中国农业大学

2024~2025 学年春季学期

数学分析 II 课程第二次期中考试试题

题号	一	二	三	四	总分
分数					

（本试卷共 4 道大题）

考生诚信承诺

本人承诺自觉遵守考试纪律，诚信应考，服从监考人员管理。

本人清楚学校考试考场规则，如有违纪行为，将按照学校违纪处分规定严肃处理。

一、选择题：本题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 对于定义在闭区间 $[a,b]$ 上的函数, 下面哪类函数有可能是黎曼不可积的　　（　　）

   A. 连续函数　　B. 有有限个间断点的有界函数

   C. 单调有界函数　　D. 简单函数 (即值域是有限集的函数)

2. 以下反常积分收敛的是　　（　　）

   A. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x \,\mathrm{d}x$　　B. $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin x| \,\mathrm{d}x$　　C. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2) \,\mathrm{d}x$　　D. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin^2 x \,\mathrm{d}x$

3. 以下的论断正确的是　　（　　）

   A. 若闭区间 $[a,b]$ 上黎曼可积函数列 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 点态收敛到 $[a,b]$ 上黎曼可积函数 $f(x)$, 但不是一致收敛, 则必然有 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

   B. 设级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 数列 $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$, 则级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$ 必定收敛

   C. 设 $f(x), g(x)$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的连续函数. 假设反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 并且有 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g(x) = 0$, 则反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 必定收敛

   D. 以上说法都不对

4. 设数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $a_n \neq -1$, 但 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散, 则以下说法正确的是　　（　　）

   A. 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+a_n^2}$ 必然收敛

B. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 可能收敛也可能发散

C. 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 可能收敛也可能发散

D. 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n^2)$ 可能收敛也可能发散

5. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 满足上极限 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=A, 0<A<+\infty$, 那么下面正确的论断是 （　　）

A. $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径必定等于 $\frac{1}{A}$

B. $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径可能大于 $\frac{1}{A}$.

C. $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径可能小于 $\frac{1}{A}$.

D. 以上说法都不对

二、填空题：**本题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分**。

1. 求柯西主值 (cpv) $\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x\,\mathrm{d}x=$ ______ .

2. 已知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$, 那么 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=$ ______ .

3. 若正项级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^q n}$ 收敛, 则实数 q 的取值范围为 ______ .

4. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2+(-1)^n)^n}{2^n+\sin nx}x^n$ 的收敛半径等于 ______ .

5. 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 的收敛域为 ______ .

三、计算题：**本题共 2 小题, 共 20 分**。**本题应写出具体演算步骤**。

1.（10 分）请计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>b>0$, 绕 x 轴旋转一周形成的椭球的表面积.

2.（10 分）求定积分 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos x}{1+2^x}\,\mathrm{d}x$. (提示: 将积分区间分为对称的两部分).

四、解答题：本题共 5 小题, 共 50 分。解答应写出文字说明或者证明过程。

1.（8 分）设函数 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 区间上的非负连续函数, 并且满足 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 请证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒等于 0.

2.（10 分）设无穷乘积 $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛, 请问数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否必收敛? 若是, 请证明这个结论; 若否, 请给出反例.

3.（10 分）设函数 $S(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 且 $S(1)=0$. 请证明: $\{x^n S(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

4.（10 分）设 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}$,

（1）求证: $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续;

（2）记 $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 求证: $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{15} < F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

5.（12 分）考虑定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $\varphi(x) = d(x,\mathbb{Z}) = \min\limits_{n\in\mathbb{Z}} |x-n|$. $\varphi(x)$ 是周期为 1 的函数, 在 $[0,1)$ 区间上的定义为

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1/2, \\ 1-x, & 1/2 \leqslant x < 1. \end{cases}$$

定义 Generalized Van der Waerden-Takagi 函数为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \varphi(b^n x),$$

其中 $a, b \in \mathbb{R}$ 为常数.

（1）若 $0 < a < 1$, 请证明: $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

（2）设 $g(x)$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上任一函数, 请证明: 若 $g(x)$ 在某点 x_0 处可导, 导数值等于 A, 那么对于任意的序列 u_n, v_n, 若满足 $u_n \leqslant x_0 \leqslant v_n$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = x_0$, 那么必有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(u_n)-g(v_n)}{u_n - v_n} = A.$$

（3）若 $0 < a < 1$, $b \in 2\mathbb{N}$ 为正偶数, 且满足 $ab \geqslant 1$, 请证明: $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 中任意点处都不可导.