中国农业大学

2025~2026 学年秋季学期

实变函数 课程考试试题解答

一、证明题：本题共 2 小题，第 1 题 6 分，第 2 题 9 分，共 15 分。请写出证明详细过程。

1. 设 A, B 为包含在基本集 X 中的两个集合, 分别记 A^c, B^c 为集合 A, B 在 X 中的补集. 集合 A, B 的对称差定义为

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

请证明 $A^c \triangle B^c = A \triangle B$.

解答 由对称差的定义, 有

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \\ &= (B^c \cap A) \cup (A^c \cap B) = (B^c \setminus A^c) \cup (A^c \setminus B^c) \\ &= A^c \triangle B^c. \end{aligned}$$

□

2. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的非负可积函数, 令

$$F(x) = \int_{(-\infty, x]} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

若 $F(x)$ 也是 $\mathbb{R}$ 上的可积函数, 请证明 $f(x)$ 几乎处处等于 0.

解答 由勒贝格积分的 (绝对) 连续性, 以及 $f(x)$ 非负知, $F(x) = \int_{(-\infty, x]} f(t)\, \mathrm{d}t$ 是 $\mathbb{R}$ 上连续且单调递增的函数. 于是 $\lim\limits_{x \to \infty} F(x)$ 为有限实数或者等于 ∞. 由于 $f(x)$ 可积, 所以

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{d}x < \infty$$

令 $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = c \geqslant 0$. 由于 $F(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可积函数, 可设 $\int_{\mathbb{R}} F(x)\, \mathrm{d}x = a \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$.

假设 $c > 0$, 那么由 $F(x)$ 的连续性知存在 $X \in \mathbb{R}$, 对任意 $x > X$, 有 $F(x) > c/2$, 从而有

$$a = \int_{\mathbb{R}} F(x)\, \mathrm{d}x \geqslant \int_{[X, X+2a/c+1]} F(x) \geqslant a + c/2,$$

矛盾. 所以 $c > 0$ 的假设不成立, 即有

$$0 = c = \lim_{x \to \infty} F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

由勒贝格积分的唯一性知, $f(x)$ 几乎处处等于 0. □

二、简答题：本题共 2 小题，第 1 题 15 分，第 2 题 10 分，共 25 分。

1. 设基本集 $X = \mathbb{R}$, 称集合 $A \subset X$ 被称作是无处稠密集, 指的是它的闭包的内部是空集, 即

$$\mathring{\overline{A}} := \{x \in \overline{A} : x \text{ 为 } \overline{A} \text{ 的内点}\} = \emptyset.$$

称集合 $A \subset X$ 被称作是稀疏集, 指的是它的余集是稠密集, 即它的余集的闭包等于全集:

$$\overline{X \setminus A} = X.$$

（1）请问无处稠密集是否一定是稀疏集? 若是, 请给出证明; 否则, 请举反例.

（2）反过来, 请问稀疏集是否一定是无处稠密集? 若是, 请给出证明; 否则, 请举反例.

（3）请问 Cantor 三分集是否是无处稠密集? 是否是稀疏集? (不需要证明)

解答

（1）无处稠密集一定是稀疏集. 证明如下: 设 A 是无处稠密集, 那么对于任意的 $x \in X$, x 不是 A 的内点, 否则 A 本身的内部就非空, 它的闭包的内部也必然不是空集. 于是, 对于 x 的任意邻域 $U(x)$, 总有 $U(x) \cap A^c \neq \emptyset$, 也就是说, x 是 A^c 的闭包中的点. 由于 x 的任意性, 可知 $\overline{A^c} = X$. 这就证明了 A 是稀疏集.

（2）稀疏集不一定是无处稠密集. 反例如下: 取 $A = \mathbb{Q}$, 那么 $X \setminus A$ 是所有无理数构成的集合, 其闭包就是 $X = \mathbb{R}$, 因此 $A = \mathbb{Q}$ 是一个稀疏集. 但是它不是无处稠密集, 因为它的闭包 $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, 内部显然是非空的.

（3）Cantor 三分集是闭集且其内部为空集, 所以 Cantor 三分集是无处稠密集.

Cantor 三分集的补集 (只要看在 $[0, 1]$ 区间中的补集) 容易证明是稠密集, 所以 Cantor 三分集是稀疏集.

□

2. 请叙述 (不需要证明) $\mathbb{R}$ 上内测度的半可加性, 并举例说明其中不等式严格大于号可以成立 (提示: 考虑不可测集).

解答 $\mathbb{R}$ 上内测度的半可加性:

设 $E \subset \mathbb{R}$, $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, 且 E_k 互不相交, 那么

$$m_* E \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} m_* E_k.$$

不等式严格大于号成立的例子:

考虑 $E=[0,1]$ 区间, $E_1\subset E$ 为 E 中一个不可测集, 并取 $E_2=E\setminus E_1$. 那么 E_2 也是不可测集. 由不可测集定义, 有

$$m_*E_1<m^*E_1,\ \ m_*E_2<m^*E_2.$$

另一方面, 由内、外测度的关系

$$m_*E_1+m^*E_2=mE=1=m_*E_2+m^*E_1,$$

从而有

$$m_*E_1+m_*E_2=2-(m^*E_1+m^*E_2)<2-(m_*E_1+m_*E_2),$$

上式变形即可得

$$m_*E_1+m_*E_2<1=mE.$$

□

三、解答题：本题共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分。请写出具体解题步骤。

1. 设 $f(x)$ 是定义在可测集 E 上的函数, 若对任意的 $r\in\mathbb{Q}$, 集合 $E(f=r)=\{x\in E: f(x)=r\}$ 都是可测集, 请问 $f(x)$ 是否一定是可测函数? 若是, 请给出证明; 若否, 请举反例.

   解答 $f(x)$ 不一定是可测函数

   反例如下 (不限于如下例子):

   设 $E=[0,1]$, 集合 $A\subset E$ 是不可测集, 函数 $f(x)=\chi_A(x)+\alpha$, 其中 α 为某个无理数, 那么任取 $r\in\mathbb{Q}$, 有 $E(f=r)=\emptyset$, 是可测集, 但 f 不是可测函数. □

2. 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b)$ 上的非负有限的可测函数, $a<b$. 若 $f(x)$ 在任意闭区间 $[a,c]\subset[a,b)$ 上黎曼可积, 并且反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 请问 $f(x)$ 是否在 $[a,b)$ 上勒贝格可积? 若是, 请给出证明; 若否, 请给出反例.

   解答 $f(x)$ 是在 $[a,b)$ 上勒贝格可积的函数.

   考虑区间列 $E_n=[a,b_n]\subset[a,b), n\in\mathbb{N}$, 其中 $b_n=a+(b-a)\dfrac{n}{n+1}$, 以及相应的定义在 $[a,b)$ 区间上的非负可测函数列

$$f_n(x):=f(x)\cdot\chi_{E_n}(x),$$

其中 χ_{E_n} 为 E_n 的特征函数. 那么对任意 $x\in[a,b)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$.

由 Levi 定理 (注意题设中 f 是非负的) 有

$$\int_{[a,b)}f\,\mathrm{d}m=\int_{[a,b)}\lim_{n\to\infty}f_n\,\mathrm{d}m=\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b)}f_n\,\mathrm{d}m=\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}f\,\mathrm{d}m$$
$$=\lim_{n\to\infty}(R)\int_a^{b_n}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

3. 设 $1\leqslant p<\infty$, $E\subset\mathbb{R}$ 为可测集, $f,f_n\in L^p(E)$, $n\in\mathbb{N}$.

   (1) 请叙述 $L^p(E)$ 中函数列 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f 的定义;

   (2) 若 $L^p(E)$ 中函数列 $\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛于 f, 请问是否必有 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f? 若是, 请给出证明; 若否, 请举反例.

   解答

   (1) $L^p(E)$ 中的序列 $\{f_n\}$ 弱收敛于 $f\in L^p(E)$ 指的是, 对任意函数 $g\in L^q(E)$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_ng\,\mathrm{d}m=\int_E fg\,\mathrm{d}m,$$

   其中 q 满足 $1/p+1/q=1$ (若 $p=1$ 则 $q=\infty$).

   (2) 不一定有 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f.

   反例如下 (不限于如下例子):

   $E=\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{1}{n}\chi_{[1,e^n]}(x)$. 容易验证 $\{f_n\}$ 一致收敛到 $f(x)=0$, 并且由于 f_n 有界且具有紧支集, 从而 $f_n\in L^p(E),\forall 1\leqslant p<\infty$. 取

$$g(x)=\frac{1}{x}\chi_{[1,+\infty)}(x),$$

   那么 $g\in L^q(E),\forall 1<q\leqslant\infty$, 但是有

$$\int_{\mathbb{R}}f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_1^{e^n}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=1,$$

   故 $\{f_n\}$ 不弱收敛于 f.

□

4. 设 $f(x),g(x)$ 为定义在 $E=(0,1)$ 上的正值可测函数, 满足 $f(x)g(x)\geqslant\dfrac{1}{x}$, 求

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}m\int_E g(x)\,\mathrm{d}m$$

   的最小值.

   解答 由于 $f(x),g(x)$ 为 $E=(0,1)$ 上非负可测函数, 满足 $f(x)g(x)\geqslant x^{-1}$, 故有

$$g(x)\geqslant\frac{1}{xf(x)},$$

由 Hölder 不等式知

$$
\begin{aligned}
\int_E f(x)\,\mathrm{d}m \int_E g(x)\,\mathrm{d}m &\geqslant \int_E f(x)\,\mathrm{d}m \int_E \frac{1}{xf(x)}\,\mathrm{d}m \\
&= \left(\left(\int_E \left((f(x))^{1/2} \right)^2 \,\mathrm{d}m \right)^{1/2} \left(\int_E \left(\left(\frac{1}{xf(x)} \right)^{1/2} \right)^2 \,\mathrm{d}m \right)^{1/2} \right)^2 \\
&\geqslant \left(\int_E (f(x))^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{xf(x)} \right)^{1/2} \,\mathrm{d}m \right)^2 \\
&= \left(\int_E x^{-1/2}\,\mathrm{d}m \right)^2 = \left(2x^{1/2} \Big|_0^1 \right)^2 \\
&= 4.
\end{aligned}
$$

等号当 $f(x) = g(x) = x^{-1/2}$ 时可取到, 故最小值就是 4.

□

四、证明题：本题共 2 小题，每题 10 分，共 20 分。请写出详细证明过程。

1. 设 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}$ 上的可测函数列, 考虑函数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的收敛点集

$$A := \{x \in E \ : \mathbb{R} \text{ 中数列 } \{f_n(x)\} \text{ 收敛}\},$$

请证明集合 A 可测. (提示: 写出 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 点态收敛的定义 **(**例如作为柯西列**)**, 并将其转化为集合运算的语言)

解答 任取 $x \in A$, 由于数列 $\{f_n(x)\}$ 收敛, 那么它是 $\mathbb{R}$ 中柯西列, 即有

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \exists\, N \in \mathbb{N},\ \text{使得} \forall\, n, m \geqslant N,\ \text{有} |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \frac{1}{k},$$

这表明

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{N=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n=N}^{\infty} \bigcap_{m=N}^{\infty} E\left(|f_n - f_m| \leqslant \frac{1}{k} \right) \right) \right).$$

反之, 从以上集合中任取一个元素 x, 它也满足之前提到的 $\{f_n(x)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中柯西列的条件, 于是有

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{N=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n=N}^{\infty} \bigcap_{m=N}^{\infty} E\left(|f_n - f_m| \leqslant \frac{1}{k} \right) \right) \right).$$

由于每个 $f_n(x)$ 都是可测函数, 所以对任意的 $n, m \in \mathbb{N}$, $f_n - f_m$ 也是可测函数, 从而 $|f_n - f_m|$ 也是可测函数. 由可测函数的定义知 $E\left(|f_n - f_m| \leqslant \dfrac{1}{k} \right)$ 都是可测集, 而可测集全体 $\mathscr{M}$ 构成一个 σ-代数, 于是有 $A \in \mathscr{M}$ 也是一个可测集.

□

2. 设 $\varPhi$ 为 $[0,1]$ 区间上的 Cantor 函数, 其定义为

$$\varPhi : [0,1] \to [0,1], \quad \varPhi(x) = \sup_{P_0 \ni y \leqslant x} \phi(y),$$

其中 P_0 为 $[0,1]$ 上的 Cantor 集, 函数 ϕ 定义为

$$\phi : P_0 \to [0,1], \quad \phi\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a_k}{3^k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k},\ \ a_k \in \{0,1\}.$$

容易验证 $\varPhi$ 为 $[0,1] \to [0,1]$ 的单调非减的连续满射. 令 $f(x) = \varPhi(x) + x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; $g = f^{-1}$ 为 f 的逆映射.

（1）请证明存在可测集 $B \subset [0,1]$ 使 $g^{-1}(B)$ 不可测;

（2）验证映射 g 满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 $L > 0$, 使对任意 $y_1, y_2 \in [0,2]$ 有

$$|g(y_1) - g(y_2)| \leqslant L \cdot |y_1 - y_2|,$$

并证明一般的满足 Lipschitz 条件的映射 h 都将零测集映为零测集;

（3）请证明映射 $f = g^{-1}$ 将 $[0,1]$ 区间中的不可测集映为 $[0,2]$ 区间中的不可测集.

解答

（1） 任取 $[0,1]$ 上 Cantor 三分集 P_0 的补集 G_0 的构成区间 $I = (a,b)$, Cantor 函数 $\varPhi$ 在 I 上为常值函数, 因此 $f(I) = (a + \varPhi(a), b + \varPhi(b))$. 于是有 $m(f(I)) = b - a = mI$, 且 $f(G_0)$ 为构成区间为 $f(I)$ 的开集, 从而可测. 依据测度的可列可加性, 有

$$m(f(G_0)) = \sum_{n=1}^{\infty} m(f(I_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) = m(G_0) = 1$$

成立, 从而知

$$m(f(P_0)) = m([0,2]) - m(f(G_0)) = 2 - 1 = 1.$$

于是可以从正测度集 $f(P_0)$ 中取出不可测集 B_0, 并令 $B = g(B_0) = f^{-1}(B_0) \subset P_0$. 由于 P_0 是零测集, 所以它的子集 B 也是零测集, 从而是可测集. 而 $g^{-1}(B) = B_0$ 不可测.

（2） 任取 $[0,1]$ 区间内的不可测集 E, 假设 $A := g^{-1}(E) = f(E)$ 可测. 由于 Cantor 函数 $\varPhi$ 在 $[0,1]$ 上为增函数, 所以对于任意 $x_1 < x_2 \in [0,1]$, 有

$$f(x_2) - f(x_1) = \varPhi(x_2) - \varPhi(x_1) + x_2 - x_1 \geqslant x_2 - x_1 > 0.$$

令 $[0,2] \ni y_i = f(x_i), i = 1, 2$, 则 $x_i = g(y_i) = f^{-1}(y_i)$, 因此上式可写为

$$g(y_2) - g(y_1) \leqslant y_2 - y_1.$$

这说明映射 g 满足 Lipschitz 条件, 其中 Lipschitz 常数 $L = 1$.

接下来证明满足 Lipschitz 条件的映射 h 将零测集映为零测集. 设 $M \subset \mathbb{R}$ 是零测集, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 开区间列 $\{I_n\}$ 覆盖 M, 且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < \varepsilon.$$

由于映射 h 满足 Lipschitz 条件, 假设其 Lipschitz 常数为 L, 那么对任意区间 I_n, 有 $m(h(I_n)) \leqslant L \cdot m(I_n)$. 于是有

$$m(h(M)) \leqslant m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} h(I_n)\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(h(I_n)) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} L \cdot m(I_n) < \varepsilon L.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 任意, 故 $m(h(M)) = 0$, 即映射 h 将零测集映为零测集.

（3） 用反证法. 任取 $[0,1]$ 区间内的不可测集 E, 假设 $A := g^{-1}(E) = f(E)$ 可测. 取 $K \subset A$ 为 A 的等测核, 即 K 为一个 F_σ 集, 且满足 $mA = mK$. 记

$$A = K \cup Z, \text{ 其中 } Z = A \setminus K \text{ 为零测集.}$$

A 在 g 下的像满足

$$E = g(A) = g(K \cup Z) = g(K) \cup g(Z).$$

由于 f 为连续映射, 而且 K 为 Borel 集 (F_σ 集), 于是 $g(K) = f^{-1}(K)$ 也是 Borel 集, 从而可测. 又由于 Z 为零测集, 所以由上面已经证明的结论知 $g(Z)$ 也是零测集, 因此 E 可测, 这与 E 为不可测集的假设矛盾. 综上所述, g^{-1} 映不可测集为不可测集.

□