# 中国农业大学

# 2024~2025 学年春季学期

## 数学分析 II 课程期中考试试题

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 总分 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 分数 | | | | | |

（本试卷共 4 道大题）

考生诚信承诺

本人承诺自觉遵守考试纪律，诚信应考，服从监考人员管理。

本人清楚学校考试考场规则，如有违纪行为，将按照学校违纪处分规定严肃处理。

**一、选择题：本题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。**

1. 设 $f(x)$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的实值函数. 以下说法正确的是 （　　）

   A. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积, 则 $|f(x)|$ 必然也在 $[a,b]$ 上黎曼可积.

   B. 若 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积, 则 $f(x)$ 必然也在 $[a,b]$ 上黎曼可积.

   C. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的任意子区间 $[a,c]$ 上黎曼可积, $a<c<b$, 且极限 $\lim\limits_{c\to b-}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在, 则 $f(x)$ 必然也在 $[a,b]$ 上黎曼可积.

   D. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积, 改变 $f(x)$ 至多可列多个点上的取值, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的可积性与积分值都不变.

2. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\left(1-x^{2025}\right)^n\,\mathrm{d}x=$ （　　）

   A. $1$　　B. $\dfrac{2025}{2026}$　　C. $\dfrac{1}{2026}$　　D. $0$

3. 设反常积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则以下论断一定不成立的是 （　　）

   A. 反常积分 $\int_1^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛　　B. 反常积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散

   C. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 收敛　　D. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x=0.$

4. 以下数项级数或者无穷乘积发散的是 （　　）

   A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$　　C. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n^2+1}$　　D. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}$

5. 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的黎曼可积函数, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上除有限个点外可微且 $g(x)>0$ 在 $[a,b]$ 上恒成立, $h(x)$ 是 $[a,b]$ 映射到 $[a,b]$ 自身 (不一定满射) 的连续函数. 以下函数必然黎曼可积的是 （　　）

A. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$　　B. $g'(x)$ (在不可微点补充定义导数值为 0)

C. $\max\{f(x),g(x)\}$　　D. $f\circ h(x):=f(h(x))$

**二、填空题：本题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分。**

1. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{n}{(2n)^2}\right)=$ ______.

2. 计算定积分的值 $\displaystyle\int_1^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=$ ______

3. 若数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^s}$ 收敛, 则实数 $s$ 的取值范围为 ______.

4. 求数项级数的和 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}=$ ______.

5. 已知反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$, 那么 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x}\mathrm{d}x=$ ______.

**三、计算题：本题共 2 小题, 共 20 分。本题应写出具体演算步骤。**

1.（10 分）计算定积分 $I=\displaystyle\int_0^2\frac{(x-1)^2+1}{(x-1)^2+x^2(x-2)^2}\mathrm{d}x$.

2.（10 分）由曲线 $y=\sin x$, 直线 $x=0, x=\dfrac{\pi}{2}$, 以及 $y=t(0\leqslant t\leqslant 1)$, 围成的区域面积记为 $S(t)$, 求 $S(t)$ 的最大值与最小值.

**四、解答题：本题共 5 小题, 共 50 分。解答应写出文字说明或者证明过程。**

1.（8 分）请问 $[0,1]$ 区间上的狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\bigcap[0,1],\\ 0, & x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$$

是否黎曼可积？若是, 请求出积分值; 若否, 请说明原因.

2.（10 分）考虑级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, 记 $s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ 为其前 $n$ 项和, $\sigma_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}s_k$.

（1）请证明: 若 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=A$ 收敛, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=A$.

（2）请问反过来是否成立？即若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = A$, 是否能推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$？若是, 请给出证明; 若否, 请给出反例.

3.（10 分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a-1, b+1]$ 上黎曼可积, 并且对于所有 $-1 \leqslant h \leqslant 1$, 记 $f_h(x) = f(x+h)$ 为定义在闭区间 $[a,b]$ 上的函数. 证明:

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f_h(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x = 0.$$

4.（10 分）令 $f(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$.

（1）证明在 $x \in (0, +\infty)$ 上有 $|f(x)| < \dfrac{1}{x}$.

（2）证明当 $x \to +\infty$ 时, 有

$$f(x) = \frac{\cos(x^2)}{2x} - \frac{\cos((x+1)^2)}{2(x+1)} + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

（3）判断反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ 是否收敛, 并给出证明.

5.（12 分）对 $k \in \mathbb{N}$, 考虑定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f_k(x) = \dfrac{1}{2-\sin kx}$.

（1）计算不定积分 $\displaystyle\int f_k(x)\,\mathrm{d}x$, 并计算 $f_k(x)$ 在长度等于它的最小正周期 $2\pi/k$ 的闭区间上的积分值.

（2）设 $[a,b]$ 为非平凡闭区间, $a < b$. 请问极限 $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x$ 是否存在？若存在, 求此极限; 若不存在, 请给出证明.