中国农业大学
2025~2026 学年秋季学期
实变函数 课程考试试题

题号	一	二	三	四	总分
分数					

（本试卷共 4 道大题）

考生诚信承诺

本人承诺自觉遵守考试纪律，诚信应考，服从监考人员管理。
本人清楚学校考试考场规则，如有违纪行为，将按照学校违纪处分规定严肃处理。

一、证明题：**本题共 2 小题，第 1 题 6 分，第 2 题 9 分，共 15 分。请写出证明详细过程。**

1. 设 A, B 为包含在基本集 X 中的两个集合, 分别记 A^c, B^c 为集合 A, B 在 X 中的补集. 集合 A, B 的对称差定义为
$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$
请证明 $A^c \triangle B^c = A \triangle B$.

2. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的非负可积函数, 令
$$F(x) = \int_{(-\infty, x]} f(t)\, \mathrm{d}t.$$
若 $F(x)$ 也是 $\mathbb{R}$ 上的可积函数, 请证明 $f(x)$ 几乎处处等于 0.

二、简答题：**本题共 2 小题，第 1 题 15 分，第 2 题 10 分，共 25 分。**

1. 设基本集 $X = \mathbb{R}$, 称集合 $A \subset X$ 被称作是无处稠密集, 指的是它的闭包的内部是空集, 即
$$\mathring{\overline{A}} := \{x \in \overline{A} : x \text{ 为 } \overline{A} \text{ 的内点}\} = \emptyset.$$
称集合 $A \subset X$ 被称作是稀疏集, 指的是它的余集是稠密集, 即它的余集的闭包等于全集:
$$\overline{X \setminus A} = X.$$
（1） 请问无处稠密集是否一定是稀疏集? 若是, 请给出证明; 否则, 请举反例.
（2） 反过来, 请问稀疏集是否一定是无处稠密集? 若是, 请给出证明; 否则, 请举反例.
（3） 请问 Cantor 三分集是否是无处稠密集? 是否是稀疏集? (不需要证明)

2. 请叙述 (不需要证明) $\mathbb{R}$ 上内测度的半可加性, 并举例说明其中不等式严格大于号可以成立 (提示: 考虑不可测集).

三、解答题：**本题共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分。请写出具体解题步骤。**

1. 设 $f(x)$ 是定义在可测集 E 上的函数, 若对任意的 $r \in \mathbb{Q}$, 集合 $E(f=r)=\{x \in E : f(x)=r\}$ 都是可测集, 请问 $f(x)$ 是否一定是可测函数? 若是, 请给出证明; 若否, 请举反例.

2. 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b)$ 上的非负有限的可测函数, $a<b$. 若 $f(x)$ 在任意闭区间 $[a,c]\subset[a,b)$ 上黎曼可积, 并且反常积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 请问 $f(x)$ 是否在 $[a,b)$ 上勒贝格可积? 若是, 请给出证明; 若否, 请给出反例.

3. 设 $1\leqslant p<\infty$, $E\subset\mathbb{R}$ 为可测集, $f, f_n\in L^p(E)$, $n\in\mathbb{N}$.

（1） 请叙述 $L^p(E)$ 中函数列 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f 的定义;

（2） 若 $L^p(E)$ 中函数列 $\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛于 f, 请问是否必有 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f? 若是, 请给出证明; 若否, 请举反例.

4. 设 $f(x), g(x)$ 为定义在 $E=(0,1)$ 上的正值可测函数, 满足 $f(x)g(x)\geqslant\dfrac{1}{x}$, 求

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}m\int_E g(x)\,\mathrm{d}m$$

的最小值.

四、证明题：**本题共 2 小题，每题 10 分，共 20 分。请写出详细证明过程。**

1. 设 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是定义在可测集 $E\subset\mathbb{R}$ 上的可测函数列, 考虑函数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的收敛点集

$$A:=\{x\in E : \mathbb{R} \text{ 中数列 } \{f_n(x)\} \text{ 收敛}\},$$

请证明集合 A 可测. (提示**:** 写出 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 点态收敛的定义 **(**例如作为柯西列**)**, 并将其转化为集合运算的语言)

2. 设 Φ 为 $[0,1]$ 区间上的 Cantor 函数, 其定义为

$$\Phi:[0,1]\to[0,1],\quad \Phi(x)=\sup_{P_0\ni y\leqslant x}\phi(y),$$

其中 P_0 为 $[0,1]$ 上的 Cantor 集, 函数 ϕ 定义为

$$\phi: P_0\to[0,1],\quad \phi\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2a_k}{3^k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{2^k},\ \ a_k\in\{0,1\}.$$

容易验证 Φ 为 $[0,1]\to[0,1]$ 的单调非减的连续满射. 令 $f(x)=\Phi(x)+x$, $0\leqslant x\leqslant 1$; $g=f^{-1}$ 为 f 的逆映射.

（1）请证明存在可测集 $B \subset [0,1]$ 使 $g^{-1}(B)$ 不可测;

（2）验证映射 g 满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 $L > 0$, 使对任意 $y_1, y_2 \in [0,2]$ 有

$$|g(y_1) - g(y_2)| \leqslant L \cdot |y_1 - y_2|,$$

并证明一般的满足 Lipschitz 条件的映射 h 都将零测集映为零测集;

（3）请证明映射 $f = g^{-1}$ 将 $[0,1]$ 区间中的不可测集映为 $[0,2]$ 区间中的不可测集.