中国农业大学

2024~2025 学年春季学期

数学分析 II 课程考试试题解答

一、选择题：本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 以下集合是紧集的是 (A)

A. $\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n\ :\ |x_1|+\cdots+|x_n|=1\}$

B. $\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n\ :\ x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]\}$

C. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[n,n+1/2]$

D. $\left\{\dfrac{1}{n}\ :\ n\in\mathbb{N}_+\right\}$

解答 A 是 1-范数下的单位球面, 是有界闭集, 从而是紧集. 它是闭集是因为

$$\|\cdot\|_1:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ (x_1,\cdots,x_n)\mapsto|x_1|+\cdots+|x_n|$$

是连续函数, 单位球面正好是闭集 $\{1\}$ 的原像, 从而是闭集.

B 是有界集, 但不是闭集, 例如 $(\sqrt{2}/2,0,\cdots,0)$ 是这个集合的一个极限点, 但不属于这个集合.

C 虽然是闭集, 但不是有界集.

D 不是闭集, 因为 0 是它的极限点, 但不在该集合内. □

2. 以下是道路连通集的是 (D)

A. $\{(0,y)\ :\ -1\leqslant y\leqslant 1\}\cup\{(x,\sin(1/x))\ :\ 0<x<1\}$

B. n 可逆阶实系数方阵全体 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})=\{A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})\ :\ \det A\neq 0\}$

C. n 阶实系数正交方阵全体 $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})=\{A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})\ :\ A^TA=AA^T=I_n\}$

D. 行列式等于 1 的 n 阶实系数方阵全体 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})=\{A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})\ :\ \det A=1\}$

解答 A 是拓扑意义下连通但不是道路连通的集合

B, C 不是道路连通集原因类似, 因为 det 是连续函数, 而 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 与 $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 中方阵的行列式有的是正的有的是负的. □

3. 以下说法正确的是 (B)

A. 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空点集, $x\in\mathbb{R}^n$ 为一点, 若存在点列 (序列) $x_n\in E, n=1,2,\cdots$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, 则 x 是集合 E 的聚点.

B. 设 f 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上取值在 $\mathbb{R}^m$ 中的连续向量值函数, E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空有界闭集, 那么 E 在 f 下的像集 $f(E)$ 必然是 $\mathbb{R}^m$ 中的闭集.

C. 设 f 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上取值在 $\mathbb{R}^m$ 中的连续向量值函数, E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空有界开集, 那么 E 在 f 下的像集 $f(E)$ 必然是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集.

D. 设数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 满足 $|a_n|>|b_n|,\ \forall n\in\mathbb{N}_+$, 那么若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 必然也收敛.

解答 A 还需要进一步要求 $x_n\neq x$, 排除孤立点的情况.

C 中的映射是所谓的开映射, 不一定连续; 连续的映射也不一定是开映射.

D 的反例可以取 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为任何一个通项非零的条件收敛级数, 例如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$, 再取 $b_n=\dfrac{1}{2}|a_n|$, 那么 $|a_n|>|b_n|,\ \forall n\in\mathbb{N}_+$, 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散.

B 正确的原因: $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集是紧集, 紧集在连续映射下的像是紧集. $\mathbb{R}^m$ 中的紧集都是有界闭集. □

4. 设 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是定义在 $[0,1]$ 区间上的黎曼可积函数列, 并且有公共的界, 即存在正实数 M, 使得 $|f_n(x)|\leqslant M$ 对任意的 $n\in\mathbb{N}$, 以及任意的 $x\in[0,1]$ 都成立. 若 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的极限函数存在 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$, 那么以下说法正确的是 (D)

A. 若积分值序列的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x$ 也存在, 则极限函数 $f(x)$ 必然黎曼可积

B. 若积分值序列的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x$ 也存在, 则 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 必然一致收敛到 $f(x)$

C. 若极限函数 $f(x)$ 黎曼可积, 则 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 必然一致收敛到 $f(x)$

D. 若极限函数 $f(x)$ 黎曼可积, 则积分值序列的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x$ 也必存在, 并且有 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$

解答 A 的反例: 令 $\mathbb{Q}\cap[0,1]=\{r_1,r_2,\cdots\}$, 定义 $f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in\{r_1,r_2,\cdots,r_n\},\\ 0, & \text{其余情况}.\end{cases}$ 那么

$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 其极限等于 0, 但 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的极限函数为狄利克雷函数, 不是黎曼可积的.

B 的反例同上. 容易看到对任意 $n \in \mathbb{N}$, 总存在 x, 例如 r_{n+1}, 使得 $f_n(x) = 0$, 而 $f(x) = 1$, 所以 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 不是一致收敛到 $f(x)$ 的.

C 的反例: $f_n(x) = x^n$, 极限函数为 $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$ $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 不是一致收敛到 $f(x)$ 的.

D 是黎曼可积函数空间的有界收敛定理. □

5. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径是 R, $0 < R < +\infty$, 那么下面正确的论断是 （ C ）

A. 极限 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ 必然存在且等于 $\frac{1}{R}$

B. 极限 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 必然存在且等于 $\frac{1}{R}$

C. 极限 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 可能不存在, 若极限存在则必等于 $\frac{1}{R}$

D. 以上说法都不对

解答 有不等式

$$A = \varliminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,$$

而收敛半径等于 $1/\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, 因此相关极限的存在性都不是必然的, 但是极限若存在的话, 必然都会等于 $1/R$. □

二、填空题: 本题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分。

1. 柯西主值积分 (cpv) $\int_{-1}^{1} \frac{2}{2x-1}\mathrm{d}x = \underline{-\ln 3}$.

解答 奇点在 $x = \frac{1}{2}$, 积分分为两部分:

$$\int_{-1}^{1/2-\varepsilon} \frac{2}{2x-1}\mathrm{d}x = \ln(1-2x)\Big|_{-1}^{1/2-\varepsilon} = \ln(2\varepsilon) - \ln 3,$$

$$\int_{1/2+\varepsilon}^{1} \frac{2}{2x-1}\mathrm{d}x = \ln(2x-1)\Big|_{1/2+\varepsilon}^{1} = -\ln(2\varepsilon),$$

相加, 取极限 $\varepsilon \to 0+$, 得 $-\ln 3$. □

2. 设 $a > 0$ 为常数, 那么星形线 $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ 的长度等于 $\underline{6a}$.

解答 由对称性, 可只计算 $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ 对应的弧长, 整个曲线的长度等于 4 倍的此弧长. 接下来可以直接利用公式

$$\ell = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,\mathrm{d}t$$

进行计算. □

3. 积分 $\int_{-\pi}^{3\pi} \cos(2025x)\cos(2024x)\,\mathrm{d}x = \underline{0}$.

解答 $\cos nx, n = 0, 1, 2, \cdots; \sin mx, m = 1, 2, \cdots$ 在任何一个长度为 2π 的区间 $[a, b]$ 上构成一个关于 $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 正交函数系. 这里的积分区间长度 4π 正好是 2π 的 2 倍. □

4. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n \ln n}{n}(x-1)^n$ 的收敛域为 $\underline{\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]}$.

解答 收敛半径 $R = 1\Bigg/\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-2)^n \ln n}{n}\right|} = \frac{1}{2}$. 在端点 $x - 1 = \frac{1}{2}$ 处, 为 Leibniz 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ 收敛; 在端点 $x - 1 = -\frac{1}{2}$ 处为发散的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$. □

5. 设 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为斐波那契数列, 即满足 $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, 那么正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \underline{\frac{3}{5}}$.

解答 容易看出 $a_n < 2^n$, 那么可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ 收敛, 设该值为 A, 那么

$$3A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{3^n} + a_1$$

$$9A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^{n-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+2}}{3^n} + a_2 + 3a_1,$$

于是有 $A + (3A - a_1) = 9A - a_2 - 3a_1$, 解得 $A = \frac{3}{5}$. □

三、计算题：本题共 2 小题, 共 20 分。本题应写出具体演算步骤。

1.（10 分）考虑二元函数 $f(x,y)=x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}$, 问二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 以及二次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)$ 是否分别存在? 若存在, 求出相应的值; 若不存在, 说明原因.

解答 二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 存在: 由于

$$\left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|\cdot\left|\sin\frac{1}{y}\right|+|y|\cdot\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|+|y|\leqslant\sqrt{2(x^2+y^2)}$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

二次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)$ 不存在: 对固定的 $x\neq 0$, 极限 $\lim\limits_{y\to 0}x\sin\frac{1}{y}$ 不存在, 极限 $\lim\limits_{y\to 0}y\sin\frac{1}{x}=0$, 所以极限 $\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)$ 不存在, 进而二次极限不存在. □

2.（10 分）设 $n\in\mathbb{N}_+$ 为正整数, 请计算定积分 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin(nx)}{\sin x}\right)^2\mathrm{d}x$. (提示: 先计算 $I_{n+1}-I_n$.)

解答 容易算出

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin(2x)}{\sin x}\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2(1-\sin(2x))\mathrm{d}x=\pi.$$

对一般情况, 有

$$\begin{aligned}I_{n+1}-I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2((n+1)x)-\sin^2(nx)}{\sin^2x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2nx)-\cos(2(n+1)x)}{2\sin^2x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x(\sin(2n+1)x)}{\sin^2x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}\mathrm{d}x=:J_n.\end{aligned}$$

对于 J_n 有

$$\begin{aligned}J_{n+1}-J_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin((2n+3)x)-\sin((2n+1)x)}{\sin x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos(2(n+1)x)\sin x}{\sin x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos(2(n+1)x)\,\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

于是 $J_n=J_1=I_2-I_1=\frac{\pi}{2}$. 即有 $I_{n+1}-I_n=J_n=\frac{\pi}{2}$, 所以

$$I_n=I_1+\frac{\pi}{2}(n-1)=\frac{n\pi}{2}.$$

□

四、解答题：本题共 5 小题, 共 50 分。解答应写出文字说明或者证明过程。注意，若一道题分为多个小问，则该题前面小问的结论可以用于后面的小问，但反过来不行。

1.（8 分）设 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为一实数列, 请证明 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-x_n)=-\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n$.

解答

记

$$E_-=\{-\infty\leqslant\xi\leqslant+\infty\ :\ \xi\text{ 为 }\{-x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\text{ 的极限点}\},$$

$$E_+=\{-\infty\leqslant\eta\leqslant+\infty\ :\ \eta\text{ 为 }\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\text{ 的极限点}\}$$

那么 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-x_n)=\max E_-$. 这里, 若 $+\infty\in E_-$, 则约定 $\max E_-=+\infty$. 任取 $\xi\in E_-$, 存在子列 $\{-x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}(-x_{n_k})=\xi$, 那么 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=-\xi$, 故 $-\xi$ 是 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的极限点, 即 $-\xi\in E_+$. 类似地可以从 $\eta\in E_+$ 推出 $-\eta\in E_-$. 于是

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n)&=\max E_-=\max\{-\eta\ :\ \eta\in E_+\}=-\min\{\eta\ :\ \eta\in E_+\}\\&=-\min E_+=-\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n.\end{aligned}$$

□

2.（10 分）设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处无穷次可微, 请问是否必然存在 x_0 的某个邻域 $O(x_0,\rho)=(x_0-\rho,x_0+\rho)$, $\rho>0$, 使得 $f(x)$ 在 $O(x_0,\rho)$ 上可以展开成幂级数? 若是, 请给出证明; 若否, 请举反例并简要说明该反例不能展开成幂级数的原因.

解答 不是.

反例可以举 (不限于) $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

原因: 通过计算可得 $f(x)$ 在 0 点的各阶导数 $f^{(n)}(0)=0$, 那么若 $f(x)$ 在 0 的某个邻域 $O(0,\rho)$ 有幂级数展开, 则该幂级数恒等于 0, 但 $f(x)$ 在 0 的任何邻域内都不恒等于 0. □

3.（10 分）设 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空点集, 定义点 x 到集合 E 的距离为

$$\rho(x,E)=\inf_{y\in E}\|x-y\|,$$

其中 $\|x-y\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$.

（1）设 F 为 $\mathbb{R}^n$ 中的非空闭集, 证明存在点 $y_0\in F$, 使得 $\rho(x,F)=\|x-y_0\|$.

（2）设 F_1,F_2 为 $\mathbb{R}^n$ 中两个不交的非空闭集, 请构造一个 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $f(x)$, 同时满足以下两个条件

（a）$0\leqslant f(x)\leqslant 1$, $\forall\, x\in\mathbb{R}^n$;

（b）$f(x)$ 在 F_1 上取值恒等于 0, 在 F_2 上取值恒等于 1.

解答

（1）若 $x\in F$, 则取 $y_0=x$ 即可. 下设 $x\notin F$.

取闭球 $\overline{B}=\overline{B}(x,\delta)$ 使得 $\overline{B}\cap F\neq\emptyset$. 这样的 $\delta>0$ 总是可以取到的. 这是因为 F 是非空集合, 可以任取其中一点 $y\in F$, 并令 $\delta=\|x-y\|>0$. 容易看出

$$\rho(x,y)\geqslant\delta,\quad \forall y\in F\setminus\overline{B},$$

$$\rho(x,y)\leqslant\delta,\quad \forall y\in F\cap\overline{B}.$$

$\overline{B}\cap F$ 是有界闭集, 从而是紧集, 关于 x 的连续函数 $\rho(x,F)$ 在其上能取到最小值, 即存在 $y_0\in F$, 使得 $\rho(x,F)=\rho(x,F\cap\overline{B})=\|x-y_0\|$.

证法二: 由下确界定义, 可以取到 F 中点列 $\{y_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x,y_n)=\rho(x,F)$. 这可以说明 $\{y_n\}$ 是有界点列, 从而存在收敛子列, 而 F 是闭集, 该收敛子列收敛到 F 中的某点, y_0 即取为该点.

（2）由于 F_1,F_2 为 $\mathbb{R}^n$ 中两个不交的非空闭集, 那么 $\forall\,x\in\mathbb{R}^n$, $\rho(x,F_1),\rho(x,F_2)$ 不同时为 0, 否则根据第 (1) 问, 存在 $y_1\in F_1, y_2\in F_2$, 使得

$$0=\|x-y_1\|=\|x-y_2\|,$$

那么会有 $x=y_1$ 以及 $x=y_2$, 于是 $x\in F_1\cap F_2$, 这与 F_1,F_2 不交的已知条件矛盾.

定义 $\mathbb{R}^n$ 上的函数

$$f(x)=\frac{\rho(x,F_1)}{\rho(x,F_1)+\rho(x,F_2)},\quad x\in\mathbb{R}^n$$

由于 $\rho(x,F_1),\rho(x,F_2)$ 都是关于 x 的连续非负函数, 且分母恒大于 0, 因此 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数. 由于

$$0\leqslant\rho(x,F_1)\leqslant\rho(x,F_1)+\rho(x,F_2),$$

因此 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$, $\forall\,x\in\mathbb{R}^n$.

对于 $x\in F_1$, 有 $\rho(x,F_1)=0$, 从而有

$$f(x)=\frac{\rho(x,F_1)}{\rho(x,F_1)+\rho(x,F_2)}=\frac{0}{0+\rho(x,F_2)}=0;$$

对于 $x\in F_2$, 有 $\rho(x,F_2)=0$, 从而有

$$f(x)=\frac{\rho(x,F_1)}{\rho(x,F_1)+\rho(x,F_2)}=\frac{\rho(x,F_1)}{\rho(x,F_1)+0}=1.$$

□

4.（10 分）设 $a>0,b>0$ 为常数, $f(x)$ 为定义在 $[0,+\infty)$ 上的连续函数, 并且当 $x\to+\infty$ 时有极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=c_\infty\in\mathbb{R}$. 记 $c_0=f(0)$.

（1）请证明: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=(c_0-c_\infty)\ln\frac{b}{a}$.

（2）计算反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln\frac{1+2e^{-ax}}{1+2e^{-bx}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 的值.

解答

（1）依定义, 反常积分

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x&=\lim_{\substack{\delta\to0+\\A\to+\infty}}\int_\delta^A\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x\\&=\lim_{\substack{\delta\to0+\\A\to+\infty}}\left(\int_\delta^A\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x-\int_\delta^A\frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x\right)\\&=\lim_{\substack{\delta\to0+\\A\to+\infty}}\left(\int_{a\delta}^{aA}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-\int_{b\delta}^{bA}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\right)\\&=\lim_{\substack{\delta\to0+\\A\to+\infty}}\left(\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-\int_{aA}^{bA}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

$$= \lim_{\delta\to 0+}\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t - \lim_{A\to+\infty}\int_{aA}^{bA}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

由于 $\frac{1}{t}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒正, 且 $f(x)$ 连续, 由积分第一中值定理, 存在落在以 $a\delta, b\delta$ 为端点的闭区间中的某点 ξ, 使得

$$\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = f(\xi)\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{1}{t}\mathrm{d}t = f(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$

类似地, 存在落在以 aA, bA 为端点的闭区间中的某点 η, 使得

$$\int_{aA}^{bA}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = f(\eta)\int_{aA}^{bA}\frac{1}{t}\mathrm{d}t = f(\eta)\ln\frac{b}{a}.$$

当 $\delta\to 0+$, 有 $\xi\to 0+$, 因此由 $f(x)$ 的连续性有

$$\lim_{\delta\to 0+}\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = \lim_{\delta\to 0+} f(\xi)\ln\frac{b}{a} = f(0)\ln\frac{b}{a} = c_0\ln\frac{b}{a}.$$

当 $A\to+\infty$, 有 $\eta\to+\infty$, 因此有

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{aA}^{bA}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} f(\eta)\ln\frac{b}{a} = c_\infty\ln\frac{b}{a}.$$

综上有

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x == \lim_{\delta\to 0+}\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t - \lim_{A\to+\infty}\int_{aA}^{bA}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = (c_0 - c_\infty)\ln\frac{b}{a}.$$

（2） 对于反常积分 $\int_0^{+\infty}\ln\frac{1+2e^{-ax}}{1+2e^{-bx}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}$, 令 $f(x)=\ln(1+2e^{-x})$, 由第 (1) 小问结论有

$$\int_0^{+\infty}\ln\frac{1+2e^{-ax}}{1+2e^{-bx}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x} = (f(0) - \lim_{x\to+\infty} f(x))\cdot\ln\frac{b}{a} = (\ln 3 - \ln 1)\cdot\ln\frac{b}{a}$$
$$= \ln 3\cdot\ln\frac{b}{a}.$$

□

5.（12 分）设 $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是通项恒不为零的数列, 满足 $\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{q_n-q_{n-1}}\cdot\frac{p_n-p_{n-1}}{p_n} = c$, $c\in\mathbb{R}$.

（1） 假设数列 $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 单调递增且 $\lim_{n\to\infty} q_n = +\infty$, 请证明: 对任意数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 若极限 $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{p_n}\sum_{k=1}^{n} p_k a_k = B$ 存在, 那么极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k a_k$ 也必存在, 且等于 Bc. (提示: 由 $b_n = \frac{1}{p_n}\sum_{k=1}^{n} p_k a_k$ 反推 a_n 的表达式, 并代入 $\frac{1}{q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k a_k$ 中进行分析.)

（2） 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 单调递增且 $\lim_{n\to\infty} q_n = +\infty$, 证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k a_k = 0$.

（3） 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 并且 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 单调递减, 证明 $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$.

（4） 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 并且 $\{n a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 单调递减, 证明 $\lim_{n\to\infty} n a_n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 0$, 并由此进一步证明 $\lim_{n\to\infty}(n\ln n)a_n = 0$.

解答

（1） 约定 $b_0 = 0$, 对 $b_n = \frac{1}{p_n}\sum_{k=1}^{n} p_k a_k$ 变形可得

$$a_n = \frac{b_n p_n - b_{n-1}p_{n-1}}{p_n} = b_n - b_{n-1} + b_{n-1}\frac{p_n - p_{n-1}}{p_n},$$

进一步可得

$$\frac{1}{q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k a_k = \frac{1}{q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k(b_k - b_{k-1}) + \frac{1}{q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k b_{k-1}\frac{p_k - p_{k-1}}{p_k}$$

对于第一项 $\frac{1}{q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k(b_k - b_{k-1})$, (由 Abel 变换) 有

$$\frac{1}{q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k(b_k - b_{k-1}) = \frac{1}{q_n}\left(\sum_{k=1}^{n} q_k b_k - \sum_{k=1}^{n} q_k b_{k-1}\right) = \frac{1}{q_n}\left(\sum_{k=1}^{n} q_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} q_{k+1} b_k\right)$$
$$= \frac{1}{q_n}\left(q_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1}(q_k - q_{k+1})b_k\right) = b_n + \frac{1}{q_n}\sum_{k=1}^{n-1}(q_k - q_{k+1})b_k,$$

于是由 Stolz 定理有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q_n}\sum_{k=1}^{n-1} q_k(b_k - b_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{q_n}\sum_{k=1}^{n-1}(q_k - q_{k+1})b_k$$

$$
\begin{aligned}
&= B + \lim_{n\to\infty} \frac{(q_{n-1}-q_n)b_{n-1}}{q_n - q_{n-1}} \\
&= B - \lim_{n\to\infty} b_{n-1} = B - B \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

对于第二项 $\frac{1}{q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k b_{k-1}\frac{p_k - p_{k-1}}{p_k}$ 利用 Stolz 定理有

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k b_{k-1}\frac{p_k - p_{k-1}}{p_k} &= \lim_{n\to\infty} \frac{q_n b_{n-1}\frac{p_n - p_{n-1}}{p_n}}{q_n - q_{n-1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} b_{n-1}\frac{q_n(p_n - p_{n-1})}{p_n(q_n - q_{n-1})} \\
&= Bc.
\end{aligned}
$$

综合可得

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k a_k = Bc.
$$

（2） 取 $p_n = 1$ 为常数列, 那么

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{q_n - q_{n-1}} \cdot \frac{p_n - p_{n-1}}{p_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{q_n - q_{n-1}} \cdot \frac{0}{1} = 0,
$$

并且

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{p_n}\sum_{k=1}^{n} p_k a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{收敛},
$$

于是由第 (1) 问的结论知

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k a_k = \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot 0 = 0.
$$

（3） 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 并且 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 单调递减, 容易证明 $a_n > 0$ 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; 或者存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall\, n > N$, $a_n = 0$. 后一种情况平凡, 于是以下假设 $a_n > 0$. 那么可以取 $q_n = \frac{1}{a_n}$, 则 $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 单调递增且 $\lim_{n\to\infty} q_n = +\infty$, 由第 (2) 问可知

$$
0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k a_k = \lim_{n\to\infty} a_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \cdot a_k = \lim_{n\to\infty} n a_n.
$$

（4） 首先, 必然有 $a_n > 0$, 或者存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall\, n > N$, $a_n = 0$; 否则, 若 $a_{n_0} < 0$, 则由 $\{n a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 单调递减知 $\forall\, n > n_0$, $a_n \leqslant \frac{n_0 a_{n_0}}{n}$, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必然发散. 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall\, n > N$, $a_n = 0$ 的情况平凡, 以下都假设 $a_n > 0$, 于是取 $q_n = \frac{1}{n a_n}$, 由第 (2) 问知

$$
0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k a_k = \lim_{n\to\infty} n a_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k a_k} \cdot a_k = \lim_{n\to\infty} n a_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.
$$

由于 $\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) = \gamma$ 极限存在, 所以

$$
\lim_{n\to\infty} (n \ln n) a_n = \lim_{n\to\infty} n a_n \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} + \gamma\right) = \lim_{n\to\infty} n a_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \gamma \lim_{n\to\infty} n a_n = 0 + 0 = 0.
$$

□