中国农业大学

2024~2025 学年春季学期

数学分析 II 课程期中考试试题解答

一、选择题：本题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 设 $f(x)$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的实值函数. 以下说法正确的是 （ A ）

A. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积, 则 $|f(x)|$ 必然也在 $[a,b]$ 上黎曼可积.

B. 若 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积, 则 $f(x)$ 必然也在 $[a,b]$ 上黎曼可积.

C. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的任意子区间 $[a,c]$ 上黎曼可积, $a<c<b$, 且极限 $\lim\limits_{c\to b-}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在, 则 $f(x)$ 必然也在 $[a,b]$ 上黎曼可积.

D. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积, 改变 $f(x)$ 至多可列多个点上的取值, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的可积性与积分值都不变.

解答 B 的反例: $f(x)=2D(x)-1$, 其中 $D(x)$ 为 $[0,1]$ 区间上的狄利克雷函数, $f(x)$ 不是黎曼可积的, 但 $|f(x)|$ 为常值函数 1.

C 的反例: $f(x)=\begin{cases}1/\sqrt{1-x}, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & x=1.\end{cases}$

D 的反例: $[a,b]=[0,1]$, $f(x)=0$ 为常值函数, 将它在有理点的取值改为 1, 则变为狄利克雷函数, 不可积. □

2. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\left(1-x^{2025}\right)^n\,\mathrm{d}x=$ （ D ）

A. 1　　B. $\dfrac{2025}{2026}$　　C. $\dfrac{1}{2026}$　　D. 0

解答 将积分区间拆分为 $[0,\delta]$ 与 $[\delta,1]$ 去考虑. 或者直接利用有界收敛定理. □

3. 设反常积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则以下论断一定不成立的是 （ B ）

A. 反常积分 $\int_1^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛

B. 反常积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散

C. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 收敛

D. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

解答 A, C 都是可能会成立, D 由柯西收敛准则必定成立, B 中的反常积分由阿贝尔-狄利克雷准备是必定收敛的. □

4. 以下数项级数或者无穷乘积发散的是 （ D ）

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$　　C. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n^2+1}$　　D. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}$

解答 D 中的无穷乘积发散到 0. □

5. 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的黎曼可积函数, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上除有限个点外可微且 $g(x)>0$ 在 $[a,b]$ 上恒成立, $h(x)$ 是 $[a,b]$ 映射到 $[a,b]$ 自身 (不一定满射) 的连续函数. 以下函数必然黎曼可积的是 （ C ）

A. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$　　B. $g'(x)$ (在不可微点补充定义导数值为 0)

C. $\max\{f(x),g(x)\}$　　D. $f\circ h(x):=f(h(x))$

解答 C 成立的原因: $\max\{f(x),g(x)\}=\dfrac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$.

A 的反例: $[a,b]=[-1,1]$, $g(x)=\begin{cases}x, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

B 的反例: $g(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x^2}$, 或者 Volterra 函数.

D 的反例构造涉及 Cantor 集: $[a,b]=[0,1]$, $f(x)=\begin{cases}0, & x>0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$, 任取一个 $[0,1]$ 区间内的测度大于零的类 Cantor 集 P, 并取 $h(x)=d(x,P)=\inf\limits_{y\in P}|x-y|$, 那么 $h(x)$ 是连续函数, 在 P 上取值恒为零, 在 P 之外取值大于零. 于是 $f\circ h(x)=\begin{cases}1, & x\in P,\\ 0, & x\notin P,\end{cases}$ 为类 Cantor 集 P 的特征函数, 间断点集为 P. 由函数黎曼可积的勒贝格判别法知 $f\circ h$ 不是黎曼可积的. □

二、填空题：本题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分。

1. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{n}{(2n)^2}\right)=$ <u>1/2</u> .

解答 将极限表示为定积分的定义式:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{n}{(2n)^2}\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{(1+1/n)^2}+\cdots+\frac{1}{(1+n/n)^2}\right)\\&=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{1+x}\bigg|_0^1=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

□

2. 计算定积分的值 $\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = \underline{\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

解答 这个定积分是以原点为圆心, 2 为半径的圆在第一象限 $0-60^\circ$ 扇形的面积 $\frac{60}{360}\cdot\pi\cdot 2^2$, 减去相应直角三角形面积 $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 1$.

这题也可以利用 Newton-Leibniz 公式, 先求原函数

$$\begin{aligned}\int\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x &= x\sqrt{4-x^2}-\int x\,\mathrm{d}\sqrt{4-x^2} = x\sqrt{4-x^2}-\int x\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x\\ &= x\sqrt{4-x^2}+\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{4-x^2}-\int\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x+\int\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

得 $\int\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}+2\arcsin\frac{x}{2}+C$, 再代入积分上下限相减. □

3. 若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^s}$ 收敛, 则实数 s 的取值范围为 $\underline{\ s>0\ }$.

解答 $s>0$ 时由 Leibniz 判别法可知收敛, $s\leqslant 0$ 时通项不趋于 0 所以不收敛. □

4. 求数项级数的和 $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = \underline{\ 1\ }$.

解答 题目是两个绝对收敛级数的柯西乘积:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1^n}{n!}\right) = e^{-1}\cdot e = 1.$$

□

5. 已知反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$, 那么 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x}\mathrm{d}x = \underline{\ \dfrac{\pi}{4}\ }$.

解答 由三倍角公式 $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$, 有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\frac{3\sin x-\sin(3x)}{4x}\mathrm{d}x\\ &= \frac{3}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(3x)}{3x}\mathrm{d}(3x)\\ &= \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

□

三、计算题：本题共 2 小题, 共 20 分。本题应写出具体演算步骤。

1.（10 分）计算定积分 $I = \int_0^2 \frac{(x-1)^2+1}{(x-1)^2+x^2(x-2)^2}\mathrm{d}x$.

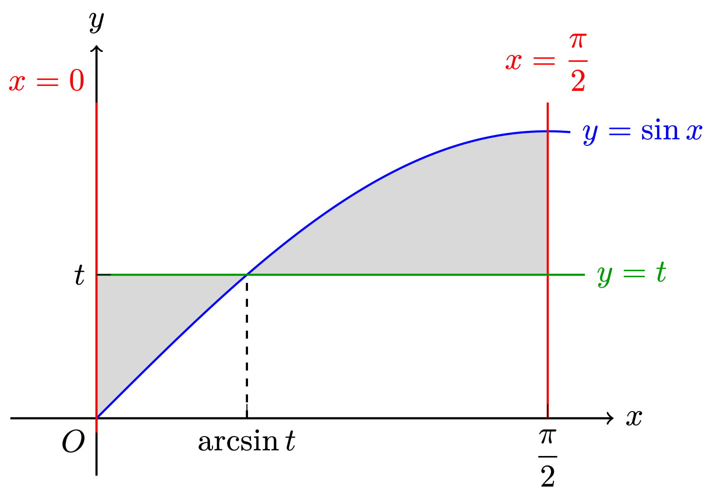
解答 令 $t = x-1$, 则有

$$\begin{aligned}I &= \int_{-1}^{1}\frac{t^2+1}{t^2+(t+1)^2(t-1)^2}\mathrm{d}t\\ &= \int_{-1}^{1}\frac{t^2+1}{t^2+(t^2-1)^2}\mathrm{d}t = 2\int_0^1\frac{t^2+1}{t^2+(t^2-1)^2}\mathrm{d}t\\ &= 2\int_0^1\frac{1}{(t/(1-t^2))^2+1}\cdot\frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}\mathrm{d}t\\ &= 2\int_0^1\frac{1}{(t/(1-t^2))^2+1}\mathrm{d}\left(\frac{t}{1-t^2}\right)\\ &= 2\arctan\frac{t}{1-t^2}\Big|_0^1 = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.\end{aligned}$$

□

2.（10 分）由曲线 $y=\sin x$, 直线 $x=0, x=\frac{\pi}{2}$, 以及 $y=t(0\leqslant t\leqslant 1)$, 围成的区域面积记为 $S(t)$, 求 $S(t)$ 的最大值与最小值.

解答 先把图画出来, 可以看到灰色部分就是要求的面积, 分为了两部分:



所以面积

$$\begin{aligned}S(t) &= \int_0^{\arcsin t}(t-\sin x)\,\mathrm{d}x+\int_{\arcsin t}^{\pi/2}(\sin x - t)\,\mathrm{d}x\\ &= (tx+\cos x)\Big|_0^{\arcsin t}+(-\cos x - tx)\Big|_{\arcsin t}^{\pi/2}\end{aligned}$$

$$= \left(t \cdot \arcsin t + \cos(\arcsin t) - 1\right) + \left(-t \cdot \frac{\pi}{2} + \cos(\arcsin t) + t \cdot \arcsin t\right)$$
$$= 2t \cdot \arcsin t + 2\sqrt{1-t^2} - \frac{t\pi}{2} - 1$$

对 t 求导得 $S'(t) = 2\arcsin t - \frac{\pi}{2}$, 所以在 $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时 $S(t)$ 有最小值: $S(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} - 1$.

端点处的值 $S(0) = 1, S(1) = \frac{\pi}{2} - 1$, 所以在 $t = 0$ 时 $S(t)$ 有最大值: $S(0) = 1$.

注意, 这题很容易从图上看出, 随着 t 从 $0 \to 1$ 的过程, 右边减小的面积是递减的, 左边增加的面积是递增的, 二者达到平衡的时候正好是 $y = \sin x$ 与 $y = t$ 的交点能把线段 $y = t, 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$ 等分的时候, 此时有 $x = \frac{\pi}{4}, t = y = \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. □

四、解答题：本题共 5 小题, 共 50 分。解答应写出文字说明或者证明过程。

1.（8 分）请问 $[0,1]$ 区间上的狄利克雷函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \bigcap [0,1], \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

是否黎曼可积？若是, 请求出积分值; 若否, 请说明原因.

解答 不可积. 原因可以写以下之一:

☞ 对 $[0,1]$ 区间的任何一个划分的任何一个小区间上, 振幅恒等于 1;

☞ $D(x)$ 的达布上、下积分 (达布大、小和的极限) 不相等, 前者为 1, 后者为 0;

☞ $D(x)$ 在整个 $[0,1]$ 区间上都是间断的, 间断点集 $[0,1]$ 区间非零测集.

□

2.（10 分）考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 记 $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 为其前 n 项和, $\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k$.

（1） 请证明: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ 收敛, 那么 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = A$.

（2） 请问反过来是否成立？即若 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = A$, 是否能推出 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$? 若是, 请给出证明; 若否, 请给出反例.

解答

（1） 由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n+1} s_k - \sum_{k=1}^{n} s_k}{(n+1)-n} = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} = A.$$

（2） 不一定. 例如 $a_n = (-1)^{n-1}$, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 但容易算得 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{1}{2}$.

□

3.（10 分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a-1, b+1]$ 上黎曼可积, 并且对于所有 $-1 \leqslant h \leqslant 1$, 记 $f_h(x) = f(x+h)$ 为定义在闭区间 $[a,b]$ 上的函数. 证明:

$$\lim_{h\to 0} \int_a^b |f_h(x) - f(x)| \, \mathrm{d}x = 0.$$

解答 由振幅判别法, 对任意 $\varepsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得对 $[a-1, b+1]$ 区间上任意满足 $\lambda(P) < \delta$ 的划分 P, 总有

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f; [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon, \quad \omega(f; [x_{i-1}, x_i]) := \sup_{t_1, t_2 \in [x_{i-1}, x_i]} |f(t_2) - f(t_1)|.$$

任取 h 满足 $|h| < \delta/2$, 并取 $[a,b]$ 的划分

$$a < a + |h| < a + 2|h| < \cdots < a + k|h| < b, \quad k = \left\lceil \frac{b-a}{|h|} \right\rceil - 1.$$

为了记号方便, 以下不妨设 $h > 0$. 那么在区间 $[a+(i-1)h, a+ih]$ 上恒有

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant \omega(f; [a+(i-1)h, a+(i+1)h]),$$

从而有

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{k}\int_{a+(i-1)h}^{a+ih}|f(x+h)-f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{a+kh}^{b}|f(x+h)-f(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{k+1}\int_{a+(i-1)h}^{a+ih}|f(x+h)-f(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{k+1}\int_{a+(i-1)h}^{a+ih}\omega(f;[a+(i-1)h,a+(i+1)h])\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=1}^{k+1}\omega(f;[a+(i-1)h,a+(i+1)h])\cdot h \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k+1}\omega(f;[a+(i-1)h,a+(i+1)h])\cdot((a+(i+1)h)-a+(i-1)h) \\
&< \frac{1}{2}\cdot 2\varepsilon=\varepsilon.
\end{aligned}$$

最后一行的不等式是因为, 分点 $a, a+2h, a+4h, \cdots$ 以及 $a+h, a+3h, \cdots$ 都分别可以扩充成 $[a-1, b+1]$ 区间上的划分 P_1, P_2, 满足 $\lambda(P_1), \lambda(P_2)<\delta$, 从而上述和式是相应振幅和的部分和. 所以 $\lim\limits_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\,\mathrm{d}x=0$. □

4.（10 分）令 $f(x)=\int_x^{x+1}\sin(t^2)\,\mathrm{d}t$.

（1） 证明在 $x\in(0,+\infty)$ 上有 $|f(x)|<\dfrac{1}{x}$.

（2） 证明当 $x\to+\infty$ 时, 有

$$f(x)=\frac{\cos(x^2)}{2x}-\frac{\cos((x+1)^2)}{2(x+1)}+O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

（3） 判断反常积分 $\int_0^{+\infty}\sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ 是否收敛, 并给出证明.

解答

（1） 做变量替换 $u=t^2$, 有

$$f(x)=\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

由于连续函数 $\dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ 在闭区间 $[x^2,(x+1)^2]$ 上非负不增, 由积分第二中值定理, 存在 $\xi\in[x^2,(x+1)^2]$ 使得

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2}}\int_{x^2}^{\xi}\sin u\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2x}(\cos(x^2)-\cos\xi),$$

于是有

$$|f(x)|=\frac{1}{2x}|\cos(x^2)-\cos\xi|\leqslant\frac{1}{x}.$$

做到这一步, 这题就可以了.

如果继续分析, 由分部积分法有

$$\begin{aligned}
f(x)&=\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u=-\frac{\cos u}{2\sqrt{u}}\bigg|_{x^2}^{(x+1)^2}-\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\cos u}{4u^{3/2}}\,\mathrm{d}u \\
&=\frac{\cos(x^2)}{2x}-\frac{\cos((x+1)^2)}{2(x+1)}-\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\cos u}{4u^{3/2}}\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

对于上式最后一项, 有估计

$$\begin{aligned}
\left|\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\cos u}{4u^{3/2}}\,\mathrm{d}u\right| &\leqslant \int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{|\cos u|}{4u^{3/2}}\,\mathrm{d}u \\
&< \int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{1}{4u^{3/2}}\,\mathrm{d}u=-\frac{1}{2\sqrt{u}}\bigg|_{x^2}^{(x+1)^2}=\frac{1}{2x}-\frac{1}{2(x+1)}.
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
|f(x)|&=\left|\frac{\cos(x^2)}{2x}-\frac{\cos((x+1)^2)}{2(x+1)}-\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\cos u}{4u^{3/2}}\,\mathrm{d}u\right| \\
&\leqslant\left|\frac{\cos(x^2)}{2x}\right|+\left|\frac{\cos((x+1)^2)}{2(x+1)}\right|+\left|\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\cos u}{4u^{3/2}}\,\mathrm{d}u\right| \\
&<\frac{1}{2x}+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2x}-\frac{1}{2(x+1)}=\frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

（2） 令

$$\begin{aligned}
g(x)&=\int_x^{x+1}\left(\sin(t^2)+\frac{\cos(t^2)}{2t^2}\right)\,\mathrm{d}t=\int_x^{x+1}\left(-\frac{\cos(t^2)}{2t}\right)'\,\mathrm{d}t \\
&=\frac{\cos(x^2)}{2x}-\frac{\cos((x+1)^2)}{2(x+1)}.
\end{aligned}$$

那么对充分大的 x 有

$$|f(x)-g(x)| = \left|\int_x^{x+1} \frac{\cos(t^2)}{2t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^{x+1} \frac{|\cos(t^2)|}{2x^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2x^2},$$

由此可知 $f(x)-g(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$. 于是有

$$f(x) = g(x) + (f(x)-g(x)) = \frac{\cos(x^2)}{2x} - \frac{\cos((x+1)^2)}{2(x+1)} + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

或者直接从 (1) 问后面的过程可知.

（3） 收敛. 原因可以写以下之一:

☞ $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$. 由于 $\int_0^c \sin(u)\,\mathrm{d}u$ 关于 c 有界, 而 $\frac{1}{\sqrt{u}}$ 关于 u 单调趋于 0 ($u \to +\infty$), 由狄利克雷判别法知反常积分 $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ 收敛.

☞ 对充分大的 c 有

$$\int_0^c \sin(t^2)\,\mathrm{d}t = f(0) + f(1) + \cdots + f(n-1) + \int_n^c \sin(t^2)\,\mathrm{d}t,$$

其中 $n = [c]$. 那么由第 (2) 小问可知

$$f(1) + \cdots + f(n-1) = \frac{\cos 1}{2} - \frac{\cos((n+1)^2)}{2(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{1}{k^2}$$

其中 $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$. 容易由正项级数的比较判别法知 $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{1}{k^2}$ 当 $n \to +\infty$ 时绝对收敛, 而

$$\int_n^c \sin(t^2)\,\mathrm{d}t = \int_{n^2}^{c^2} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2n}(\cos(n^2) - \cos\eta) \to 0,\ \text{当}\ n \to +\infty,$$

其中 $\eta \in [n^2, c^2]$. 所以 $\int_0^c \sin(t^2)\,\mathrm{d}t = f(0) + f(1) + \cdots + f(n-1) + \int_n^c \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ 整体上关于 $c \to +\infty$ 是收敛的.

□

5.（12 分）对 $k \in \mathbb{N}$, 考虑定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f_k(x) = \frac{1}{2-\sin kx}$.

（1） 计算不定积分 $\int f_k(x)\,\mathrm{d}x$, 并计算 $f_k(x)$ 在长度等于它的最小正周期 $2\pi/k$ 的闭区间上的积分值.

（2） 设 $[a,b]$ 为非平凡闭区间, $a<b$. 请问极限 $\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x$ 是否存在? 若存在, 求此极限; 若不存在, 请给出证明.

解答

（1） 令 $t = \tan\frac{kx}{2}$, 则有

$$\sin kx = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2}{k}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

从而有

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{2-\sin kx}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2-\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{k}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\
&= \frac{1}{k}\int \frac{1}{(1+t^2)-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{k}\int \frac{1}{(t-1/2)^2+3/4}\,\mathrm{d}(t-1/2) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}k}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}k}\arctan\frac{2\tan\frac{kx}{2}-1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

$f_k(x)$ 在任何一个长度等于它的最小正周期 $2\pi/k$ 的闭区间上的积分值, 记为 $I_{k,0}$, 等于

$$\int_{-\pi/k}^{\pi/k} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{\sqrt{3}k}.$$

（2） 对于一个的固定的区间 (a,b), 记 $N_{a,b} = \left[\frac{(b-a)k}{2\pi}\right]$, 其中 $[x]$ 表示 x 的整数部分, 注意到 $|f_k| \leqslant 1$, 有

$$\begin{aligned}
\int_{(a,b)} f_k(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{(a,a+N_{a,b}T_k)} f_k(x)\,\mathrm{d}x + \int_{(a+N_{a,b}T_k,b)} f_k(x)\,\mathrm{d}x \\
&= N_{a,b}\cdot I_{k,0} + \int_{(a+N_{a,b}T_k,b)} f_k(x)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

从而有

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{(a,b)} f_k(x)\,\mathrm{d}x-\left[\frac{(b-a)k}{2\pi}\right]\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{3}k}\right|\\
\leqslant&\int_{(a+N_{a,b}T_k,b)} 1\,\mathrm{d}x=b-a-N_{a,b}T_k=\left\{\frac{(b-a)k}{2\pi}\right\}\cdot\frac{2\pi}{k},
\end{aligned}
$$

其中 $\{x\}$ 表示 x 的小数部分. 于是进一步有

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x-\frac{(b-a)}{\sqrt{3}}\right|\\
\leqslant&\left|\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x-\left[\frac{(b-a)k}{2\pi}\right]\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{3}k}\right|+\left|\left[\frac{(b-a)k}{2\pi}\right]\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{3}k}-\frac{(b-a)}{\sqrt{3}}\right|\\
\leqslant&\left\{\frac{(b-a)k}{2\pi}\right\}\cdot\frac{2\pi}{k}+\left\{\frac{(b-a)k}{2\pi}\right\}\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{3}k}\\
\leqslant&\frac{4\pi}{k}.
\end{aligned}
$$

所以极限 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x=\frac{b-a}{\sqrt{3}}$.

□