中国农业大学本科生课程考试

草稿纸

（在草稿纸上答题一律无效）

一. 1. $dy=\frac{1}{1+\varphi(x)}\varphi'(x)dx$. 2. $6x+4yy'=0$. $K=y'|_{\substack{x=1\\y=-1}}=-\frac{3}{2}\frac{x}{y}|_{\substack{x=1\\y=-1}}=+\frac{3}{2}$ $y+1=+\frac{3}{2}(x-1)$ $2y-3x+5=0$.

3. $f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$. $f'(\pi)=-\frac{\pi}{\pi^2}=-\frac{1}{\pi}$. 4. $y'=f'(\sin x)\cos x$, $y''=f''(\sin x)\cos^2 x-f'(\sin x)\sin x$.

5. $y=x^x$. $\ln y=x\ln x$, $\frac{y'}{y}=1+\ln x$, $y'=(x^x)'=x^x(1+\ln x)$ ② $\lim\frac{x^3-3^x}{x^x-3^3}=\lim_{x\to3}\frac{3x^2-3^x\ln3}{x^x(1+\ln x)}=\frac{1-\ln3}{1+\ln3}$

6. $e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3!}\cdots$ $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots$ $e^{-x}\sin x=(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3!}\cdots)(x-\frac{x^3}{3!}+\cdots)=x-x^2+\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{3!}+\cdots=x-x^2+\frac{x^3}{3}+\cdots$

7. $=\lim_{x\to0}e^x\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x te^t dt}{1-\cos x}=1\cdot\lim_{x\to0}\frac{xe^x}{\sin x}=1$. 8. $\int x\,d\sin x=x\sin x-\int\sin x\,dx=x\sin x+\cos x+C$.

9. $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{1+\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{2+t^2}{2t}$

10. $f'(x)=nx^{n-1}(n(1-x)-x)=0$. $x_0=\frac{n}{n+1}$ $I_n=n(\frac{n}{n+1})^n(1-\frac{1}{n+1})=(\frac{n}{n+1})^{n+1}$

$\lim I_n=\lim\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}=e^{-1}$

11. $f(x)=(\frac{\arctan x}{x})'=\frac{\frac{x}{1+x^2}-\arctan x}{x^2}$. $\int f(x)dx=\frac{\arctan x}{x}+C$.

$\int xf'dx=\int x\,df=xf(x)-\int f(x)dx=x\frac{\frac{x}{1+x^2}-\arctan x}{x^2}-\frac{\arctan x}{x}+C=\frac{1}{1+x^2}-\frac{2}{x}\arctan x+C$.

12. $x^2=u$ $I=\frac{1}{4}\int\frac{du}{u^2+2u+4}=\frac{1}{4}\int\frac{du}{(u+1)^2+3}=\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt3}\arctan\frac{u+1}{\sqrt3}+C=\frac{1}{4\sqrt3}\arctan\frac{x^4+1}{\sqrt3}+C$.

13. $\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx=\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}x\,dx$ $\sqrt{1-x^2}=u$, $x^2=1-u^2$, $x\,dx=-u\,du$. $\int\frac{u}{1-u^2}(-u\,du)=\int\frac{u^2}{u^2-1}du=\int[1-\frac{1}{u^2-1}]du=u-\frac{1}{2}\ln|\frac{u-1}{u+1}|+C$

$=\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\ln|\frac{(1-u)^2}{1-u^2}|+C=\sqrt{1-x^2}-\ln|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}|+C$

14. $\frac{x^2+2x+11}{(x^2+5)(x+3)}=\frac{Ax+B}{x^2+5}+\frac{C}{x+3}$. $(Ax+B)(x+3)+C(x^2+5)=x^2+2x+11$. $A+C=1$, $3A+B=2$, $3B+5C=11$. $A=0$, $B=2$, $C=1$.

$I=\int\frac{2}{x^2+5}dx+\int\frac{1}{x+3}dx=2\frac{1}{\sqrt5}\arctan\frac{x}{\sqrt5}+\ln|x+3|+C$.

$a=-\frac{e}{2}$

15. $1=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{\sin ax}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{ax}=\frac{1}{a}\lim_{x\to0}[(1+x)^{\frac{1}{x}}]'=\frac{1}{a}\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{e}{a}\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{e}{a}\lim\frac{\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}}{2x}=-\frac{e}{2a}$

16. $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2x)^2dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1+\cos2x}{2})^2dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+2\cos2x+\frac{1+\cos4x}{2}}{4}dx=\pi[\frac{x}{4}+\frac{\sin2x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{\sin4x}{32}]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{16}\pi^2$.

17. $I=\int_{-1}^{1}\frac{e^x+e^{-x}}{1+3^x}dx\overset{x=-y}{=}\int_{1}^{-1}\frac{e^{-y}+e^{y}}{1+3^{-y}}(-dy)=\int_{-1}^{1}\frac{e^x+e^{-x}}{1+3^{-x}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{3^x}{1+3^x}(e^x+e^{-x})dx=I$. $I+I=\int_{-1}^{1}\frac{1+3^x}{1+3^x}(e^x+e^{-x})dx=2(e-e^{-1})$

$I=e-e^{-1}$

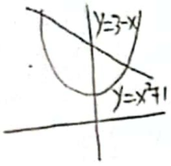
18. $(x^2+z^2)y^2=1$. 19. $\sin x<x$ $\sin\sin x<\sin x$. $\cos\sin x>\cos x$. $I<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=1$ $J>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=1$. $I<1<J$

20. $f'(x) = e^x(-1)^n \frac{x^n}{n!}$　　$f''(x) = \frac{e^x(-1)^n}{n!} x^{n-1}(x+n)$. $x_1=-n$, $x_2=0$.

在 $x_1=-n$ 处两侧，$f''(x)$ 变号，是拐点。 $x_0=0$ 两侧，n 是偶数时，$f''(x)$ 变号，是拐点，n 为奇数时，不是拐点。

21. $y'=3(x^2-1)$，$y''=6x$，$y'=0$，$x=\pm1$，$y''=0$，$x=0$。

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$y=f(x)$	$\nearrow$	极大	$\searrow$	拐点	$\searrow$	极小	$\nearrow$

22. 

交点 $(1,2)$，$(-2,5)$。 $S=\int_{-2}^{1}(3-x-x^2)dx=\left[3x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]\Big|_{-2}^{1}=\frac{9}{2}$.

23. 取 $x=0$，得 $y=\frac{5}{2}$，$z=1$. $(0,\frac{5}{2},1)$.　两点方程 $\frac{x+5}{-5-0}=\frac{y-0}{0-\frac{5}{2}}=\frac{z-6}{6-1}$. 即 $\frac{x+5}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-6}{-2}$.

取 $y=0$ 得 $x=-5$，$z=6$. $(-5,0,6)$.

24. 设方程 $A(x-1)+B(y-3)+C(z-0)=0$. 过 $(-1,0,1)$ 得 $-2A+3B+C=0$.　解得 $A=-\frac{4}{3}B$　方程 $-\frac{4}{3}(x-1)+(y-3)+\frac{1}{3}(z-0)=0$

法向 $\vec{n}=(A,B,C)$ 与 $\vec{a}=(1,1,1)$ 垂直。　$A+B+C=0$　解得 $C=\frac{1}{3}B$　即 $-4x+3y+z-5=0$.

25. $\int \arctan x \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2}\int \arctan x \, d\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2}\frac{\arctan x}{x^2}+\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+x^2}dx = -\frac{1}{2x^2}\arctan x+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = -\frac{\arctan x}{2x^2}-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\arctan x + c$

$I=\int_1^{\sqrt3}\arctan x\frac{dx}{x^3} = \left(-\frac{1}{2x^2}\arctan x-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\arctan x\right)\Big|_1^{\sqrt3} = \left(-\frac{1}{2\sqrt3^2}\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2\sqrt3}-\frac{1}{2}\frac{\pi}{3}\right)-\left(-\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{36}+\frac{3-\sqrt3}{6}$

26. $f(x)=\arctan x+\frac{1}{x}$，$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{-1}{(1+x^2)x^2}<0$. $f(x)\downarrow$

$x\to+\infty$ 时，$f(x) < \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\arctan x+\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$.