中国农业大学

2023~2024 学年春季学期

数学分析 II 课程期中考试试题解答

一、选择题：本题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 下列函数哪一个不一定是黎曼可积的 （ D ）

A. 闭区间 $[a,b]$ 上的单调函数.

B. $g(f(x))$, 其中 f 是闭区间 $[a,b]$ 上的黎曼可积函数, $A \leqslant f(x) \leqslant B$, g 在 $[A,B]$ 上连续.

C. $\max\{f(x),g(x)\}$, 其中 $f(x),g(x)$ 都是闭区间 $[a,b]$ 上的黎曼可积函数.

D. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, 其中 $f(x),g(x)$ 都是闭区间 $[a,b]$ 上的黎曼可积函数, $g(x)$ 恒不等于 0.

解答 D 的反例：$a=0, b=1, f(x)=1, g(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ x, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$ 那么 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 $[0,1]$ 上无界, 不满足黎曼可积的必要条件.

其余选项都能直接用函数黎曼可积的勒贝格判别法进行验证 (用其它方法也可以). □

2. 下列命题正确的是 （ A ）

A. 设反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 且函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 则必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

B. 设定义在闭区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 黎曼可积, 改变 $f(x)$ 在所有有理点处 (即 $x\in\mathbb{Q}\cap[a,b]$) 的值, 新得到的函数必定仍是黎曼可积的.

C. 设无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 的部分积序列 $\left\{P_n=\prod\limits_{k=1}^{n} p_k\right\}$ 收敛到一个有限实数, 则无穷乘积必收敛.

D. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 为两个数项级数, 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=1$, 则这两个数项级数必具有相同的敛散性.

解答 B 的反例：将 $[0,1]$ 上常值函数 $f(x)=0$ 改变为 Dirichlet 函数.

C 的反例：收敛到 0 的部分积序列, 例如 $p_n=\dfrac{n}{n+1}$.

D 的反例：$a_n=(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^s}, b_n=(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^s}+\dfrac{1}{n}, 0<s<1$. 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 但有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=1$. □

3. 反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=$ （ C ）

A. -1　　B. 0　　C. $\dfrac{\pi}{2}$　　D. 发散

解答 这题可以直接用排除法. 首先根据 Dirichlet 判别法知这个反常积分收敛. 其次, 它是正的, 因为在每个形如 $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$ 的闭区间上, 关于被积函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 的积分值都是正的. □

4. 设数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则下列级数一定也收敛的是 （ A ）

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{n+1}a_n$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$　　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|a_n|}{1+|a_n|}$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$

解答 $\dfrac{2n}{n+1}$ 单调有界, 所以根据 Abel 判别法, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{n+1}a_n$ 收敛. 其余的反例可统一取为 $a_n=(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^s}, 0<s<\dfrac{1}{2}$. □

5. 设 $p_n=1+a_n>0$ 是一列正的实数, $n=1,2,\cdots$, 以下情况不可能发生的是 （ B ）

A. 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$, 以及无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 都发散

B. 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 都收敛, 但无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散

C. 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 都发散, 但无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛

D. 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 都发散, 但数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛

解答 考虑正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n-\log(1+a_n)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$, 关于他们的通项有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n^2}&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-\log(1+a_n)}{a_n^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_n+\frac{a_n^2}{2}+o(a_n^2)}{a_n^2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

于是由正项级数的比较定理, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 有相同的敛散性.

另一方面, 根据 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \log(1+a_n)$ 知, 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n)$ 要么都收敛, 要么都发散; $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n)$ 要么都发散, 要么一个收敛一个发散. 总之, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 同敛散), $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n)$ (与 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 同敛散) 这三个数项级数, 要么都收敛, 要么都发散, 要么其中一个收敛, 另外两个发散.

A 的例子：$a_n = 1$

C 的例子：$a_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{k}}, & n = 2k-1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{k}} + \dfrac{1}{k}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right), & n = 2k \end{cases}$

D 的例子：$a_n = \dfrac{1}{n}$ □

二、填空题：本题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分。

1. 计算定积分的值 $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x =$ $\underline{\ \pi\ }$.

解答 这个定积分是以原点为圆心, 2 为半径的圆在第一象限的面积, 等于 $\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2$. 这题也可以利用 Newton-Leibniz 公式, 先求原函数, 再代入积分上下限相减. □

2. 设 n 为正整数, 计算定积分的值 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\mathrm{d}x =$ $\underline{\ 0\ }$.

解答 直接利用对称性. □

3. 计算 Cauchy 主值积分 (cpv) $\int_{-1}^{3} \frac{\mathrm{d}x}{x} =$ $\underline{\ \ln 3\ }$.

解答 (cpv) $\int_{-1}^{3} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{A\to 0+}\left(\int_{-1}^{-A}\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{A}^{3}\frac{\mathrm{d}x}{x}\right) = \ln 3.$ □

4. 数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$ 的值等于 $\underline{\ -\frac{1}{6}\ }$.

解答 这是两个数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ 的 Cauchy 乘积. 这两个都是绝对收敛的级数, 所以它们的 Cauchy 乘积等于它们的和相乘, 即 $\dfrac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{6}$. □

5. 若无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+(-1)^{n+1}\frac{1}{n^s}\right)$ 绝对收敛, 则 s 的取值范围为 $\underline{\ s>1\ }$. 如果只要求它收敛, 那么则 s 的取值范围为 $\underline{\ s>\frac{1}{2}\ }$.

解答 记 $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n^s}$.

无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛的充要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛, 这等价于 $s>1$.

$s\leqslant 0$ 时 $a_n \nrightarrow 0$, 故发散.

$s>0$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为 Leibniz 级数, 收敛. 此时 (即在 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的前提下), 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛的充要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 这等价于 $s>\frac{1}{2}$. □

三、计算题：本题共 2 小题, 共 12 分。本题应写出具体演算步骤。

1.（6 分）计算由椭圆 $1 = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}, 0<b<a$, 所围图形绕 x 轴旋转而成的旋转椭球体的体积.

解答 利用直角坐标方程 $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, -a\leqslant x\leqslant a$, 得旋转椭球体的体积为

$$V = \int_{-a}^{a}\pi y^2\mathrm{d}x = 2\int_0^a \pi y^2\mathrm{d}x = 2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a (a^2-x^2)\mathrm{d}x$$
$$= 2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^2}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{4}{3}\pi ab^2$$

□

2.（6 分）已知 $\sin\pi x$ 的无穷乘积表达为 $\sin\pi x = \pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$. 请由此计算 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的值.

解答 由 $\sin\pi x = \pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$ 知 $\frac{\sin\pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$.

上式左边在 0 处的 Taylor 展式为

$$\frac{\sin\pi x}{\pi x} = \frac{\pi x - \frac{(\pi x)^3}{3!} + O(x^5)}{\pi x} = 1-\frac{\pi^2}{6}x^2+O(x^4),$$

右边展开有 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) = 1-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)x^2+O(x^4)$. 比较 x^2 的系数有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. □

四、解答题：本题共 5 小题, 共 48 分。解答应写出文字说明或者证明过程。

1.（6 分）设 $g(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的实值函数, 称它是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数, 若对任意 $\varepsilon>0$, 都存在 $\delta>0$, 使得任取 $[a,b]$ 中任意有限个互不交叠的子区间 $[a_1,b_1],[a_2,b_2],\cdots,[a_n,b_n]$, 只要 $\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$, 就有 $\sum\limits_{k=1}^{n}|g(b_k)-g(a_k)|<\varepsilon$.

设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的黎曼可积函数, $F(x):=\int_a^x f(t)dt$, $x\in[a,b]$, 为 $f(x)$ 的变上限积分, 请证明 $F(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

解答　由于 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的黎曼可积函数, 那么它在 $[a,b]$ 上有界, 即存在 $M>0$, 使得 $|f(x)|<M$ 对所有 $x\in[a,b]$ 都成立. 对任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}>0$, 那么对任取的 $[a,b]$ 中的有限个互不交叠的子区间 $[a_1,b_1],[a_2,b_2],\cdots,[a_n,b_n]$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|F(b_k)-F(a_k)|&=\sum_{k=1}^{n}\left|\int_{a_k}^{b_k}f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{b_k}|f(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{b_k}M\mathrm{d}x=M\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k).\end{aligned}$$

于是, 只要这有限个互不交叠的子区间长度之和满足 $\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}$, 就有

$$\sum_{k=1}^{n}|F(b_k)-F(a_k)|\leqslant M\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.$$

这就证明了区间 $[a,b]$ 上的黎曼可积函数 $f(x)$ 的变上限积分函数 $F(x):=\int_a^x f(t)dt$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

这题主要考察了闭区间上黎曼可积函数的必要条件: 函数有界. 之后学实分析, 勒贝格可积函数 (不一定有界) 的变上限积分仍然是绝对连续的. □

2.（10 分）设 $y=f(x)$ 和 $x=g(y)$ 是互逆的连续、非负、单调递增的函数, 并且满足 $f(0)=g(0)=0$.

（1）证明对任意 $x\geqslant0$, 有如下的等式成立：

$$xf(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{f(x)}g(t)\mathrm{d}t.$$

（2）证明对任意 $x,y\geqslant0$, 有如下的不等式成立：

$$xy\leqslant\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^y g(t)\mathrm{d}t.$$

（3）证明对任意 $x,y\geqslant0$, 以及 $p,q>0,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 有

$$xy\leqslant\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q.$$

解答

（1）考虑闭区间 $[0,x]$, 那么函数 f 在其上一致连续, 且黎曼可积. 类似地, 函数 g 在闭区间 $[0,f(x)]$ 上一致连续且黎曼可积. 设

$$P:\ 0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=x$$

为 $[0,x]$ 的一个划分,

$$\widetilde{P}:\ 0=f(t_0)<f(t_1)<f(t_2)<\cdots<f(t_n)=f(x)$$

为对应的 $[0,f(x)]$ 的划分, 那么当 $\lambda(P)\to0$ 时, 有 $\lambda(\widetilde{P})\to0$. 由于 f,g 都黎曼可积, 所以有

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{f(x)}g(t)\mathrm{d}t&=\lim_{\lambda(P)\to0}\sum_{i=1}^{n}f(t_{i-1})(t_i-t_{i-1})+\lim_{\lambda(\widetilde{P})\to0}\sum_{i=1}^{n}g(f(t_i))(f(t_i)-f(t_{i-1}))\\&=\lim_{\lambda(P)\to0}\sum_{i=1}^{n}\left(f(t_{i-1})(t_i-t_{i-1})+t_i(f(t_i)-f(t_{i-1}))\right)\\&=\lim_{\lambda(P)\to0}\sum_{i=1}^{n}\left(t_if(t_i)-t_{i-1}f(t_{i-1})\right)\\&=\lim_{\lambda(P)\to0}\left(t_nf(t_n)-t_0f(t_0)\right)\\&=xf(x)-0=xf(x).\end{aligned}$$

注：这题不能通过 $F(x):=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{f(x)}g(t)\mathrm{d}t-xf(x)$ 导数恒等于零来推导, 因为函数 f,g 只是连续, 并不一定可导.

（2）对于一般的 x,y, 当 $y>f(x)$ 时有

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^y g(t)\mathrm{d}t&=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{f(x)}g(t)\mathrm{d}t+\int_{f(x)}^{y}g(t)\mathrm{d}t=xf(x)+\int_{f(x)}^{y}g(t)\mathrm{d}t\\&\geqslant xf(x)+g(f(x))(y-f(x))=xf(x)+x(y-f(x))\\&=xy\end{aligned}$$

当 $y<f(x)$ 时类似可证. 结合第 (1) 问即有 $xy\leqslant\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^y g(t)\mathrm{d}t$.

（3） 由于 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1, p,q>0$, 所以 $(p-1)(q-1)=1$, 故 $f(t)=t^{p-1}$ 与 $g(t)=t^{q-1}$ 互为反函数, 于是根据第 (2) 问有

$$xy \leqslant \int_0^x t^{p-1}\mathrm{d}t + \int_0^y t^{q-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q.$$

□

3.（10 分）设 $f(x)$ 是次数大于 1 的多项式, 求证反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(f(x))\mathrm{d}x$ 收敛.

解答 设 $f(x)$ 是 n 次多项式, $n\geqslant 2$. 那么 $f(x), f'(x), \cdots, f^{(n-1)}(x)$ 都是非常数多项式, 这些多项式所有实根构成一个有限集, 从而存在足够大的实数 a, 使得 a 大于所有的这些根. 于是, 反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(f(x))\mathrm{d}x$ 收敛性的证明归结到反常积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\sin(f(x))\mathrm{d}x$ 收敛性的证明. 在 $[a,+\infty)$ 上, 由于多项式 $f(x), f'(x), \cdots, f^{(n-1)}(x)$ 都没有根, 因此他们要么都是恒正的, 要么都是恒负的（依赖于 $f(x)$ 的最高次项系数的符号）, 并且有

$$\lim_{x\to+\infty}|f^{(k)}(x)| = +\infty, \quad k=0,1,\cdots,n-1$$

利用分部积分计算反常积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\sin(f(x))\mathrm{d}x$：

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty}\sin(f(x))\mathrm{d}x &= -\int_a^{+\infty}\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}\cos(f(x)) \\ &= -\frac{\cos(f(x))}{f'(x)}\bigg|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty}\frac{f''(x)\cos(f(x))}{\left(f'(x)\right)^2}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}|f'(x)|=+\infty, |\cos(f(x))|\leqslant 1$, 因此有

$$-\frac{\cos(f(x))}{f'(x)}\bigg|_a^{+\infty} = 0 + \frac{\cos(f(a))}{f'(a)} = \frac{\cos(f(a))}{f'(a)}.$$

于是我们又归结到反常积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{f''(x)\cos(f(x))}{\left(f'(x)\right)^2}\mathrm{d}x$ 收敛性的证明. 不妨设 $f'(x), f''(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上恒正, 那么有

$$\left|\frac{f''(x)\cos(f(x))}{\left(f'(x)\right)^2}\right| \leqslant \frac{f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}.$$

又由于有

$$\int_a^{+\infty}\frac{f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{f'(x)}\bigg|_a^{+\infty} = \frac{1}{f'(a)},$$

知反常积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{f''(x)\cos(f(x))}{\left(f'(x)\right)^2}\mathrm{d}x$ 是绝对收敛的, 从而也是收敛的. □

4.（10 分）设正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 记 $s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ 为级数的前 n 项和.

（1） 证明级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 发散.

（2） 证明级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n}$ 发散.

（3） 证明级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n^2}$ 收敛.

解答

（1） 用反证法. 记 $b_n=\dfrac{a_n}{1+a_n}$, 那么有 $0<b_n<a_n$, 并且有 $b_n<1$. 假设正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, 从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{1-b_n}=0$. 所以有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{1+a_n}\cdot\frac{1}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a_n} = 1.$$

根据正项级数的比较定理, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 具有相同的敛散性, 这与 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散的条件矛盾.

（2） 记 $c_n=\dfrac{a_n}{s_n}$, 我们来考察 $c_{n+1}+\cdots+c_{n+k}$. 由于 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是正项级数, $a_n\geqslant 0$, 那么 $\{s_n\}$ 是递增数列, 于是有

$$\begin{aligned}c_{n+1}+\cdots+c_{n+k} &= \frac{a_{n+1}}{s_{n+1}}+\cdots+\frac{a_{n+k}}{s_{n+k}} \\ &\geqslant \frac{a_{n+1}}{s_{n+k}}+\cdots+\frac{a_{n+k}}{s_{n+k}} = \frac{a_{n+1}+\cdots+a_{n+k}}{s_{n+k}} = \frac{s_{n+k}-s_n}{s_{n+k}} = 1-\frac{s_n}{s_{n+k}}.\end{aligned}$$

由于 s_n 发散到无穷, 因此对于固定的 n 有 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{s_n}{s_{n+k}}=0$, 因此存在 k (与 n 相关) 使得 $\dfrac{s_n}{s_{n+k}}<\dfrac{1}{2}$, 从而有 $c_{n+1}+\cdots+c_{n+k}>1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$. 这就证明了级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n}$ 是发散的.

另一种证明方法: 利用如下结论:

设 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ 收敛, $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个单增且趋于正无穷的数列, 那么 $\lim_{n\to\infty}\frac{p_1d_1+\cdots+p_nd_n}{p_n}=0$.

那么可以使用反证法, 假设 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n}$ 收敛, 那么可以利用上面的结论, 取 $d_n=\frac{a_n}{s_n}, p_n=s_n$, 那么有

$$0=\lim_{n\to\infty}\frac{s_1\frac{a_1}{s_1}+\cdots+s_n\frac{a_n}{s_n}}{s_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{s_n}=1,$$

从而产生矛盾.

（3） 记 $d_n=\frac{a_n}{s_n^2}$, 那么有

$$0<d_n=\frac{s_n-s_{n-1}}{s_n^2}<\frac{s_n-s_{n-1}}{s_ns_{n-1}}=\frac{1}{s_{n-1}}-\frac{1}{s_n}.$$

以上式右端为通项的级数前 n 项和为 $\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s_{n+1}}\to\frac{1}{s_1}=\frac{1}{a_1}$, 当 $n\to\infty$. 由正项级数的比较定理知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}d_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n^2}$ 收敛.

□

5.（12 分）考虑数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, 记 $s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ 为它的部分和（前 n 项和）. 令

$$\sigma_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}s_k=\frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n}$$

为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 部分和序列 $\{s_n\}$ 的前 n 项均值. 我们称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是 $(c,1)$ 可和的, 若序列 σ_n 收敛到一个有限的实数 A, 即 $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=A$, 并记为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=A\,(c,1)$. 实数 A 称作是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 在 $(c,1)$ 意义下的和.

（1） 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ 在 $(c,1)$ 意义下的和.

（2） 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 在通常意义下收敛到有限实数 A, 即 $\lim_{n\to\infty}s_n=A$, 求证：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是 $(c,1)$ 可和, 而且有 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=A\,(c,1)$.

（3） 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=A\,(c,1)$, A 为一个有限实数, 并且满足当 $n\to\infty$ 时有 $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$, 求证：在通常的意义下有 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=A$.

解答

（1） 记 $a_n=(-1)^{n+1}$, 那么有

$$s_n=\sum_{i=1}^{n}a_i=\begin{cases}1, & n=2k-1\\ 0, & n=2k\end{cases}\qquad k=1,2,\cdots$$

进而有

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}s_i=\begin{cases}\frac{k}{2k-1}, & n=2k-1\\ \frac{1}{2}, & n=2k\end{cases}\qquad k=1,2,\cdots$$

于是, $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\frac{1}{2}$, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ 在 $(c,1)$ 意义下的和为 $\frac{1}{2}$.

（2） 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 在通常意义下收敛到有限实数 A, 那么

$$A=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sigma_n-(n-1)\sigma_{n-1}}{n-(n-1)},$$

于是根据 Stolz 公式, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sigma_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sigma_n-(n-1)\sigma_{n-1}}{n-(n-1)}=A.$$

这表明了 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=A\,(c,1)$.

（3） 我们考察 $s_n-\sigma_n$, 有

$$s_n-\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)a_k=\frac{\sum_{k=1}^{n}(k-1)a_k}{n}.$$

由于 $n \to \infty$ 时有 $a_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$, 这也等价于 $\lim\limits_{n\to\infty}(n-1)a_n = 0$.

于是可以对 $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}(k-1)a_k}{n}$ 使用 Stolz 公式：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(s_n-\sigma_n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(k-1)a_k}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(k-1)a_k - \sum\limits_{k=1}^{n-1}(k-1)a_k}{n-(n-1)} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)a_n}{1} = 0.\end{aligned}$$

这表明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = A$.

□