中国农业大学

2023~2024 学年春季学期

数学分析 II 课程第二次期中考试试题

一、选择题：本题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 以下说法正确的是 （ D ）

A. 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛当且仅当数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 都收敛.

B. 若数列 a_n 满足 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 必定收敛.

C. 若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u_n(x)}{\mathrm{d}x}$ 在开区间 (a,b) 上都点态收敛, 但不一致收敛, 那么必有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u_n(x)}{\mathrm{d}x}$ 对所有 $x \in (a,b)$ 都成立.

D. 若函数列 $\{S_n(x)\}$ 在开区间 (a,b) 上内闭一致收敛于函数 $S(x)$, 并且每一项 $S_n(x)$ 都是 (a,b) 上的连续函数, 那么 $S(x)$ 也必定是 (a,b) 上的连续函数.

解答 A. 的反例: $a_n = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{k}}, & n = 2k-1, \\ \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right), & n = 2k \end{cases}$ A. 的正确提法是: 在 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的前提下, 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

B. 的反例 $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{n^{1/3}}$. 若 a_n 还有单调性, 则 B. 的命题正确.

C. 的反例 $S_n(x) = \frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2)$, 并约定 $S_0(x) = 0$. 令 $u_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$. 那么 $\{S_n(x)\}$ 与 $\left\{\frac{\mathrm{d}u_n(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{nx}{1+n^2x^2}\right\}$ 在 $[0,1]$ 上都点态收敛于常值函数 $f(x) = 0$, 并且都不是一致收敛, 但仍有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to\infty} S_n\right) = 0 = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}S_n(x)}{\mathrm{d}x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u_n(x)}{\mathrm{d}x}.$$

□

2. 反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x =$ （ A ）

A. 发散　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. 0　　D. -1

解答 由 Dirichlet 判别法知 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛, 同时又有

$$\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x \geqslant \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x \geqslant \int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x$$
$$= \int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}\mathrm{d}x - \int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x$$

由于 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}\mathrm{d}x$ 发散, 故 $\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$ 发散 □

3. 设幂级数 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 满足 $0 < R < +\infty$. 下列关于函数项级数 $\sigma(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ 说法错误的是 （ C ）

A. $\sigma(x)$ 的收敛半径也是 R.

B. $\sigma(x)$ 的收敛域可能真包含于 $S(x)$ 的收敛域.

C. $S(x)$ 的收敛域可能真包含于 $\sigma(x)$ 的收敛域.

D. $S(x)$ 在区间 $(-R,R)$ 上可导, 且有 $S'(x) = \sigma(x)$.

解答 见幂级数的逐项可导性定理. 若在一点 $x \neq 0$ 处 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ 收敛, 那么由 Dirichlet 判别法, 通项为

$$a_n x^n = x \cdot \left(\frac{1}{n}\cdot n a_n x^{n-1}\right)$$

的级数也是收敛的. 反之不一定成立, 例如 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$ 的收敛域为 $[-1,1)$, 而 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot\frac{1}{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 的收敛域为 $(-1,1)$, □

4. 设 $f(x)$ 是闭区间 $[0,1]$ 上恒正的 Riemann 可积函数, 则以下定义在 $[0,1]$ 区间上的函数中, 必然也是 Riemann 可积函数的是 （ A ）

A. $e^{f(x)}$　　B. $\ln f(x)$

C. $\frac{1}{f(x)}$　　D. $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ 是有理数}, \\ f^2(x), & x \text{ 是无理数}, \end{cases}$

解答 B. C. 都可能是无界函数, 例如 $f(x) = \begin{cases} 1/x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

D. 可取反例 $f(x) = -1$, 则 $F(x) = \begin{cases} -1, & x \text{ 是有理数}, \\ 1, & x \text{ 是无理数}, \end{cases}$ □

5. 设数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 发散, 则以下说法正确的是 （ D ）

A. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径必小于 1.

B. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域必包含于开区间 $(-1, 1)$.

C. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $r > 0$, 则左极限 $\lim_{x \to r-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 必发散.

D. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $r > 0$, 则 $\forall\, x \in (-r, r)$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 必绝对收敛.

解答 A. B. 的反例可取为 $a_n = \frac{1}{n}$, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ 的收敛半径等于 1, 收敛域为 $[-1, 1)$.

C. 的反例可取为 $a_n = (-1)^n$, 那么幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$ 的收敛半径等于 1, 而 $\lim_{x \to r-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{x \to r-} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$.

D. 就是幂级数的 Cauchy-Hadamard 定理. □

二、填空题：本题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分.

1. 求极限 $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right) = \underline{\frac{2}{\pi}}$.

解答 极限 $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right) = \int_0^1 \sin \pi x \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}$ □

2. 求定积分 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2023x) \cdot \sin(2024x) \mathrm{d}x = \underline{0}$.

解答 $\cos nx, n = 0, 1, 2, \cdots; \sin mx, m = 1, 2, \cdots$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上构成一个关于 $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} fg(x) \mathrm{d}x$ 正交函数系. □

3. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3 + 2 \cdot (-1)^n)^n}{n^2 + 1} (x-2)^n$ 的收敛域为 $\underline{\left[\frac{9}{5}, \frac{11}{5}\right]}$.

解答 记 $a_n = \frac{(3 + 2 \cdot (-1)^n)^n}{n^2 + 1}$, 直接利用 Cauchy-Hadamard 定理:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n \to \infty}} (3 + 2 \cdot (-1)^n) \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2 + 1}} = 5,$$

于是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3 + 2 \cdot (-1)^n)^n}{n^2 + 1} (x-2)^n$ 的收敛半径为 $\frac{1}{5}$. 在边界上, 由于

$$|a_n (\pm R)^n| = \left| \frac{(3 + 2 \cdot (-1)^n)^n}{(\pm 5)^n} \cdot \frac{1}{n^2 + 1} \right| \leqslant \frac{1}{n^2 + 1},$$

由比较判别法知幂级数在收敛域边界上都是绝对收敛的, 故收敛域等于 $\left[2 - \frac{1}{5}, 2 + \frac{1}{5}\right] = \left[\frac{9}{5}, \frac{11}{5}\right]$ □

4. 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$ 的收敛域为 $\underline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}}$.

解答 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$ 收敛的充要条件为 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{n^2}\right) = -x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛. 这对于任意固定的 x 都是成立的, 但是要排除无穷乘积某些通项取 0 从而发散到 0 的情况, 这对应了 $x \in \mathbb{Z}$ 的情况. 所以收敛域为 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. □

5. 已知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$, 求 Cauchy 主值积分 (cpv) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \underline{\pi}$.

解答 (cpv) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \lim_{A \to +\infty} 2 \int_0^A \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \pi$. 注意, 这题普通的反常积分值也是 π. □

三、计算题：本题共 2 小题, 共 20 分. 本题应写出具体演算步骤.

1.（10 分）计算反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$, 其中 $\alpha \in \mathbb{R}$ 为常数.

解答 这是 (上册) 课本例 8.1.12

由于 $0 \leqslant \frac{1}{(1+x^2)(1+x^a)} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$, 而 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$, 由比较判别法知原反常积分收敛. 那么有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^a)} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^a)} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^a)}$$

$$= \int_{+\infty}^{1} \frac{\mathrm{d}\frac{1}{x}}{(1+\frac{1}{x^2})(1+\frac{1}{x^a})} + \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^a)}$$

$$= -\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\frac{1}{x}}{(1+\frac{1}{x^2})(1+\frac{1}{x^a})} + \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^a)}$$

$$= \int_{1}^{+\infty} \frac{x^a\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^a)} + \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^a)}$$

$$= \int_{1}^{+\infty} \frac{(1+x^a)\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^a)} = \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

□

2.（10 分）设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{S_n} = 0$, 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径.

解答 这是 (下册) 课本 §10.3 习题 8

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{S_n} = 0$, 所以有

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{S_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{S_{n-1}}{S_n}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{S_{n-1}}{S_n},$$

即知 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{S_{n-1}} = 1 \Big/ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_{n-1}}{S_n} = 1$. 由 d'Alembert 定理知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n x^n$ 收敛半径为 1.

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数, 即 $a_n \geqslant 0$, 因此有 $a_n \leqslant S_n$, 从而有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|S_n|},$$

于是幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径大于等于幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n x^n$ 的收敛半径.

另一方面, 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径要小于等于 1. 综上知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径等于 1.

另一种解法: 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数且发散, 所以数列 $\{S_n\}$ 单调趋于无穷, 于是由 Stolz 公式, 有

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{S_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{S_n - S_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, 由 d'Alembert 定理知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛半径为 1.

□

四、解答题：本题共 5 小题, 共 50 分. 解答应写出文字说明或者证明过程.

1.（8 分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, $A \leqslant f(x) \leqslant B$, 函数 $g(u)$ 在闭区间 $[A,B]$ 上连续, 证明复合函数 $g(f(x))$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

解答 这是 (上册) 课本 §7.1 习题 9

方法一：利用有界函数 Riemann 可积的勒贝格判别法. 设 x_0 为 $f(x)$ 的连续点, 由于 $g(u)$ 在 $u = f(x_0)$ 点处连续, 因此 x_0 为 $g(f(x))$ 的连续点. 所以 $f(x)$ 的连续点集为 $g(f(x))$ 连续点集的子集, 也就是说, $g(f(x))$ 的不连续点集是 $f(x)$ 的不连续点集的子集. 由于 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 因此 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的不连续点集是零测集, 而零测集的子集都是零测集. 这就说明了 $g(f(x))$ 的不连续点集也是零测集, 故 $g(f(x))$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

方法二: 由于 $g(x)$ 在闭区间 $[A,B]$ 上连续, 从而是一致连续的, 从而 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对所有 $u, v \in [A,B]$, 只要 $|u-v| < \delta$, 就有 $|g(u) - g(v)| < \varepsilon$. 又由于 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 根据由振幅给出的闭区间上有界函数 Riemann 可积的等价条件, 对于已给定的 ε, δ, 存在 $\tau > 0$, 使得对任意的 $[a,b]$ 区间的划分 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 只要 $\lambda(P) < \tau$, 即有

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f;\varDelta_i)\varDelta x_i < \varepsilon\delta,$$

其中 $\varDelta x_i = x_i - x_{i-1}, \varDelta_i = [x_{i-1}, x_i], \omega(f;\varDelta_i) = \sup\limits_{t_1,t_2\in\varDelta_i} |f(t_1) - f(t_2)|$.

若 $\omega(f,\varDelta_i) < \delta$, 则有 $\forall\, t_1, t_2 \in \varDelta_i, |f(t_1) - f(t_2)| < \delta$, 进而有 $|g(f(t_1)) - g(f(t_2))| < \varepsilon$. 另一方面, 记集合 $T = \{i : \omega(f,\varDelta_i) \geqslant \delta\}$, 有

$$\sum_{i\in T} \omega(f;\varDelta_i)\varDelta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega(f;\varDelta_i)\varDelta x_i < \varepsilon\delta,$$

即知

$$\sum_{i\in T} \delta\varDelta x_i \leqslant \sum_{i\in T} \omega(f;\varDelta_i)\varDelta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega(f;\varDelta_i)\varDelta x_i < \varepsilon\delta,$$

由上式可得 $\sum\limits_{i\in T} \varDelta x_i < \varepsilon$.

设 $M > 0$ 为连续函数 $g(u)$ 在闭区间 $[A,B]$ 上的一个界, 那么有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \omega(g\circ f;\varDelta_i)\varDelta x_i &= \sum_{i=1}^{n} \sup_{t_1,t_2\in\varDelta_i} |g(f(t_1)) - g(f(t_2))| \cdot \varDelta x_i \\ &= \sum_{i\in T} \sup_{t_1,t_2\in\varDelta_i} |g(f(t_1)) - g(f(t_2))| \cdot \varDelta x_i + \sum_{i\notin T} \sup_{t_1,t_2\in\varDelta_i} |g(f(t_1)) - g(f(t_2))| \cdot \varDelta x_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leqslant \sum_{i\in T} 2M\Delta x_i + \sum_{i\notin T}\varepsilon\Delta x_i = 2M\cdot\sum_{i\in T}\Delta x_i + \varepsilon\cdot\sum_{i\notin T}\Delta x_i\\ &< 2M\varepsilon + \varepsilon(b-a) = (2M+(b-a))\varepsilon,\end{aligned}$$

这就证明了 $g(f(x))$ 也是在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的函数. □

2.（10 分）设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2.

（1） 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛半径;

（2） 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径为 R, 证明 $R\geqslant\min\{R_1,R_2\}$, 并给出一个 $R>\min\{R_1,R_2\}$ 成立的例子.

解答 这是 (下册) 课本 §10.3 习题 3

（1） 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛半径可由 Cauchy-Hadamard 定理计算:

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[2n]{|a_n|} = \varlimsup_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^{1/2} = \left(\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{R_1}}.$$

于是 $R=\sqrt{R_1}$.

（2） 任取 $r<\min\{R_1,R_2\}$, 由 Cauchy-Hadamard 定理知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n$ 都是 (绝对) 收敛, 因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)r^n = \sum_{n=0}^{\infty}a_n r^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n$$

也收敛. 那么由 Abel 第一定理知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径 R 必须满足

$$R\geqslant r.$$

由于上式对任意的满足 $r<\min\{R_1,R_2\}$ 的 r 都成立, 因此必须有

$$R\geqslant\min\{R_1,R_2\}.$$

使得 $R>\min\{R_1,R_2\}$ 成立的例子 (其他例子也可以):

$$a_n=\frac{1}{n},\ b_n=-\frac{1}{n}+\frac{1}{n!},$$

那么 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径都是 1, 但 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$ 的收敛半径为 $+\infty$.

□

3.（10 分）考虑函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$.

（1） 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域 D.

（2） 判断函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在其收敛域 D 上是否一致收敛, 并给出证明.

（3） 判断函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在其收敛域 D 上是否内闭一致收敛, 并给出证明.

解答 这是 (下册) 课本例 10.1.13

（1） 由正项级数敛散性的 Cauchy 判别法, 由于

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\left|x+\frac{1}{n}\right| = |x|,$$

于是 $|x|<1$ 时函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$ (绝对) 收敛; $x>1$ 时发散. 当 $x=1$ 时, 通项 $u_n(1)=n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to+\infty$, 当 $n\to\infty$, 级数发散. 当 $x\leqslant -1$ 时, 通项绝对值 $|u_n(x)| = n\left(-x-\frac{1}{n}\right)^n \geqslant n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\to+\infty$, 当 $n\to\infty$, 级数发散.

综上知, 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域 $D=(-1,1)$.

（2） 在 $D=(-1,1)$ 中取一个数列 $x_n = 1-\frac{1}{n}$, 那么

$$u_n(x_n) = n\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)^n = n,$$

$u_n(x_n)$ 不一致收敛于 0, 故函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 D 上一致收敛的必要性条件不满足, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 D 上不一致收敛.

（3） 任取闭区间 $[a,b]\subset D=(-1,1)$, 那么可取实数 r 满足 $\max\{|a|,|b|\}<r<1$. 于是 $\forall\, x\in[a,b]$, 有

$$|u_n(x)|=n\left|x+\frac{1}{n}\right|^n<n\left(r+\frac{1}{n}\right)^n.$$

在第 (1) 问中已经看到, 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(r+\frac{1}{n}\right)^n$ 是收敛的, 于是根据 Weierstraß 判别法, 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛, 从而在收敛域 $D=(-1,1)$ 上内闭一致收敛.

□

4.（10 分）设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n+x}$.

（1） 证明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续;

（2） 证明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导;

（3） 证明反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

解答 这是 (下册) 课本 §10.2 习题 13

（1） 记 $u_n(x)=\dfrac{1}{2^n+x}$. 由于在 $[0,+\infty)$ 上有

$$0<u_n(x)<\frac{1}{2^n},$$

那么由 Weierstraß 判别法知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛. 现任取 $x,y\in[0,+\infty)$, 有

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)|&=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+y}\right|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x-y}{(2^n+x)(2^n+y)}\right|\\&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-y|}{(2^n+x)(2^n+y)}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-y|}{4^n}\\&\leqslant|x-y|,\end{aligned}$$

这便证明了 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的一致连续性.

（2） $u_n'(x)=-\dfrac{1}{(2^n+x)^2}$, 那么在 $[0,+\infty)$ 上有 $|u_n'(x)|=\dfrac{1}{(2^n+x)^2}\leqslant\dfrac{1}{4^n}$, 同样由 Weierstraß 判别法可知函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛. 那么由函数项级数的逐项求导定理知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, 且有

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x).$$

（3） 任取闭区间 $[0,A]\subset[0,+\infty)$, 由一致收敛函数项级数的逐项积分定理有

$$\int_0^A f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^A\frac{1}{2^n+x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{A}{2^n}\right)\geqslant\ln\left(1+\frac{A}{2}\right)\to+\infty,\ \ A\to+\infty,$$

于是, 反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x:=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

□

5.（12 分）

（1） 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的有界函数, 请叙述由达布 (Darboux) 和给出的 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的充要条件. (不需要证明)

（2） 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 的每一项 $f_n(x)$ 都是 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的函数, 且在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $f(x)$, 求证: $f(x)$ 也是 $[a,b]$ 区间上 Riemann 可积的函数, 并且有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

（3） 在第 (2) 问中, 设 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上点态收敛于函数 $f(x)$, 但不是一致收敛的, 并假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 其余条件保持不变, 请问积分和极限可交换次序的结论 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ 是否仍然成立? 若是, 请给出证明; 若否, 请给出反例, 并添加一个你认为可以使原结论仍成立的条件 (除“$\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$”之外的条件), 不需要证明.

解答

（1） 任取闭区间 $[a,b]$ 的一个划分 $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}, \Delta_i=[x_{i-1},x_i], m_i=\inf\limits_{x\in\Delta_i}f(x), M_i=\sup\limits_{x\in\Delta_i}f(x)$. 对应于划分 P 以及函数 f 的达布大和, 达布小和分别定义为

$$S(f;P):=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i,$$

$$s(f;P):=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i.$$

记 $\lambda(P)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i$, 那么有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的充要条件为

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}S(f;P)=:\overline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}x=\underline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}x:=\lim_{\lambda(P)\to 0}s(f;P).$$

（2） 由 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积知, $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界. 设 $M_n>0$ 为它的一个界. 又由 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $f(x)$ 知 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $N(\varepsilon)$, 使得 $\forall\,n>N(\varepsilon)$, 以及 $\forall\,x\in[a,b]$, 有 $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$, 从而有

$$|f(x)|<|f_n(x)|+\varepsilon,$$

特别地有 $|f(x)|<|f_{N(\varepsilon)+1}(x)|+\varepsilon\leqslant M_{N(\varepsilon)+1}+\varepsilon$, 故 $f(x)$ 有界.

另一方面, 可以由 $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ 知 $f_n(x)-\varepsilon<f(x)<f_n(x)+\varepsilon$, 因此有

$$\int_a^b(f_n(x)-\varepsilon)\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b}(f_n(x)-\varepsilon)\mathrm{d}x\leqslant\overline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\overline{\int_a^b}(f_n(x)+\varepsilon)\mathrm{d}x=\int_a^b(f_n(x)+\varepsilon)\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b(f_n(x)-\varepsilon)\mathrm{d}x=\underline{\int_a^b}(f_n(x)-\varepsilon)\mathrm{d}x\leqslant\underline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\underline{\int_a^b}(f_n(x)+\varepsilon)\mathrm{d}x=\int_a^b(f_n(x)+\varepsilon)\mathrm{d}x,$$

于是有

$$0\leqslant\overline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}x-\underline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b 2\varepsilon\mathrm{d}x=2\varepsilon(b-a).$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任取的, 所以有 $\overline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}x-\underline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}x=0$, 即

$$\overline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}x=\underline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}x.$$

由第 (1) 问知 $f(x)$ Riemann 可积.

又由 $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ 知 $\int_a^b|f(x)-f_n(x)|\,\mathrm{d}x<\varepsilon(b-a)$. 这表明了 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

（3） 不一定成立. 反例可取为: 区间 $[a,b]=[0,1]$, Riemann 可积函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}n^2, & x\in\left[\dfrac{1}{5n},\dfrac{1}{4n}\right],\\ 0, & x\in\left[0,\dfrac{1}{5n}\right)\cup\left(\dfrac{1}{4n},1\right]\end{cases}$$

点态收敛到 $f(x)=0$, 但不是一致收敛. 有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0,\quad\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{n}{20}\to+\infty\ (n\to\infty).$$

分和极限可交换次序的结论仍然成立可以取的条件为(不局限以下几个. 注意, 第 (2) 问中已有 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积这个条件, 此问不需要再添加这个条件)

- 存在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的非负函数 $g(x)$, 使得 $|f_n(x)|\leqslant g(x)$ 对所有 n 以及所有 $x\in[a,b]$ 都成立.
- $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界, 即存在正的实数 $M>0$, 使得 $|f_n(x)|\leqslant M$ 对所有 n 以及所有 $x\in[a,b]$ 都成立.

□