中国农业大学

2023~2024 学年春季学期

数学分析 II 课程考试试题

一、选择题：本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 满足下极限 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = A,\ 0 < A < +\infty$, 那么下面正确的论断是 （ D ）

   A. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径必定等于 $\dfrac{1}{A}$　　B. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径可能大于 $\dfrac{1}{A}$.

   C. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径必定小于 $\dfrac{1}{A}$.　　D. 以上说法都不对

解答 有不等式

$$A = \varliminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,$$

而收敛半径等于 $1/\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$, 因此而收敛半径小于 $\dfrac{1}{A}$, 等于 $\dfrac{1}{A}$ 都是可能的.

等于 $\dfrac{1}{A}$ 的例子: $a_n = \dfrac{1}{n}$, 那么 $1 = \varliminf\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$.

小于 $\dfrac{1}{A}$ 的例子: $a_n = \dfrac{3^{n+(n \bmod 2)}}{5^n}$, 那么 $\dfrac{1}{5} = \varliminf\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{3}{5}$. □

2. 设 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是一个连续映射, 以下说法不正确的是 （ B ）

   A. 若 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是紧集, 则它的像集 $f(K)$ 必然也是 $\mathbb{R}^m$ 中的紧集

   B. 若 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是闭集, 则它的像集 $f(K)$ 必然也是 $\mathbb{R}^m$ 中的闭集

   C. 若 $E \subset \mathbb{R}^m$ 是闭集, 则它的原像集 $f^{-1}(E)$ 必然也是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集

   D. 若 $E \subset \mathbb{R}^m$ 是开集, 则它的原像集 $f^{-1}(E)$ 必然也是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集

解答 (无界) 闭集在连续映射下的像一般不是闭集. 例如 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, 闭集 $\mathbb{R}$ (或者取 $[0,+\infty)$) 的像为 $(0,1]$, 不是 $\mathbb{R}$ 中闭集. □

3. 设二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ 的某个去心邻域 $\mathring{O}((x_0,y_0),\delta)$ 内有定义. 那么关于 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 以及二次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 的存在性以及取值的情况, 下面哪一种情况是不可能的 （ D ）

   A. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = 1$

   B. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在, $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = 2$, $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = 1$

   C. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在, $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 也不存在, $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = 2$

   D. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 1$, $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = 2$, $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 不存在.

解答 累次极限与重极限所有可能的取值情况如下

二重极限	二次极限	
$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$	$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$	$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$
A	A	A
A	A	✗
A	✗	A
A	✗	✗
✗	A	A
✗	A	B
✗	✗	A
✗	A	✗
✗	✗	✗

□

4. 设 f 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的函数. 以下关于函数 f 说法正确的是 （ A ）

   A. 若 f 单调, 则 f 必然 Riemann 可积

   B. 若 f 有界, 则 f 必然 Riemann 可积

   C. 若 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = 0$, 则 f 在闭区间 $[a,b]$ 上恒等于 0

   D. 若 f 是 $[a,b]$ 上 Riemann 可积函数, 且值域包含于闭区间 $[A,B]$, g 为定义在 $[A,B]$ 上的另一个 Riemann 可积函数, 则它们的复合 $g\circ f$ 也必然是 Riemann 可积的.

解答 注意, 定义在闭区间 $[a,b]$ 上的函数, 其单调性蕴含了有界性.

B. 的反例: $[0,1]$ 上的 Dirichlet 函数

C. 的反例: $f(x)=\begin{cases}1, & x=1,\\ 0, & x\in[0,1)\end{cases}$

D. 的反例: $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的 Riemann 函数, $g(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,1],\\ 0, & x=0\end{cases}$, 则 f,g 都 Riemann 可积, 但 $g\circ f$ 是 $[0,1]$ 上的 Dirichlet 函数, 不是 Riemann 可积的. □

5. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{S_n}=0$, 那么幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 (C)

A. $+\infty$ B. 0

C. 1 D. 某个小于 1 的正实数

解答 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{S_n}=0$ 可推出 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{s_{n+1}}{S_n}=1$, 由 d'Alembert 定理知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_nx^n$ 的收敛半径为 1. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是正项级数, 所以 $a_n\leqslant S_n$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}s_nx^n$ 的收敛半径 $\geqslant 1$.

另一方面, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}s_nx^n$ 在 $x=1$ 处发散, 故其收敛半径 $\leqslant 1$. 综合知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}s_nx^n$ 的收敛半径等于 1. □

二、填空题: 本题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分.

1. 定积分 $\int_{-3\pi/2}^{\pi/2}\sin(2x)\sin(5x)\mathrm{d}x=$ __0__.

解答 $\cos nx, n=0,1,2,\cdots;\sin mx, m=1,2,\cdots$ 在任何一个长度为 2π 的区间 $[a,b]$ 上构成一个关于 $\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 正交函数系. 这题里 $[a,b]=[-3\pi/2,\pi/2]$. □

2. 设函数 $S(x)=\int_0^x|\sin t|\mathrm{d}t$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}=$ __$\dfrac{2}{\pi}$__.

解答 对任意非负整数 k, $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\mathrm{d}t=2$. 令 $n=\left[\dfrac{x}{\pi}\right]$, 那么

$$2n=\int_0^{n\pi}|\sin t|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{x}|\sin t|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{(n+1)\pi}|\sin t|\mathrm{d}t=2(n+1).$$

那么在区间 $[n\pi,(n+1)\pi]$ 上有

$$\frac{2n}{(n+1)\pi}\leqslant\frac{\int_0^x|\sin t|\mathrm{d}t}{x}\leqslant\frac{2(n+1)}{n\pi}.$$

由夹逼准则知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x|\sin t|\mathrm{d}t}{x}=\frac{2}{\pi}.$$

□

3. 若反常积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛, 则实数 p 可以取值的范围为 __$(1,+\infty)$ (或写 $p>1$)__.

解答 任取 $1<q<p$, 有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^p}\Big/\dfrac{1}{x^q}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{p-q}}=0$, 根据非负函数反常积分敛散性的比较判别法的极限形式, 由 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^q}\mathrm{d}x$ 收敛知 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛. □

4. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n+1}$ 的收敛半径是 2, 那么幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径是 __4__.

解答 由 Cauchy-Hadamard 定理, $2=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[2n+1]{|a_n|}=\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\right)^{1/2}$ □

5. 二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^3+y^5)}{x^2+y^2}=$ __0__.

解答 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, r\geqslant 0,\theta\in[0,2\pi)$. 不妨设 $r<1$, 那么有

$$\left|\frac{\sin(x^3+y^5)}{x^2+y^2}\right|\leqslant\left|\frac{x^3+y^5}{x^2+y^2}\right|=r\cdot\left|r^2\sin^5\theta+\cos^3\theta\right|\leqslant r\cdot\left(\left|r^2\sin^5\theta\right|+\left|\cos^3\theta\right|\right)\leqslant 2r.$$

于是, 对任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon/2>0$, 那么对任意满足 $\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}=r<\delta$, 有

$$\left|\frac{\sin(x^3+y^5)}{x^2+y^2}\right|\leqslant 2r<2\delta=\varepsilon,$$

所以二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^3+y^5)}{x^2+y^2}=0.$ □

三、计算题: 本题共 2 小题, 共 20 分. 本题应写出具体演算步骤.

1. (10 分) 求 Archimedes 螺线 $r(\theta)=a\theta, a>0$, 第一圈 (对应 $\theta\in[0,2\pi]$) 的弧长.

解答 由于 $r'(\theta)=a$, 代入极坐标下的弧长公式有

$$\ell=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(r(\theta)\right)^2+\left(r'(\theta)\right)^2}\mathrm{d}\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a\theta)^2 + a^2} \mathrm{d}\theta = a \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2+1} \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{a}{2}\left(x\sqrt{x^2+1} + \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right)\Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{a}{2}\left(2\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}\right)\right)
\end{aligned}
$$

□

2.（10 分）计算函数 $f(x) = x\cot x$ 在 $x=0$ 附近直到 x^4 的幂级数展开.

解答 首先 $\lim\limits_{x\to 0} x\cot x = 1$, 所以函数 $f(x) = x\cot x$ 在 $x=0$ 处有定义.

由于 $x\cot x$ 是偶函数, 可以用待定系数法令 $x\cot x = c_0 + c_2x^2 + c_4x^4 + \cdots$, 有

$$x\cos x = x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) = x\cot x\cdot \sin x = (c_0 + c_2x^2 + c_4x^4 + \cdots)\cdot\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right),$$

令对应系数相等, 得方程组

$$\begin{cases} 1 = c_0 \\ -\dfrac{1}{2} = c_2 - \dfrac{1}{6}\cdot c_0 \\ \dfrac{1}{24} = c_4 - \dfrac{1}{6}\cdot c_2 + \dfrac{1}{120}\cdot c_0 \end{cases}$$

解得 $c_0 = 1, c_3 = -\dfrac{1}{3}, c_4 = -\dfrac{1}{45}$. 于是幂级数展开为

$$x\cot x = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + \cdots$$

□

四、解答题：本题共 5 小题, 共 50 分. 解答应写出文字说明或者证明过程.

1.（8 分）记 $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 为 n 阶实方阵全体构成的集合, 通过如下的一一映射

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto (a_{11}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, \cdots, a_{2n}, \cdots, a_{nn})$$

可以将 $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 视作 n^2 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^{n^2}$. 记 $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 中所有可逆方阵构成的集合为 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, 即

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}):\ \det A \neq 0\}.$$

证明 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 在 $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 中不是道路连通的.

解答 令矩阵 $A_1 = \mathrm{diag}(1, 1, \cdots, 1)$ 为 n 阶单位阵, 其行列式等于 1; 令矩阵 $A_2 = \mathrm{diag}(-1, 1, \cdots, 1)$ 为将矩阵 A_1 的第 1 行第 1 列元素改为 -1 所得矩阵, 其行列式等于 -1. 假设 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 是道路连通的, 那么存在一条道路

$$\gamma: [0,1] \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),$$

使得 $\gamma(0) = A_1, \gamma(1) = A_2$. 由于行列式 det 是关于方阵元素的多项式, 因此是连续的. 于是

$$\det\circ\gamma: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

是连续的一元函数, 并且有 $\det(\gamma(0)) = \det A_1 = 1, \det(\gamma(1)) = \det A_2 = -1$. 于是根据闭区间上连续函数的零点存在定理 (或者中间值定理), 存在 $\xi \in [0,1]$, 使得 $0 = \det(\gamma(\xi))$. 记 $B = \gamma(\xi)$, 那么上式表明 $\det B = 0$, 从而有 $B \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, 这与 γ 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 中的一条道路矛盾.

□

2.（10 分）求证函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在任何形如 $(-a, a)$, $a > 0$, 的区间上, 都不能表示为某个在 $(-a, a)$ 上收敛的幂级数的和函数.

解答 容易算得当 $x \neq 0$ 时, $f(x)$ 的各阶导数为

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}, \\
f''(x) &= \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right)e^{-1/x^2}, \\
&\vdots \\
f^{(k)}(x) &= P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

其中 $P_{3k}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 是关于 $\dfrac{1}{x}$ 的 $3k$ 次多项式. 在 $x=0$ 处的各阶导数可依次用定义求:

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{x} = 0, \\
f''(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}}{x} = 0, \\
&\vdots \\
f^{(k+2)}(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}}{x} = 0, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

假设 $f(x)$ 等于某个在 $(-a,a)$ 上收敛的幂级数的和函数 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$, 那么根据幂级数的逐项可导性有

$$a_k\cdot k!=f^{(k)}(0)=0,$$

那么有 $a_k=0$ 对所有的 $k=0,1,\cdots$ 都成立, 相应幂级数的和函数显然等于常值函数 0, 不等于 $f(x)$, 矛盾. 所以 $f(x)$ 在任何形如 $(-a,a)$, $a>0$, 的区间上, 都不能表示为某个在 $(-a,a)$ 上收敛的幂级数的和函数. □

3.（10 分）设函数项级数 (称为 Dirichlet 级数) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 在 $x=x_0\in\mathbb{R}$ 处收敛.

（1） 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 在 $x\in[x_0,+\infty)$ 上一致收敛.

（2） 任取 $x>x_0+1$, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 绝对收敛.

解答

（1） 记 $\tau_n(x):=\frac{1}{n^{x-x_0}}$, 那么 $\tau_n(x)$ 对每个固定的 $x\in[x_0,+\infty)$ 关于 n 单调非增, 且一致地以 1 为界:

$$|\tau_n(x)|\leqslant 1,\quad \forall x\in[x_0,+\infty), n\in\mathbb{N}.$$

又由于数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}$ 收敛, 把它视作关于 x 的函数项级数, 则它关于 x 一致收敛. 于是根据函数项级数的 Abel 判别法,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}\cdot\tau_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}\cdot\frac{1}{n^{x-x_0}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$$

在 $[x_0,+\infty)$ 上一致收敛.

（2） 由于数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}$ 收敛, 因此其通项 $\frac{a_n}{n^{x_0}}\to 0\ (n\to\infty)$. 于是, 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$ 有

$$\left|\frac{a_n}{n^{x_0}}\right|=\left|\frac{a_n}{n^{x_0}}-0\right|<1.$$

记 $s=x-x_0>1$, 那么对任意 $n>N$ 有

$$\left|\frac{a_n}{n^x}\right|=\left|\frac{a_n}{n^{x_0}}\right|\cdot\frac{1}{n^s}<\frac{1}{n^s}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 是收敛的正项级数, 因此由正项级数的比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{n^x}\right|$ 也收敛.

□

4.（10 分）叙述并证明 n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的 Cantor 闭区域套定理.

解答 Cantor 闭区域套定理: 设

$$D_1\supset D_2\supset\cdots\supset D_k\supset D_{k+1}\supset\cdots$$

为 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集 (闭区域) 套, 且满足 $\lim_{k\to\infty}\operatorname{diam}D_k=0$, 其中

$$\operatorname{diam}D_k=\sup_{x_1,x_2\in D_k}\|x_1-x_2\|,$$

那么存在唯一一点 $x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}D_k$.

Cantor 闭区域套定理的证明: 首先证明 x 的存在性, 即 $\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\neq\emptyset$.

由于每个 E_k 都是非空闭集, 于是可以取到点列 $x_k\in E_k$. 由于对任意 $p\geqslant 1$, 有 $E_{k+p}\subset E_k$, 于是 $x_{k+p}\in E_{k+p}\subset E_k$, 从而有 $d(x_k,x_{k+p})\leqslant\operatorname{diam}E_k$, 这表明 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 Cauchy 列, 从而存在 $x\in\mathbb{R}^n$, 使得 $\lim_{k\to\infty}x_k=x$.

由于对任意 $p\geqslant 1$, 有 $x_{k+p}\in E_k$, 那么 x 是每个闭集 E_k 的聚点, 从而 $x\in\overline{E}_k=E_k$, 即 $x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$.

接下来证明 x 的唯一性. 假设存在另一点 $y\in\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$, 则 $y\in E_k$, 从而 $d(x,y)\leqslant\operatorname{diam}E_k$ 对所有有 k 成立, 从而 $d(x,y)=0$, 即 $x=y$. □

5.（12 分）设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为数项级数, 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ 为其通项的前 n 项和, $\sigma_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}s_k$ 为数列 $\{s_n\}$ 的前 n 项均值.

（1） 若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数在闭区间 $[0,1]$ 上有定义 (即幂级数在此区间上收敛) 且连续.

（2） 设 $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=A\in\mathbb{R},A\neq 0$. 证明幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n\sigma_nx^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}s_nx^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径都大于等于 1, 并证明等式 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=(1-x)^2\sum_{n=1}^{\infty}n\sigma_nx^n$ 在 $|x|<1$ 时恒成立.

（3） 利用 $(1-x)^{-1}$ 在 $|x|<1$ 内的幂级数展开

$$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\cdots$$

求函数 $\frac{1}{(1-x)^2}$ 的幂级数展开, 并验证等式 $1=(1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ 在 $|x|<1$ 时恒成立. 由此证明

$$\lim_{x\to 1-}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=A.$$

解答

（1） 由题设知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=1$ 处收敛, 于是由幂级数的 Abel 第二定理知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在任意闭区间 $[a,b]\subset(-1,1]$ 上一致收敛, 特别地在 $[0,1]$ 上一致收敛, 从而和函数在 $[0,1]$ 上连续.

（2） 由于 $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=A\in\mathbb{R}, A\neq 0$, 所以当 n 充分大时有

$$\frac{|A|}{2}\leqslant|\sigma_n|\leqslant\frac{3|A|}{2},$$

由夹逼准则知 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\sigma_n|}=1$. 另一方面, 有 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, 于是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|n\sigma_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\sigma_n|}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

由 Cauchy-Hadamard 定理知, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n\sigma_nx^n$ 收敛半径等于 1.

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}n\sigma_nx^n$ 收敛半径等于 1, 所以任取 $|x|<1$, $\sum_{n=1}^{\infty}n\sigma_nx^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\sigma_{n-1}x^n=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\sigma_{n-1}x^{n-1}$ 都收敛, 其中约定 $\sigma_0=0$. 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}s_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}n\sigma_nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\sigma_{n-1}x^n=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}n\sigma_nx^n$$

也收敛. 于是幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}s_nx^n$ 的收敛半径 r 要满足 $r\geqslant|x|$. 由于 x 是任取的满足 $|x|<1$ 的数, 因此有 $r\geqslant 1$.

用类似的方法可以算得, 当 $|x|<1$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}s_nx^n$$

收敛, 进而推出 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径要大于等于 1.

我们将当 $|x|<1$ 时证明成立的两式

$$\sum_{n=1}^{\infty}s_nx^n=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}n\sigma_nx^n,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}s_nx^n.$$

综合起来, 便是 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=(1-x)^2\sum_{n=1}^{\infty}n\sigma_nx^n$.

（3） 由 $(1-x)^{-1}$ 的幂级数展开

$$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\cdots,$$

利用待定系数法

$$\begin{aligned}(1-x)^{-2}&=(1-x)^{-1}\cdot(1-x)^{-1}=(1+x+x^2+\cdots)\cdot(1+x+x^2+\cdots)\\&=1+a_1x+a_2x^2+\cdots,\end{aligned}$$

那么有 $a_nx^n=1\cdot x^n+x\cdot x^{n-1}+\cdots+x^n\cdot 1=(n+1)x^n$, 故有 $(1-x)^{-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, 并且容易看出其收敛半径大于等于 $(1-x)^{-1}$ 的收敛半径. 于是在 $|x|<1$ 的范围内, 有

$$1=(1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

下面证明 $\lim_{x\to 1-}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=A$. 在 $|x|<1$ 的范围内有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n-A&=(1-x)^2\sum_{n=1}^{\infty}n\sigma_nx^n-A\\&=(1-x)^2\sum_{n=1}^{\infty}n\sigma_nx^n-A(1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\\&=(1-x)^2\sum_{n=1}^{\infty}x^n(n\sigma_n-(n+1)A)-(1-x)^2A\\&=(1-x)^2\sum_{n=1}^{\infty}x^nn(\sigma_n-A)-(1-x)^2\sum_{n=1}^{\infty}x^nA-(1-x)^2A\end{aligned}$$

$$= (1-x)^2\sum_{n=1}^{\infty}x^n n(\sigma_n - A) - (1-x)A - (1-x)^2 A$$

当 $x\to 1-$ 时, 上式后两项 $-(1-x)A$ 与 $-(1-x)^2A$ 都趋于 0, 因此接下来只要证明 $\lim\limits_{x\to 1-}(1-x)^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n n(\sigma_n - A)=0$ 即可.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = A$, 所以 $\forall\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$, 有 $|\sigma_n - A| < \varepsilon/2$. 令

$$M=\max_{1\leqslant n\leqslant N} n|\sigma_n - A|,$$

对于 $0<x<1$, 有

$$\begin{aligned}
\left|(1-x)^2\sum_{n=1}^{\infty}x^n n(\sigma_n - A)\right| &\leqslant (1-x)^2\sum_{n=1}^{\infty}x^n n|\sigma_n - A| \\
&= (1-x)^2\sum_{n=1}^{N}x^n n|\sigma_n - A| + (1-x)^2\sum_{n=N+1}^{\infty}x^n n|\sigma_n - A| \\
&\leqslant (1-x)^2\sum_{n=1}^{N}x^n M + (1-x)^2\sum_{n=N+1}^{\infty}x^n n\frac{\varepsilon}{2} \\
&\leqslant M(1-x)^2\sum_{n=1}^{N}x^n + \frac{\varepsilon}{2}(1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}x^n(n+1) \\
&= Mx(1-x)(1-x^N)+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant M(1-x)+\frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

对于取定的 $\varepsilon>0$, 进一步令 $1-\dfrac{\varepsilon}{2M}<x<1$, 代入上式有

$$\left|(1-x)^2\sum_{n=1}^{\infty}x^n n(\sigma_n - A)\right|\leqslant M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

这样就完成了 $\lim\limits_{x\to 1-}(1-x)^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n n(\sigma_n - A)=0$ 的证明.

$\square$