中国农业大学

2025~2026学年秋季学期

微积分Ⅰ　　　　　课程考试试题解答

一、单项选择题（本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. D　2. A 3. D　4. A　　5. B

.

二、填空题（本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. e^{-6}

2. $-\sqrt{1-x^2}+C$

3. $\dfrac{\pi}{2}$

4. $3^{n-1}e^{3x}(3x+n)$

5. $1-x^2+\frac{1}{3}x^4-\frac{2}{45}x^6+o(x^6)$

三、计算题（本题共有 5 道小题，每小题 6 分，满分 30 分）

1. 设 $y=x\ln(1+x^2)$，求 y' 和 y''.

解：$y'=\ln(1+x^2)+\dfrac{2x^2}{1+x^2}$.

$$y''=\frac{2x}{1+x^2}+\frac{4x}{(1+x^2)^2}=\frac{2x^3+6x}{(1+x^2)^2}$$

2. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

解：
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\cos^2 x\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{1}{4}\sin^2 2x}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{1}{4}\left(2x-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)\right)^2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{1}{4}\left(4x^2-\frac{16}{3}x^4+o(x^4)\right)}{x^4}=\frac{4}{3}.$$

3. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=t-\arctan t \end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 和 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解： $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{dx/dt}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+t^2}{2t}=\frac{1+t^2}{4t}$$

4. 计算 $\int_0^1 \dfrac{x}{(2-x)^2\sqrt{1-x}}dx.$

解： $$\int_0^1 \frac{x}{(2-x)^2\sqrt{1-x}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x}{(2-x)^2\sqrt{1-x}}dx$$

令 $t=\sqrt{1-x}$,则

$$\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x}{(2-x)^2\sqrt{1-x}}dx=-2\int_1^{\sqrt{\varepsilon}}\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}dt=2\int_{\sqrt{\varepsilon}}^1\frac{1}{1+t^2}dt-\int_{\sqrt{\varepsilon}}^1\frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt$$

$$=-2\int_{\sqrt{\varepsilon}}^1\frac{1}{1+t^2}dt+4\int_{\sqrt{\varepsilon}}^1\frac{1}{(1+t^2)^2}dt=-2\arctan t\Big|_{\sqrt{\varepsilon}}^1+4\left(\frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}\arctan t\right)\Big|_{\sqrt{\varepsilon}}^1$$

$$=1-\frac{2\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon}$$

$$\int_0^1\frac{x}{(2-x)^2\sqrt{1-x}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x}{(2-x)^2\sqrt{1-x}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(1-\frac{2\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon}\right)=1$$

5. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $e^{2x}\sin x$，求 $\int f'(x)\cos x dx.$

解: $f(x)=F'(x)=(e^{2x}\sin x)'$

$$\int f'(x)\cos xdx=\int\cos xdf(x)=f(x)\cos x+\int f(x)\sin xdx$$

$$=f(x)\cos x+\int F'(x)\sin xdx=f(x)\cos x+\int\sin xdF(x)$$

$$=f(x)\cos x+F(x)\sin x-\frac{1}{2}\int e^{2x}\sin 2xdx$$

$$=e^{2x}\left(1+\frac{7}{8}\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x\right)+C.$$

四、解答题（本题共 3 小题，满分 28 分）

1. (10 分)求函数 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ 的单调区间和极值，并求曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间、拐点和渐近线.

解：定义域：$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

$$f'(x)=1-2(x-1)^{-2}$$

$$f''(x)=0-2(-2)(x-1)^{-3}=4(x-1)^{-3}$$

令 $f'(x)=0$：$\Rightarrow \quad x=1\pm\sqrt{2}$

当 $x>1+\sqrt{2}$或$x<1-\sqrt{2}$, $f'(x)>0$;

当 $1-\sqrt{2}<x<1$或$1<x<1+\sqrt{2}$, $f'(x)<0$;

故单调递增区间为:（$-\infty$，$1-\sqrt{2}$），（$1+\sqrt{2},+\infty$）；

单调递减区间为:（$1-\sqrt{2},1$），（1，$1+\sqrt{2}$）.

极大值$f(1-\sqrt{2})=2-2\sqrt{2}$;极小值 $f(1+\sqrt{2})=2+2\sqrt{2}$.

令 $f''(x)=0$ 无解，但 $x=1$ 处分母为零，且符号变化：

当 $x>1$ 时 $(x-1)^3>0\Rightarrow f''(x)>0$

当 $x<1$ 时 $(x-1)^3<0\Rightarrow f''(x)<0$

所以：

凸区间：$(-\infty,1)$

凹区间：$(1,+\infty)$

拐点：无（因为 $x=1$ 不在定义域）

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to1^-}f(x)=-\infty$$

垂直渐近线：$x=1$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x(x-1)}=1,\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x(x-1)}-x\right)=1$$

故斜渐近线为 $y=x+1$.

2.（6 分）设函数 $f(x)=\dfrac{\sin(\pi x)}{x(x^2-1)}e^{\frac{1}{x}}$，讨论 $f(x)$ 的间断点，并判断其类型.

解：$$\lim_{x\to1}f(x)=\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot e=-\frac{\pi e}{2}$$

$x=1$ 是可去间断点

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{1}{e}=-\frac{\pi}{2e}$$

$x=-1$ 是可去间断点。

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = A\cdot(+\infty) = -\infty$$

$x=0$ **是第二类间断点**

3.(12 分) 设曲线 $y=\sqrt{x}\,(x\geq 0)$，求

（1） 在 $x=4$ 处的切线方程；

（2） 该切线与曲线、x 轴围成的平面图形的面积；

（3） 该图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解：（1） $$y'\big|_{x=4}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=4}=\frac{1}{4}$$

故切线方程为 $y-2=\dfrac{1}{4}(x-4)$

即 $y=\dfrac{1}{4}x+1.$

（2） $$S=\int_{-4}^{0}\left(\frac{1}{4}x+1\right)dx+\int_{0}^{4}\left(\frac{1}{4}x+1-\sqrt{x}\right)dx=\frac{8}{3}.$$

（3） $$V=\pi\int_{-4}^{0}\left(\frac{1}{4}x+1\right)^2dx+\pi\int_{0}^{4}\left[\left(\frac{1}{4}x+1\right)^2-(\sqrt{x})^2\right]dx=\frac{8}{3}\pi.$$

五、证明下列各题（本题共 2 小题，每小题 6 分，满分 12 分）

1. 证明： 当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}$.

证明：令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$**，则**

$$f'(x)=\ln(1+x)+1-\frac{1}{1+x^2}=\ln(1+x)+\frac{x^2}{1+x^2}>0$$

所以 $f(x)$ **是单调递增的函数，又** $f(0)=0$**，故**

$$(1+x)\ln(1+x)-\arctan x>0$$

即 $\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}.$

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $\int_0^1 f(x)dx=0,\ f(0)=0.$ 证明：存在 $\xi\in(0,1)$

使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{2-\xi}.$

证明：$f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{2-\xi}$等价于$f'(\xi)(2-\xi)-f(\xi)=0$，故令

$g(x)=(2-x)f(x)$,则$g(0)=2f(0)=0$.

由积分中值定理知存在$c\in[0,1]$使得

$\int_0^1 f(x)dx=f(c)(1-0)=f(c)=0$.

则有 $g(c)=(2-c)f(c)=0$.

由罗尔定理知存在$\xi\in$（0，c）$\subset(0,1)$,使得

$g'(\xi)=0$

即 $f'(\xi)(2-\xi)-f(\xi)=0$.