中国农业大学

2024~2025 学年春季学期

数学分析 II 课程第二次期中考试试题解答

一、选择题：本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 对于定义在闭区间 $[a,b]$ 上的函数，下面哪类函数有可能是黎曼不可积的 （ D ）

   A. 连续函数　　B. 有有限个间断点的有界函数

   C. 单调有界函数　　D. 简单函数 (即值域是有限集的函数)

   解答 D 的反例：狄利克雷函数 □

2. 以下反常积分收敛的是 （ C ）

   A. $\int_0^{+\infty}\sin x\,\mathrm{d}x$　　B. $\int_0^{+\infty}|\sin x|\,\mathrm{d}x$　　C. $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^{+\infty}\sin^2 x\,\mathrm{d}x$

   解答 A, B, D 都可以通过在一个最小正周期上的积分值判断出不可积.

   对于 C，有

$$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\sin(x^2)\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u,$$

后者可以通过狄利克雷判别法知道是收敛的. □

3. 以下的论断正确的是 （ D ）

   A. 若闭区间 $[a,b]$ 上黎曼可积函数列 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 点态收敛到 $[a,b]$ 上黎曼可积函数 $f(x)$，但不是一致收敛，则必然有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\neq\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

   B. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛，数列 $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$ 必定收敛

   C. 设 $f(x),g(x)$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的连续函数. 假设反常积分 $\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，并且有 $\lim\limits_{n\to+\infty}g(x)=0$，则反常积分 $\int_0^{+\infty}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 必定收敛

   D. 以上说法都不对

   解答 A 的反例：任何一个一致有界的黎曼可积函数列 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 都是反例.

   B 的反例：$x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n+1}$; $\quad\alpha_n=(-1)^n\dfrac{1}{\ln^q(n+1)}$, $0<q\leqslant 1$.

   C 的反例：$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$; $\quad g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin e}{e}x, & 0\leqslant x\leqslant e,\\ \dfrac{\sin x}{\ln^q x}, & x>e,\end{cases}\quad 0<q\leqslant 1.$ □

4. 设数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$a_n\neq -1$，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散，则以下说法正确的是 （ A ）

   A. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+a_n^2}$ 必然收敛

   B. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 可能收敛也可能发散

   C. 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 可能收敛也可能发散

   D. 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n^2)$ 可能收敛也可能发散

   解答 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛知 $a_n\to 0$. 于是当 n 充分大时，$\dfrac{1}{n+a_n^2}$ 是单调递减趋于 0 的，于是由 A-D 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+a_n^2}$ 必然收敛.

   由于 $a_n\to 0$，那么当 n 充分大时，$|a_n|<1$，从而有 $|a_n|>|a_n|\cdot|a_n|=a_n^2$，由正项级数的比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 必然发散.

   在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的前提下，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 与 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 敛散性相同，故 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 必然是发散的. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 为正项级数，它的敛散性与 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n^2)$ 相同，故 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n^2)$ 必然是发散的. □

5. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 满足上极限 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=A$, $0<A<+\infty$，那么下面正确的论断是 （ B ）

   A. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径必定等于 $\dfrac{1}{A}$　　B. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径可能大于 $\dfrac{1}{A}$.

   C. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径可能小于 $\dfrac{1}{A}$.　　D. 以上说法都不对

   解答 有不等式

$$\varliminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=A,$$

而收敛半径等于 $1/\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$, 因此而收敛半径大于 $\frac{1}{A}$, 等于 $\frac{1}{A}$ 都是可能的.

等于 $\frac{1}{A}$ 的例子: $a_n=\frac{1}{n}$, 那么 $1=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$.

大于 $\frac{1}{A}$ 的例子: $a_n=\frac{3^n}{5^{n+(n \mod 2)}}$, 那么 $3=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{3}{5}$. □

二、填空题: 本题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分。

1. 求柯西主值 (cpv) $\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x\,\mathrm{d}x=$ <u>发散</u> .

解答 极限 $\lim\limits_{c\to+\infty}\int_{-c}^{c}\cos x\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{c\to+\infty}2\sin c$ 不存在, 发散. □

2. 已知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$, 那么 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=$ <u>$\frac{\pi}{2}$</u> .

解答 容易判断 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛. 由分部积分法有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\sin^2 x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\sin^2 x}{x}\bigg|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{2\sin x\cos x}{x}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}\mathrm{d}(2x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

□

3. 若正项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^q n}$ 收敛, 则实数 q 的取值范围为 <u>$q>1$</u> .

解答 直接由正项级数的积分判别法进行判断. □

4. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2+(-1)^n)^n}{2^n+\sin nx}x^n$ 的收敛半径等于 <u>$\frac{2}{3}$</u> .

解答 记 $a_n=\frac{(2+(-1)^n)^n}{2^n+\sin nx}>0$, 那么 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=\frac{3}{2}$, 所以收敛半径等于 $\frac{2}{3}$ □

5. 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 的收敛域为 <u>$\mathbb{R}$</u> .

解答 由于 $x\notin 2\pi\mathbb{Z}$ 时有 (见 (下册) 课本例 9.4.2)

$$2\sin\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx=\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x,$$

而 $\frac{1}{n}\searrow 0$, 由狄利克雷判别法知收敛. 对于 $x\in 2\pi\mathbb{Z}$, 原级数每一项都是 0, 从而也是收敛的. □

三、计算题: 本题共 2 小题, 共 20 分。本题应写出具体演算步骤。

1.（10 分）请计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>b>0$, 绕 x 轴旋转一周形成的椭球的表面积.

解答 用参数方程形式求解: $\begin{cases}x(t)=a\sin t,\\ y(t)=b\cos t,\end{cases}$ $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, 那么表面积 S 有

$$S=2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t=2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}b\cos t\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$
$$=2\pi ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=\frac{2\pi ab}{k}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}(k\sin t)$$
$$=\frac{2\pi ab}{k}\int_{-k}^{k}\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{2\pi ab}{k}\left(u\sqrt{1-u^2}+\arcsin u\right)\bigg|_0^k$$
$$=\frac{2\pi ab}{k}\left(k\sqrt{1-k^2}+\arcsin k\right)$$
$$=2\pi b^2+\frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$$

上式中的 $k=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 为离心率. □

2.（10 分）求定积分 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos x}{1+2^x}\,\mathrm{d}x$. (提示: 将积分区间分为对称的两部分).

解答

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos x}{1+2^x}\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi/2}^{0}\frac{\cos x}{1+2^x}\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{1+2^x}\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(-x)}{1+2^{-x}}\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{1+2^x}\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{\pi/2}\frac{2^x\cos x}{1+2^x}\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{1+2^x}\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{\pi/2}\frac{(1+2^x)\cos x}{1+2^x}\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{\pi/2}\cos x\,\mathrm{d}x=1.$$

□

四、解答题：本题共 5 小题, 共 50 分。解答应写出文字说明或者证明过程。

1.（8 分）设函数 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 区间上的非负连续函数, 并且满足 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 请证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒等于 0.

解答 本题是 (上册) 课本 §7.2 习题 5 的等价变形.

用反证法. 假设非负函数 $f(x)$ 不恒等于 0, 即存在 $x_0 \in [a,b]$, 使得 $f(x_0) > 0$. 由 $f(x)$ 的连续性知存在 x_0 在 $[a,b]$ 中的非平凡闭邻域 $[c,d]$, 满足 $x_0 \in [c,d] \subset [a,b]$, $c < d$, 且 $\forall\, x \in [c,d]$, 有 $f(x) > \dfrac{f(x_0)}{2}$. 于是

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_c^d \frac{f(x_0)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{f(x_0)}{2}(d-c) > 0,$$

这与已知条件 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 矛盾. □

2.（10 分）设无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛, 请问数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否必收敛? 若是, 请证明这个结论; 若否, 请给出反例.

解答 不一定.

可以举 (下册) 课本 §9.5 习题 7 中的反例:

$$a_1 = 0, \quad a_{2n+1} = -\frac{1}{\sqrt{n}}, \quad a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

□

3.（10 分）设函数 $S(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 且 $S(1) = 0$. 请证明: $\{x^n S(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

解答 本题是 (下册) 课本 §10.1 习题 8

由于 $S(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 那么 $S(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界, 可以设 M 为 $|S(x)|$ 的一个上界. 又由于 $S(1) = 0$, 所以 $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$, 使得 $\forall\, x \in (1-\delta, 1]$ 有 $|S(x)| < \varepsilon$, 从而有

$$|x^n S(x)| \leqslant |S(x)| < \varepsilon, \quad \forall\, x \in (1-\delta, 1],\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

另一方面, 取 $N = \left\lceil \log_{1-\delta}\left(\dfrac{\varepsilon}{M}\right) + 1 \right\rceil$, 那么在区间 $[0, 1-\delta]$ 上有

$$|x^n S(x)| \leqslant (1-\delta)^n M < \varepsilon, \quad \forall\, x \in [0, 1-\delta],\ \forall n > N.$$

综上即有 $\forall\, n > N = \left\lceil \log_{1-\delta}\left(\dfrac{\varepsilon}{M}\right) + 1 \right\rceil$, $\forall\, x \in [0,1]$ 有 $|x^n S(x)| < \varepsilon$, 这就证明了 $\{x^n S(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛到常值函数 0. □

4.（10 分）设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}$,

（1）求证: $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续;

（2）记 $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 求证: $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{15} < F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

解答

本题是 (下册) 课本 §10.2 习题 12

（1） 由于 $\left|\dfrac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n^3+n}} < n^{-3/2}$, 而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$ 收敛, 所以由 Weierstraß 判别法知函数项级数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}$ 一致收敛. 由一致收敛函数项级数的连续性定理知, 和函数连续.

（2） 由一致收敛函数项级数的逐项积分定理知

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{\sqrt{n^3+n}}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\cos nt}{\sqrt{n^3+n}}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left.\frac{\sin nt}{n\sqrt{n^3+n}}\right|_0^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n^3+n}}, \end{aligned}$$

将 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 代入上式得

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n\sqrt{n^3+n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\sqrt{(2k+1)^3+(2k+1)}} =: \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

上述关于 k 的级数是 Leibniz 级数, 而且 a_k 是严格单调递减的, 所以

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\pi}{2}\right) &< a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ F\left(\frac{\pi}{2}\right) &> a_0 - a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3\cdot\sqrt{3^3+3}} > \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

□

5.（12 分）考虑定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $\varphi(x) = d(x, \mathbb{Z}) = \min\limits_{n\in\mathbb{Z}} |x-n|$. $\varphi(x)$ 是周期为 1 的函数, 在 $[0,1)$ 区间上的定义为

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1/2, \\ 1-x, & 1/2 \leqslant x < 1. \end{cases}$$

定义 Generalized Van der Waerden-Takagi 函数为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\varphi(b^nx),$$

其中 $a,b\in\mathbb{R}$ 为常数.

（1）若 $0<a<1$, 请证明: $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

（2）设 $g(x)$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上任一函数, 请证明: 若 $g(x)$ 在某点 x_0 处可导, 导数值等于 A, 那么对于任意的序列 u_n,v_n, 若满足 $u_n\leqslant x_0\leqslant v_n$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}v_n=x_0$, 那么必有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(u_n)-g(v_n)}{u_n-v_n}=A.$$

（3）若 $0<a<1$, $b\in 2\mathbb{N}$ 为正偶数, 且满足 $ab\geqslant 1$, 请证明: $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 中任意点处都不可导.

解答

（1） 由于 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1/2$, 所以 $0\leqslant a^n\varphi(b^nx)\leqslant a^n/2$. 由于正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^n$ 收敛, 于是由 Weierstraß 判别法, 函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^n\varphi(b^nx)$ 一致收敛. 进一步由一致收敛函数项级数和函数的连续性定理知, 和函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

（2） 记 $h_{1,n}=x_0-u_n$, $h_{2,n}=v_n-x_0$, 那么 $h_{1,n},h_{2,n}\geqslant 0$ 且 $h_{1,n}\to 0$, $h_{2,n}\to 0$. 由于 $g(x)$ 在点 x_0 处可导, 所以在 x_0 附近有

$$g(x)=g(x_0)+A(x-x_0)+o(|x-x_0|),$$

那么

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{g(u_n)-g(v_n)}{u_n-v_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{A(h_{1,n}+h_{2,n})+o(h_{1,n})+o(h_{1,n})}{h_{1,n}+h_{2,n}}\\&=A+\lim_{n\to\infty}\frac{o(h_{1,n})+o(h_{1,n})}{h_{1,n}+h_{2,n}}\\&=A+0=A.\end{aligned}$$

（3） 由于 $\varphi(x)$ 是周期为 1 的函数, 所以 f 也以 1 为周期, 所以只要对任意 $x\in[0,1)$ 证明 f 在 x 处不可导即可. 由第 (2) 问, 希望可以选取序列 $u_n\to x\leftarrow v_n$, 使得

$$\frac{f(u_n)-f(v_n)}{u_n-v_n}=\frac{\sum\limits_{m=0}^{\infty}a^m(\varphi(b^mu_n)-\varphi(b^mv_n))}{u_n-v_n}$$

发散. 由于 $2b^nx$ 是非负实数, 所以存在非负整数 k_n, 使得 $k_n\leqslant 2b^nx<k_n+1$, 即

$$\frac{k_n}{2b^n}\leqslant x<\frac{k_n+1}{2b^n}.$$

取 $u_n=\dfrac{k_n}{2b^n}, v_n=\dfrac{k_n+1}{2b^n}$. 对于和式 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}a^m(\varphi(b^mu_n)-\varphi(b^mv_n))$, 分为两部分讨论:

1° 当 $0\leqslant m<n$ 时, 由于

$$b^mu_n=\frac{k_n}{2}\cdot\frac{1}{b^{n-m}},\quad b^mv_n=\frac{k_n+1}{2}\cdot\frac{1}{b^{n-m}},$$

从而存在非负整数 $z\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, 使得 b^mu_n,b^mv_n 同时属于 $[z,z+1/2]$ 或 $[z+1/2,z+1]$, 那么

$$\varphi(b^mu_n)-\varphi(b^mv_n)=\pm(b^mu_n-b^mv_n)=\pm\frac{1}{2b^{n-m}},$$

从而有

$$\frac{a^m(\varphi(b^mu_n)-\varphi(b^mv_n))}{u_n-v_n}=\pm a^m\frac{1}{2b^{n-m}}\bigg/\left(\frac{1}{2b^n}\right)=\pm(ab)^m.$$

2° 当 $m\geqslant n$ 时, 有

$$b^mu_n=\frac{b^{m-n}\cdot k_n}{2},\quad b^mv_n=\frac{b^{m-n}\cdot(k_n+1)}{2}.$$

由于 b 为偶数, 若 $m>n$, 则 b^mu_n,b^mv_n 都是整数; 若 $m=n$, 则 $b^mu_n=\dfrac{k_n}{2}, b^mv_n=\dfrac{k_n+1}{2}$ 其中一个为整数, 另一个为半整数 (即 $\dfrac{1}{2}+$ 整数). 于是

$$\frac{a^m(\varphi(b^mu_n)-\varphi(b^mv_n))}{u_n-v_n}=\begin{cases}0, & \text{当} m>n \text{时},\\ \dfrac{\pm a^m/2}{1/(2b^m)}=\pm(ab)^m, & \text{当} m=n \text{时}.\end{cases}$$

于是

$$\frac{f(u_n)-f(v_n)}{u_n-v_n}=\frac{\sum\limits_{m=0}^{\infty}a^m(\varphi(b^mu_n)-\varphi(b^mv_n))}{u_n-v_n}=\sum_{m=1}^{n}\left(\pm(ab)^m\right).$$

由于 $ab\geqslant 1$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{m=1}^{n}(\pm(ab)^m)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}(\pm(ab)^m)$ 发散.

□