

一、选择题：本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  满足下极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = A, 0 < A < +\infty$ , 那么下面正确的论断是 ( D )

- A.  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径必定等于  $\frac{1}{A}$       B.  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径可能大于  $\frac{1}{A}$ .  
C.  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径必定小于  $\frac{1}{A}$ .      D. 以上说法都不对

解答 有不等式

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|,$$

而收敛半径等于  $1/\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ , 因此而收敛半径小于  $\frac{1}{A}$ , 等于  $\frac{1}{A}$  都是可能的.

等于  $\frac{1}{A}$  的例子:  $a_n = \frac{1}{n}$ , 那么  $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ .

小于  $\frac{1}{A}$  的例子:  $a_n = \frac{3^{n+(n \bmod 2)}}{5^n}$ , 那么  $\frac{1}{5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{3}{5}$ . □

2. 设  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  是一个连续映射, 以下说法不正确的是 ( B )

- A. 若  $K \subset \mathbb{R}^n$  是紧集, 则它的像集  $f(K)$  必然也是  $\mathbb{R}^m$  中的紧集  
B. 若  $K \subset \mathbb{R}^n$  是闭集, 则它的像集  $f(K)$  必然也是  $\mathbb{R}^m$  中的闭集  
C. 若  $E \subset \mathbb{R}^m$  是闭集, 则它的原像集  $f^{-1}(E)$  必然也是  $\mathbb{R}^n$  中的闭集  
D. 若  $E \subset \mathbb{R}^m$  是开集, 则它的原像集  $f^{-1}(E)$  必然也是  $\mathbb{R}^n$  中的开集

解答 (无界) 闭集在连续映射下的像一般不是闭集. 例如  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , 闭集  $\mathbb{R}$  (或者取  $[0, +\infty)$ ) 的像为  $(0, 1]$ , 不是  $\mathbb{R}$  中闭集. □

3. 设二元函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  的某个去心邻域  $\dot{O}((x_0, y_0), \delta)$  内有定义. 那么关于  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处的二重极限  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$  以及二次极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ ,  $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$  的存在性以及取值的情况, 下面哪一种情况是不可能的 ( D )

- A.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = 1$   
B.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$  不存在,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = 2, \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = 1$   
C.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$  不存在,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$  也不存在,  $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = 2$   
D.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = 1, \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = 2, \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$  不存在.

解答 累次极限与重极限所有可能的取值情况如下

二重极限	二次极限	
$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$	$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$
A	A	A
A	A	✗
A	✗	A
A	✗	✗
✗	A	A
✗	A	B
✗	✗	A
✗	A	✗
✗	✗	✗

4. 设  $f$  是定义在闭区间  $[a, b]$  上的函数. 以下关于函数  $f$  说法正确的是 ( A ) □

- A. 若  $f$  单调, 则  $f$  必然 Riemann 可积  
B. 若  $f$  有界, 则  $f$  必然 Riemann 可积  
C. 若  $\int_a^b |f(x)| dx = 0$ , 则  $f$  在闭区间  $[a, b]$  上恒等于 0  
D. 若  $f$  是  $[a, b]$  上 Riemann 可积函数, 且值域包含于闭区间  $[A, B]$ ,  $g$  为定义在  $[A, B]$  上的另一个 Riemann 可积函数, 则它们的复合  $g \circ f$  也必然是 Riemann 可积的.

解答 注意, 定义在闭区间  $[a, b]$  上的函数, 其单调性蕴含了有界性.

B. 的反例:  $[0, 1]$  上的 Dirichlet 函数

C. 的反例:  $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & x \in [0, 1) \end{cases}$

D. 的反例:  $f(x)$  为  $[0, 1]$  上的 Riemann 函数,  $g(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1], \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ , 则  $f, g$  都 Riemann

可积, 但  $g \circ f$  是  $[0, 1]$  上的 Dirichlet 函数, 不是 Riemann 可积的.  $\square$

5. 设正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散,  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ , 满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{S_n} = 0$ , 那么幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径为 ( C )

A.  $+\infty$

B. 0

C. 1

D. 某个小于 1 的正实数

解答 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{S_n} = 0$  可推出  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{S_n} = 1$ , 由 d'Alembert 定理知  $\sum_{n=1}^{\infty} S_n x^n$  的收敛半径

为 1. 由于  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是正项级数, 所以  $a_n \leq S_n$ , 故  $\sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n$  的收敛半径  $\geq 1$ .

另一方面,  $\sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n$  在  $x = 1$  处发散, 故其收敛半径  $\leq 1$ . 综合知,  $\sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n$  的收敛半径等于 1.  $\square$

## 二、填空题: 本题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分。

1. 定积分  $\int_{-3\pi/2}^{\pi/2} \sin(2x) \sin(5x) dx = \underline{0}$ .

解答  $\cos nx, n = 0, 1, 2, \dots; \sin mx, m = 1, 2, \dots$  在任何一个长度为  $2\pi$  的区间  $[a, b]$  上构成一个关于  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$  正交函数系. 这题里  $[a, b] = [-3\pi/2, \pi/2]$ .  $\square$

2. 设函数  $S(x) = \int_0^x |\sin t| dt$ , 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{x} = \underline{\frac{2}{\pi}}$ .

解答 对任意非负整数  $k$ ,  $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt = 2$ . 令  $n = \left[ \frac{x}{\pi} \right]$ , 那么

$$2n = \int_0^{n\pi} |\sin t| dt \leq \int_0^x |\sin t| dt \leq \int_0^{(n+1)\pi} |\sin t| dt = 2(n+1).$$

那么在区间  $[n\pi, (n+1)\pi]$  上有

$$\frac{2n}{(n+1)\pi} \leq \frac{\int_0^x |\sin t| dt}{x} \leq \frac{2(n+1)}{n\pi}.$$

由夹逼准则知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x |\sin t| dt}{x} = \frac{2}{\pi}.$$

$\square$

3. 若反常积分  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p} dx$  收敛, 则实数  $p$  可以取值的范围为  $\underline{(1, +\infty)}$  (或写  $p > 1$ ).

解答 任取  $1 < q < p$ , 有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^p} \bigg/ \frac{1}{x^q} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^{p-q}} = 0$ , 根据非负函数反常积分敛散性的比较判别法的极限形式, 由  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^q} dx$  收敛知  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p} dx$  收敛.  $\square$

4. 若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$  的收敛半径是 2, 那么幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径是  $\underline{4}$ .

解答 由 Cauchy-Hadamard 定理,  $2 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{|a_n|} = \left( \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{1/2}$

$\square$

5. 二重极限  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 + y^5)}{x^2 + y^2} = \underline{0}$ .

解答 令  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi)$ . 不妨设  $r < 1$ , 那么有

$$\left| \frac{\sin(x^3 + y^5)}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^3 + y^5}{x^2 + y^2} \right| = r \cdot |r^2 \sin^5 \theta + \cos^3 \theta| \leq r \cdot (|r^2 \sin^5 \theta| + |\cos^3 \theta|) \leq 2r.$$

于是, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \varepsilon/2 > 0$ , 那么对任意满足  $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = r < \delta$ , 有

$$\left| \frac{\sin(x^3 + y^5)}{x^2 + y^2} \right| \leq 2r < 2\delta = \varepsilon,$$

所以二重极限  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 + y^5)}{x^2 + y^2} = 0$ .  $\square$

## 三、计算题: 本题共 2 小题, 共 20 分。本题应写出具体演算步骤。

1. (10 分) 求 Archimedes 螺线  $r(\theta) = a\theta, a > 0$ , 第一圈 (对应  $\theta \in [0, 2\pi]$ ) 的弧长.

解答 由于  $r'(\theta) = a$ , 代入极坐标下的弧长公式有

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2} d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a\theta)^2 + a^2} d\theta = a \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1} d\theta \\
&= \frac{a}{2} \left( x\sqrt{x^2 + 1} + \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \right) \Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{a}{2} \left( 2\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} + \ln \left( 2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1} \right) \right)
\end{aligned}$$

□

2. (10 分) 计算函数  $f(x) = x \cot x$  在  $x = 0$  附近直到  $x^4$  的幂级数展开.

解答 首先  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x = 1$ , 所以函数  $f(x) = x \cot x$  在  $x = 0$  处有定义.

由于  $x \cot x$  是偶函数, 可以用待定系数法令  $x \cot x = c_0 + c_2 x^2 + c_4 x^4 + \dots$ , 有

$$x \cos x = x \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) = x \cot x \cdot \sin x = (c_0 + c_2 x^2 + c_4 x^4 + \dots) \cdot \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right),$$

令对应系数相等, 得方程组

$$\begin{cases} 1 = c_0 \\ -\frac{1}{2} = c_2 - \frac{1}{6} \cdot c_0 \\ \frac{1}{24} = c_4 - \frac{1}{6} \cdot c_2 + \frac{1}{120} \cdot c_0 \end{cases}$$

解得  $c_0 = 1, c_2 = -\frac{1}{3}, c_4 = -\frac{1}{45}$ . 于是幂级数展开为

$$x \cot x = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + \dots$$

□

**四、解答题：本题共 5 小题, 共 50 分。解答应写出文字说明或者证明过程。**

1. (8 分) 记  $M_n(\mathbb{R})$  为  $n$  阶实方阵全体构成的集合, 通过如下的一一映射

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto (a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{nn})$$

可以将  $M_n(\mathbb{R})$  视作  $n^2$  维 Euclid 空间  $\mathbb{R}^{n^2}$ . 记  $M_n(\mathbb{R})$  中所有可逆方阵构成的集合为  $GL_n(\mathbb{R})$ , 即

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}.$$

证明  $GL_n(\mathbb{R})$  在  $M_n(\mathbb{R})$  中不是道路连通的.

解答 令矩阵  $A_1 = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$  为  $n$  阶单位阵, 其行列式等于 1; 令矩阵  $A_2 = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$  为将矩阵  $A_1$  的第 1 行第 1 列元素改为  $-1$  所得矩阵, 其行列式等于  $-1$ . 假设  $GL_n(\mathbb{R})$  是道路连通的, 那么存在一条道路

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow GL_n(\mathbb{R}),$$

使得  $\gamma(0) = A_1, \gamma(1) = A_2$ . 由于行列式  $\det$  是关于方阵元素的多项式, 因此是连续的. 于是

$$\det \circ \gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

是连续的一元函数, 并且有  $\det(\gamma(0)) = \det A_1 = 1, \det(\gamma(1)) = \det A_2 = -1$ . 于是根据闭区间上连续函数的零点存在定理 (或者中间值定理), 存在  $\xi \in [0, 1]$ , 使得  $0 = \det(\gamma(\xi))$ . 记  $B = \gamma(\xi)$ , 那么上式表明  $\det B = 0$ , 从而有  $B \notin GL_n(\mathbb{R})$ , 这与  $\gamma$  是  $GL_n(\mathbb{R})$  中的一条道路矛盾. □

2. (10 分) 求证函数  $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  在任何形如  $(-a, a)$ ,  $a > 0$ , 的区间上, 都不能

表示为某个在  $(-a, a)$  上收敛的幂级数的和函数.

解答 容易算得当  $x \neq 0$  时,  $f(x)$  的各阶导数为

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}, \\ f''(x) &= \left( \frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4} \right) e^{-1/x^2}, \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= P_{3k} \left( \frac{1}{x} \right) e^{-1/x^2}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

其中  $P_{3k} \left( \frac{1}{x} \right)$  是关于  $\frac{1}{x}$  的  $3k$  次多项式. 在  $x = 0$  处的各阶导数可依次用定义求:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = 0, \\ f''(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}}{x} = 0, \\ &\vdots \\ f^{(k+2)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P_{3k} \left( \frac{1}{x} \right) e^{-1/x^2}}{x} = 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

假设  $f(x)$  等于某个在  $(-a, a)$  上收敛的幂级数的和函数  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ , 那么根据幂级数的逐项可导性有

$$a_k \cdot k! = f^{(k)}(0) = 0,$$

那么有  $a_k = 0$  对所有的  $k = 0, 1, \dots$  都成立, 相应幂级数的和函数显然等于常值函数 0, 不等于  $f(x)$ , 矛盾. 所以  $f(x)$  在任何形如  $(-a, a)$ ,  $a > 0$ , 的区间上, 都不能表示为某个在  $(-a, a)$  上收敛的幂级数的和函数.  $\square$

3. (10 分) 设函数项级数 (称为 Dirichlet 级数)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$  在  $x = x_0 \in \mathbb{R}$  处收敛.

(1) 证明  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$  在  $x \in [x_0, +\infty)$  上一致收敛.

(2) 任取  $x > x_0 + 1$ , 证明  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$  绝对收敛.

解答

(1) 记  $\tau_n(x) := \frac{1}{n^{x-x_0}}$ , 那么  $\tau_n(x)$  对每个固定的  $x \in [x_0, +\infty)$  关于  $n$  单调非增, 且一致地以 1 为界:

$$|\tau_n(x)| \leq 1, \quad \forall x \in [x_0, +\infty), n \in \mathbb{N}.$$

又由于数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$  收敛, 把它视作关于  $x$  的函数项级数, 则它关于  $x$  一致收敛.

于是根据函数项级数的 Abel 判别法,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \tau_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

在  $[x_0, +\infty)$  上一致收敛.

(2) 由于数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$  收敛, 因此其通项  $\frac{a_n}{n^{x_0}} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ . 于是, 存在正整数  $N$ , 使得对任意  $n > N$  有

$$\left| \frac{a_n}{n^{x_0}} \right| = \left| \frac{a_n}{n^{x_0}} - 0 \right| < 1.$$

记  $s = x - x_0 > 1$ , 那么对任意  $n > N$  有

$$\left| \frac{a_n}{n^x} \right| = \left| \frac{a_n}{n^{x_0}} \right| \cdot \frac{1}{n^s} < \frac{1}{n^s}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  是收敛的正项级数, 因此由正项级数的比较判别法知  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n^x} \right|$  也收敛.

4. (10 分) 叙述并证明  $n$  维 Euclid 空间  $\mathbb{R}^n$  中的 Cantor 闭区域套定理.

解答 Cantor 闭区域套定理: 设

$$D_1 \supset D_2 \supset \dots \supset D_k \supset D_{k+1} \supset \dots$$

为  $\mathbb{R}^n$  中的闭集 (闭区域) 套, 且满足  $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam } D_k = 0$ , 其中

$$\text{diam } D_k = \sup_{x_1, x_2 \in D_k} \|x_1 - x_2\|,$$

那么存在唯一一点  $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D_k$ .

Cantor 闭区域套定理的证明: 首先证明  $x$  的存在性, 即  $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \neq \emptyset$ .

由于每个  $E_k$  都是非空闭集, 于是可以取到点列  $x_k \in E_k$ . 由于对任意  $p \geq 1$ , 有  $E_{k+p} \subset E_k$ , 于是  $x_{k+p} \in E_{k+p} \subset E_k$ , 从而有  $d(x_k, x_{k+p}) \leq \text{diam } E_k$ , 这表明  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  是  $\mathbb{R}^n$  中的一个 Cauchy 列, 从而存在  $x \in \mathbb{R}^n$ , 使得  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ .

由于对任意  $p \geq 1$ , 有  $x_{k+p} \in E_k$ , 那么  $x$  是每个闭集  $E_k$  的聚点, 从而  $x \in \overline{E_k} = E_k$ , 即  $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ .

接下来证明  $x$  的唯一性. 假设存在另一点  $y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ , 则  $y \in E_k$ , 从而  $d(x, y) \leq \text{diam } E_k$

对所有  $k$  成立, 从而  $d(x, y) = 0$ , 即  $x = y$ .  $\square$

5. (12 分) 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  为数项级数, 令  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  为其通项的前  $n$  项和,  $\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k$  为数列  $\{s_n\}$  的前  $n$  项均值.

(1) 若数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 证明幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  的和函数在闭区间  $[0, 1]$  上有定义 (即幂级数在此区间上收敛) 且连续.

(2) 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = A \in \mathbb{R}, A \neq 0$ . 证明幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n \sigma_n x^n, \sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径都大于等于 1, 并证明等式  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n \sigma_n x^n$  在  $|x| < 1$  时恒成立.

(3) 利用  $(1-x)^{-1}$  在  $|x| < 1$  内的幂级数展开

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \dots$$

求函数  $\frac{1}{(1-x)^2}$  的幂级数展开, 并验证等式  $1 = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$  在  $|x| < 1$  时恒成立. 由此证明

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = A.$$

解答

(1) 由题设知幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  在  $x=1$  处收敛, 于是由幂级数的 Abel 第二定理知幂级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  在任意闭区间  $[a, b] \subset (-1, 1]$  上一致收敛, 特别地在  $[0, 1]$  上一致收敛, 从而和函数在  $[0, 1]$  上连续.

(2) 由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = A \in \mathbb{R}, A \neq 0$ , 所以当  $n$  充分大时有

$$\frac{|A|}{2} \leq |\sigma_n| \leq \frac{3|A|}{2},$$

由夹逼准则知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\sigma_n|} = 1$ . 另一方面, 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ , 于是

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n\sigma_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\sigma_n|} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

由 Cauchy-Hadamard 定理知, 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n\sigma_n x^n$  收敛半径等于 1.

由于  $\sum_{n=1}^{\infty} n\sigma_n x^n$  收敛半径等于 1, 所以任取  $|x| < 1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} n\sigma_n x^n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\sigma_{n-1} x^n = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\sigma_{n-1} x^{n-1}$  都收敛, 其中约定  $\sigma_0 = 0$ . 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n\sigma_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\sigma_{n-1} x^n = (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} n\sigma_n x^n$$

也收敛. 于是幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n$  的收敛半径  $r$  要满足  $r \geq |x|$ . 由于  $x$  是任取的满足  $|x| < 1$  的数, 因此有  $r \geq 1$ .

用类似的方法可以算得, 当  $|x| < 1$  时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n$$

收敛, 进而推出  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径要大于等于 1.

我们将当  $|x| < 1$  时证明成立的两式

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n = (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} n\sigma_n x^n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n.$$

综合起来, 便是  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n\sigma_n x^n$ .

(3) 由  $(1-x)^{-1}$  的幂级数展开

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots,$$

利用待定系数法

$$\begin{aligned} (1-x)^{-2} &= (1-x)^{-1} \cdot (1-x)^{-1} = (1+x+x^2+\cdots) \cdot (1+x+x^2+\cdots) \\ &= 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots, \end{aligned}$$

那么有  $a_n x^n = 1 \cdot x^n + x \cdot x^{n-1} + \cdots + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n$ , 故有  $(1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ ,

并且容易看出其收敛半径大于等于  $(1-x)^{-1}$  的收敛半径. 于是在  $|x| < 1$  的范围内, 有

$$1 = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

下面证明  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = A$ . 在  $|x| < 1$  的范围内有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - A &= (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n\sigma_n x^n - A \\ &= (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n\sigma_n x^n - A(1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \\ &= (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} x^n (n\sigma_n - (n+1)A) - (1-x)^2 A \\ &= (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} x^n n(\sigma_n - A) - (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} x^n A - (1-x)^2 A \end{aligned}$$

$$= (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} x^n n (\sigma_n - A) - (1-x)A - (1-x)^2 A$$

当  $x \rightarrow 1^-$  时, 上式后两项  $-(1-x)A$  与  $-(1-x)^2 A$  都趋于 0, 因此接下来只要证明

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} x^n n (\sigma_n - A) = 0 \text{ 即可.}$$

由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = A$ , 所以  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N$ , 使得对任意  $n > N$ , 有  $|\sigma_n - A| < \varepsilon/2$ . 令

$$M = \max_{1 \leq n \leq N} n |\sigma_n - A|,$$

对于  $0 < x < 1$ , 有

$$\begin{aligned} \left| (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} x^n n (\sigma_n - A) \right| &\leq (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} x^n n |\sigma_n - A| \\ &= (1-x)^2 \sum_{n=1}^N x^n n |\sigma_n - A| + (1-x)^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n n |\sigma_n - A| \\ &\leq (1-x)^2 \sum_{n=1}^N x^n M + (1-x)^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n n \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq M(1-x)^2 \sum_{n=1}^N x^n + \frac{\varepsilon}{2} (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n (n+1) \\ &= Mx(1-x)(1-x^N) + \frac{\varepsilon}{2} \leq M(1-x) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

对于取定的  $\varepsilon > 0$ , 进一步令  $1 - \frac{\varepsilon}{2M} < x < 1$ , 代入上式有

$$\left| (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} x^n n (\sigma_n - A) \right| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

这样就完成了  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} x^n n (\sigma_n - A) = 0$  的证明.

□