中国农业大学

2023~2024 学年春季学期

数学分析 II 课程考试试题

题号	一	二	三	四	总分
分数					

（本试卷共 4 道大题）

考生诚信承诺

本人承诺自觉遵守考试纪律，诚信应考，服从监考人员管理。

本人清楚学校考试考场规则，如有违纪行为，将按照学校违纪处分规定严肃处理。

一、选择题：本题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 满足下极限 $\varliminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = A, 0 < A < +\infty$, 那么下面正确的论断是 （　　）

   A. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径必定等于 $\frac{1}{A}$　　B. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径可能大于 $\frac{1}{A}$.

   C. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径必定小于 $\frac{1}{A}$.　　D. 以上说法都不对

2. 设 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是一个连续映射, 以下说法不正确的是 （　　）

   A. 若 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是紧集, 则它的像集 $f(K)$ 必然也是 $\mathbb{R}^m$ 中的紧集

   B. 若 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是闭集, 则它的像集 $f(K)$ 必然也是 $\mathbb{R}^m$ 中的闭集

   C. 若 $E \subset \mathbb{R}^m$ 是闭集, 则它的原像集 $f^{-1}(E)$ 必然也是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集

   D. 若 $E \subset \mathbb{R}^m$ 是开集, 则它的原像集 $f^{-1}(E)$ 必然也是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集

3. 设二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ 的某个去心邻域 $\mathring{O}((x_0,y_0),\delta)$ 内有定义. 那么关于 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 以及二次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 的存在性以及取值的情况, 下面哪一种情况是不可能的 （　　）

   A. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = 1$

   B. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在, $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = 2$, $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = 1$

   C. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在, $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 也不存在, $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = 2$

   D. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 1$, $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = 2$, $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 不存在.

4. 设 f 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的函数. 以下关于函数 f 说法正确的是 （　　）

A. 若 f 单调, 则 f 必然 Riemann 可积

B. 若 f 有界, 则 f 必然 Riemann 可积

C. 若 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = 0$, 则 f 在闭区间 $[a,b]$ 上恒等于 0

D. 若 f 是 $[a,b]$ 上 Riemann 可积函数, 且值域包含于闭区间 $[A,B]$, g 为定义在 $[A,B]$ 上的另一个 Riemann 可积函数, 则它们的复合 $g \circ f$ 也必然是 Riemann 可积的.

5. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{S_n} = 0$, 那么幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 （　　）

A. $+\infty$　　　　B. 0

C. 1　　　　D. 某个小于 1 的正实数

二、填空题：**本题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分**。

1. 定积分 $\int_{-3\pi/2}^{\pi/2} \sin(2x)\sin(5x)\mathrm{d}x =$ ______.

2. 设函数 $S(x) = \int_0^x |\sin t|\mathrm{d}t$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{S(x)}{x} =$ ______.

3. 若反常积分 $\int_1^{+\infty} \dfrac{\ln x}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛, 则实数 p 可以取值的范围为 ______.

4. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$ 的收敛半径是 2, 那么幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径是 ______.

5. 二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^3+y^5)}{x^2+y^2} =$ ______.

三、计算题：**本题共 2 小题, 共 20 分**。**本题应写出具体演算步骤**。

1.（10 分）求 Archimedes 螺线 $r(\theta) = a\theta, a > 0$, 第一圈 (对应 $\theta \in [0, 2\pi]$) 的弧长.

2.（10 分）计算函数 $f(x) = x\cot x$ 在 $x = 0$ 附近直到 x^4 的幂级数展开.

四、解答题：**本题共 5 小题, 共 50 分**。**解答应写出文字说明或者证明过程**。

1.（8 分）记 $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 为 n 阶实方阵全体构成的集合, 通过如下的一一映射

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto (a_{11}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, \cdots, a_{2n}, \cdots, a_{nn})$$

可以将 $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 视作 n^2 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^{n^2}$. 记 $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 中所有可逆方阵构成的集合为 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, 即

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}):\ \det A \neq 0\}.$$

证明 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 在 $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 中不是道路连通的.

2.（10 分）求证函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在任何形如 $(-a, a)$, $a > 0$, 的区间上, 都不能表示为某个在 $(-a, a)$ 上收敛的幂级数的和函数.

3.（10 分）设函数项级数 (称为 Dirichlet 级数) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 在 $x = x_0 \in \mathbb{R}$ 处收敛.

（1）证明 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 在 $x \in [x_0, +\infty)$ 上一致收敛.

（2）任取 $x > x_0 + 1$, 证明 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 绝对收敛.

4.（10 分）叙述并证明 n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的 Cantor 闭区域套定理.

5.（12 分）设 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为数项级数, 令 $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ 为其通项的前 n 项和, $\sigma_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k$ 为数列 $\{s_n\}$ 的前 n 项均值.

（1）若数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数在闭区间 $[0, 1]$ 上有定义 (即幂级数在此区间上收敛) 且连续.

（2）设 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sigma_n = A \in \mathbb{R}, A \neq 0$. 证明幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\sigma_n x^n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径都大于等于 1, 并证明等式 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n\sigma_n x^n$ 在 $|x| < 1$ 时恒成立.

（3）利用 $(1-x)^{-1}$ 在 $|x| < 1$ 内的幂级数展开

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

求函数 $\displaystyle\frac{1}{(1-x)^2}$ 的幂级数展开, 并验证等式 $1 = (1-x)^2 \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$ 在 $|x| < 1$ 时恒成立. 由此证明

$$\lim_{x\to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = A.$$