

中国农业大学
2025~2026学年秋季学期

微积分I 课程考试试题

题号	一	二	三	四	五	总分
分数						

(本试卷共 **五** 道大题)

考生诚信承诺

本人承诺自觉遵守考试纪律，诚信应考，服从监考人员管理。

本人清楚学校考试考场规则，如有违纪行为，将按照学校违纪处分规定严肃处理。

一、单项选择题（本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 下列函数在 $x=0$ 处连续但不可导的是 ()
 A. $f(x)=x^2 \sin \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$), $f(0)=0$; B. $f(x)=x \cos x$;
 C. $f(x)=e^x - 1$; D. $f(x)=\begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$ ，则下列结论正确的是 ()
 A. 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$; B. 存在唯一 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$;
 C. 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f(\xi)=0$; D. 存在唯一 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

3. 设 $f(x)=\int_0^{3x} \frac{\ln(1+t)}{t} dt$, $g(x)=\int_0^{\tan x} (e^t - 1) dt$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 ()
 A. 同阶但不等价的无穷小; B. 等价无穷小
 C. 高阶无穷小; D. 低阶无穷小.

4. 设函数 $F(x)=\int_0^{x^2} x \sin t^2 dt$, 则 $dF(x)=$ ()
 A. $[2x^2 \sin x^4 + \int_0^{x^2} \sin t^2 dt]dx$; B. $2x^2 \sin x^4 dx$;
 C. $[x^2 \sin x^4 + \int_0^{x^2} \sin t^2 dt]dx$; D. $\int_0^{x^2} \sin t^2 dt \cdot dx$.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内二阶可导, $f(0)=0$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-2x^2}{x^3+x^2}=1$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 ()

学院: _____ 班级: _____ 学号: _____ 姓名: _____

- A. 极大值点; B. 极小值点; C. 不是极值点; D. 无法判断.

二、填空题 (本题共有 5 道小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{3x} = \underline{\hspace{10em}}$.
2. 不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \underline{\hspace{10em}}.$
3. 定积分 $\int_{-1}^1 (x^3 \cos x + \sqrt{1-x^2}) dx = \underline{\hspace{10em}}.$
4. 设 $y = xe^{3x}$, 则 $y^{(n)} = \underline{\hspace{10em}}$ (其中 n 为正整数).
5. 求函数 $f(x) = \cos^2 x$ 的带皮亚诺余项的麦克劳林展开式 (展开到 x^6) $\underline{\hspace{10em}}.$

三、计算题 (本题共有 5 道小题, 每小题 6 分, 满分 30 分)

1. 设 $y = x \ln(1+x^2)$, 求 y' 和 y'' .
2. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right).$
3. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \arctan t \end{cases}$ 所确定, 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$.
4. 计算 $\int_0^1 \frac{x}{(2-x)^2 \sqrt{1-x}} dx.$
5. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $e^{2x} \sin x$, 求 $\int f'(x) \cos x dx.$

四、解答题 (本题共有 3 道小题, 满分 28 分)

1. (10 分) 求函数 $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ 的单调区间和极值, 并求曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间、拐点和渐近线.
2. (6 分) 设函数 $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x(x^2-1)} e^{\frac{1}{x}}$, 讨论 $f(x)$ 的间断点, 并判断其类型.
3. (12 分) 设曲线 $y = \sqrt{x}$, 求
 - (1) 在点(4,2)处的切线方程;
 - (2) 该切线与曲线、 x 轴围成的平面图形的面积;

(3) 该图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

五、证明下列各题 (本题共有 2 道小题, 每小题 6 分, 满分 12 分)

1. 证明: 当 $x > 0$ 时, $\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $\int_0^1 f(x)dx = 0, f(0) = 0$. 证明: 存在 $\xi \in (0,1)$

使得 $f'(\xi) = \frac{f(\xi)}{2-\xi}$.