中国农业大学

2022~2023 学年秋季学期（2022.12）

高等数学 C（上） 课程考试试题

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

（注意：本试卷共有八道大题，满分 100 分，考试时间 100 分钟）

一、单项选择题（本题共有 **5** 道小题，每小题 **3** 分，满分 **15** 分）

1. 方程 $x^3-3x+1=0$ 在 $(0,1)$ 内的实根的个数为（　　）.

(A) 3;　　**（B）2;**　　**（C）1;**　　**（D）0.**

2. 设 $f(x)$ 有连续的导数, $f(a)=0,\ f'(a)\neq 0,\ F(x)=\int_a^x (x-t)f(t)dt$，且当 $x\to a$ 时，$F'(x)$ 与 $(x-a)^k$ 是同阶无穷小，则 k 等于（　　）.

(A) 1;　　**（B）** 2;　　**（C）** 3;　　**（D）** 4.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内二阶可导，$f'(0)=0,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{\sin x}=-\dfrac{1}{2}$, 则（　　）。

(A) $f(0)$ 一定是 $f(x)$ 的一个最大值；　**（B）** $f(0)$ 一定是 $f(x)$ 的一个最小值；

（C） $f(0)$ 一定是 $f(x)$ 的一个极大值；　**（D）** $f(0)$ 一定是 $f(x)$ 的一个极小值.

4. xOz 坐标面上的直线 $x=z-2$ 绕 Oz 轴旋转而成的曲面方程是（　　）.

(A) $x^2+y^2=z-2$；　　**（B）** $z^2=x^2+y^2+2$；

（C） $(z-2)^2=x^2+y^2$；　　**（D）** $(x+2)^2=z^2+y^2$.

5. 已知 $a=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x dx,\ b=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos^4 x)dx,\quad c=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin x-\cos^4 x)dx$，则（　）.

(A) $b<c<a$；　**（B）** $a<c<b$；　**（C）** $b<a<c$；　**（D）** $c<a<b$.

考生诚信承诺

1. 本人清楚学校关于考试管理、考场规则、考试作弊处理的规定，并严格遵照执行。

2. 本人承诺在考试过程中没有作弊行为，所做试卷的内容真实可信。

学院：______________ 班级：___________ 学号：____________姓名：___________

二、填空题（本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{3+x}{2+x})^{3x}=$ ____________________.

2. 设函数 $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}+\cos 2x$，则 $f^{(28)}(\pi)$___________.

3. 已知曲线的方程为$\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$，则其在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程为___________.

4. 若 $\int_0^{+\infty}\dfrac{a}{1+x^2}dx=\pi$，则 $a=$___________.

5. 已知向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的模分别为 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=\sqrt{3}$, 且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$, 则 $|\vec{a}\times\vec{b}|=$___________.

三、求解下列各题（本题共有 6 道小题，每小题 5 分，满分 30 分）

1. 设 $y=e^{3x}\sin x$，求 y' 和 y''.

2. 计算 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$.

3. 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x^2}-1}{\tan x\,\ln(1+x)}$.

4. 计算 $\int\dfrac{x+1}{x^2+x-2}dx.$

5. 计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{1+2^x}dx.$

6. 设 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x-y}-x\sin y=1$ 确定，求 dy.

四、（本题满分 8 分）

讨论函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x(x+4)}{\sin(\pi x)}, & x<0, x\neq -n \\ \dfrac{\sin x}{x^2-1}, & x\geq 0, x\neq 1 \end{cases}$ 的连续性，若有间断点，判别其类型.

五、（本题满分 8 分）讨论函数 $y = xe^{\frac{1}{x^2}}$ 的性质（单调区间、凹凸区间、极值、渐近线）.

六、（本题满分 8 分）设平面图形 **D** 由 $y = 2x - x^2, y = 0, y = x$ 所围成，求：

（1）D 的面积；

（2）D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

七、（本题满分 6 分）

求过点 P（2，1，-3）与平面 $x + y + z - 10 = 0$ 平行且与直线 $\begin{cases} x + 2y - z - 5 = 0 \\ z - 10 = 0 \end{cases}$ 垂直的直线方程.

八、证明下列各题（本题共有 2 道小题，每小题 5 分，满分 10 分）

1．证明：当 $0 < x < 1$ 时，$\dfrac{1+x}{1-x} > e^{2x}$.

2．设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续，在 $(0, 1)$ 可导，且 $f(1) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\mathrm{d}x$，证明在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$.