1 课本习题

1.1 P116/7

(1) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

求 (i) $Y=2X$, (ii) $Y=\mathrm{e}^{-2X}$ 的数学期望.

(2) 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立, 且都服从 $(0,1)$ 上的均匀分布. (i) 求 $U=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的数学期望, (ii) 求 $V=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的数学期望.

解：(1)

(i)

$$\begin{aligned}E(Y)=E(2X)&=\int_{-\infty}^{\infty}2xf(x)\,\mathrm{d}x\\ &=2\int_0^{\infty}xe^{-x}\,\mathrm{d}x=2;\end{aligned}\tag{1}$$

(ii)

$$E(Y)=E(e^{-2X})=\int_0^{\infty}e^{-2x}\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.\tag{2}$$

(2)

X_i 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}\tag{3}$$

(i)

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立，所以 $U=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的分布函数为

$$F_U(u)=\begin{cases}0, & u<0,\\ u^n, & 0\le u<1,\\ 1, & u\ge 1.\end{cases}\tag{4}$$

U 的概率密度函数为

$$f_U(u)=\begin{cases}nu^{n-1}, & 0<u<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\tag{5}$$

$$E(U)=\int_0^1 u\cdot nu^{n-1}\,\mathrm{d}u=\frac{n}{n+1}.\tag{6}$$

(ii)

$V=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的分布函数为

$$F_V(v)=\begin{cases}0, & v<0,\\ 1-(1-v)^n, & 0\le v<1,\\ 1, & v\ge 1.\end{cases}\tag{7}$$

V 的概率密度函数为

$$f_V(v)=\begin{cases}n(1-v)^{n-1}, & 0<v<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\tag{8}$$

$$E(V)=\int_0^1 v\cdot n(1-v)^{n-1}\,\mathrm{d}v=\frac{1}{n+1}.\tag{9}$$

1.2 p117/12

某车间生产的圆盘直径在区间 (a,b) 上服从均匀分布, 试求圆盘面积的数学期望.

解:

$$\begin{aligned} E(S) = E\left(\frac{\pi d^2}{4}\right) &= \int_a^b \frac{\pi d^2}{4}\frac{1}{b-a}\mathrm{d}d \\ &= \frac{\pi(a^2+ab+b^2)}{12}. \end{aligned} \tag{10}$$

1.3 p117/15

将 n 只球 $(1 \sim n$ 号) 随机地放进 n 个盒子 $(1 \sim n$ 号) 中去, 一个盒子装一只球. 若一只求装入与球同号的盒子中, 则称为一个配对. 记 X 为总的配对数, 求 $E(X)$.

解：设

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 个球放入了第 } i \text{ 号盒子}, \\ 0, & \text{第 } i \text{ 个球未放入第 } i \text{ 号盒子}, \end{cases} \tag{11}$$

则 X_i 满足 0-1 分布，$P\{X_i=1\}=\dfrac{1}{n}$，$P\{X_i=0\}=1-\dfrac{1}{n}$，因此

$$E(X) = \sum_i E(X_i) = n \cdot \frac{1}{n} = 1. \tag{12}$$

1.4 p117/20

设随机变量 X 服从几何分布, 其分布律为

$$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}, \quad k=1,2,\cdots$$

其中 $0<p<1$ 是常数. 求 $E(X), D(X)$.

解:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1} \\
&= p\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \\
&= p\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(1-p)}(1-p)^{k} \\
&= p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(1-p)}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k}\right) \\
&= p\cdot\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p}, \qquad (13)\\
E(X(X+1)) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k(k+1)p(1-p)^{k-1} \\
&= p\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}(1-p)^2}(1-p)^{k+1} \\
&= p\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}(1-p)^2}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k+1}\right) \\
&= \frac{2}{p^2}, \qquad (14)\\
D(X) &= E(X^2)-[E(X)]^2 \\
&= E(X(X+1))-E(X)-[E(X)]^2 \\
&= \frac{2}{p^2}-\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2} \\
&= \frac{1-p}{p^2}. \qquad (15)
\end{aligned}$$

1.5 p118/28

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试验证 X 和 Y 是不相关的, 但 X 和 Y 不是相互独立的.

解：

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)d\,y \\
&= \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, \qquad (16) \\
f_Y(y) &= \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)d\,x \\
&= \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, \qquad (17) \\
E[X] &= \int_{-1}^{1} x f_X(x)d\,x \\
&= 0, \qquad (18) \\
E[Y] &= \int_{-1}^{1} y f_Y(y)d\,y \\
&= 0, \qquad (19) \\
E[XY] &= \int_{-1}^{1} d\,x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} xyf(x,y)d\,y \\
&= 0, \qquad (20) \\
& \qquad (21)
\end{aligned}$$

因此 $E[XY] = E[X]E[Y]$，则 $\mathrm{cov}(X,Y) = 0, \rho = 0$，$X$ 与 Y 不相关。但显然 $f_X(x)f_Y(y) \neq f(x,y)$，因此 X 与 Y 不独立。

1.6 p119/32

设随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+y), & 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $E(X), E(Y), \mathrm{Cov}(X,Y), \rho_{XY}, D(X+Y)$

解:

$$E[X]=\int_0^2 dx\int_0^2 xf(x,y)dy \\ =\frac{7}{6}, \tag{22}$$

$$E[Y]=\int_0^2 dx\int_0^2 yf(x,y)dy \\ =\frac{7}{6}, \tag{23}$$

$$E[XY]=\int_0^2 dx\int_0^2 xyf(x,y)dy \\ =\frac{4}{3}, \tag{24}$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=-\frac{1}{36}, \tag{25}$$

$$E[X^2]=\int_0^2 dx\int_0^2 x^2f(x,y)dy \\ =\frac{5}{3}, \tag{26}$$

$$E[Y^2]=\int_0^2 dx\int_0^2 y^2f(x,y)dy \\ =\frac{5}{3}, \tag{27}$$

$$D[X]=E[X^2]-(E[X])^2=\frac{11}{36}, \tag{28}$$

$$D[Y]=E[Y^2]-(E[Y])^2=\frac{11}{36}, \tag{29}$$

$$\rho=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D[X]}\sqrt{D[Y]}}=-\frac{1}{11}, \tag{30}$$

$$D[X+Y]=D[X]+D[Y]+2\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{5}{9}. \tag{31}$$

1.7 p119/33

设随机变量 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right), Y\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$, 且设 X,Y 相互独立, 试求 $Z_1=\alpha X+\beta Y$ 和 $Z_2=\alpha X-\beta Y$ 的相关系数 (其中 α,β 是不为零的常数).

解：由于 X，Y 相互独立，$\rho_{XY}=0$，则

$$E[Z_1]=\alpha E[X]+\beta E[Y]=(\alpha+\beta)\mu, \tag{32}$$

$$E[Z_2]=\alpha E[X]-\beta E[Y]=(\alpha-\beta)\mu, \tag{33}$$

$$E[Z_1Z_2]=E[\alpha^2X^2-\beta^2Y^2]=(\alpha^2-\beta^2)(\mu^2+\sigma^2), \tag{34}$$

$$D[Z_1]=\alpha^2D[X]+\beta^2D[Y]=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2, \tag{35}$$

$$D[Z_2]=\alpha^2D[X]+\beta^2D[Y]=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2, \tag{36}$$

因此

$$\rho_{Z_1Z_2}=\frac{E[Z_1Z_2]-E[Z_1]E[Z_2]}{\sqrt{D[Z_1]}\sqrt{D[Z_2]}}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}. \tag{37}$$

1.8 p119/34

(1) 设随机变量 $W=(aX+3Y)^2, E(X)=E(Y)=0, D(X)=4, D(Y)=16, \rho_{XY}=-0.5$. 求常数 a 使 $E(W)$ 为最小, 并求 $E(W)$ 的最小值.

(2) 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布, 且有 $D(X)=\sigma_X^2, D(Y)=\sigma_Y^2$. 证明当 $a^2=\sigma_X^2/\sigma_Y^2$ 时„ 随机变量 $W=X-aY$ 与 $V=X+aY$ 相互独立.

解：(1)

$$E[X^2]=D[X]+(E[X])^2=4, \tag{38}$$

$$E[Y^2]=D[Y]+(E[Y])^2=16, \tag{39}$$

$$E[XY]=\rho_{XY}\sqrt{D[X]}\sqrt{D[Y]}+E[X]E[Y]=-4, \tag{40}$$

因此

$$\begin{aligned} E[W] &= E[a^2X^2+6aXY+9Y^2] \\ &= a^2E[X^2]+6aE[XY]+9E[Y^2] \\ &= 4(a^2-6a+36), \end{aligned} \tag{41}$$

对上式求极值，得到：当 $a=3$ 时，$E[W]$ 取最小值 108。

(2)

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(W,V) &= E[WV]-E[W]E[V] \\ &= E[X^2-a^2Y^2]-E[X+aY]E[X-aY] \\ &= E[X^2]-a^2E[Y^2]-(E[X]+aE[Y])(E[X]-aE[Y]) \\ &= \sigma_X^2+\mu_X^2-a^2\sigma_Y^2-a^2\mu_Y^2-(\mu_X^2-a^2\mu_Y^2) \\ &= \sigma_X^2-a^2\sigma_Y^2, \end{aligned} \tag{42}$$

当 $a^2=\dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$ 时，$\operatorname{cov}(W,V)=0$，即 $\rho_{WV}=0$。同时由于 W,V 是服从二维正态分布的随机变量的线性组合，因此 W,V 也服从二维正态分布。其相关系数 $\rho=0$ 说明它们相互独立。

1.9 p119/37

对于两个随机变量 V,W, 若 $E\left(V^2\right), E\left(W^2\right)$ 存在, 证明

$$[E(VW)]^2 \leqslant E\left(V^2\right)E\left(W^2\right)$$

这一不等式称为柯西一施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式. 提示: 考虑实变量 t 的函数

$$q(t)=E\left[(V+tW)^2\right]=E\left(V^2\right)+2tE(VW)+t^2E\left(W^2\right)$$

证明:

(1) 若 $E(V^2)=0$，则 $D(V)=0$，从而 $P\{V=0\}=1$，$E(VW)=0$，不等式取等号。

$E(W^2)=0$ 时，同理。

(2) 若 $E(V^2)>0, E(W^2)>0$，考虑实变量 t 的函数：

$$q(t)=E[(V+tW)^2]=E(V^2)+2tE(VW)+t^2E(W^2). \tag{43}$$

对于任意 t，$q(t)\geq 0$, $E(W^2)>0$，所以二次三项式 $q(t)$ 的判别式

$$\Delta=4[E(VW)]^2-4E(V^2)E(W^2)\leq 0, \tag{44}$$

即

$$[E(VW)]^2\leq E(V^2)E(W^2). \tag{45}$$

取等条件为 $\Delta=0$, 即 $q(t)=0$ 有一个根。此时 $t=-E(VW)/E(W^2)$。

$$V=-tW=\frac{E(VW)}{E(W^2)}W. \tag{46}$$

即当 $V=cW$ 时，等号成立 (c 为任一常数)。

2 补充题

2.1

假定每人生日在各个月份的机会是相同的, 求 3 个人中生日在第 1 个季度的平均人数。

解：设 X 为三个人中生日在第一季度的人数，$X = 0, 1, 2, 3$，则 $X \sim b(3, 0.25)$，因此 X 的分布律为

X	0	1	2	3
p_k	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

因此 X 的数学期望为

$$E(X) = \sum_k k p_k = 0.75. \tag{47}$$

2.2

假设随机变量 X 均匀分布于区间 $[\alpha, \beta], \alpha, \beta > 0$ 。(1) 求 $E[1/x]$；(2) 求 $1/E[x]$ 。

解：设随机变量 X 的分布律为

X	-1	1	2	3
p	a	0.2	b	0.1

且 $E(X) = 1$, 试求: (1) 常数 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的值; (2) $\boldsymbol{D}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right)$

(1)

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{x}\right) &= \int_\alpha^\beta \frac{1}{x}\frac{1}{\beta-\alpha}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\ln(\beta/\alpha)}{\beta-\alpha}. \end{aligned} \tag{48}$$

(2)

$$\begin{aligned} 1/E(x) &= 1/\int_\alpha^\beta x\frac{1}{\beta-\alpha}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\alpha+\beta}. \end{aligned} \tag{49}$$

(1)

$$a + 0.2 + b + 0.1 = 1, \tag{50}$$

$$E(x) = -a + 0.2 + 2b + 0.3 = 1, \tag{51}$$

解得

$$a = 0.3,\ b = 0.4. \tag{52}$$

(2) 随机变量 $Y = \dfrac{1}{X}$ 的分布律为

$Y = \frac{1}{X}$	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
p_k	0.3	0.1	0.4	0.2

则 $E(Y) = \sum_k k p_k = \dfrac{2}{15}$,

$$\begin{aligned} D(Y) &= \sum_k (k - E(Y))^2 p_k \\ &= 0.593. \end{aligned} \tag{53}$$

2.3

设 X_1, X_2 独立同分布, 且都取正值。证明: $E\left(X_1/X_2\right) \geq 1$, 等号成立当且仅当 X_1, X_2 只取一个值。(提示: 使用柯西-施瓦茨不等式)

证明：由柯西-施瓦茨不等式

$$E(\frac{1}{X_2})E(X_2) = E((\frac{1}{\sqrt{X_2}})^2)E((\sqrt{X_2})^2) \geq E(1)^2 = 1. \tag{54}$$

等号成立当且仅当存在常数，$\sqrt{X_2} = c/\sqrt{X_2}$，即 $X_2 = c$ 时成立。X_1, X_2 独立，则 $X_1, 1/X_2$ 也独立，所以

$$E(X_1/X_2) = E(X_1)E(1/X_2) \geq E(X_1)/E(X_2) = 1. \tag{55}$$

等号成立当且仅当 X_1, X_2 只取一个常数 c 时成立。

2.4

切比雪夫不等式：设随机变量 X 的数学期望和方差都存在, 则对任意常数 $\varepsilon > 0$, 有

$$\mathrm{P}(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{D}(X)}{\varepsilon^2} \quad \text{或} \quad \mathrm{P}(|X - EX| \geq \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathrm{D}(X)}{\varepsilon^2}$$

请证明: 存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得等号成立的充要条件为 $P\left(X = EX - \varepsilon_0\right) = \frac{1-p}{2}, P\left(X = EX + \varepsilon_0\right) = \frac{1-p}{2}$, 其中 $p = P(X = EX)$.

证明:

I 、充分性: 如果随机变量满足:

$$P\left(X = EX - \varepsilon_0\right) = \frac{1-p}{2}$$
$$P(X = EX) = p$$
$$P\left(X = EX + \varepsilon_0\right) = \frac{1-p}{2}$$

则:

$$P\left(|X - EX| \geq \varepsilon_0\right) = P\left(|X - EX| = \varepsilon_0\right) = P\left(X = EX + \varepsilon_0\right) + P\left(X = EX - \varepsilon_0\right) = 1 - p$$
$$\mathrm{Var}(X) = E(X - EX)^2 = \varepsilon_0^2 \frac{1-p}{2} + (-\varepsilon_0)^2 \frac{1-p}{2} + 0^2 p = (1-p)\varepsilon_0^2$$

由此可得:

$$\mathrm{P}\left(|X - EX| \geq \varepsilon_0\right) = \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon_0^2}$$

II 、必要性: 设随机变量 X 的分布函数为 $\mathrm{F_X(x)}$

由题设可知

$$\varepsilon_0^2 P\left(|X - EX| \geq \varepsilon_0\right) = \mathrm{Var}(X)$$

而

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{|x-EX|<\varepsilon_0} (x - EX)^2 dF_X(x) + \int_{|x-EX|\geq\varepsilon_0} (x - EX)^2 dF_X(x)$$

假设 $P\left(0 < |X - EX| < \varepsilon_0\right) > 0$ 则:

$$\int_{0<|x-EX|<\varepsilon_0} (x - EX)^2 dF_X(x) > 0$$

于是有:

$$\operatorname{Var}(X) \geq \int_{|x-EX|<\varepsilon_0}(x-EX)^2 dF_X(x)+\varepsilon_0^2 P\left(|X-EX| \geq \varepsilon_0\right)>\varepsilon_0^2 P\left(|X-EX| \geq \varepsilon_0\right)$$

与题设矛盾, 故 $P\left(0<|X-EX|<\varepsilon_0\right)=0$, 由前面证明可知

$$\operatorname{Var}(X)=\int_{|x-EX| \geq \varepsilon_0}(x-EX)^2 dF_X(x)$$

假设 $P=\left(|X-EX|>\varepsilon_0\right)>0$, 则得:

$$\int_{|x-EX|>\varepsilon_0}(x-EX)^2 dF_x(x)>0$$

于是有

$$\operatorname{Var}(X)=\varepsilon_0^2 P\left(|X-EX|=\varepsilon_0\right)+\int_{|x-EX|>\varepsilon_0}(x-EX)^2 dF_X(x)>\varepsilon_0^2 P\left(|X-EX|=\varepsilon_0\right)$$

这与题设矛盾, 故 $P=\left(|X-EX|>\varepsilon_0\right)=0$, 于是得到:

$$P=\left(|X-EX|=\varepsilon_0\right)=1-P(|X-EX|=0)=1-p$$

即

$$\begin{aligned}
&P\left(X=EX-\varepsilon_0\right)=\frac{1-p}{2} \\
&P\left(X=EX+\varepsilon_0\right)=\frac{1-p}{2} \\
&p=P(X=EX)
\end{aligned}$$

2.5

考虑 N 个服从多项分布的随机变量 $\mathrm{n}=\left(n_1, \ldots, n_N\right)$, 概率为 $\mathrm{p}=\left(p_1, \ldots, p_N\right)$., 并且总试验次数为 $n_{\text{tot}} =\sum_{i=1}^N n_i$ 。假设变量 k 定义为前 M 个 n_i 之和,

$$k=\sum_{i=1}^M n_i, \quad M \leq N$$

利用误差传递以及多项分布的协方差

$$\operatorname{cov}\left[n_i, n_j\right]=\delta_{ij} n_{\text{tot}}\, p_i\left(1-p_i\right)+\left(\delta_{ij}-1\right) p_i p_j n_{\text{tot}}$$

求 k 的方差。证明该方差等于 $p=\sum_{i=1}^M p_i$ 并且总试验次数为 n_{tot} 的二项分布的方差。

2.6

考虑两个随机变量 x 和 y .

(a) 证明 $\alpha x+y$ 的方差为

$$\begin{aligned}
V[\alpha x+y] &=\alpha^2 V[x]+V[y]+2 \alpha \operatorname{cov}[x, y] \\
&=\alpha^2 V[x]+V[y]+2 \alpha \rho \sigma_x \sigma_y
\end{aligned}$$

其中 α 为任意常数, $\sigma_x^2=D[x], \sigma_y^2=D[y]$, 关联系数 $\rho=\operatorname{cov}[x, y] / \sigma_x \sigma_y$.

(b) 利用 (a) 的结果，证明关联系数总是位于区间 $-1 \leq \rho \leq 1$