中国农业大学

2024~2025 学年秋季学期

微积分 I 课程考试试题

一、选择题: 本题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 设数列 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 满足 $y_n \leqslant x_n < z_n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立, 并且 $\{y_n\}$ 单调递增, $\{z_n\}$ 单调递减, 那么以下情况不可能发生的是 (D)

A. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, a 为某个实数.

B. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$, $a < b < c$ 为三个不同的实数.

C. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$, $a < c$ 为两个不同的实数, $\{x_n\}$ 发散.

D. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, a 为某个实数, $\{y_n\},\{z_n\}$ 都发散.

解答 对任意 n 有 $y_1 \leqslant y_n < z_n \leqslant z_1$, 那么由单调有界收敛定理, 数列 $\{y_n\},\{z_n\}$ 都有极限, 分别记为 a, c. 若 $a = c$ 则由夹逼定理知 $\{x_n\}$ 也有极限, 且极限为 a. 若 $a < c$, 则 $\{x_n\}$ 可能收敛到闭区间 $[a,c]$ 中的任何一个值, 也有可能是发散的. □

2. 设 $f(x)$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的实值函数, $a < b$. 那么以下说法正确的是 (A)

A. 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导, 那么 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积.

B. 若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上可导, 那么 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

C. 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积, 那么 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续.

D. 若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续, 那么 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上可导.

解答 B: 函数在端点 a, b 处可能不连续.

C: 函数可积不能推出连续.

D: 函数连续不能推出可导.

这题原本 A 选项是 "若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上可导, 那么 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积", 这个命题是错误的, 反例如下:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \dfrac{1}{x}, & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

□

3. 以下函数哪一个不是周期函数 (B)

A. $f(x) = e^{\sin x}$

B. $f(x) = \sin x + \cos \pi x$

C. 常值函数 $f(x) = 1$

D. $g(x) = f'(x)$, 其中 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上某个处处可导的周期函数

解答 容易直接验证得到 A 的周期为 $2k\pi, k \neq 0$, C 的周期为任意非零实数.

这题 C 选线原本是狄利克雷函数 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是有理数}, \\ 0, & x \text{ 是无理数} \end{cases}$, 这也是一个周期函数, 其周期是任意非零有理数.

对于 B, 一般地对于两个周期函数 $f(x), g(x)$, 设其周期分别为 T_1, T_2, 若 $\dfrac{T_1}{T_2} \notin \mathbb{Q}$, 则 $f(x) + g(x)$ 不是周期函数.

D 可直接通过定义得:

$$f'(x+T) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+T+h) - f(x+T)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

□

4. 函数 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最大值等于 (B)

A. 1 B. $e^{\frac{1}{e}}$

C. $2\sqrt{2}$ D. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上没有最大值

解答 可算得 $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} x^{\frac{1}{x}}$. 那么当 $0 < x < e$ 时 $f'(x) > 0$; 当 $x > e$ 时 $f'(x) < 0$. 故 $x = e$ 是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的唯一极大值点, 从而在这点取到最大值 $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$. □

5. $y = e^{\sin\frac{1}{x}}$ 的微分 $\mathrm{d}y =$ (D)

A. $e^{\cos\frac{1}{x}} \mathrm{d}x$ B. $e^{\sin\frac{1}{x}} \cos\dfrac{1}{x} \mathrm{d}x$

C. $-e^{\cos\frac{1}{x}} \dfrac{1}{x^2} \mathrm{d}x$ D. $-e^{\sin\frac{1}{x}} \dfrac{1}{x^2} \cos\dfrac{1}{x} \mathrm{d}x$

解答 直接由复合函数求导的链式法则

$$\mathrm{d}\left(e^{\sin\frac{1}{x}}\right) = e^{\sin\frac{1}{x}} \mathrm{d}\left(\sin\frac{1}{x}\right) = e^{\sin\frac{1}{x}} \cos\frac{1}{x} \mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = -e^{\sin\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} \cos\frac{1}{x} \mathrm{d}x.$$

□

二、填空题：本题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分。

1. 计算定积分的值 $\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = \underline{\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

解答 这个定积分是以原点为圆心, 2 为半径的圆在第一象限 $0-60^\circ$ 扇形的面积 $\frac{60}{360}\cdot\pi\cdot 2^2$, 减去相应直角三角形面积 $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 1$.

这题也可以利用 Newton-Leibniz 公式, 先求原函数

$$\int\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{4-x^2} - \int x\,\mathrm{d}\sqrt{4-x^2} = x\sqrt{4-x^2} - \int x\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$$
$$= x\sqrt{4-x^2} + \int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{4-x^2} - \int\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x + \int\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x,$$

得 $\int\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2\arcsin\frac{x}{2} + C$, 再代入积分上下限相减. □

2. 设 n 为正整数, 计算定积分的值 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x = \underline{0}$

解答 直接利用奇函数在关于原点对称的闭区间上积分等于零这一性质. □

3. 计算不定积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)\arctan x} = \underline{\ln|\arctan x| + C}$

解答 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)\arctan x} = \int\frac{\mathrm{d}(\arctan x)}{\arctan x} = \ln|\arctan x| + C.$ □

4. 由曲线 $y=x^3$ 和 $y=\sqrt[3]{x}$ 围成的区域面积等于 $\underline{1}$

解答 曲线 $y=x^3$ 和 $y=\sqrt[3]{x}$ 的交点为 $(-1,-1),(0,0),(1,1)$, 所围成的图形在第一和第三象限中是对称的, 所以面积

$$S = 2\int_0^1(\sqrt[3]{x}-x^3)\,\mathrm{d}x = 2\left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = 1.$$

这题写 1/2 的可以考虑给 1 - 2 分. □

5. 函数 $\frac{e^x}{1-x}$ 带皮亚诺余项的麦克劳林展开式为(展开到 x^3 即可) $\underline{1+2x+\frac{5}{2}x^2+\frac{8}{3}x^3+o(x^3)}$

解答 e^x 的麦克劳林展开式为

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3),$$

$\frac{1}{1-x}$ 的麦克劳林展开式为

$$1+x+x^2+x^3+o(x^3),$$

所以 $\frac{e^x}{1-x}$ 的麦克劳林展开式为

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\cdot\left(1+x+x^2+x^3+o(x^3)\right) = 1+2x+\frac{5}{2}x^2+\frac{8}{3}x^3+o(x^3).$$

答案可以按展开系数给分. □

三、计算题：本题共 4 小题, 共 26 分。本题应写出具体演算步骤。

1.（8 分）设 $y=xe^{-x}$, 计算 y 的一阶导函数 y', 以及二阶导函数 y''.

解答 $y'=(xe^{-x})'=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$
$y''=(e^{-x}-xe^{-x})'=-e^{-x}-(e^{-x}-xe^{-x})=-2e^{-x}+xe^{-x}=(x-2)^{-x}$ □

2.（6 分）求由方程 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ 给出的隐函数的导函数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解答 对 x 微分得

$$\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}+\frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{y}}=0,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\sqrt{\frac{y}{x}},\ x>0, y>0.$$

□

3.（6 分）设 $f(x)=\int_{-x^2}^{e^{\cos x}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$, 计算导数 $f'(x)$.

解答 一般地, 对于函数 $f(x)=\int_{h_2(x)}^{h_1(x)}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$, 它的导数

$$f'(x)=\varphi(h_1(x))\cdot h_1'(x)-\varphi(h_2(x))\cdot h_2'(x).$$

所以, 对于 $f(x)=\int_{-x^2}^{e^{\cos x}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$, 有

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+(e^{\cos x})^2}}(e^{\cos x})'-\frac{1}{\sqrt{1+(-x^2)^2}}(-x^2)'$$
$$=\frac{-\sin x\cdot e^{\cos x}}{\sqrt{1+e^{2\cos x}}}+\frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}.$$

□

4.（6 分）设函数 $f(x)=\int_0^x|\cos t|\mathrm{d}t$, 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

(**提示**: 考察函数 $|\cos t|$ 在形如 $[k\pi,(k+1)\pi]$, $k\in\mathbb{N}$, 的区间上的积分值)

解答 对任意非负整数 k, $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\cos t|\,\mathrm{d}t=2$. 令 $n=\left[\dfrac{x}{\pi}\right]$, 那么

$$2n=\int_0^{n\pi}|\cos t|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x|\cos t|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|\mathrm{d}t=2(n+1).$$

那么在区间 $[n\pi,(n+1)\pi]$ 上有

$$\frac{2n}{(n+1)\pi}\leqslant\frac{\int_0^x|\cos t|\mathrm{d}t}{x}\leqslant\frac{2(n+1)}{n\pi}.$$

由夹逼准则知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x|\cos t|\mathrm{d}t}{x}=\frac{2}{\pi}.$$

□

四、解答题：本题共 5 小题, 共 44 分。解答应写出文字说明或者证明过程。注意，若一道题分为多个小问，则该题前面小问的结论可以用于后面的小问，但反过来不行。

1.（8 分）设 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$ 若 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上处处连续的函数, 请确定 a 的取值. 进一步, 请判断此时 $f(x)$ 是否是 $\mathbb{R}$ 上处处可导的函数, **并证明你的结论**.

解答 $e^{-\frac{1}{x^2}}$ 是 $\mathbb{R}^*$ 上的初等函数, 在它的定义区间上连续, 所以要使 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处连续, 只要 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=a$ 即可. 由于 $\lim\limits_{x\to0}e^{-\frac{1}{x^2}}=0$, 所以 $a=0$.

此时, $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上处处可导的函数. 只要验证 $f(x)$ 是否在 $x=0$ 处可导即可. 依定义有

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$(令\ t=\frac{1}{x})=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=0,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0)=0$. □

2.（8 分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义, 且有直到 $n-1$ 阶的连续导函数, 在开区间 (a,b) 内有 n 阶导函数. 设开区间 (a,b) 内有 $n+1$ 个点 $a<x_0<x_1<\cdots<x_n<b$, 使得

$$f(x_0)=f(x_1)=\cdots=f(x_n),$$

请证明在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $f^{(n)}(\xi)=0$.

解答 在每个闭区间 $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]$ 上, 函数 $f(x)$ 满足罗尔定理的条件, 从而存在 n 个点

$$\eta_0<\eta_1<\cdots<\eta_{n-1},$$

使得 $x_k<\eta_k<x_{k+1}$, $k=0,1,\cdots,n-1$, 并且

$$f'(\eta_0)=\cdots=f'(\eta_{n-1})=0.$$

重复 $n-1$ 步之后, 可以得到一个区间 $[\tau_0,\tau_1]\subset(a,b)$, 使得

$$f^{(n-1)}(\tau_0)=f^{(n-1)}(\tau_1)=0,$$

在此区间上再次利用罗尔定理, 至少存在一个点 $\xi\in(\tau_0,\tau_1)$, 使得 $f^{(n)}(\xi)=0$. □

3.（8 分）找出函数 $f(x)=\dfrac{(x-1)\sin(x-2)}{|x-1|(x-2)}e^{-\frac{1}{x}}$ 所有的间断点, 并判断其类型.

解答 间断点: $0,1,2$ 间断点类型:

- $0:\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$ 为第二类 (无穷) 间断点
- $1:\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\dfrac{\sin 1}{e}$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\dfrac{\sin 1}{e}$ 为第一类 (跳跃) 间断点
- $2:\lim\limits_{x\to2}f(x)=e^{-\frac{1}{2}}$ 为第一类 (可去) 间断点

□

4.（10 分）求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的单调区间, 极值, 凹凸区间, 拐点及渐近线.

解答 可求得函数 $f(x)$ 的一阶以及二阶导函数分别为

$$f'(x)=-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$f''(x)=\frac{x^2-1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

可求得

- 极大值点: $\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$
- 单调区间:
  - $(-\infty,0)$: 单调递增
  - $(0,+\infty)$: 单调递减

• 拐点: $\left(-1, \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right), \left(1, \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$

• 凹凸区间:

– 凹 (下凸) 区间: $(-\infty, -1)$ 以及 $(1, +\infty)$

– 凸 (上凸) 区间: $(-1, 1)$

• 渐近线: $y = 0$

□

5.（10 分）设 $f(x)$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的处处可导的实值函数.

（1） 证明: 若 $f(x)$ 为奇函数, 则它的导函数 $f'(x)$ 是偶函数; 若 $f(x)$ 为偶函数, 则它的导函数 $f'(x)$ 是奇函数.

（2） 对 $f(x) = \dfrac{x^{2025}e^{-x^2}}{\sqrt{1+\sin^{2024}x}}$, 求 $f^{(2024)}(0)$ 以及 $\displaystyle\int_{-2025}^{2025} f^{(2024)}(x)\,\mathrm{d}x$ 的值. **(注意利用第 (1) 问的结论)**

解答

（1） 任取 $x \in \mathbb{R}$, 若 $f(x)$ 为奇函数, 那么

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-f(x-h) + f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \\ &= f'(x), \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 是偶函数.

类似地, 若 $f(x)$ 为偶函数, 则有

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \\ &= -\lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \\ &= -f'(x), \end{aligned}$$

这种情况下, $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 是奇函数.

注意, 这问也可以用复合函数求导法则进行证明.

（2） 容易看出 $f(x) = \dfrac{x^{2025}e^{-x^2}}{\sqrt{1+\sin^{2024}x}}$ 是奇函数, 那么 $f'(x)$ 是偶函数, 进而有 $f''(x)$ 是奇函数. 进一步可以归纳得知 $f^{(2n)}(x)$ 是奇函数, 奇函数在 $x = 0$ 处的值为 0, 在关于原点对称的闭区间上的积分值也为 0, 因此 $f^{(2024)}(0) = 0$, , $\displaystyle\int_{-2025}^{2025} f^{(2024)}(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

□