中国农业大学

2024~2025 学年秋季学期

微积分 I 课程考试试题

题号	一	二	三	四	总分
分数					

（本试卷共 4 道大题）

考生诚信承诺

本人承诺自觉遵守考试纪律，诚信应考，服从监考人员管理。
本人清楚学校考试考场规则，如有违纪行为，将按照学校违纪处分规定严肃处理。

一、选择题：**本题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分**。**在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的**。

1. 设数列 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 满足 $y_n \leqslant x_n < z_n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立, 并且 $\{y_n\}$ 单调递增, $\{z_n\}$ 单调递减, 那么以下情况**不可能**发生的是 (　　)

   A. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, a 为某个实数.

   B. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$, $a < b < c$ 为三个不同的实数.

   C. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$, $a < c$ 为两个不同的实数, $\{x_n\}$ 发散.

   D. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, a 为某个实数, $\{y_n\},\{z_n\}$ 都发散.

2. 设 $f(x)$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的实值函数, $a < b$. 那么以下说法**正确**的是 (　　)

   A. 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导, 那么 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积.

   B. 若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上可导, 那么 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

   C. 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积, 那么 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续.

   D. 若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续, 那么 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上可导.

3. 以下函数哪一个**不是**周期函数 (　　)

   A. $f(x) = e^{\sin x}$

   B. $f(x) = \sin x + \cos \pi x$

   C. 常值函数 $f(x) = 1$

   D. $g(x) = f'(x)$, 其中 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上某个处处可导的周期函数

4. 函数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最大值等于 (　　)

A. 1　　B. $e^{\frac{1}{e}}$

C. $2\sqrt{2}$　　D. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上没有最大值

5. $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$ 的微分 $\mathrm{d}y=$ (　　)

A. $e^{\cos\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$　　B. $e^{\sin\frac{1}{x}}\cos\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$

C. $-e^{\cos\frac{1}{x}}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$　　D. $-e^{\sin\frac{1}{x}}\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$

二、填空题: **本题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分**。

1. 计算定积分的值 $\displaystyle\int_1^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=$ ______

2. 设 n 为正整数, 计算定积分的值 $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x=$ ______

3. 计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)\arctan x}=$ ______

4. 由曲线 $y=x^3$ 和 $y=\sqrt[3]{x}$ 围成的区域面积等于 ______

5. 函数 $\dfrac{e^x}{1-x}$ 带皮亚诺余项的麦克劳林展开式为 (展开到 x^3 即可) ______

三、计算题: **本题共 4 小题, 共 26 分**。**本题应写出具体演算步骤**。

1.（8 分）设 $y=xe^{-x}$, 计算 y 的一阶导函数 y', 以及二阶导函数 y''.

2.（6 分）求由方程 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ 给出的隐函数的导函数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

3.（6 分）设 $f(x)=\displaystyle\int_{-x^2}^{e^{\cos x}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$, 计算导数 $f'(x)$.

4.（6 分）设函数 $f(x)=\displaystyle\int_0^x|\cos t|\mathrm{d}t$, 计算极限 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

(**提示**: 考察函数 $|\cos t|$ 在形如 $[k\pi,(k+1)\pi]$, $k\in\mathbb{N}$, 的区间上的积分值)

四、解答题: **本题共 5 小题, 共 44 分**。**解答应写出文字说明或者证明过程**。**注意，若一道题分为多个小问，则该题前面小问的结论可以用于后面的小问，但反过来不行**。

1.（8 分）设 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$ 若 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上处处连续的函数, 请确定 a 的取值. 进一步, 请判断此时 $f(x)$ 是否是 $\mathbb{R}$ 上处处可导的函数, **并证明你的结论**.

2.（8 分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义, 且有直到 $n-1$ 阶的连续导函数, 在开区间 (a,b) 内有 n 阶导函数. 设开区间 (a,b) 内有 $n+1$ 个点 $a<x_0<x_1<\cdots<x_n<b$, 使得

$$f(x_0)=f(x_1)=\cdots=f(x_n),$$

请证明在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $f^{(n)}(\xi)=0$.

3.（8 分）找出函数 $f(x)=\dfrac{(x-1)\sin(x-2)}{|x-1|(x-2)}e^{-\frac{1}{x}}$ 所有的间断点, 并判断其类型.

4.（10 分）求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的单调区间, 极值, 凹凸区间, 拐点及渐近线.

5.（10 分）设 $f(x)$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的处处可导的实值函数.

（1）证明: 若 $f(x)$ 为奇函数, 则它的导函数 $f'(x)$ 是偶函数; 若 $f(x)$ 为偶函数, 则它的导函数 $f'(x)$ 是奇函数.

（2）对 $f(x)=\dfrac{x^{2025}e^{-x^2}}{\sqrt{1+\sin^{2024}x}}$, 求 $f^{(2024)}(0)$ 以及 $\displaystyle\int_{-2025}^{2025}f^{(2024)}(x)\,\mathrm{d}x$ 的值. **(注意利用第 (1) 问的结论)**