中国农业大学

2023~2024 学年春季学期

数学分析 II 课程第二次期中考试试题

题号	一	二	三	四	总分
分数					

（本试卷共 4 道大题）

考生诚信承诺

本人承诺自觉遵守考试纪律，诚信应考，服从监考人员管理。
本人清楚学校考试考场规则，如有违纪行为，将按照学校违纪处分规定严肃处理。

一、选择题：**本题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分**。**在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的**。

1. 以下说法正确的是 （　　）

A. 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛当且仅当数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 都收敛.

B. 若数列 a_n 满足 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 必定收敛.

C. 若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u_n(x)}{\mathrm{d}x}$ 在开区间 (a,b) 上都点态收敛, 但不一致收敛, 那么必有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u_n(x)}{\mathrm{d}x}$ 对所有 $x\in(a,b)$ 都成立.

D. 若函数列 $\{S_n(x)\}$ 在开区间 (a,b) 上内闭一致收敛于函数 $S(x)$, 并且每一项 $S_n(x)$ 都是 (a,b) 上的连续函数, 那么 $S(x)$ 也必定是 (a,b) 上的连续函数.

2. 反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x =$ （　　）

A. 发散　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. 0　　D. -1

3. 设幂级数 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 满足 $0 < R < +\infty$. 下列关于函数项级数 $\sigma(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ 说法错误的是 （　　）

A. $\sigma(x)$ 的收敛半径也是 R.

B. $\sigma(x)$ 的收敛域可能真包含于 $S(x)$ 的收敛域.

C. $S(x)$ 的收敛域可能真包含于 $\sigma(x)$ 的收敛域.

D. $S(x)$ 在区间 $(-R,R)$ 上可导, 且有 $S'(x)=\sigma(x)$.

4. 设 $f(x)$ 是闭区间 $[0,1]$ 上恒正的 Riemann 可积函数, 则以下定义在 $[0,1]$ 区间上的函数中, 必然也是 Riemann 可积函数的是 (　　)

A. $e^{f(x)}$

B. $\ln f(x)$

C. $\dfrac{1}{f(x)}$

D. $F(x)=\begin{cases} f(x), & x \text{ 是有理数}, \\ f^2(x), & x \text{ 是无理数}, \end{cases}$

5. 设数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 发散, 则以下说法正确的是 (　　)

A. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径必小于 1.

B. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域必包含于开区间 $(-1,1)$.

C. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $r>0$, 则左极限 $\lim\limits_{x\to r-}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 必发散.

D. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $r>0$, 则 $\forall\, x\in(-r,r)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 必绝对收敛.

二、填空题: **本题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分**。

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right) =$ ______ .

2. 求定积分 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin(2023x)\cdot\sin(2024x)\mathrm{d}x =$ ______ .

3. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left(3+2\cdot(-1)^n\right)^n}{n^2+1}(x-2)^n$ 的收敛域为 ______ .

4. 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)$ 的收敛域为 ______ .

5. 已知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$, 求 Cauchy 主值积分 (cpv) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x =$ ______ .

三、计算题: **本题共 2 小题, 共 20 分**。**本题应写出具体演算步骤**。

1.（10 分）计算反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^{\alpha})}$, 其中 $\alpha\in\mathbb{R}$ 为常数.

2.（10 分）设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{S_n}=0$, 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径.

四、解答题：本题共 5 小题, 共 50 分。解答应写出文字说明或者证明过程。

1.（8 分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, $A \leqslant f(x) \leqslant B$, 函数 $g(u)$ 在闭区间 $[A,B]$ 上连续, 证明复合函数 $g(f(x))$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

2.（10 分）设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2.

（1）求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛半径;

（2）设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$ 的收敛半径为 R, 证明 $R \geqslant \min\{R_1, R_2\}$, 并给出一个 $R > \min\{R_1, R_2\}$ 成立的例子.

3.（10 分）考虑函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(x + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

（1）求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域 D.

（2）判断函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在其收敛域 D 上是否一致收敛, 并给出证明.

（3）判断函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在其收敛域 D 上是否内闭一致收敛, 并给出证明.

4.（10 分）设 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n + x}$.

（1）证明 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续;

（2）证明 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导;

（3）证明反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

5.（12 分）

（1）设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的有界函数, 请叙述由达布 (Darboux) 和给出的 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的充要条件. (不需要证明)

（2）设函数列 $\{f_n(x)\}$ 的每一项 $f_n(x)$ 都是 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的函数, 且在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $f(x)$, 求证: $f(x)$ 也是 $[a,b]$ 区间上 Riemann 可积的函数, 并且有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

（3）在第 (2) 问中, 设 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上点态收敛于函数 $f(x)$, 但不是一致收敛的, 并假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 其余条件保持不变, 请问积分和极限可交换次序的结论 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ 是否仍然成立? 若是, 请给出证明; 若否, 请给出反例, 并添加一个你认为可以使原结论仍成立的条件 (除“$\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$”之外的条件), 不需要证明.