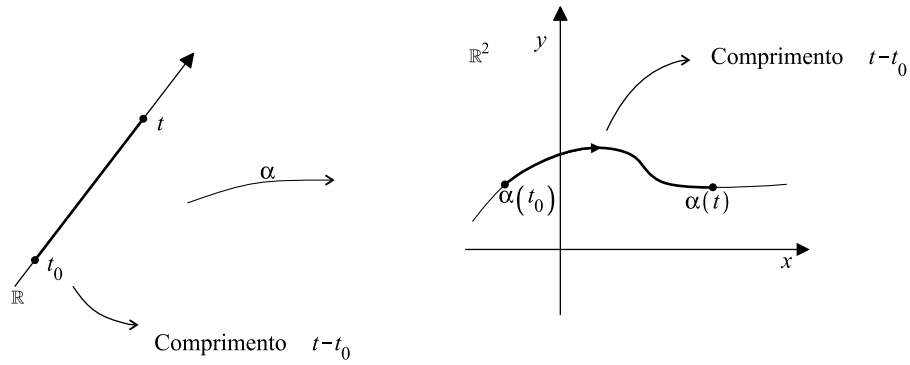


Figura 1.14: Curva parametrizada pelo comprimento de arco.

**Proposição 1.3.1.** *Uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  está parametrizada pelo comprimento de arco, se, e somente se, para todo  $t \in I$ ,  $|\alpha'(t)| = 1$ .*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Suponhamos  $\alpha$  parametrizada pelo comprimento de arco e fixemos  $t_0 \in I$ . Consideremos a função  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ , que, a cada  $t \in I$ , associa

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt.$$

Se  $t_0 \leq t$ , temos

$$\int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt = t - t_0.$$

Se  $t \leq t_0$ , temos

$$-s(t) = \int_t^{t_0} |\alpha'(t)| dt = t_0 - t.$$

Portanto, para cada  $t \in I$ ,  $s(t) = t - t_0$ , donde  $s'(t) = 1$ . Como  $s'(t) = |\alpha'(t)|$ , concluímos que  $|\alpha'(t)| = 1$  para todo  $t \in I$ .

( $\Leftarrow$ ) Se  $|\alpha'(t)| = 1$  para todo  $t \in I$ , então  $\int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt = t - t_0$  para quais quer  $t_0, t \in I$ ,  $t_0 \leq t$ . □

**Exemplo 1.3.5.** A aplicação

$$\alpha(t) = \left( a \cos \frac{t}{a}, a \sin \frac{t}{a} \right) \quad t \in \mathbb{R},$$

onde  $a \neq 0$ , é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, já que

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \left( -\sin \frac{t}{a}, \cos \frac{t}{a} \right) \\ |\alpha'(t)| &= \sqrt{\sin^2 \frac{t}{a} + \cos^2 \frac{t}{a}} \\ &= 1, \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

O próximo resultado mostra que toda curva regular admite uma reparametrização pelo comprimento de arco.

**Proposição 1.3.2.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular e  $s : I \rightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$  a função comprimento de arco de  $\alpha$  a partir de  $t_0$ . Então existe a função inversa  $h$  de  $s$ , definida no intervalo aberto  $J = s(I)$  e  $\beta = \alpha \circ h$  é uma reparametrização de  $\alpha$ , onde  $\beta$  está parametrizada pelo comprimento de arco.*

*Demonstração.* Se  $\alpha$  é uma curva regular, então

$$s'(t) = |\alpha'(t)| > 0,$$

isto é,  $s$  é uma função estritamente crescente. Segue-se que existe a função inversa de  $s$ ,  $h : J \rightarrow I$ . Como para todo  $t \in I$ ,  $h(s(t)) = t$ , temos que

$$\frac{dh}{ds} \frac{ds}{dt} = 1$$

$$\frac{dh}{ds} s'(t) = 1,$$

logo,

$$\frac{dh}{ds} = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|\alpha'(t)|} > 0.$$

Concluimos que

$$\beta(s) = \alpha \circ h(s) \quad s \in J,$$

é uma reparametrização de  $\alpha$  e

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\beta}{ds} \right| &= \left| \frac{d\alpha}{dt} \right| \cdot \left| \frac{dh}{ds} \right| \\ &= |\alpha'(t)| \cdot \frac{1}{|\alpha'(t)|} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Portanto pela Proposição 1.3.1,  $\beta$  está parametrizada pelo comprimento de arco.  $\square$

**Definição 1.3.5.** A aplicação  $\beta$  da Proposição 1.3.2 é dita uma *reparametrização de  $\alpha$  pelo comprimento de arco*.

Observamos que esta parametrização não é única, pois depende da função comprimento de arco, que por sua vez depende de  $t_0$  fixado.

**Exemplo 1.3.6.** Considere  $\alpha(t) = (at + c, bt + d)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , e  $a^2 + b^2 \neq 0$ . Seja  $s(t)$  a função comprimento de arco de  $\alpha$  a partir de  $t_0 = 0$ , isto é,

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} t.$$

A função inversa de  $s$  é dada por  $h(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . Portanto  $\beta = \alpha \circ h$ , que a cada  $s$  associa

$$\beta(s) = \left( a \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + c, b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + d \right),$$

é uma reparametrização de  $\alpha$  pelo comprimento de arco.

**Exemplo 1.3.7.** Considere a espiral logarítmica  $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Temos que  $|\alpha'(t)| = \sqrt{2}e^t$  e portanto a função comprimento de arco de  $\alpha$ , a partir de  $t_0 = 0$ , é

$$s(t) = \sqrt{2}e^t - \sqrt{2}.$$

A função inversa é dada por

$$h(s) = \log \left( \frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right).$$

Portanto,

$$\beta(s) = \left( \left( \frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right) \cos \left( \log \left( \frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right) \right), \left( \frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right) \sin \left( \log \left( \frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right) \right) \right)$$

é uma reparametrização de  $\alpha$  pelo comprimento de arco.

## 1.4 Campo de Vetores ao Longo de Curvas

Intuitivamente, um campo de vetores  $X(r)$  ao longo de uma curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma aplicação que a cada  $r \in I$  associa um vetor com origem em  $\alpha(r)$ .

Logo para determinar  $X(r)$ , basta conhecer a extremidade final do vetor  $X(r)$ , uma vez que sua extremidade inicial é  $\alpha(r)$ .



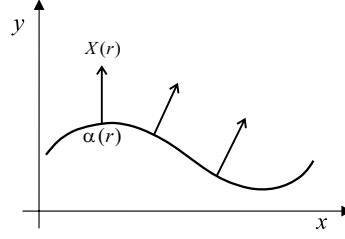


Figura 1.15: Campo de vetores  $X(r)$  ao longo de  $\alpha$ .

**Definição 1.4.1.** Um *campo de vetores* de classe  $C^j$  ao longo de  $\alpha$  é uma aplicação  $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^j$ . Geometricamente, o campo de vetores  $X(r)$  é dado, em cada ponto  $\alpha(r)$  pelo vetor de extremidades  $\alpha(r)$  e  $X(r)$  (Ver Figura 1.15).

Se  $\alpha$  é uma curva parametrizada e regular, dada por  $\alpha(r) = (x(r), y(r))$ , então  $t(r)$ , definido por  $t(r) = (x'(r), y'(r))$ , é um campo de classe  $C^\infty$  ao longo de  $\alpha$ .  $t(r)$  é chamado *campo tangente*. No caso em que  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco,  $t(r)$  é campo unitário, isto é  $|t(r)| = 1$ . O campo  $n(r)$  é dado por  $n(r) = (-y'(r), x'(r))$ , é também um campo de  $C^\infty$  ao longo de  $\alpha$ . Observe que, para todo  $r \in I$ ,

$$\begin{aligned} \langle t(r), n(r) \rangle &= \langle (x'(r), y'(r)), (-y'(r), x'(r)) \rangle \\ &= -x'(r)y'(r) + y'(r)x'(r) \\ &= 0, \end{aligned}$$

isto é,  $n(r)$  é perpendicular a  $t(r)$ .  $n(r)$  é chamando de *campo normal*. No caso em que  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de de arco,  $n(r)$  é campo unitário.

Dados dois campos  $X(r)$  e  $Y(r)$  de classe  $C^j$  ao longo de  $\alpha$  e uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^j$ , podemos definir os campos  $X(r) + Y(r)$  e  $f(r)X(r)$  por

$$(X + Y)(r) = X(r) + Y(r),$$

$$(fX)(r) = f(r)X(r),$$

que também serão campos de classe  $C^j$  ao longo de  $\alpha$ . Se  $X(r) = (X_1(r), X_2(r))$  é um campo de classe  $C^j$ , com  $j > 0$ , definimos a derivada de  $X(r)$  por

$$X'(r) = (X_1'(r), X_2'(r)).$$

Nesse caso, o campo  $X'(r)$  é um campo de classe  $C^{j-1}$  ao longo de  $\alpha$ . As seguintes relações são verificadas:

$$(X(r) + Y(r))' = X'(r) + Y'(r),$$

$$(f(r)X(r))' = f'(r)X(r) + f(r)X'(r),$$

$$\langle X(r), Y(r) \rangle' = \langle X'(r), Y(r) \rangle + \langle X(r), Y'(r) \rangle.$$

Temos então o seguinte resultado:

**Proposição 1.4.1.** (i) Se  $|X|$ , é constante, então  $X'(r)$  é perpendicular a  $X(r)$ , para todo  $r \in I$ , isto é,

$$\langle X(r), X'(r) \rangle = 0.$$

(ii) Se  $X(r)$  e  $Y(r)$  são perpendiculares para todo  $r \in I$ , então

$$\langle X'(r), Y(r) \rangle = -\langle X(r), Y'(r) \rangle.$$

*Demonstração.* (i) Derivando a equação  $|X(r)|^2 = \langle X(r), X(r) \rangle = \text{const.}$ , temos que,

$$\langle X'(r), X(r) \rangle + \langle X(r), X'(r) \rangle = 0$$

$$2\langle X'(r), X(r) \rangle = 0$$

$$\langle X'(r), X(r) \rangle = 0$$

$$\langle X(r), X'(r) \rangle = 0,$$

o que prova a primeira parte.

(ii) Para demonstrar a segunda parte, basta derivar a equação  $\langle X(r), Y(r) \rangle = 0$ , daí temos,

$$\langle X'(r), Y(r) \rangle + \langle X(r), Y'(r) \rangle = 0.$$

Portanto,

$$\langle X'(r), Y(r) \rangle = -\langle X(r), Y'(r) \rangle.$$

□

## 1.5 Teoria Local das Curvas Planas; Fórmulas de Frenet

Vamos considerar nesta seção curvas  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizadas pelo comprimento de arco,

$$\alpha(s) = (x(s), y(s)), \quad s \in I.$$

Para cada  $s \in I$ ,  $\alpha'(s)$  é um vetor unitário, que denotamos por  $t(s)$ , isto é,

$$t(s) = \alpha'(s) = (x'(s), y'(s)).$$

**Definição 1.5.1.** O vetor  $t(s)$  é chamado o *vetor tangente* à curva  $\alpha$  em  $\alpha(s)$  (Ver Figura 1.16).

Seja  $n(s)$  um vetor unitário ortogonal a  $t(s)$ , tal que a base ortogonal de  $\mathbb{R}^2$  formada por  $t(s)$  e  $n(s)$  têm a mesma orientação que a base  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$  de  $\mathbb{R}^2$  (ver Figura 1.16), isto é,

$$n(s) = (-y'(s), x'(s)).$$

pois  $|n(s)| = 1$ ,  $\langle n(s), t(s) \rangle = 0$  e  $\det \begin{pmatrix} x'(s) & -y'(s) \\ y'(s) & x'(s) \end{pmatrix} = 1 > 0$ .

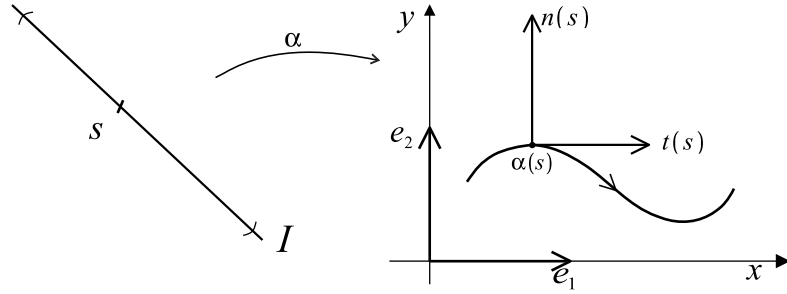


Figura 1.16: Referencial de Frenet

**Definição 1.5.2.** O conjunto de vetores  $t(s)$  e  $n(s)$  é chamado *referencial de Frenet* da curva  $\alpha$  em  $s$ .

**Exemplo 1.5.1.** A curva  $\alpha(s) = (\cos s, \sin s)$ ,  $s \in (0, 2\pi)$  é parametrizada pelo comprimento de arco. Temos:

$$t(s) = \alpha'(s) = (-\sin s, \cos s)$$

e

$$n(s) = (-\cos s, -\sin s).$$

A Figura 1.17 ilustra o Referencial de Frenet em alguns pontos de  $\alpha$ .

**Definição 1.5.3.** A *reta normal* a  $\alpha$  em  $s_0$  é a reta que passa por  $\alpha(s_0)$  na direção de  $n(s_0)$ .

Observamos que  $t(s)$  e  $n(s)$  são funções de  $I$  em  $\mathbb{R}^2$ , diferenciáveis de classe  $C^\infty$  e para cada  $s \in I$ , os vetores de  $\mathbb{R}^2$ ,  $t'(s)$  e  $n'(s)$ , podem ser escritos como combinação linear

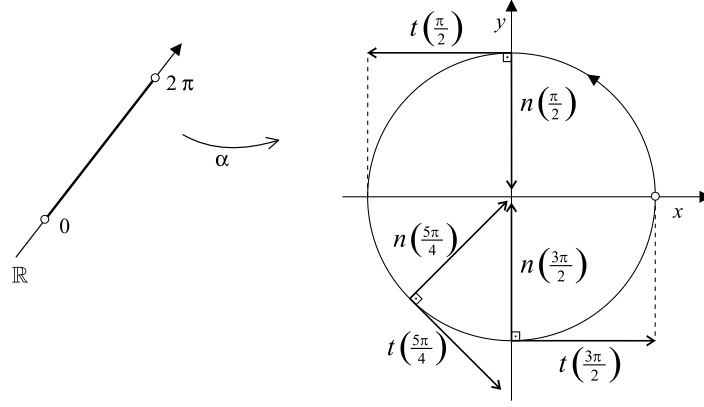


Figura 1.17: Referencial e Frenet em alguns pontos da circunferência de raio 1

de  $t(s)$  e  $n(s)$ . Como  $t(s)$  é unitário, segue que  $t'(s)$  é ortogonal a  $t(s)$  e portanto  $t'(s)$  é proporcional a  $n(s)$ , ou seja

$$t'(s) = k(s)n(s).$$

**Definição 1.5.4.**  $k(s)$ , é chamado *curvatura de  $\alpha$  em  $s$* .

Considerando a curva  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ ,  $s \in I$ , segue da definição que,

$$\begin{aligned} \langle t'(s), n(s) \rangle &= \langle k(s)n(s), n(s) \rangle \Rightarrow \langle t'(s), n(s) \rangle = k(s) \langle n(s), n(s) \rangle \\ &\Rightarrow \langle t'(s), n(s) \rangle = k(s), \end{aligned}$$

daí,

$$\begin{aligned} k(s) &= \langle t'(s), n(s) \rangle \\ &= \langle \alpha''(s), n(s) \rangle \\ &= \langle (x''(s), y''(s)), (-y'(s), x'(s)) \rangle \\ &= -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s). \end{aligned}$$

Analogamente como  $n(s)$  é unitário, segue que  $n'(s)$  é ortogonal a  $n(s)$  e portanto  $n'(s)$  é proporcional a  $t(s)$ . Como

$$\begin{aligned} \langle n'(s), t(s) \rangle &= \langle (-y''(s), x''(s)), (x'(s), y'(s)) \rangle \\ &= -x'(s)y''(s) + x''(s)y'(s) \\ &= \langle (x''(s), y''(s)), (y'(s), -x'(s)) \rangle \\ &= \langle t'(s), -n(s) \rangle \\ &= -\langle t'(s), n(s) \rangle \\ &= -k(s) \end{aligned}$$

concluimos que

$$n'(s) = -k(s)t(s).$$

**Definição 1.5.5.** As equações

$$t'(s) = k(s)n(s),$$

$$n'(s) = -k(s)t(s)$$

são chamadas as *fórmulas de Frenet* de uma curva plana.

Observamos que  $t'(s)$  e  $n(s)$  são paralelos e que  $|t'(s)| = |k(s)|$  pois  $|n(s)| = 1$ , ou seja,

$$|k(s)| = |\alpha''(s)|.$$

Como  $\frac{\langle t'(s), n(s) \rangle}{|t'(s)| |n(s)|} = \cos \theta$ , sendo  $\theta$  a medida do ângulo entre  $t'(s)$  e  $n(s)$  (que é 0 ou  $\pi$ ), concluimos que  $k(s) > 0$  quando  $t'(s)$  e  $n(s)$  possuem mesmo sentido e  $k(s) < 0$  caso contrário.

Geometricamente, a curvatura  $k(s)$  indica a taxa de variação instantânea da direção do vetor tangente no ponto  $\alpha(s)$ , ou então, a velocidade com que o vetor tangente muda de direção. De fato, dados  $s, s+h \in I$  temos

$$\alpha''(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha'(s+h) - \alpha'(s)}{h}.$$

**Exemplo 1.5.2.** Seja  $\alpha(s)$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco cujo traço é uma reta. Então a curvatura é identicamente nula. De fato, seja

$$\alpha(s) = (as + x_0, bs + y_0), \quad s \in I,$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes e  $a^2 + b^2 = 1$ . Como  $t(s) = \alpha'(s)$  é constante, segue que  $t'(s) = 0$  e portanto  $k(s) = 0, \forall s \in I$ .

**Exemplo 1.5.3.** Considere a curva

$$\alpha(s) = \left( a + b \cos \frac{s}{b}, c + b \sin \frac{s}{b} \right), \quad s \in \mathbb{R}, \quad b > 0,$$

cujo traço é uma circunferência de centro  $(a, c)$  e raio  $b$ . Neste caso

$$t(s) = \left( -\sin \frac{s}{b}, \cos \frac{s}{b} \right),$$

$$n(s) = \left( -\cos \frac{s}{b}, -\sin \frac{s}{b} \right).$$

Segue que

$$k(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle = \frac{1}{b}, \text{ pois } t'(s) = \frac{1}{b} \left( -\cos \frac{s}{b}, -\sin \frac{s}{b} \right),$$

ou seja  $\alpha$  tem curvatura constante igual a  $\frac{1}{b}$ .

Consideremos uma reparametrização de  $\alpha$ , dada por

$$\beta(s) = \left( a + b \cos \frac{s}{b}, c - b \sin \frac{s}{b} \right).$$

Então a curvatura será igual a  $-\frac{1}{b}$  (ver Figura 1.18).

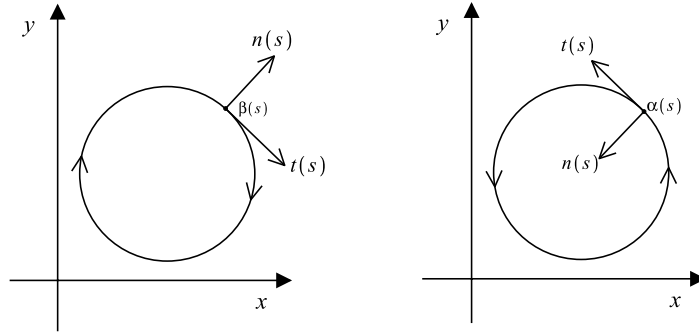


Figura 1.18: Curvatura de  $\beta(s)$ .

Observamos que o sinal da curvatura depende da orientação da curva. Mais adiante veremos a interpretação geométrica do sinal da curvatura.

O referencial de Frenet e a curvatura foram definidos para curvas regulares parametrizadas por comprimento de arco. Como vimos na Proposição 1.3.2, toda curva regular admite uma tal reparametrização, o próximo resultado expressa a curvatura de uma curva regular e não necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco. A seguir, vamos considerar o referencial de Frenet e a curvatura de uma curva regular com qualquer parâmetro.

Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular de parâmetro qualquer  $r \in I$ . Consideremos  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma reparametrização de  $\alpha$  pelo comprimento de arco  $s$ , isto é,  $\beta(s(r)) = \alpha(r)$ . Se  $t(s), n(s)$  é o referencial de Frenet de  $\beta(s)$  e  $k(s)$  é a curvatura, então diremos que  $t(r) = t(s(r)), n(r) = n(s(r))$  é o referencial de Frenet de  $\alpha$ , e  $k(r) = k(s(r))$  é a curvatura.

**Proposição 1.5.1.** *Seja  $\alpha(r) = (x(r), y(r))$ ,  $r \in I$ , uma curva regular. Então:*

$$t(r) = \frac{(x', y')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}},$$

$$n(r) = \frac{(-y', x')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}},$$

$$k(r) = \frac{-x''y' + x'y''}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

*Demonstração.* Seja  $\beta(s)$  uma reparametrização de  $\alpha$  por comprimento de arco. Derivando  $\beta(s(r)) = \alpha(r)$ , temos

$$\frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{dr} = \alpha'(r) \quad (1.1)$$

e

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} \left(\frac{ds}{dr}\right)^2 + \frac{d\beta}{ds} \frac{d^2s}{dr^2} = \alpha''(r) \quad (1.2)$$

como

$$s(r) = \int |\alpha'(r)| dr$$

onde

$$\frac{ds}{dr} = |\alpha'(r)| = \sqrt{\langle \alpha'(r), \alpha'(r) \rangle} = \langle \alpha'(r), \alpha'(r) \rangle^{\frac{1}{2}}, \quad (1.3)$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d^2s}{dr^2} &= \frac{1}{2} \langle \alpha'(r), \alpha'(r) \rangle^{-\frac{1}{2}} \cdot (\langle \alpha''(r), \alpha'(r) \rangle + \langle \alpha'(r), \alpha''(r) \rangle) \\ &= \frac{\langle \alpha'(r), \alpha''(r) \rangle}{\langle \alpha'(r), \alpha'(r) \rangle^{\frac{1}{2}}} = \frac{\langle \alpha'(r), \alpha''(r) \rangle}{|\alpha'(r)|}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Considerando que  $\alpha(r) = (x(r), y(r))$ , segue de (1.1) e (1.3) que

$$t(r) = \frac{\alpha'(r)}{|\alpha'(r)|} = \frac{(x', y')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}.$$

Pela definição de vetor normal temos

$$n(r) = \frac{(-y', x')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}.$$

Como

$$k(s(r)) = \left\langle \frac{d^2\beta}{ds^2}(s(r)), n(r) \right\rangle,$$

concluimos usando (1.1) a (1.4) que

$$k(r) = \frac{-x''y' + x'y''}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

□

**Exemplo 1.5.4.** Consideremos a espiral logarítmica

$$\alpha(r) = (e^r \cos r, e^r \sin r), \quad r \in \mathbb{R}.$$

Então,

$$\begin{aligned}\alpha'(r) &= (e^r(\cos r - \sin r), e^r(\sin r + \cos r)) \\ &= (e^r \cos r - e^r \sin r, e^r \sin r + e^r \cos r),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha''(r) &= (e^r(\cos r - \sin r) + e^r(-\sin r - \cos r), e^r(\sin r + \cos r) + e^r(\cos r - \sin r)) \\ &= (-2e^r \sin r, 2e^r \cos r),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\alpha'(r)| &= \sqrt{[e^r(\cos r - \sin r)]^2 + [e^r(\sin r + \cos r)]^2} \\ &= \sqrt{e^{2r}(\cos^2 r - 2 \sin r \cos r + \sin^2 r) + e^{2r}(\sin^2 r + 2 \sin r \cos r + \cos^2 r)} \\ &= e^r \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}k(r) &= \frac{-(-2e^r \sin r)(e^r \sin r + e^r \cos r) + (e^r \cos r - e^r \sin r)(2e^r \cos r)}{(e^r \sqrt{2})^3} \\ &= \frac{2e^{2r} \sin^2 r + 2e^{2r} \sin r \cos r + 2e^{2r} \cos^2 r - 2e^{2r} \sin r \cos r}{(e^r \sqrt{2})^3} \\ &= \frac{2e^{2r}(\sin^2 r + \cos^2 r + \sin r \cos r - \sin r \cos r)}{(e^r \sqrt{2})^3} \\ &= \frac{2e^{2r}}{(e^r \sqrt{2})^3} \\ &= \frac{2e^{2r}}{e^{3r} 2\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{e^r \sqrt{2}}.\end{aligned}$$

**Exemplo 1.5.5.** Consideremos a parábola

$$y = x^2 + 2x + 1.$$

Façamos  $x = r$  e

$$y = r^2 + 2r + 1.$$

Assim,

$$\alpha(r) = (r, r^2 + 2r + 1), \quad r \in \mathbb{R},$$

é de classe  $C^\infty$  e

$$\alpha'(r) = (1, 2r + 2) \neq (0, 0), \quad \forall r \in \mathbb{R},$$



ou seja,  $\alpha$  é regular. Temos

$$\begin{cases} \alpha'(r) = (1, 2r + 2) \\ \alpha''(r) = (0, 2) \end{cases}$$

Logo,

$$k(r) = \frac{-0 \cdot (2r + 2) + 1 \cdot 2}{\left(\sqrt{1^2 + (2r + 2)^2}\right)^3} = \frac{2}{(\sqrt{4r^2 + 8r + 5})^3}.$$

## 1.6 Interpretação Geométrica do Sinal da Curvatura

A seguir veremos a interpretação geométrica do sinal da curvatura. Seja  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ ,  $s \in I$ , uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Como o vetor tangente  $t(s) = \alpha'(s)$  é unitário temos que  $\alpha''(s)$  é ortogonal a  $\alpha'(s)$ . Fixemos  $s_0 \in I$  e suponhamos que  $k(s_0) \neq 0$ . Observamos que a reta tangente a  $\alpha$  em  $s_0$ ,

$$T(s) = \alpha(s_0) + (s - s_0)\alpha'(s_0),$$

divide o plano em dois semiplanos.

Considerando a expansão de  $\alpha(s)$  em séries de Taylor, em torno de  $s_0$  temos

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + (s - s_0)\alpha'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2}\alpha''(s_0) + R(s),$$

onde  $R(s)$  é uma função vetorial, tal que  $\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{R(s)}{(s - s_0)^2} = 0$ . Portanto

$$\alpha(s) - T(s) = \frac{(s - s_0)^2}{2}\alpha''(s_0) + R(s).$$

Como  $\alpha(s) - T(s)$  é um vetor no sentido do semiplano que contém  $\alpha(s)$ , segue da última relação que para todo  $s$ , suficientemente próximo de  $s_0$ ,  $\alpha''(s_0)$  tem sentido do semiplano que contém os pontos  $\alpha(s)$ .

Como  $k(s_0) = \langle \alpha''(s_0), n(s_0) \rangle$ , concluímos que se  $k(s_0) > 0$ , então  $n(s_0)$  tem o mesmo sinal de  $\alpha''(s_0)$ , e se  $k(s_0) < 0$ , então  $\alpha''(s_0)$  e  $n(s_0)$  têm sentidos opostos (ver Figura 1.19).

## 1.7 Raio de Curvatura e Círculo Osculador

No Exemplo 1.5.3 vimos que, a menos de sinal, a curvatura de uma circunferência de raio  $r$  é igual a  $\frac{1}{r}$ , o que comprova a nossa intuição pois no caso da circunferência

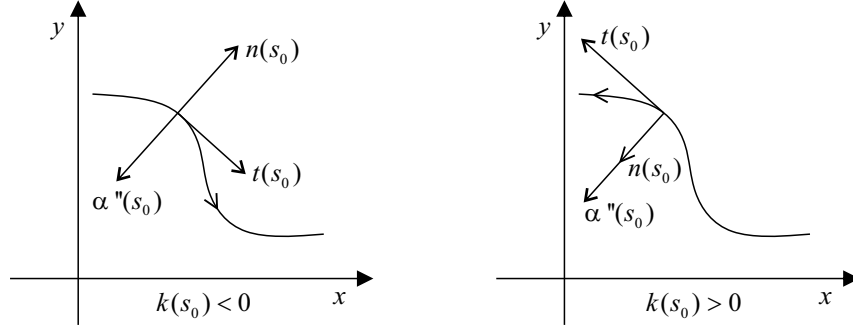


Figura 1.19: Interpretação geométrica do sinal da curvatura.

pensamos, naturalmente, na recíproca do raio como medida da curvatura. Se  $\alpha(s)$  é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco com curvatura de  $k(s) \neq 0, \forall s \in I$ .

O número real positivo  $\rho(s) = \frac{1}{|k(s)|}$  é denominada *raio de curvatura* de  $\alpha$  em  $s$ .

Consideremos a equação da reta normal a  $\alpha$  em  $s_0$  dada por

$$h_{s_0}(r) = \alpha(s_0) + rn(s_0).$$

Suponhamos que  $k(s_0) > 0$  e tomemos o ponto  $c(s_0) = h_{s_0}(\rho(s_0))$  na reta  $h_{s_0}$ , ou seja,

$$\begin{aligned} c(s_0) &= \alpha(s_0) + \rho(s_0)n(s_0) \\ &= \alpha(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}n(s_0). \end{aligned}$$

O ponto  $c(s_0) = \alpha(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}n(s_0)$  é chamado de *centro de curvatura* de  $\alpha$  em  $s_0$ .

O círculo tangente a  $\alpha$  em  $s_0$  de  $c(s_0)$  e raio  $\rho(s_0)$  é chamado de *círculo osculador* à curva  $\alpha$  em  $s_0$  (ver Figura 1.20)

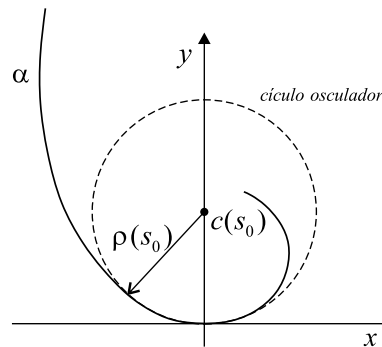


Figura 1.20: Raio de curvatura e círculo osculador.

## 1.8 Interpretação Geométrica da Curvatura

Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco e  $\theta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $\theta(s) = \text{"ângulo entre o vetor } \alpha'(s) \text{ e o vetor } w = (\cos \lambda, \sin \lambda)\text{"}$ , ou seja,  $\alpha'(s) = (\cos(\theta(s) + \lambda), \sin(\theta(s) + \lambda))$  (ver Figura 1.21).

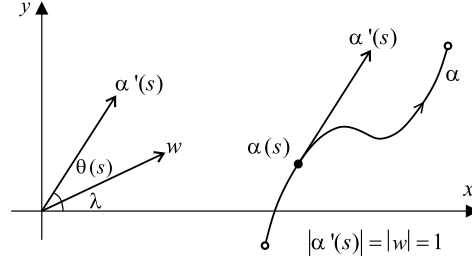


Figura 1.21: A curvatura de  $\alpha$  pode ser vista como taxa de variação do ângulo  $\theta$ .

Afirmamos que curvatura de  $\alpha$  mede a variação da função  $\theta(s)$ , isto é,

$$k(s) = \theta'(s). \quad (1.5)$$

De fato, temos

$$\alpha'(s) = (\cos(\theta(s) + \lambda), \sin(\theta(s) + \lambda))$$

o que implica

$$\alpha''(s) = (-\sin(\theta(s) + \lambda)\theta'(s), \cos(\theta(s) + \lambda)\theta'(s)) = t'(s)$$

e

$$n(s) = (-\sin(\theta(s) + \lambda), \cos(\theta(s) + \lambda)).$$

Logo,

$$\begin{aligned} k(s) &= \langle t'(s), n(s) \rangle \\ &= \langle (-\sin(\theta(s) + \lambda)\theta'(s), \cos(\theta(s) + \lambda)\theta'(s)), (-\sin(\theta(s) + \lambda), \cos(\theta(s) + \lambda)) \rangle \\ &= \theta'(s)(\sin^2(\theta(s) + \lambda) + \cos^2(\theta(s) + \lambda)) \\ &= \theta'(s). \end{aligned}$$

Observamos que

$$\alpha'(s) = (\cos(\theta(s) + \lambda), \sin(\theta(s) + \lambda))$$

o que implica

$$\alpha(s) = \left( \int_{s_0}^s \cos(\theta(t) + \lambda) dt + x_0, \int_{s_0}^s \sin(\theta(t) + \lambda) dt + y_0 \right)$$

para algum  $s_0 \in I$  e  $\lambda, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ .

## 1.9 Teorema Fundamental das Curvas Planas

Segundo este teorema, é possível reconstruir uma curva plana a partir de sua função de curvatura.

### Teorema 1.9.1. (*Teorema Fundamental das Curvas Planas*)

- (i) *Dada uma função diferenciável  $k(s)$ ,  $s \in I \subset \mathbb{R}$ , existe uma curva regular  $\alpha(s)$ , parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , tal que  $k_\alpha(s) = k(s)$ .*
- (ii) *A curva  $\alpha(s)$  acima é única quando fixamos  $\alpha(s_0) = p_0$  e  $\alpha'(s_0) = v_0$ , onde  $v_0$  é um vetor unitário de  $\mathbb{R}^2$ .*
- (iii) *Se duas curvas  $\alpha(s)$  e  $\beta(s)$  têm a mesma curvatura, então  $\alpha(s)$  e  $\beta(s)$  são congruentes e diferem por sua posição no plano, isto é, existe uma rotação  $L$  e uma translação  $T$  em  $\mathbb{R}^2$  tal que  $\alpha(s) = (T \circ L)(\beta(s))$ .*

*Demonstração.*

- (i) Vimos na Equação 1.5 que  $k(s) = \theta'(s)$  sendo

$$\alpha'(s) = (\cos(\theta(s) + \lambda), \sin(\theta(s) + \lambda)),$$

cujas soluções gerais são dadas por uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^j$ ,  $j \geq 3$ , parametrizada pelo comprimento de arco, definida por

$$\alpha(s) = (x(s), y(s)) = \left( \int_{s_0}^s \cos(\theta(t) + \lambda) dt + x_0, \int_{s_0}^s \sin(\theta(t) + \lambda) dt + y_0 \right),$$

sendo  $s_0 \in I$  e  $\lambda, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ . Esta curva  $\alpha$  satisfaz as condições exigidas: está parametrizada pelo comprimento de arco pois  $\alpha'(s) = (\cos(\theta(s) + \lambda), \sin(\theta(s) + \lambda))$  e portanto  $|\alpha'| = 1$ ,  $\forall s \in I$ . Assim, como

$$n(s) = (-\sin(\theta(s) + \lambda), \cos(\theta(s) + \lambda))$$

e

$$\alpha''(s) = \theta'(s)(-\sin(\theta(s) + \lambda), \cos(\theta(s) + \lambda)) = \theta'(s)n(s),$$

temos que

$$k_\alpha(s) = \langle \alpha''(s), n(s) \rangle = \theta'(s) = k(s),$$

logo,

$$k_\alpha(s) = k(s), \quad \forall s \in I.$$

(ii) Fixados  $\alpha(s_0) = P = (x_0, y_0)$  e  $\alpha'(s_0) = v_0 = (\cos(\theta(s_0) + \lambda), \sin(\theta(s_0) + \lambda))$ , a solução da EDO (ZILL, 2001, p.40) do item (i) é única.

(iii) Sejam  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  curvas regulares de mesma curvatura, ou seja,  $k_\alpha(s) = k_\beta(s)$ . Logo,  $\theta'_\alpha(s) = \theta'_\beta(s)$ , conforme a demonstração do item (i). Deste modo,  $\theta_\alpha(s) = \theta_\beta(s) + \lambda$ . Assim, os vetores tangentes unitários de  $\alpha$  são obtidos dos de  $\beta$  rotacionados por  $\lambda$  nos pontos correspondentes, ou seja  $\alpha'(s) = L_\lambda(\beta'(s))$ . Mas  $L_\lambda$  é linear, logo,

$$L_\lambda(\beta'(s)) = d(L_\lambda)_{\beta(s)}(\beta'(s)) = (L_\lambda \circ \beta)'(s).$$

Assim,

$$\alpha'(s) = (L_\lambda \circ \beta)'(s)$$

e, portanto,

$$\alpha(s) = (L_\lambda \circ \beta)(s) + v$$

com  $v \in \mathbb{R}^2$ , ou seja,  $\alpha(s) = (T_v \circ L_\lambda \circ \beta)(s)$ . Desta forma,  $\alpha$  é obtida de  $\beta$  por meio de uma rotação composta com translação e, portanto, são congruentes.

□

## 1.10 Determinando Curvas Regulares a Partir da Curvatura

A demonstração do Teorema Fundamental das Curvas Planas fornece-nos um modo simples de determinar uma curva a partir de sua curvatura.

Seja  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$  função de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ .

Para determinar uma curva seguimos os passos:

(1) Determinamos  $\theta(s) = \int_{s_0}^s k(t)dt$ .

(2) Definimos  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  por  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  tal que  $x(s) = \int_{s_0}^s \cos \theta(t)dt$  e  $y(s) = \int_{s_0}^s \sin \theta(t)dt$ . Para determinar uma curva com  $\alpha(s_0) = (x_0, y_0)$  e  $\alpha'(s_0) = (u_0, v_0)$  fazemos  $x(s) = x_0 + \int_{s_0}^s \cos(\theta(t) + \lambda)dt$  e  $y(s) = y_0 + \int_{s_0}^s \sin(\theta(t) + \lambda)dt$  e, para determinar  $\lambda$ , fazemos  $\alpha'(s_0) = (\cos(\theta(s_0) + \lambda), \sin(\theta(s_0) + \lambda)) = (u_0, v_0)$ .

**Exemplo 1.10.1.** As curvas de curvaturas constante são apenas (ou segmentos de retas) ou circunferência (ou arco de circunferências).

De fato:

Queremos  $k(s) = k$  (constante).

Fazemos  $\theta(s) = \int_{s_0}^s k(s)dt = \int_{s_0}^s kdt = ks - ks_0$ .

Se  $k \neq 0$ , então

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_{s_0}^s \cos(kt - ks_0)dt \\ &= \frac{\sin(ks - ks_0)}{k} - \frac{\sin 0}{k} \\ &= \frac{\sin(ks - ks_0)}{k}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(s) &= \int_{s_0}^s \sin(kt - ks_0)dt \\ &= \frac{-\cos(ks - ks_0)}{k} + \frac{\cos 0}{k} \\ &= \frac{-\cos(ks - ks_0)}{k} + \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\alpha(s) = \left( \frac{1}{k} \sin(ks + ks_0), \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \cos(ks - ks_0) \right),$$

ou seja, as curvas de curvatura constante não nula  $k$  são circunferência (ou arcos de circunferência) de raio  $\frac{1}{|k|}$  (o sinal de  $k$  determina a orientação da curva).

Se  $k = 0$ , então  $\theta(s) = 0$  e

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_{s_0}^s \cos 0dt = s - s_0; \\ y(s) &= \int_{s_0}^s \sin 0dt = 0. \end{aligned}$$

Logo,  $\alpha(s) = (s - s_0, 0)$ , ou seja, as curvas de curvatura constante nula são retas (ou segmentos retas).

**Exemplo 1.10.2.** Determinação das curvas regulares do plano que tem curvatura

$$k(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}; \quad s > 0.$$

Façamos

$$\theta(s) = \int_{s_0}^s \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2\sqrt{s} - 2\sqrt{s_0}.$$

Temos  $\alpha(s_0) = (0, 0) \Rightarrow x_0 = y_0 = 0$ . Façamos  $\lambda = 0$ . Logo,

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_{s_0}^s \cos(2\sqrt{t} - 2\sqrt{s_0}) dt \\ &= \sqrt{t} \sin(2\sqrt{t} - 2\sqrt{s_0}) \Big|_{s_0}^s - \int_{s_0}^s \frac{1}{2\sqrt{t}} \sin(2\sqrt{t} - 2\sqrt{s_0}) dt \\ &= \sqrt{s} \sin(2\sqrt{s} - 2\sqrt{s_0}) + \frac{1}{2} \cos(2\sqrt{s} - 2\sqrt{s_0}) - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} y(s) &= \int_{s_0}^s \sin(2\sqrt{t} - 2\sqrt{s_0}) dt \\ &= \sqrt{s_0} + \frac{1}{2} \sin(2\sqrt{s} - 2\sqrt{s_0}) - \sqrt{s} \cos(2\sqrt{s} - 2\sqrt{s_0}). \end{aligned}$$

Fazendo  $u = 2\sqrt{s} - 2\sqrt{s_0} \Rightarrow s = \left(\frac{u + 2\sqrt{s_0}}{2}\right)^2$ ;  $u > -2\sqrt{s_0}$  e, tomando a reparametrização  $\beta(u) = \alpha \circ \psi(u)$ ; sendo

$$\psi(u) = \left(\frac{u + 2\sqrt{s_0}}{2}\right)^2$$

temos

$$\begin{aligned} \beta(u) &= \left(\frac{u + 2\sqrt{s_0}}{2} \sin u + \frac{1}{2} \cos u - \frac{1}{2}, \sqrt{s_0} + \frac{1}{2} \sin u - \frac{u + 2\sqrt{s_0}}{2} \cos u\right) \Rightarrow \\ \beta(u) &= \left(-\frac{1}{2}, \sqrt{s_0}\right) + \left(\frac{2\sqrt{s_0}}{2} \sin u + \frac{1}{2} \cos u, \frac{1}{2} \sin u - \frac{2\sqrt{s_0}}{2} \cos u\right) + \frac{1}{2}(u \sin u, -u \cos u). \end{aligned}$$

Para  $s_0 = \frac{1}{4}$ , temos uma Espiral de Arquimedes (ver Figura 1.22).

Assim,

$$\beta(u) = \left( \frac{(1+u)\sin u + \cos u - 1}{2}, \frac{-(1+u)\cos u + \sin u + 1}{2} \right).$$

Consequentemente, as curvas regulares do plano com curvatura  $k(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}$ ;  $s > 0$  são Espirais de Arquimedes.

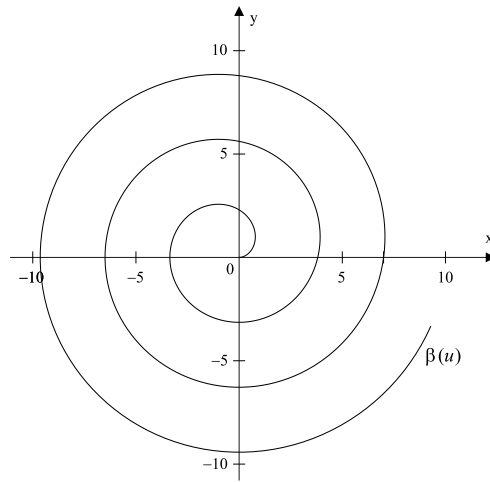


Figura 1.22: Espiral de Arquimedes.



# Capítulo 2

## Desigualdade Isoperimétrica

O teorema da desigualdade isoperimétrica surge do seguinte problema (isoperimétrico): *De todas as curvas fechadas simples no plano, de comprimento  $l$ , qual limita a maior área?* O problema dessa forma, já era conhecido pelos gregos, que também conheciam sua solução, um *círculo*. No entanto, demorou um longo tempo para que surgisse uma prova satisfatória para o fato do círculo ser uma solução do problema isoperimétrico. Apenas 1870, que K. Weierstrass deu uma prova completa da existência de uma solução, que surgiu como corolário de uma teoria desenvolvida por ele, na área de cálculo variacional. Mais tarde algumas provas mais diretas foram encontradas. A que apresentaremos aqui é devida a E. Schimidt (1939).

**Definição 2.0.1.** Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Se  $\alpha(a)$  e  $\alpha(b)$  são chamados ponto inicial e ponto final da curva, respectivamente e se  $\alpha(a) = \alpha(b)$  então dizemos que  $\alpha$  é uma *curva fechada* (ver Figura 2.1 e 2.2).

**Definição 2.0.2.** A curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita *simples* se não possui auto interseções, isto é, se a restrição  $\alpha|_{[a,b]}$  é uma aplicação injetiva, isto é  $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ , se  $t_1 \neq t_2$ ,  $t_1, t_2 \in [a, b]$  (ver Figura 2.2).

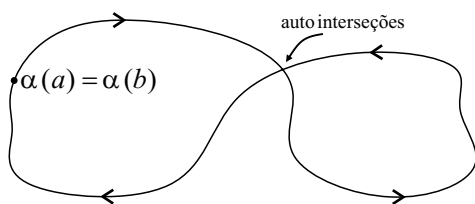


Figura 2.1: Curva Fechada não simples.

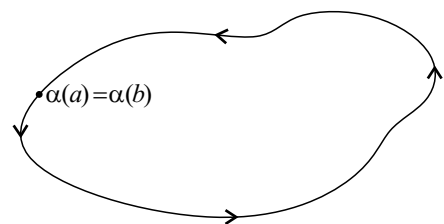


Figura 2.2: Curva Fechada Simples.

**Teorema 2.0.1.** *Para calcular a área  $A$  limitada por uma curva simples fechada  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , orientada positivamente, é dada por:*

$$A = - \int_a^b y(t)x'(t)dt = \int_a^b x(t)y'(t)dt = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt. \quad (2.1)$$

*Demonstração.* Note que a segunda fórmula é obtida da primeira da seguinte forma: Observamos que

$$[x(t)y(t)]' = x'(t)y(t) + x(t)y'(t)$$

assim,

$$x(t)y'(t) = [x(t)y(t)]' - x'(t)y(t).$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_a^b x(t)y'(t)dt &= \int_a^b [x(t)y(t)]'dt - \int_a^b x'(t)y(t)dt \\ &= x(b)y(b) - x(a)y(a) + A. \end{aligned}$$

Como  $x(a) = x(b)$  e  $y(a) = y(b)$ , portanto,

$$A = \int_a^b x(t)y'(t)dt.$$

E a terceira fórmula é obtida da soma das duas primeiras

$$\begin{aligned} \int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt &= \int_a^b x(t)y'(t)dt - \int_a^b y(t)x'(t)dt \\ &= \int_a^b x(t)y'(t)dt + \int_a^b y(t)x'(t)dt \\ &= 2A. \end{aligned}$$

Portanto,

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt.$$

Para provar a primeira fórmula em (2.1), consideremos inicialmente o caso ilustrado na Figura 2.3, onde a curva é formada de dois segmentos de reta paralelas ao eixo  $Oy$  e por dois arcos que podem ser escritos na forma.

$$y = f_1(x) \text{ e } y = f_2(x), \quad x \in [x_0, x_1], \quad f_1 > f_2.$$

Neste caso, já sabemos que a área limitada pelo traço de  $\alpha$  é dada por:

$$A = \int_{x_0}^{x_1} f_1(x)dx - \int_{x_0}^{x_1} f_2(x)dx.$$

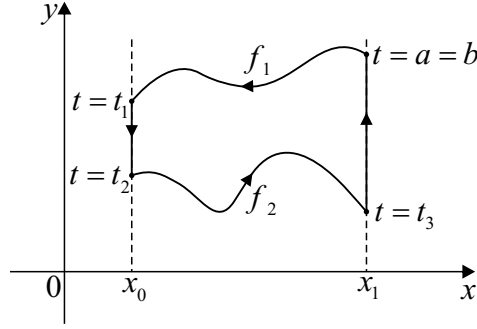


Figura 2.3: Traço de  $\alpha$  formado por dois segmentos de reta paralelas ao eixo  $Oy$  e dois arcos.

Por outro lado, podemos escrever:

$$\alpha = \begin{cases} (x(t), f_1(x(t))) & \text{se } t \in [a, t_1] \\ (x(t), f_2(x(t))) & \text{se } t \in [t_2, t_3] \end{cases}$$

daí temos que:

$$\int_{x_0}^{x_1} f_1(x(t))dx - \int_{x_0}^{x_1} f_2(x(t))dx = \int_{x(t_1)}^{x(a)} f_1(x(t))dx(t) - \int_{x(t_2)}^{x(t_3)} f_2(x(t))dx(t)$$

e portanto

$$A = \int_{t_1}^a y(t)x'(t)dt - \int_{t_2}^{t_3} y(t)x'(t)dt. \quad (2.2)$$

Além disso, quando  $t \in [t_1, t_2]$  temos  $x(t) = x_0$  e quando  $t \in [t_3, b]$  temos  $x(t) = x_1$ . Nos dois caso  $x'(t) = 0$ , então,

$$\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt = \int_{t_3}^b y(t)x'(t)dt = 0. \quad (2.3)$$

De (2.2) e (2.3), e como a curva tem orientação positiva, obtemos, com a notação da Figura 2.3 que,

$$\begin{aligned} A &= - \int_a^{t_1} y(t)x'(t)dt - \int_{t_2}^{t_3} y(t)x'(t)dt - \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt - \int_{t_3}^b y(t)x'(t)dt \\ &= - \int_a^{t_1} y(t)x'(t)dt - \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt - \int_{t_2}^{t_3} y(t)x'(t)dt - \int_{t_3}^b y(t)x'(t)dt \\ &= - \int_a^b y(t)x'(t)dt. \end{aligned}$$

□

Para o caso geral, é preciso provar que é possível dividir a região limitada pela curva num número finito de regiões do tipo simples. Pois sempre vai existir uma reta  $E$  no

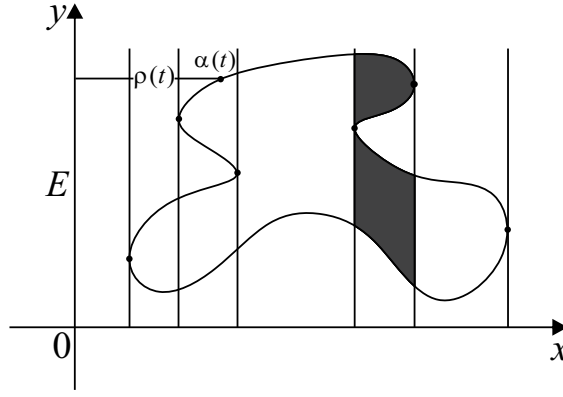


Figura 2.4: Região limitada pelo traço de uma curva: um número finito de regiões do tipo anterior.

plano tal que a distância  $\rho(t)$ , que é a distância entre  $\alpha(t)$  e a reta  $E$ , é uma função com número finitos de pontos críticos  $\rho'(t) = 0$ , (MANFREDO, 2005, p. 39), (ver Figura 2.4).

**Lema 2.0.1.** *Sejam  $v$  e  $w$  dois vetores de um espaço vetorial real  $V$  com produto interno, vale a desigualdade*

$$|v \cdot w| \leq |v| \cdot |w|,$$

*denominada de **Desigualdade de Cauchy-Schwarz**.*

*Demonstração.* Para todo número real  $\lambda$ , e pela propriedade  $|v + \lambda w| \geq 0$ . Elevando os dois membros da desigualdade ao quadrado,

$$\begin{aligned} 0 \leq |v + \lambda w|^2 &= (v + \lambda w) \cdot (v + \lambda w) \\ &= (v \cdot v) + \lambda v \cdot w + \lambda w \cdot v + \lambda^2 w \cdot w \\ &= |v|^2 + 2\lambda v \cdot w + \lambda^2 |w|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

O lado esquerdo desta desigualdade pode ser escrita na forma  $a\lambda^2 + b\lambda + c$ , se definimos  $a = |w|^2$ ,  $b = 2v \cdot w$  e  $c = |v|^2$ . Este trinômio é maior ou igual a zero para todo  $\lambda$  real, se, e só se,  $b^2 - 4ac \leq 0$ . Retornando aos valores originais de  $a$ ,  $b$  e  $c$ , obtemos

$$4(v \cdot w)^2 - 4|v|^2|w|^2 \leq 0$$

ou dividindo por 4 e extraindo a raiz quadrada, chegamos à desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|v \cdot w| \leq |v| \cdot |w|.$$

□

**Teorema 2.0.2. (*Desigualdade Isoperimétrica*)** *Seja  $C$  uma curva plana simples e fechada com comprimento  $l$ , e seja  $A$  a área da região limitada por  $C$ . Então:*

$$A \leq \frac{l^2}{4\pi},$$

*e verifica-se a igualdade se e somente se  $C$  é um círculo.*

*Demonstração.* Seja  $E$  e  $E'$  duas retas paralelas que não tocam a curva fechada  $C$ , e considere o movimento destas retas até que elas toquem  $C$  pela primeira vez. Obtemos assim duas retas paralelas,  $L$  e  $L'$  tangentes à curva  $C$ , de forma que  $C$  está totalmente contida na faixa limitada por  $L$  e  $L'$ . Considere agora um círculo  $S^1$  que seja tangente a  $L$  e  $L'$  e não intercepta  $C$ . Seja  $O$  o centro de  $S^1$  e introduza o sistema de coordenadas cartesianas com origem em  $O$  e o eixo  $Ox$  perpendicular a  $L$  e  $L'$  (ver Figura 2.5).

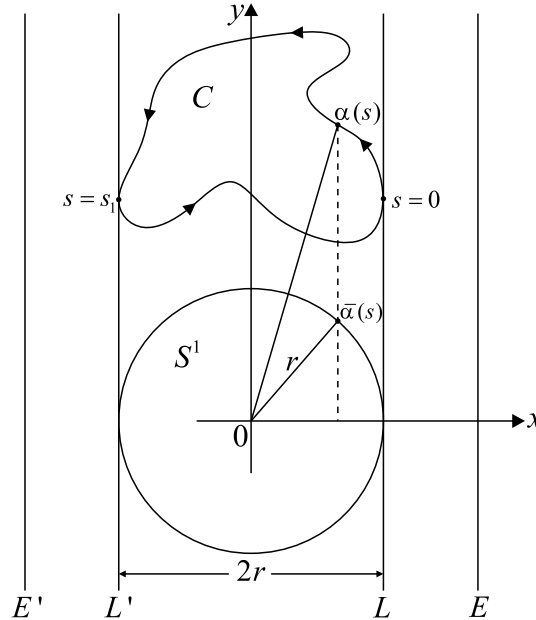


Figura 2.5: Retas  $E$  e  $E'$  paralelas, retas  $L$  e  $L'$  paralelas e tangentes a  $C$  e círculo  $S^1$  tangente a  $L$  e  $L'$ .

Parametrize  $C$  pelo comprimento de arco,  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ , de modo que  $C$  tenha orientação positiva e os pontos de tangência com  $L$  e  $L'$  sejam, respectivamente,  $s = 0$  e  $s = s_1$ .

Podemos supor que a equação de  $S^1$  é:

$$\bar{\alpha}(s) = (\bar{x}(s), \bar{y}(s)) = (x(s), \bar{y}(s)), \quad s \in [0, l],$$

Utilizando a Equação 2.1 e denotando por  $\bar{A}$  a área da região limitada por  $S^1$ , temos

$$A = \int_0^l xy' ds, \quad \bar{A} = \pi r^2 = - \int_0^l \bar{y} x' ds,$$

onde  $2r$  é a distância entre  $L$  e  $L'$ . Assim,

$$\begin{aligned}
 A + \pi r^2 &= \int_0^l xy' ds - \int_0^l \bar{y}x' ds \\
 &= \int_0^l (xy' - \bar{y}x') ds \\
 &= \int_0^l [(x', y') \cdot (-\bar{y}, x)] ds \\
 &\leq \int_0^l |\alpha'| \cdot |\bar{\alpha}| ds \\
 &= \int_0^l r ds \\
 &= lr,
 \end{aligned}$$

uma vez que  $|\bar{\alpha}| = r$  e  $|\alpha'| = 1$  e também foi utilizada a desigualdade de Cauchy-Schwarz, sendo que a igualdade se verifica se e somente se  $\alpha'$  é múltiplo de  $\bar{\alpha}$  isto é, se e somente se  $\alpha' = \frac{1}{r}(-\bar{y}, x)$ , ou seja a igualdade implica  $y' = \frac{1}{r}x$ .

Agora, usaremos o fato de a média geométrica de dois números positivos ser menor ou igual que a média aritmética destes dois números, e vale a igualdade se e somente se os números são iguais. Assim, teremos

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2} \leq \frac{A + \pi r^2}{2} \leq \frac{lr}{2}, \quad (2.4)$$

elevando ambos os membros da inequação acima ao quadrado, temos

$$A\pi r^2 \leq \frac{l^2 r^2}{4},$$

e concluímos então que,

$$A \leq \frac{l^2}{4\pi}. \quad (2.5)$$

Agora supondo que seja válida a igualdade em (2.5) ou seja  $A = \frac{l^2}{4\pi}$ . Então de (2.4) temos,

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2} = \sqrt{\frac{l^2}{4\pi}\pi r^2} = \frac{lr}{2},$$

logo,

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2} = \frac{A + \pi r^2}{2}$$

sendo assim,

$$\begin{aligned}\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2} &= \frac{A + \pi r^2}{2} \Rightarrow \left(2\sqrt{A\pi r^2}\right)^2 = (A + \pi r^2)^2 \\ &\Rightarrow A^2 - 2A\pi r^2 + \pi^2 r^4 = 0 \\ &\Rightarrow (A - \pi r^2)^2 = 0 \\ &\Rightarrow A = \pi r^2,\end{aligned}$$

e portando  $C$  é um círculo, concluindo assim a demonstração.

□

## Referências Bibliográficas

LENCAR, H.; SANTOS, W. *Geometria diferencial das curvas planas*, 24<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 2003.

ANTON, H.; RORRES, C. *Álgebra linear com aplicações*. 8<sup>a</sup> ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

CARMO, M. P. do *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática. (Coleção Textos Universitário). 2005.

COIMBRA, J. R. V. *Uma Introdução à geometria diferencial*. 2008. 136f. Dissertação (Mestre em Matemática) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, Campinas, São Paulo. Disponível em: <<http://cutter.unicamp.br/document/?view=vtls000446072>>. Acesso em: 12 jul. 2011.

FALEIROS, A. C. *Curso de álgebra linear*. Centro de Matemática, Computação e Cognição. Universidade Federal do ABC. Santo André, SP 2011. 148f. Disponível em: <[www.scribd.com/doc/53277115](http://www.scribd.com/doc/53277115)>. Acesso em: 28 fev. 2012.

GUIDORIZZI, Hamilton L. *Um curso de cálculo*, vol. 1, 5<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: LTC 2001.

GUIDORIZZI, Hamilton L. *Um curso de cálculo*, vol. 3, 5<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: LTC 2002.

PICADO, J. *Apontamentos de geometria diferencial*. Universidade de Coimbra. Portugal: 21 Fev. 2005. 204p. Disponível em:



<[www.mat.uc.pt/picado/geomdif/0405/Apontamentos/sI1.pdf](http://www.mat.uc.pt/picado/geomdif/0405/Apontamentos/sI1.pdf)>. Acesso em: 11 jul. 2011.

PINTO, Diomara; MORGADO, M. C. M. *Cálculo diferencial e integral de funções de várias variáveis*, 3<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: Editora UFRJ 2009.

TENENBLAT, K. *Introdução à geometria diferencial*, 2<sup>a</sup> ed. São Paulo: Blucher, 2008.

ZILL, Dennis G. *Equações diferenciais*, vol. 1, 3<sup>a</sup> ed. São Paulo: Pearson Makron Books 2001.