

**中国农业大学**  
**2025~2026学年秋季学期**

**微积分I 课程考试试题**

题号	一	二	三	四	五	总分
分数						

(本试卷共 五 道大题)

**考生诚信承诺**

本人承诺自觉遵守考试纪律, 诚信应考, 服从监考人员管理。

本人清楚学校考试考场规则, 如有违纪行为, 将按照学校违纪处分规定严肃处理。

**一、单项选择题 (本题共有 5 道小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)**

1. 下列函数在  $x=0$  处连续但不可导的是 ( )

A.  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} (x \neq 0), f(0) = 0;$

B.  $f(x) = x \cos x;$

C.  $f(x) = e^x - 1;$

D.  $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$

2. 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $f(a) = f(b)$ , 则下列结论正确的是 ( )

A. 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) = 0;$

B. 存在唯一  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) = 0;$

C. 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) = 0;$

D. 存在唯一  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$

3. 设  $f(x) = \int_0^{3x} \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ ,  $g(x) = \int_0^{\tan x} (e^t - 1) dt$ , 则当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x)$  是  $g(x)$  的 ( )

A. 同阶但不等价的无穷小;

B. 等价无穷小

C. 高阶无穷小;

D. 低阶无穷小.

4. 设函数  $F(x) = \int_0^{x^2} x \sin t^2 dt$ , 则  $dF(x) =$  ( )

A.  $[2x^2 \sin x^4 + \int_0^{x^2} \sin t^2 dt] dx;$

B.  $2x^2 \sin x^4 dx;$

C.  $[x^2 \sin x^4 + \int_0^{x^2} \sin t^2 dt] dx;$

D.  $\int_0^{x^2} \sin t^2 dt \cdot dx.$

5. 设函数  $f(x)$  在  $x=0$  的某个邻域内二阶可导,  $f(0) = 0$ , 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2x^2}{x^3 + x^2} = 1$ , 则  $x=0$  是  $f(x)$  的 ( )

学院: \_\_\_\_\_ 班级: \_\_\_\_\_ 学号: \_\_\_\_\_ 姓名: \_\_\_\_\_

A. 极大值点;      B. 极小值点;      C. 不是极值点;      D. 无法判断.

二、填空题 (本题共有 5 道小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

1. 极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{2}{x})^{3x} =$  \_\_\_\_\_.

2. 不定积分  $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$  \_\_\_\_\_.

3. 定积分  $\int_{-1}^1 (x^3 \cos x + \sqrt{1-x^2}) dx =$  \_\_\_\_\_.

4. 设  $y = xe^{3x}$ , 则  $y^{(n)} =$  \_\_\_\_\_ (其中  $n$  为正整数).

5. 求函数  $f(x) = \cos^2 x$  的带皮亚诺余项的麦克劳林展开式 (展开到  $x^6$ ) \_\_\_\_\_.

三、计算题 (本题共有 5 道小题, 每小题 6 分, 满分 30 分)

1. 设  $y = x \ln(1+x^2)$ , 求  $y'$  和  $y''$ .

2. 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2})$ .

3. 设函数  $y = y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \arctan t \end{cases}$  所确定, 求  $\frac{dy}{dx}$  和  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

4. 计算  $\int_0^1 \frac{x}{(2-x)^2 \sqrt{1-x}} dx$ .

5. 已知  $f(x)$  的一个原函数为  $e^{2x} \sin x$ , 求  $\int f'(x) \cos x dx$ .

四、解答题 (本题共有 3 道小题, 满分 28 分)

1. (10 分) 求函数  $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$  的单调区间和极值, 并求曲线  $y = f(x)$  的凹凸区间、拐点和渐近线.

2. (6 分) 设函数  $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x(x^2-1)} e^{\frac{1}{x}}$ , 讨论  $f(x)$  的间断点, 并判断其类型.

3. (12 分) 设曲线  $y = \sqrt{x}$ , 求

(1) 在点  $(4, 2)$  处的切线方程;

(2) 该切线与曲线、 $x$  轴围成的平面图形的面积;

(3) 该图形绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积.

五、证明下列各题 (本题共有 2 道小题, 每小题 6 分, 满分 12 分)

1. 证明: 当  $x > 0$  时,  $\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}$ .

2. 设  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 在  $(0,1)$  内可导, 且  $\int_0^1 f(x)dx = 0$ ,  $f(0) = 0$ . 证明: 存在  $\xi \in (0,1)$

使得  $f'(\xi) = \frac{f(\xi)}{2-\xi}$ .