

# 中国农业大学

2021~2022 学年秋季学期

## 高等数学 C 上 课程考试试题 A 卷

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一、填空题，每题 3 分，满分 30 分

1.  $y = e^x \cos x$  在  $x_0 = 0$  处的切线方程 (  $y = x + 1$  ).
2.  $y = \arcsin \sqrt{1 - 4x^2}$  的微分为 (  $-\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} dx$  ).
3.  $y = \tan^2 x$  的原函数为 (  $\tan x - x + C$  ).
4. 平面  $2x + y - az + 1 = 0$  与直线  $x - 1 = \frac{y}{2} = z - 3$  平行,  $a = ( 4 )$ .
5.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2 + \cos 2x} dx = ( \frac{\sqrt{3}}{18} \pi )$ .
6.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 - i^2}} = ( \frac{\pi}{2} )$ .
7.  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = ( e^{-1} )$ .
8.  $y = xe^x$  的拐点为 (  $-2, e^{-2}$  ).
9. 曲面  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} - \frac{z}{4} = 1$  名称是 ( 椭圆抛物面 ).
10. 曲线  $y = \frac{x^2}{x-1}$  的斜渐近线方程为 (  $y = x + 1$  ).

二、选择题，每题 3 分，满分 24 分

11.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} - \sqrt{x^2 + 4x}) = ( D )$   
A) -7      B) 7      C) 3      D) -3
12.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} te^t \sin t dt}{x^6 e^{-2x}} = ( B )$   
A) 1      B) 1/3      C) 1/6      D) -1/6

考生诚信承诺

1. 本人清楚学校关于考试管理、考场规则、考试作弊处理的规定，并严格遵照执行。
2. 本人承诺在考试过程中没有作弊行为，所做试卷的内容真实可信。

学院：\_\_\_\_\_ 班级：\_\_\_\_\_ 学号：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

13.  $\begin{cases} y = \cos 2t \\ x = \cos t \end{cases}, \frac{d^2 y}{dx^2} = (D)$

A)  $-\sin t$  B)  $\frac{\cos 2x \sin x - \sin 2x \cos x}{\sin^2 x}$  C) 2 D) 4

14.  $x \rightarrow 1$  时,  $\sin(\ln x)$  与  $x-1$  是 (A) 无穷小

A) 等价 B) 同阶不等价 C) 高阶 D) 低阶

15.  $\int_0^{+\infty} \frac{x}{2+x^4} dx = (D)$

A)  $+\infty$  B)  $\sqrt{2}\pi/2$  C)  $\sqrt{2}\pi/4$  D)  $\sqrt{2}\pi/8$

16.  $y = f(\ln x), y'' = (C)$

A)  $\frac{f'(\ln x)}{x}$  B)  $\frac{f''(\ln x)}{x^2}$  C)  $\frac{f''(\ln x)}{x^2} - \frac{f'(\ln x)}{x^2}$  D)  $\frac{xf''(\ln x) - f'(\ln x)}{x^2}$

17.  $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = (D)$

A)  $+\infty$  B)  $\pi/4$  C)  $\pi/2$  D)  $\pi$

18. 已知  $f'(\cos^2 x) = \sin^2 x, f(0) = 0, f(x) =$  满足  $y|_{x=0} = 1$  的解 (C)

A)  $\frac{x}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$  B)  $x - \frac{x^3}{3}$  C)  $x - \frac{x^2}{2}$  D)  $x + \frac{x^2}{2}$

三、证明题，满分 10 分

19. 求证:  $\ln x > 2 \frac{x-1}{x+1}, (x > 1)$   $f(x) = \ln x - 2 \frac{x-1}{x+1}, f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} > 0,$

20. 求证:  $x^5 + 2x = 1$  在  $(0, 1)$  内有唯一实根 设  $f(x) = x^5 + 2x - 1, f(x)$  在  $[0, 1]$  连续.

四、计算题，每题 6 分，满分 36 分

21.  $f(x) = \int_0^x e^t \sin t dt$  的麦克劳林展开式到  $x^4$  项

证  $f(0) = 0, f'(x) = e^x \sin x, f'(0) = 0, f''(x) = e^x \sin x + e^x \cos x, f''(0) = 1$

$f'''(x) = 2e^x \cos x, f'''(0) = 2, f^{(4)}(x) = 2e^x \cos x - 2e^x \sin x, f^{(4)}(0) = 2.$

$\therefore f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + o(x^4) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$

22.  $f(x)$  的一个原函数为  $2xe^{x^2}$ , 求  $\int xf'(2x)dx$
23. 求过  $M(2,4,0)$  且与直线  $\begin{cases} x+2z-1=0 \\ y-3z-2=0 \end{cases}$  平行的直线方程
24. 设  $y = a^x - ax, a > 1$ , (1) 讨论函数性质 (单调区间、凹凸区间、极值、拐点); (2)  $a$  为何值时驻点  $x_0 = x(a)$  取最小值?
25. 已知抛物线  $y = x^2, x \geq 0$ , (1) 求  $x = a$  处的切线方程; (2) 切线与曲线、 $X$  轴围成的图形面积为  $1/12$ , 求  $a$ ; (3) 求上述图形绕  $X$  轴旋转一周的旋转体体积.

$$26. \int_{e^{-\frac{\pi}{2}}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\ln x)}{1+x} dx$$

23. 设直线方程为  $\frac{x-2}{p} = \frac{y-4}{q} = \frac{z-0}{r}$ . 则  $\vec{S} = (p, q, r)$  与两个平面法线
- 方向  $\vec{n}_1 = (1, 0, 2), \vec{n}_2 = (0, 1, -3)$  都垂直.  $\vec{n}_1 \cdot \vec{S} = 0, \vec{n}_2 \cdot \vec{S} = 0$
- $p + 2r = 0, q - 3r = 0$
- $p = -2r, q = 3r$
- $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-0}{1}$

24. (1)  $y' = a^x \ln a - a, a^x = \frac{a}{\ln a}, x_0 = \frac{\ln a - \ln \ln a}{\ln a} = 1 - \frac{\ln \ln a}{\ln a}, y'' = a^x \ln^2 a > 0$

$y(x_0)$  极小  $= a^{x_0} - ax_0 = \frac{a}{\ln a} - a(1 - \frac{\ln \ln a}{\ln a}) = \frac{a \ln \ln a}{\ln a}$

在  $(-\infty, x_0) y' < 0, y \downarrow$ ; 在  $(x_0, +\infty) y' > 0, y \uparrow$

在  $(-\infty, +\infty) y'' > 0$  凹区间

(2)  $x_0(a) = 1 - \frac{\ln \ln a}{\ln a}, x'_0(a) = -\frac{\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{\ln a} - \ln \ln a \cdot \frac{1}{a}}{\ln^2 a} = \frac{-1 + \ln \ln a}{a \ln^2 a}$

$\hat{x}_0(a) = 0, 1 - \ln \ln a = 0, \ln a = e, a = e^e$

$\frac{1}{a}$  最小值  $x_0(e^e) = 1 - \frac{\ln \ln e^e}{\ln e^e} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$

25.  $X_0 = a^2, Y_0 = a^2, Y' = 2a$ . 切线方程  $y - a^2 = 2a(x - a)$

(1) 即  $y = 2ax - a^2$ .  $y=0$  时与  $X$  轴交点  $X = \frac{a}{2}$

(2)  $S = \int_0^{a^2} x^2 dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{4} = \frac{a^3}{12} = \frac{1}{12}, a = 1$

(3)  $V_x = \pi \int_0^{a^2} (\frac{1}{2}x)^2 dx - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (\frac{a}{2})^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

26.  $I = \int_{e^{-\frac{\pi}{2}}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \ln x}{1+x} dx$   $\frac{x=\frac{1}{y}}{e^{-\frac{\pi}{2}} \frac{1}{y}} \int_{e^{\frac{\pi}{2}}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \ln y}{1+\frac{1}{y}} \frac{-dy}{y^2} = \int_{e^{-\frac{\pi}{2}}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \ln y}{y(1+y)} dy$

$I + I = \int_{e^{-\frac{\pi}{2}}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\cos \ln x}{1+x} + \frac{\cos \ln x}{x(1+x)} \right) dx = \int_{e^{-\frac{\pi}{2}}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \ln x}{x} dx = \int_{e^{-\frac{\pi}{2}}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \ln x d \ln x = \sin \ln x \Big|_{e^{-\frac{\pi}{2}}}^{\frac{\pi}{2}} = 2$

$I = 1$