

数学分析 II 课程第二次期中考试试题解答

一、选择题：本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 对于定义在闭区间  $[a, b]$  上的函数，下面哪类函数有可能是黎曼不可积的 ( D )
- A. 连续函数 B. 有有限个间断点的有界函数
- C. 单调有界函数 D. 简单函数 (即值域是有限集的函数)

解答 D 的反例: 狄利克雷函数

□

2. 以下反常积分收敛的是 ( C )

A.  $\int_0^{+\infty} \sin x \, dx$  B.  $\int_0^{+\infty} |\sin x| \, dx$  C.  $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) \, dx$  D.  $\int_0^{+\infty} \sin^2 x \, dx$

解答 A, B, D 都可以通过在一个最小正周期上的积分值判断出不可积。

对于 C, 有

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) \, dx = \int_0^1 \sin(x^2) \, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}} \, du,$$

后者可以通过狄利克雷判别法知道是收敛的。

□

3. 以下的论断正确的是 ( D )

A. 若闭区间  $[a, b]$  上黎曼可积函数列  $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  点态收敛到  $[a, b]$  上黎曼可积函数  $f(x)$ , 但不是一致收敛, 则必然有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx \neq \int_a^b f(x) \, dx$

B. 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  收敛, 数列  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$  必定收敛

C. 设  $f(x), g(x)$  是定义在  $[0, +\infty)$  上的连续函数. 假设反常积分  $\int_0^{+\infty} f(x) \, dx$  收敛, 并且

有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ , 则反常积分  $\int_0^{+\infty} f(x)g(x) \, dx$  必定收敛

D. 以上说法都不对

解答 A 的反例: 任何一个一致有界的黎曼可积函数列  $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  都是反例.

B 的反例:  $x_n = (-1)^n \frac{1}{n+1}$ ;  $\alpha_n = (-1)^n \frac{1}{\ln^q(n+1)}$ ,  $0 < q \leq 1$ .

C 的反例:  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ;  $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin e}{x}, & 0 \leq x \leq e, \\ \frac{\sin x}{\ln^q x}, & x > e, \end{cases} \quad 0 < q \leq 1. \quad \square$

4. 设数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛,  $a_n \neq -1$ , 但  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  发散, 则以下说法正确的是 ( A )

A. 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n + a_n^2}$  必然收敛

B. 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  可能收敛也可能发散

C. 无穷乘积  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  可能收敛也可能发散

D. 无穷乘积  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n^2)$  可能收敛也可能发散

解答 由  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛知  $a_n \rightarrow 0$ . 于是当  $n$  充分大时,  $\frac{1}{n + a_n^2}$  是单调递减趋于 0 的, 于是由

A-D 判别法知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n + a_n^2}$  必然收敛.

由于  $a_n \rightarrow 0$ , 那么当  $n$  充分大时,  $|a_n| < 1$ , 从而有  $|a_n| > |a_n| \cdot |a_n| = a_n^2$ , 由正项级数的

比较判别法知  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  必然发散.

在  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛的前提下,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  与  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  敛散性相同, 故  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  必然是发散的.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  为正项级数, 它的敛散性与  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n^2)$  相同, 故  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n^2)$  必然是发散的. □

5. 设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  满足上极限  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = A$ ,  $0 < A < +\infty$ , 那么下面正确的论断是 ( B )

A.  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径必定等于  $\frac{1}{A}$

B.  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径可能大于  $\frac{1}{A}$ .

C.  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径可能小于  $\frac{1}{A}$ .

D. 以上说法都不对

解答 有不等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = A,$$

而收敛半径等于  $1/\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ , 因此而收敛半径大于  $\frac{1}{A}$ , 等于  $\frac{1}{A}$  都是可能的.

等于  $\frac{1}{A}$  的例子:  $a_n = \frac{1}{n}$ , 那么  $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ .

大于  $\frac{1}{A}$  的例子:  $a_n = \frac{3^n}{5^{n+(n \bmod 2)}}$ , 那么  $3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{3}{5}$ . □

## 二、填空题：本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。

1. 求柯西主值 (cpv)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x \, dx =$  发散 .

解答 极限  $\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{-c}^c \cos x \, dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} -2 \sin c$  不存在, 发散. □

2. 已知  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ , 那么  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx =$   $\frac{\pi}{2}$  .

解答 容易判断  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$  收敛. 由分部积分法有

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx &= - \int_0^{+\infty} \sin^2 x \, d\left(\frac{1}{x}\right) = - \frac{\sin^2 x}{x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin x \cos x}{x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{2x} d(2x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

□

3. 若正项级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^q n}$  收敛, 则实数  $q$  的取值范围为  $q > 1$  .

解答 直接由正项级数的积分判别法进行判断. □

4. 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 + (-1)^n)^n}{2^n + \sin nx} x^n$  的收敛半径等于  $\frac{2}{3}$  .

解答 记  $a_n = \frac{(2 + (-1)^n)^n}{2^n + \sin nx} > 0$ , 那么  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{3}{2}$ , 所以收敛半径等于  $\frac{2}{3}$ . □

5. 函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$  的收敛域为  $\mathbb{R}$  .

解答 由于  $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$  时有 (见 (下册) 课本例 9.4.2)

$$2 \sin \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx = \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2} x,$$

而  $\frac{1}{n} \searrow 0$ , 由狄利克雷判别法知收敛. 对于  $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ , 原级数每一项都是 0, 从而也是收敛的. □

## 三、计算题：本题共 2 小题，共 20 分。本题应写出具体演算步骤。

1. (10 分) 请计算椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $a > b > 0$ , 绕  $x$  轴旋转一周形成的椭球的表面积.

解答 用参数方程形式求解:  $\begin{cases} x(t) = a \sin t, \\ y(t) = b \cos t, \end{cases} t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , 那么表面积  $S$  有

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} b \cos t \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt \\ &= 2\pi ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt = \frac{2\pi ab}{k} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} d(k \sin t) \\ &= \frac{2\pi ab}{k} \int_{-k}^k \sqrt{1 - u^2} du = \frac{2\pi ab}{k} \left( u \sqrt{1 - u^2} + \arcsin u \right) \Big|_0^k \\ &= \frac{2\pi ab}{k} \left( k \sqrt{1 - k^2} + \arcsin k \right) \\ &= 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \end{aligned}$$

上式中的  $k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$  为离心率. □

2. (10 分) 求定积分  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + 2^x} dx$ . (提示: 将积分区间分为对称的两部分).

解答

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + 2^x} dx &= \int_{-\pi/2}^0 \frac{\cos x}{1 + 2^x} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + 2^x} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(-x)}{1 + 2^{-x}} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + 2^x} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{2^x \cos x}{1 + 2^x} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + 2^x} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{(1 + 2^x) \cos x}{1 + 2^x} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 1. \end{aligned}$$

□

**四、解答题：本题共 5 小题，共 50 分。解答应写出文字说明或者证明过程。**

1. (8 分) 设函数  $f(x)$  是  $[a, b]$  区间上的非负连续函数, 并且满足  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , 请证明  $f(x)$  在  $[a, b]$  上恒等于 0.

解答 本题是 (上册) 课本 §7.2 习题 5 的等价变形.

用反证法. 假设非负函数  $f(x)$  不恒等于 0, 即存在  $x_0 \in [a, b]$ , 使得  $f(x_0) > 0$ . 由  $f(x)$  的连续性知存在  $x_0$  在  $[a, b]$  中的非平凡闭邻域  $[c, d]$ , 满足  $x_0 \in [c, d] \subset [a, b]$ ,  $c < d$ , 且  $\forall x \in [c, d]$ , 有  $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$ . 于是

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_c^d f(x) dx \geq \int_c^d \frac{f(x_0)}{2} dx = \frac{f(x_0)}{2}(d - c) > 0,$$

这与已知条件  $\int_a^b f(x) dx = 0$  矛盾. □

2. (10 分) 设无穷乘积  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  收敛, 请问数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是否必收敛? 若是, 请证明这个结论; 若否, 请给出反例.

解答 不一定.

可以举 (下册) 课本 §9.5 习题 7 中的反例:

$$a_1 = 0, \quad a_{2n+1} = -\frac{1}{\sqrt{n}}, \quad a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

□

3. (10 分) 设函数  $S(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上连续, 且  $S(1) = 0$ . 请证明:  $\{x^n S(x)\}$  在  $[0, 1]$  上一致收敛.

解答 本题是 (下册) 课本 §10.1 习题 8

由于  $S(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上连续, 那么  $S(x)$  在  $[0, 1]$  上有界, 可以设  $M$  为  $|S(x)|$  的一个上界. 又由于  $S(1) = 0$ , 所以  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得  $\forall x \in (1 - \delta, 1]$  有  $|S(x)| < \varepsilon$ , 从而有

$$|x^n S(x)| \leq |S(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in (1 - \delta, 1], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

另一方面, 取  $N = \left\lceil \log_{1-\delta} \left( \frac{\varepsilon}{M} \right) + 1 \right\rceil$ , 那么在区间  $[0, 1 - \delta]$  上有

$$|x^n S(x)| \leq (1 - \delta)^n M < \varepsilon, \quad \forall x \in [0, 1 - \delta], \quad \forall n > N.$$

综上即有  $\forall n > N = \left\lceil \log_{1-\delta} \left( \frac{\varepsilon}{M} \right) + 1 \right\rceil, \forall x \in [0, 1]$  有  $|x^n S(x)| < \varepsilon$ , 这就证明了  $\{x^n S(x)\}$  在  $[0, 1]$  上一致收敛到常值函数 0. □

4. (10 分) 设  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n^3 + n}},$

- (1) 求证:  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续;

(2) 记  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ , 求证:  $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{15} < F\left(\frac{\pi}{2}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}.$

解答

本题是 (下册) 课本 §10.2 习题 12

- (1) 由于  $\left| \frac{\cos nx}{\sqrt{n^3 + n}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n^3 + n}} < n^{-3/2}$ , 而正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$  收敛, 所以由 Weierstraß

判别法知函数项级数  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n^3 + n}}$  一致收敛. 由一致收敛函数项级数的连续

性定理知, 和函数连续.

- (2) 由一致收敛函数项级数的逐项积分定理知

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{\sqrt{n^3 + n}} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\cos nt}{\sqrt{n^3 + n}} dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n\sqrt{n^3 + n}} \Big|_0^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n^3 + n}}, \end{aligned}$$

将  $x = \frac{\pi}{2}$  代入上式得

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n\sqrt{n^3 + n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\sqrt{(2k+1)^3 + (2k+1)}} =: \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

上述关于  $k$  的级数是 Leibniz 级数, 而且  $a_k$  是严格单调递减的, 所以

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) < a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) > a_0 - a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3 \cdot \sqrt{3^3 + 3}} > \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{15}.$$

□

5. (12 分) 考虑定义在  $\mathbb{R}$  上的函数  $\varphi(x) = d(x, \mathbb{Z}) = \min_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|$ .  $\varphi(x)$  是周期为 1 的函数,

在  $[0, 1)$  区间上的定义为

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1/2, \\ 1 - x, & 1/2 \leq x < 1. \end{cases}$$

定义 Generalized Van der Waerden-Takagi 函数为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \varphi(b^n x),$$

其中  $a, b \in \mathbb{R}$  为常数.

(1) 若  $0 < a < 1$ , 请证明:  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续.

(2) 设  $g(x)$  为定义在  $\mathbb{R}$  上任一函数, 请证明: 若  $g(x)$  在某点  $x_0$  处可导, 导数值等于  $A$ , 那么对于任意的序列  $u_n, v_n$ , 若满足  $u_n \leq x_0 \leq v_n$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = x_0$ , 那么必有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(u_n) - g(v_n)}{u_n - v_n} = A.$$

(3) 若  $0 < a < 1, b \in 2\mathbb{N}$  为正偶数, 且满足  $ab \geq 1$ , 请证明:  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  中任意点处都不可导.

解答

(1) 由于  $0 \leq \varphi(x) \leq 1/2$ , 所以  $0 \leq a^n \varphi(b^n x) \leq a^n/2$ . 由于正项级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$  收敛, 于是

由 Weierstraß 判别法, 函数项级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a^n \varphi(b^n x)$  一致收敛. 进一步由一致收敛函数项级数和函数的连续性定理知, 和函数  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续.

(2) 记  $h_{1,n} = x_0 - u_n, h_{2,n} = v_n - x_0$ , 那么  $h_{1,n}, h_{2,n} \geq 0$  且  $h_{1,n} \rightarrow 0, h_{2,n} \rightarrow 0$ . 由于  $g(x)$  在点  $x_0$  处可导, 所以在  $x_0$  附近有

$$g(x) = g(x_0) + A(x - x_0) + o(|x - x_0|),$$

那么

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(u_n) - g(v_n)}{u_n - v_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(h_{1,n} + h_{2,n}) + o(h_{1,n}) + o(h_{1,n})}{h_{1,n} + h_{2,n}} \\ &= A + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{o(h_{1,n}) + o(h_{1,n})}{h_{1,n} + h_{2,n}} \\ &= A + 0 = A. \end{aligned}$$

(3) 由于  $\varphi(x)$  是周期为 1 的函数, 所以  $f$  也以 1 为周期, 所以只要对任意  $x \in [0, 1]$  证明  $f$  在  $x$  处不可导即可. 由第 (2) 问, 希望可以选取序列  $u_n \rightarrow x \leftarrow v_n$ , 使得

$$\frac{f(u_n) - f(v_n)}{u_n - v_n} = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} a^m (\varphi(b^m u_n) - \varphi(b^m v_n))}{u_n - v_n}$$

发散. 由于  $2b^n x$  是非负实数, 所以存在非负整数  $k_n$ , 使得  $k_n \leq 2b^n x < k_n + 1$ , 即

$$\frac{k_n}{2b^n} \leq x < \frac{k_n + 1}{2b^n}.$$

取  $u_n = \frac{k_n}{2b^n}, v_n = \frac{k_n + 1}{2b^n}$ . 对于和式  $\sum_{m=0}^{\infty} a^m (\varphi(b^m u_n) - \varphi(b^m v_n))$ , 分为两部分讨论:

1° 当  $0 \leq m < n$  时, 由于

$$b^m u_n = \frac{k_n}{2} \cdot \frac{1}{b^{n-m}}, \quad b^m v_n = \frac{k_n + 1}{2} \cdot \frac{1}{b^{n-m}},$$

从而存在非负整数  $z \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , 使得  $b^m u_n, b^m v_n$  同时属于  $[z, z + 1/2]$  或  $[z + 1/2, z + 1]$ , 那么

$$\varphi(b^m u_n) - \varphi(b^m v_n) = \pm(b^m u_n - b^m v_n) = \pm \frac{1}{2b^{n-m}},$$

从而有

$$\frac{a^m (\varphi(b^m u_n) - \varphi(b^m v_n))}{u_n - v_n} = \pm a^m \frac{1}{2b^{n-m}} \bigg/ \left( \frac{1}{2b^n} \right) = \pm (ab)^m.$$

2° 当  $m \geq n$  时, 有

$$b^m u_n = \frac{b^{m-n} \cdot k_n}{2}, \quad b^m v_n = \frac{b^{m-n} \cdot (k_n + 1)}{2}.$$

由于  $b$  为偶数, 若  $m > n$ , 则  $b^m u_n, b^m v_n$  都是整数; 若  $m = n$ , 则  $b^m u_n = \frac{k_n}{2}, b^m v_n = \frac{k_n + 1}{2}$  其中一个为整数, 另一个为半整数 (即  $\frac{1}{2} + \text{整数}$ ). 于是

$$\frac{a^m (\varphi(b^m u_n) - \varphi(b^m v_n))}{u_n - v_n} = \begin{cases} 0, & \text{当 } m > n \text{ 时,} \\ \pm \frac{a^m/2}{1/(2b^m)} = \pm (ab)^m, & \text{当 } m = n \text{ 时.} \end{cases}$$

于是

$$\frac{f(u_n) - f(v_n)}{u_n - v_n} = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} a^m (\varphi(b^m u_n) - \varphi(b^m v_n))}{u_n - v_n} = \sum_{m=1}^n (\pm (ab)^m).$$

由于  $ab \geq 1$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n (\pm (ab)^m) = \sum_{m=1}^{\infty} (\pm (ab)^m)$  发散.

□