为什么要引入齐次坐标，齐次坐标的意义（一）

问题：两条平行线可以相交于一点

在欧氏几何空间，同一平面的两条平行线不能相交，这是我们都熟悉的一种场景。

然而，在透视空间里面，两条平行线可以相交，例如：火车轨道随着我们的视线越来越窄，最后两条平行线在无穷远处交于一点。

欧氏空间（或者笛卡尔空间）描述2D/3D几何非常适合，但是这种方法却不适合处理透视空间的问题（实际上，欧氏几何是透视几何的一个子集合），2维笛卡尔坐标可以表示为（x,y）。

如果一个点在无穷远处，这个点的坐标将会(∞,∞)，在欧氏空间，这变得没有意义。

平行线在透视空间的无穷远处交于一点，但是在欧氏空间却不能，数学家发现了一种方式来解决这个问题。

方法：齐次坐标

简而言之，齐次坐标就是用N+1维来代表N维坐标

我们可以在一个2D笛卡尔坐标末尾加上一个额外的变量w来形成2D齐次坐标，因此，一个点(X,Y)在齐次坐标里面变成了（x,y,w)，并且有

X = x/w

Y = y/w

例如，笛卡尔坐标系下（1，2）的齐次坐标可以表示为（1，2，1），如果点（1，2）移动到无限远处，在笛卡尔坐标下它变为(∞,∞)，然后它的齐次坐标表示为（1，2，0），因为(1/0, 2/0) = (∞,∞)，我们可以不用"∞"来表示一个无穷远处的点了，哈哈。

为什么叫齐次坐标?

我们把齐次坐标转化为笛卡尔坐标的方法是前面n-1个坐标分量分别除以最后一个分量即可。

$$\underset{\text{Homogeneous}}{(x, y, w)} \Leftrightarrow \underset{\text{Cartesian}}{\left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}\right)}$$

转化齐次坐标到笛卡尔坐标的过程中，我们有一个发现，例如：

$$\begin{aligned}
(1,2,3) &\Rightarrow \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) \\
(2,4,6) &\Rightarrow \left(\frac{2}{6},\frac{4}{6}\right) \quad = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) \\
(4,8,12) &\Rightarrow \left(\frac{4}{12},\frac{8}{12}\right) = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \\
(1a,2a,3a) &\Rightarrow \left(\frac{1a}{3a},\frac{2a}{3a}\right) = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

你会发现(1, 2, 3), (2, 4, 6) 和(4, 8, 12)对应同一个Euclidean point (1/3, 2/3)，任何标量的乘积，例如(1a, 2a, 3a) 对应 笛卡尔空间里面的(1/3, 2/3) 。因此，这些点是“齐次的”，因为他们代表了笛卡尔坐标系里面的同一个点。换句话说，齐次坐标有规模不变性。

证明：两条直线可以相交

考虑如下方程组：

$$\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ Ax+By+D=0 \end{cases}$$

我们知道在笛卡尔坐标系里面，该方程组无解，因为C ≠ D,如果C=D,两条直线就相同了。 让我们在透视空间里面，用齐次坐标x/w, y/w代替x ,y

$$\begin{cases} A\dfrac{x}{w}+B\dfrac{y}{w}+C=0 \\ \\ A\dfrac{x}{w}+B\dfrac{y}{w}+D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ax+By+Cw=0 \\ \\ Ax+By+Dw=0 \end{cases}$$

现在我们有一个解(x, y, 0)，两条直线相交于(x, y, 0)，这个点在无穷远处。

齐次坐标的意义：

使用齐次坐标，可以表示 平行线在透视空间的无穷远处交于一点。在欧氏空间，这变得没有意义，所以欧式坐标不能表示。

即：齐次坐标可以表示无穷远处的点。例如：

如果点（1，2）移动到无限远处，在笛卡尔坐标下它变为(∞,∞)，然后它的齐次坐标表示为（1，2，0），因为(1/0, 2/0) =

(∞,∞)，我们可以不用”∞"来表示一个无穷远处的点了。

附：为什么要引入齐次坐标，齐次坐标的意义（二） https://blog.csdn.net/zhuiqiuzhuoyue583/article/details/95230246

参考：http://www.songho.ca/math/homogeneous/homogeneous.html

https://www.zhihu.com/question/59595799