清 华 大 学

综 合 论 文 训 练

题目：自守表示,Langlands 纲领

系　　别：数学科学系

专　　业：数理基础科学专业

姓　　名：文豪

指导教师：印林生 教授

2010年 6月

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留学位 论文的复印件，允许该论文被查阅和借阅；学校可以公布该论文的全部或部分内 容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存该论文。

(涉密的学位论文在解密后应遵守此规定)

签　名：____________ 导师签名：____________ 日　　期：____________

中文摘要

本文主要介绍了$GL(n)$上的自守表示理论，以及对Langlands纲领进行了一个初步的综述。参照有关的文献，给出了一些基本的结果和主要的猜想。

关键词：Langlands 纲领　自守表示　L-群　L-函数

ABSTRACT

This article mainly introduces the automorphic representation theory for $GL(n)$, and gives an elementary survey of the Langlands Program. Through consulting relevant references, this article presents some fundamental results and conjectures.

Key words: Langlands Program   Automorphic representation L-group L-functions

目　录

第 1 章　自守表示

本章主要介绍的是$GL(n)$的自守表示，因为“自守表示及其L-函数是Langlands纲领的核心”[1]。本章最终的目的是给出守表示（automorphic representation）以及自守尖点表示（automorphic cuspidal representation）的定义，以及两个大定理Tensor product theorem和Multiplicity one theorem。

1.1　一些基本概念

我们先来介绍一些基本概念。

设k为固定的代数闭域。定义k上的n维仿射空间[2]

$$\mathbb{A}_k^n = \{(a_1, \cdots, a_n) \mid a_i \in k, 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

赋予$\mathbb{A}_k^n$Zariski拓扑：取所有$\mathbb{A}_k^n$所有代数集合的补为$\mathbb{A}_k^n$的开集。这里，$\mathbb{A}_k^n$的代数集合被定义为某n个变量的k系数多项式集合的公共零点集。

定义 1.1：$\mathbb{A}_k^n$的一个不可约闭子集X就称为仿射代数簇。

这里不可约指的是不能分解成两个真闭子集的并。设R为包含k的一个环，我们记$X(R)$为坐标取值在R中的X的点。即设$X = Z(T)$，为多项式集T的零点集，那么

$$X(R) = \{(a_1, \cdots, a_n) \in R^n \mid \forall f \in T, f(a_1, \cdots, a_n) = 0\}.$$

接下来，我们给出域k上仿射代数群的定义。

定义 1.2：设G为k上的一个仿射代数簇，被赋予了一个特殊点$1 \in G(k)$，群的乘法$G \times G \to G$由多项式给出，使得对任意的包含k的环R，$G(R)$在这个乘法下成为一个群。那么我们称G为域k上的一个仿射代数群。

以下设F为一个整体域，即数域或函数域。记$\mathfrak{o}_v$为F在v处完备化F_v的整数环。定义F的阿代尔环$\mathbb{A}_F$和伊代尔群$\mathbb{A}_F^\times$如下：

$$\mathbb{A}_F = \left\{(a_v)_v \in \prod_v F_v \mid \text{对}F\text{的几乎所有的有限素点}v\text{有}a_v \in \mathfrak{o}_v\right\},$$

$$\mathbb{A}_F^\times = \left\{ (a_v)_v \in \prod_v F_v^\times \mid 对F的几乎所有的有限素点v有a_v \in \mathfrak{o}_v^\times \right\}.$$

我们给出表示的相关概念。

定义 1.3： 设G为任一群，V为某个域k上的线性空间。如果存在群同态$\rho : G \to GL(V)$，其中$GL(V)$为一般线性群，那么我们称(ρ, V)，简记称V或者ρ。

一个等价的定义是G在V上有一个线性作用，则称V为G的一个表示。另一个等价的定义是V是具有kG-模结构，则称V为G的一个表示。

若U是V的一个子空间，且在G的作用下为不变子空间，那么称$(\rho|_U, U)$为(ρ, V)的一个子表示。考虑商空间V/U，对$g \in G, x+U \in V/U$，定义$g(x+U) = g(x)+U$，那么我们得到G在V/U上的一个作用，称为(ρ, V)的一个商表示，记为$(V/U, \rho_{V/U})$。群G的非零表示(ρ, V)称为是不可约的，如果他没有非平凡的子表示。

设(ρ_1, V_1)和(ρ_2, V_2)是群G的两个表示，我们称他们是同构的，如果存在单满的k-线性映射$f : V_1 \to V_2$，使得对任一$g \in G$有下面的交换图：

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_1(g)"'] & V_2 \arrow[d, "\rho_2(g)"] \\ V_1 \arrow[r, "f"] & V_2 \end{tikzcd}$$

关于表示的进一步知识，可以参考[3]。

现在再来介绍限制直积[4]和限制张量积[5]的概念。

定义 1.4： 设$(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$为一族局部紧群，$S$为$\Lambda$的有限子集合，对于每个$\lambda \in \Lambda \setminus S$给定$G_\lambda$的一个紧开子群$U_\lambda$。称直积群$\prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$的子群

$$\left\{ (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda \mid 对几乎所有的\lambda \in \Lambda \setminus S有x_\lambda \in U_\lambda \right\}$$

为$(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$关于$(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda\setminus S}$的限制直积。

我们对限制直积给出如下拓扑。对于包含S的Λ的有限子集T，考虑$\prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$的子集

$$G(T) = \prod_{\lambda\in T} G_\lambda \times \prod_{\lambda\in\Lambda\setminus T} U_\lambda.$$

于是

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda = \bigcup_T G(T).$$

在每个$G(T)$中引入直积拓扑，对于$\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$的子集$V$，如果对所有$T$，$V \cap G(T)$为$G(T)$中的开集，则定义$V$为开集。

以下简记$\mathbb{A}_F$为A。易知A是F_υ关于$\mathfrak{o}_\upsilon$的限制直积。在限制直积拓扑下，A是局部紧群。记A_f为有限阿代尔组成的环，即

$$A_f = \left\{(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in A \mid a_\upsilon = 1, \text{对所有的无限素点}\upsilon\right\}.$$

同样地，$GL(n, A)$以显然的方式视为$GL(n, F_\upsilon)$ 关于$GL(n, \mathfrak{o}_\upsilon)$的限制直积。

定义 1.5： 设Σ为一个指标集，$(V_\upsilon)_{\upsilon\in\Sigma}$为一族线性空间。对几乎所有的$\upsilon \in \Sigma$取定一个非零的$x_\upsilon^0 \in \Sigma_\upsilon$。令$\Omega$为$\Sigma$的满足如下条件的有限子集$S$的集合：若$\upsilon \notin S$，那么$x_\upsilon^0$有定义。我们通过包含关系给出$\Omega$的序，那么$\Omega$成为一个定向集。对$S, S' \in \Omega$，且$S \subseteq S'$，我们给出同态：

$$\begin{aligned} \lambda_{S,S'} : \otimes_{\upsilon\in S} V_\upsilon &\longrightarrow \otimes_{\upsilon\in S'} V_\upsilon \\ x &\longmapsto x \otimes (\otimes_{\upsilon\in S'\setminus S}\, x_\upsilon^0) \end{aligned}$$

于是我们得到一个正向系统，并称

$$\bigotimes_\upsilon V_\upsilon := \varinjlim \bigotimes_{\upsilon\in S} V_\upsilon$$

为这一族空间的限制张量积。

假设我们有一族群$(G_\upsilon)_{\upsilon\in\Sigma}$，和这族群的子群族$(K_\upsilon)_{\upsilon\in\Sigma}$。假设对每个$\upsilon \in \Sigma$，群$G_\upsilon$有一个表示$(V_\upsilon, \rho_\upsilon)$，并且几乎所有的$\upsilon$都存在$\xi_\upsilon^0 \in V_\upsilon$使得$\rho_\upsilon(k_\upsilon)\xi_\upsilon^0 = \xi_\upsilon^0$对所有的$k_\upsilon \in K_\upsilon$成立。令$G$为$G_\upsilon$关于$K_\upsilon$的限制直积，那么我们可以定义$G$的一个表示$\left(\bigotimes\limits_\upsilon \rho_\upsilon, \bigotimes\limits_\upsilon V_\upsilon\right)$：

$$\left(\bigotimes_\upsilon \rho_\upsilon\right)(g_\upsilon)_\upsilon \left(\bigotimes_\upsilon x_\upsilon\right) = \bigotimes_\upsilon \rho_\upsilon(g_\upsilon)x_\upsilon.$$

设ω为F的一个Hecke特征，即伊代尔类群的一个特征$\omega : A^\times/F^\times \to \mathbb{C}_1$。记

$$L^2(GL(n, F)\backslash GL(n, A), \omega)$$

为$GL(n,A)$上关于其Haar测度（[6]）可测的并且满足如下条件的函数ϕ组成的线性空间：

$$\phi\left(\begin{pmatrix} z & & \\ & \ddots & \\ & & z \end{pmatrix} g\right) = \omega(z)\phi(g), \quad z \in A^{\times}, \tag{1-1}$$

$$\phi(\gamma g) = \phi(g), \quad \gamma \in GL(n,F), \tag{1-2}$$

$$\int_{Z(A)GL(n,F)\backslash GL(n,A)} |\phi(g)|^2 dg < \infty.$$

这里，$Z(A)$指的是$GL(n,A)$的中心。$L^2(GL(n,F)\backslash GL(n,A),\omega)$是一个希尔伯特空间。进一步还满足尖点性：对所有的$1 \leqslant r, s \leqslant n-1$，且$r+s=n$，几乎处处成立

$$\int_{Mat_{r\times s}(F)\backslash Mat_{r\times s}(A)} \phi\left(\begin{pmatrix} I_r & X \\ & I_s \end{pmatrix} g\right) dX = 0 \tag{1-3}$$

的ϕ组成$L^2(GL(n,F)\backslash GL(n,A),\omega)$的一个闭子空间，我们记为

$$L_0^2(GL(n,F)\backslash GL(n,A),\omega).$$

这里$Mat_{r\times s}$表示$r\times s$矩阵组成的代数群。

我们可以给出$GL(n,A)$在$L^2(GL(n,F)\backslash GL(n,A),\omega)$上的一个作用$\rho$，即给出表示$(L^2(GL(n,F)\backslash GL(n,A),\omega),\rho)$。$\rho$的定义如下

$$(\rho(g)\phi)(x) = \phi(xg), \quad g, x \in GL(n,A)$$

即每个$g \in GL(n,A)$对$(L^2(GL(n,F)\backslash GL(n,A),\omega)$元素的作用是右平移。这个表示称为右正则表示。$L_0^2(GL(n,F)\backslash GL(n,A),\omega)$在这个作用下是一个不变子空间，因此我们得到$GL(n,A)$的一个子表示。 空间$L_0^2(GL(n,F)\backslash GL(n,A),\omega)$具有比较好的性质，我们有如下的定理

定理 1.1： $L_0^2(GL(n,F)\backslash GL(n,A),\omega)$可以分解为一些不可约的希尔伯特的不变子空间的直和。

下面我们给出$GL(n,F)$上自守形式的定义。我们先给定$GL(n,A)$的一个紧子群K：

$$K=\prod_{v}K_{v},\quad K_{v}=\begin{cases}O(n) & \text{如果}v\text{是一个实素点；}\\ U(n) & \text{如果}v\text{是一个实素点；}\\ GL(n,\mathfrak{o}_{v}) & \text{如果}v\text{是一个有限素点。}\end{cases}$$

可以证明，K是$GL(n,A)$的一个极大紧子群，并且$GL(n,A)$的每个极大紧子群都与K共轭。

定义 1.6： 我们称$GL(n,A)$上的函数ϕ为一个自守形式，如果它满足式1-1和式1-2并且ϕ还是光滑的，K-有限的，$\mathcal{Z}$-有限的，缓慢增长的（of moderate growth）。这里的ω是一个拟特征，被称为自守形式ϕ的中心拟特征。

现在来解释后面的几个条件。若F是一个函数域，ϕ是光滑的指的是ϕ是局部常值的；若F为数域，如果对任意的$g\in GL(n,A)$，存在g的一个邻域N和$GL(n,F_{\infty})$上的一个光滑函数ϕ_{g}，使得对任意$h\in N$，有$\phi(h)=\phi_{g}(h_{\infty})$。这里的

$$F_{\infty}=\prod_{v\in S_{\infty}}F_{v},$$

S_{∞}指的是F的无穷素点的集合。ϕ被称为K-有限的，如果k中元素对ϕ做右平移张成的是一个有限维的线性空间。$\mathcal{Z}$是$GL(n,F_{v}$的泛包络代数（universal enveloping algebra）的中心[5]§2.2。ϕ是$\mathcal{Z}$-有限的指的是ϕ是一个有限维的$\mathcal{Z}$不变空间的元素。ϕ是缓慢增长的（of moderate growth）指的是对$GL(n,A)$上的某个高度函数$\|\ \|$，存在常数C和N，使得对任意的$g\in GL(n,A)$，$\phi(g)<C\|g\|^{N}$。关于后面的这几个条件，具体可参阅[5]的§3.3。我们记$GL(n,A)$上带有中心拟特征ω的自守形式张成的线性空间为

$$\mathcal{A}(GL(n,F)nGL(n,A),\omega).$$

进一步，若ϕ还满足尖点性的条件1-3，那么我们称ϕ为一个尖点形式，并且记尖点形式张成的空间为

$$\mathcal{A}_{0}(GL(n,F)nGL(n,A),\omega).$$

$\mathcal{A}(GL(n,F)nGL(n,A),\omega)$在$GL(n,A_{f})$的作用下不变，而且有$(\mathfrak{g}_{\infty},K_{\infty})$-模结构。

这里的

$$\mathfrak{g}_\infty = \prod_{v \in S_\infty} \mathfrak{gl}(n, F_v),$$

$$K_\infty = \prod_{v \in S_\infty} K_v,$$

$\mathfrak{gl}(n, F_v)$为李代数。在这个意义下，$\mathcal{A}(GL(n,F) n GL(n,A), \omega)$成为$GL(n,A)$的一个“表示”。严格来说$\mathcal{A}(GL(n,F) n GL(n,A), \omega)$和$\mathcal{A}_0(GL(n,F) n GL(n,A), \omega)$并不是$GL(n,A)$的表示，而是$GL(n,A)$的整体Hecke代数$\mathcal{H}_{GL(n,A)}$的表示，见[5]的§3.4。

下面，我们给出自守表示（automorphic representation）以及自守尖点表示（automorphic cuspidal representation）的定义。

定义 1.7 (**自守表示**)： 我们称$GL(n,A)$的一个不可约表示为自守表示，如果他同构于$\mathcal{A}(GL(n,F) n GL(n,A), \omega)$的某个子表示的商。

定义 1.8 (**自守尖点表示**)： 我们称$GL(n,A)$的一个不可约表示为自守表示，如果他同构于$\mathcal{A}_0(GL(n,F) n GL(n,A), \omega)$的某个子表示。

1.2 主要的定理

现在我们给出本章的主要定理。首先我们给出一些引理和定义。

引理 1.1： 设(ρ, V)为K的一个有限维不可约表示，那么存在K_v的一个有限维表示(ρ_v, V_v)，使得对几乎所有的v，(ρ_v, V_v)是K_v的平凡表示，而且存在$\xi_v^0 \in V_v$，使得(ρ, V)同构于$(\otimes_v \rho_v, \otimes_v V_v)$，其中$\otimes_v V_v$是关于$(V_v, \xi_v^0)_v$的限制张量积。

这个引理说的是K的有限维不可约表示总可以写成每个局部的有限维不可约表示的限制张量积。

证明 由于

$$K_f := \prod_{v \notin S_\infty} K_v$$

是完全不连通的，可以证明对满足引理条件的表示ρ，$\ker \rho$包含K的一个开子群，因此包含几乎所有的K_v。令S为包含S_∞的一个有限集合，使得对所有的$v \notin S$，

有$\rho(K_\upsilon) = 1$，即ρ在这些K_υ上是平凡的。于是

$$K/[\prod_{\upsilon\notin S} K_\upsilon] \cong \prod_{\upsilon\in S} K_\upsilon$$

对V有作用，并且这个表示也是不可约的。

$\prod_{\upsilon\in S} K_\upsilon$是一个紧群的有限直积，而他所有的不可约表示都可以分解成$\otimes_{\upsilon\in S}\rho_\upsilon$，$\rho_\upsilon$是$K_\upsilon$的不可约表示。对$\upsilon \notin S$，我们取$(\rho_\upsilon, V_\upsilon)$为$K_\upsilon$的平凡表示。这样，$\rho$就与$\otimes_\upsilon\rho_\upsilon$同构了。引理中的$\xi_\upsilon^0$可取为$V_\upsilon$任何一个元，$\upsilon \notin S$。 □

定义 1.9： 设(π, V)为K的一个表示，设(ρ, V_ρ)为K的一个有限维不可约表示。令$V(\rho)$为V的所有同构于V_ρ的子表示的和。我们称$V(\rho)$为表示(π, V)的ρ-同型（ρ-isotypic）部分。

设V为一个复线性空间，同时是$(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)$-模和$GL(n, A_f)$-模，这样$V$可视为$GL(n, A)$的一个表示。设$(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)$和$GL(n, A_f)$对$V$的作用是可交换的，我们把这两个作用都记为$\pi$，即$GL(n, A)$的一个表示$(\pi, V)$。由于$K = K_\infty \cdot K_f$，因此$K$在$V$上也有一个作用，这个作用也记为$\pi$。

定义 1.10 (Admissible representation)： 满足上述条件的线性空间V称为$GL(n, A)$的一个容许的表示（admissible representation），如果V中的向量都是K-有限的，而且当ρ为K的任一有限维不可约表示时，V的ρ-同型（ρ-isotypic）部分$V(\rho)$是有限维的。

同样地，我们也可以对每个F_υ定义容许表示：

定义 1.11：

(1) 若υ是一个有限素点，那么我们称$GL(n, F_\upsilon)$的表示(π, V)为容许的，如果V的每个向量都有一个开的稳定子群，并且对$K_\upsilon = GL(n, \mathfrak{o}_\upsilon)$的每个有限维不可约表示$(\rho, V_\rho)$，$V$的$\rho$-同型（$\rho$-isotypic）部分$V(\rho)$是有限维的。

(2) 若υ是一个无限素点，那么我们称$GL(n, F_\upsilon)$的表示(π, V)为容许的，如果对$K_\upsilon = GL(n, \mathfrak{o}_\upsilon)$的每个有限维不可约表示$(\rho, V_\rho)$，$V$的$\rho$-同型（$\rho$-isotypic）部分$V(\rho)$是有限维的。

定理 1.2 (Tensor product theorem[5], Flath)： 设(V, π)为$GL(n, A)$的一个容许的不可约表示。那么对F的每个无限素点υ，存在一个容许的不可约的$(\mathfrak{g}_\infty, K_\upsilon)$-模$(V_\upsilon, \pi_\upsilon)$，对$F$的每个有限素点$\upsilon$，存在$GL(n, F_\upsilon)$一个容许的不可约表示$(V_\upsilon, \pi_\upsilon)$，

使得对几乎所有素点υ，V_υ包含一个非零的K_υ不动向量 ξ_υ^0，使得π是π_υ的限制张量积。

有了这个定理，对每个容许不可约表示π，我们总可以写$\pi = \otimes\pi_\upsilon$。这样的表示总是可以先从局部考虑问题，然后提升到整体。

定理 1.3： 设(V, π)为$L_0^2(GL(n, F)\backslash GL(n, A), \omega)$的 一 个 不 可 约 成 分， 那 么$\pi$导出$GL(n, A)$在由$V$中的$K$-有限的向量组成的线性空间上的一个容许的不可约表示。

这个定理说明，$L_0^2(GL(n, F)\backslash GL(n, A), \omega)$的一个不可约成分总可以导出一个自守尖点表示。

定理 1.4 (Multiplicity one theorem[5], Jacquet-Langlands)：
令(V, π)和(V', π')是$\mathcal{A}_0(GL(n, F)nGL(n, A), \omega)$的 两 个 容 许 的 不 可 约 子 表 示。假设对所有的无限素点和几乎所有的有限素点υ 有$\pi_\upsilon \cong \pi'_\upsilon$，那么$V = V'$。

事实上，这个定理中对无限素点υ，$\pi_\upsilon \cong \pi'_\upsilon$的条件不是必须的。这个定理表明，那些性质比较好的$GL(n, A)$的自守尖点表示完全由局部决定。

关于定理1.2和定理1.4这两个定理的证明，参见[5]的§3.4和§3.5。

第 2 章　Langlands 猜想

2.1　L-群

我们先依照[7], [5]给出仿射代数群更多的概念。

设G为域F上的一个代数群，那么G有唯一一个极大不可约子集包含单位元，记为G^0。

定义 2.1：　如果$G = G^0$，则称G是连通的。

记n阶对角阵全体为

$$D(n, F) = \left\{ \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \right\}$$

这是一个代数群，是$Mat_{n\times n}$的子群。

定义 2.2：　设G为一个代数群，如果G与$D(n, F)$的一个子群同构，则称G是可对角化的。

定义 2.3：　如果G是连通的的可对角化代数群，则称G是一个环面（torus）。

定义 2.4：　一个仿射代数群G被称为是简约的（reductive），如果G没有非平凡的正规幂幺子群。G被称为半单（semisimple）的如果G是简约代数群，而且没有非平凡的正规环面。

若G是一个简约代数群，我们定义G的一个Borel子群为G的一个极大的连通可解子群。例如

$$T(n, F) = \left\{ \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{pmatrix} \right\}$$

n阶上三角阵，就是域F上代数群$GL(n)$的一个Borel子群。可以证明，G的所有Borel子群是共轭的。

定义 2.5： 设T为域F上的一个环面，称T在F上是分裂的（split），如果T同构于n个$\mathbb{G}_m$的直积。

这里的n为某个正整数，$\mathbb{G}_m$为域F上的乘法群。

定义 2.6： 设G为域F上的一个简约代数群，称G是分裂的（split），如果G有一个在F上分裂的极大环面。

设F为一个局部域或者整体域，G为F上的一个简约代数群。那么一个连通的L-群${}^LG^0$指的是一个典范地与F相关的复的李群。下表给出了一些例子

G	${}^LG^0$
$GL(n)$	$GL(n,\mathbb{C})$
$SL(n)$	$PGL(n,\mathbb{C})$
$PGL(n)$	$SL(n,\mathbb{C})$
$Sp(2n)$	$SO(2n+1,\mathbb{C})$
$SO(2n+1)$	$Sp(2n,\mathbb{C})$
$SO(2n)$	$SO(2n,\mathbb{C})$

我们举一个例子，来说明这种对应。

例 2.1： 设F是一个非阿局部域（即不是实数域或复数域），记$\mathfrak{o}$为其整数环，υ为其赋值。 ϖ为$\mathfrak{o}$的唯一的极大理想的生成元。设G为F上的一个简约代数群,并且在F上分裂。 设$\chi_1,\cdots,\chi_n$为$F^\times$的拟特征，取$GL(n)$的Borel子群$B(F)=T(n,F)$。记χ为$B(F)$的如下定义的拟特征：

$$\chi\begin{pmatrix} y_1 & * & \cdots & * \\ & y_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & y_n \end{pmatrix} := \chi_1(y_1)\cdots\chi_n(y_n)$$

即我们给出了$B(F)$的一个一维表示。我们把这个表示诱导为$GL(n,F)$上的表示，记为$\mathcal{B}(\chi_1,\cdots,\chi_n)$。我们有如下的定理

定理 2.1： 若$\chi_1,\cdots,\chi_n$是非分歧的，那么表示$\mathcal{B}(\chi_1,\cdots,\chi_n)$包含$GL(n,\mathfrak{o})$不动的元素。$\mathcal{B}(\chi_1,\cdots,\chi_n)$有唯一的一个合成因子，使得这个合成因子是一个非分歧表示。$GL(n,F)$的每个非分歧表示都是这种形式。

$\chi_i(1 \leqslant i \leqslant n)$非分歧指的是$\chi_i(x) = 1$，对所有的$|x|_v = 1$。非分歧表示指的是这个表示在$GL(n, F)$的极大紧子群$GL(n, \mathfrak{o})$作用下不动的元素[1]。一般地，设$G$为$F$上的任一简约代数群，一个容许的不可约表示被称为不可约的，如果这个表示在$G(F)$的一个特殊极大紧子群作用下有不动的元素。在[5]中，这样的表示被称为是Spherical的。

如果π是$GL(n, F)$的一个非分歧的表示，根据上面这个定理，我们知道存在$F^\times$的非分歧特征$\chi_1, \cdots, \chi_n$，使得π是$\mathcal{B}(\chi_1, \cdots, \chi_n)$的一个合成因子。那么我们可以用

$$\begin{pmatrix} \chi_1(\varpi) & & \\ & \ddots & \\ & & \chi_n(\varpi) \end{pmatrix} \in {}^L G^0 = GL(n, \mathbb{C})$$

来参数化π由同构关系定义的等价类。

关于L-群的构造，参阅[5]，在[7]中也有提及，更严格更详细构造在Borel的[8]。总之，我们可以得到以下的一些结论[1]：

设G为F上的一个简约代数群。取定F的一个足够大的有限Galois扩张Ω，特别地，G在Ω上分裂。我们可以定义一个复的简约李群${}^LG^0$，并给出$Gal(\Omega/F)$在${}^LG^0$上的一个作用，使得半直积

$${}^LG = {}^LG^0 \rtimes Gal(\Omega/F)$$

满足如下条件：

(i) 如果G在F上是分裂的，那么${}^LG$是${}^LG^0$和$Gal(\Omega/F)$的直积，$Gal(\Omega/F)$在${}^LG^0$上的作用是平凡的。

(ii) 一般地，如果F的素点v在Ω中非分歧，记$Frob_v$为v对某个在他之上的素点的Frobenius自同构。$G(F_v)$的非分歧表示π_v和${}^LG$的半单共轭类$t(\pi_v)$有一个一一对应，并且$t(\pi_v)$在$Gal(\Omega/F)$上的投影就是$Frob_v$所在的共轭类。

我们把这个群${}^LG$称作是G的L-群。Frobenius自同构的定义见[4]或者[5]。设$r : {}^LG \to GL_d(\mathbb{C})$为一个群同态，使得$r$在${}^LG^0$上的限制是复解析的，那么我们称$r$为${}^LG$的一个表示。我们称一个连续的群同态$\rho : {}^LG \to {}^LG'$为一个$L$-同态，如

果ρ与两个L-群分别在$Gal(\Omega/F)$上的投影相容，即有如下交换图：

$$\begin{tikzcd} {}^LG \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr] & & {}^LG' \arrow[dl] \\ & Gal(\Omega/F) & \end{tikzcd}$$

2.2 Langlands 猜想

现在，我们来叙述Langlands纲领的主要内容。

猜想 2.1 ([1])： 设E为F的一个有限Galois扩张，记$G = Gal(E/F)$，并设$\sigma : G \to GL(n, \mathbb{C})$为$G$的一个不可约表示。那么存在$GL(n)$的一个自守尖点表示$\pi_\sigma$使得

$$L(s, \pi_\sigma) = L(s, \sigma).$$

这个猜想可以被称为“互反律”猜想。但是它的逆命题是不成立的[5]。下面这个猜想是关于由自守表示定义的L-函数的延拓性和函数方程的。

猜想 2.2 ([1])： 设$\pi = \otimes\pi_\upsilon$是$G = GL(n)$的一个自守表示，$r$是${}^LG$的一个有限维表示，那么

$$L(s, \pi, r) = \prod_{\upsilon \notin S} det[I - r(t(\pi_\upsilon))N\upsilon^{-s}]^{-1}$$

可以亚纯地延拓到整个复平面$\mathbb{C}$，并且有$L(s, \pi, r) \leftrightarrow L(1 - s, \widetilde{\pi}, r)$的函数方程。

这里的S_π为F的使得π_υ非分歧的素点υ的集合,而$\widetilde{\pi}$指的是π的反轭表示。关于反轭表示，见[3]第一章3.2。

猜想 2.3 (**函子性猜想**[1])： 设G, G'为简约代数群，ρ : ${}^LG \to {}^LG'$是一个L-同态。那么对于G的每个自守表示$\pi = \otimes\pi_\upsilon$，存在$G'$的一个自守表示$\pi' = \otimes\pi'_\upsilon$，使得对所有的非分歧的$\upsilon$， $t(\pi'_\upsilon)$是${}^LG'$包含$t(\pi_\upsilon)$的共轭类。 并且对${}^LG'$的任意有限维表示r'有

$$L(s, \pi', r') = L(s, \pi, r' \circ \rho).$$

2.3 一些简单的例子

最后，我们举几个简单的例子，看看Langlands纲领如何导出一些经典的结果。

例 2.2： 当$n = 1$，E/F是一个Abel扩张时，记$G = Gal(E/F)$，$\sigma : G \to \mathbb{C}^{\times}$是$G$的一个特征，猜想2.1很直接地即是下面的定理

定理 2.2 (Artin)： 设E/F为一个Abel扩张，$\sigma : G \to \mathbb{C}^{\times}$是$G$的一个特征，那么存在$E$的Hecke特征$\chi$，使得

$$L_{E/F}(s, \sigma) = L(s, \chi).$$

这里的$L_{E/F}(s, \sigma)$为Artin$L$-函数，$L(s, \chi)$为Hecke$L$-函数，定义见[1]或[5]。

猜想2.2退化为下面的定理

定理 2.3 (Artin-Brauer)： $L(s, \sigma)$可以亚纯地延拓至整个复平面$\mathbb{C}$，并且有函数方程

$$L(s, \sigma) = \epsilon(s, \sigma) L(1 - s, \widetilde{\sigma}).$$

例 2.3： 设E/F为数域的Galois扩张,π是$GL(n)$在F上的一个自守表示，那么根据函子性猜想2.3，应该存在定义在E上的代数群$GL(n)$的一个表示π'，典范地与π相关，被称为基变换提升（base change lift）。这是因为，我们可以分别取G, G'为定义在F以及E上的代数群$GL(n)$，那么

$$^{L}G = GL(n, \mathbb{C}) \times Gal(\Omega/F),$$

$$^{L}G' = GL(n, \mathbb{C}) \times Gal(\Omega/E).$$

那么典范的映射

$$\rho : (GL(n, \mathbb{C}) \times Gal(\Omega/F) =)\ ^{L}G \to\ ^{L}G' (= GL(n, \mathbb{C}) \times Gal(\Omega/E))$$

是一个L-同态，因此这样的π'应该是存在的。对E/F为循环扩张的情况，这样的提升的存在性已经得到证明[5]。

第 3 章　总结

正如Gelbart在[1]中所言：

”Here lies the agony as well as the ecstasy of Langlands’s Program. To merely state the conjectures correctly requires much of the machinery of class field theory, the structure theory of algebraic groups, the representation theory of real and p-adic groups, and (at least) the language of algebraic geometry. In other words, though the promised rewards are great, the initiation process is forbidding.”

数论是一门深奥而奇妙的学问，Langlands纲领更是体现了数论世界某种大范围的联系。要理解Langlands提出的这一系列猜想尚需要大量的知识准备，本文就是这样的一种尝试。一个遗憾之处在于，本文没有涉及最近出现的几何Langlands纲领，甚至还没有去探究Langlands本人阐述他自己想法的文章《Problems in the Theory of Automorphic forms》。

虽然本文比较粗浅，但更重要的是探索、学习的这个过程。从一开始的一点破碎的感觉，后来阅读各种书籍，这种感觉逐渐有了某种连贯性，现在终于能够窥见这神奇的世界的一角，我已经被其中简洁而深刻的美所震撼。希望自己今后能在这个问题上有所突破吧。

参考文献

[1] Gelbart S. An Elementary Introduction to the Langlands Program. Bulleting of the American Mathematical Society, 1984, 10(2):177–219

[2] 哈茨霍恩著，冯克勤、刘木兰、胥鸣伟译，胥鸣伟校. 代数几何. 第一版 ed., 北京: 科学出版社, 2001

[3] 冯克勤，章璞，李尚志. 群与代数表示论. 第二版 ed., 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2006

[4] 加藤和也、黑川信重、斋藤毅著，胥鸣伟、印林生译. 数论I-Fermat的梦想和类域论. 第1版 ed., 北京: 高等教育出版社, 2009

[5] Bump D. Automorphic Forms and Representations. First paper back ed., The Pitt Building, Trumpington Street, Cambridge CB2 1RP: Cambridge Univercity Press, 1998

[6] Ramakrishnan D, Valenza R J. Fourier Analysis on Number Fields. 第一版 ed., 北京: 清华大学出版社, 2005

[7] 黎景辉，陈志杰，赵春来. 代数群引论. 第一版 ed., 北京: 科学出版社, 2006

[8] Borel A. Automorphic L-Functions. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 1979, 33:27–61

致 谢

衷心感谢导师印林生教授对本人的精心指导。他的言传身教将使我终生受益。

感谢 ThuThesis，它的存在让我的论文写作轻松自在了许多，让我的论文格式规整漂亮了 许多。

声　明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论 文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的 其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签　名：____________ 日　期：____________