中国农业大学

2023~2024 学年春季学期

数学分析 II 课程期中考试试题

题号	一	二	三	四	总分
分数					

（本试卷共 4 道大题）

考生诚信承诺

本人承诺自觉遵守考试纪律，诚信应考，服从监考人员管理。

本人清楚学校考试考场规则，如有违纪行为，将按照学校违纪处分规定严肃处理。

一、选择题：**本题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分**。**在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的**。

1. 下列函数哪一个不一定是黎曼可积的 （　　）

   A. 闭区间 $[a,b]$ 上的单调函数.

   B. $g(f(x))$, 其中 f 是闭区间 $[a,b]$ 上的黎曼可积函数, $A \leqslant f(x) \leqslant B$, g 在 $[A,B]$ 上连续.

   C. $\max\{f(x),g(x)\}$, 其中 $f(x),g(x)$ 都是闭区间 $[a,b]$ 上的黎曼可积函数.

   D. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, 其中 $f(x),g(x)$ 都是闭区间 $[a,b]$ 上的黎曼可积函数, $g(x)$ 恒不等于 0.

2. 下列命题正确的是 （　　）

   A. 设反常积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 且函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 则必有 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   B. 设定义在闭区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 黎曼可积, 改变 $f(x)$ 在所有有理点处 (即 $x \in \mathbb{Q}\cap[a,b]$) 的值, 新得到的函数必定仍是黎曼可积的.

   C. 设无穷乘积 $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 的部分积序列 $\left\{P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} p_k\right\}$ 收敛到一个有限实数, 则无穷乘积必收敛.

   D. 设 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为两个数项级数, 满足 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$, 则这两个数项级数必具有相同的敛散性.

3. 反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx =$ （　　）

   A. -1　　B. 0　　C. $\dfrac{\pi}{2}$　　D. 发散

4. 设数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则下列级数一定也收敛的是　　（　　）

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n+1} a_n$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$　　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{1+|a_n|}$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$

5. 设 $p_n = 1 + a_n > 0$ 是一列正的实数, $n = 1, 2, \cdots$, 以下情况不可能发生的是　　（　　）

A. 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$, 以及无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ 都发散

B. 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 都收敛, 但无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ 发散

C. 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 都发散, 但无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ 收敛

D. 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ 都发散, 但数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛

二、填空题：本题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分。

1. 计算定积分的值 $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} \mathrm{d}x =$ ______ .

2. 设 n 为正整数, 计算定积分的值 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \mathrm{d}x =$ ______ .

3. 计算 Cauchy 主值积分 (cpv) $\int_{-1}^{3} \frac{\mathrm{d}x}{x} =$ ______ .

4. 数项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$ 的值等于 ______ .

5. 若无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^s}\right)$ 绝对收敛, 则 s 的取值范围为 ______ . 如果只要求它收敛, 那么则 s 的取值范围为 ______ .

三、计算题：本题共 2 小题, 共 12 分。本题应写出具体演算步骤。

1.（6 分）计算由椭圆 $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, 0 < b < a$, 所围图形绕 x 轴旋转而成的旋转椭球体的体积.

2.（6 分）已知 $\sin \pi x$ 的无穷乘积表达为 $\sin \pi x = \pi x \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$. 请由此计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的值.

四、解答题：本题共 5 小题, 共 48 分。解答应写出文字说明或者证明过程。

1.（6 分）设 $g(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的实值函数, 称它是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数, 若对任意 $\varepsilon>0$, 都存在 $\delta>0$, 使得任取 $[a,b]$ 中任意有限个互不交叠的子区间 $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$, $\cdots$, $[a_n,b_n]$, 只要 $\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$, 就有 $\sum\limits_{k=1}^{n}|g(b_k)-g(a_k)|<\varepsilon$.

设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的黎曼可积函数, $F(x):=\int_a^x f(t)dt, x\in[a,b]$, 为 $f(x)$ 的变上限积分, 请证明 $F(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

2.（10 分）设 $y=f(x)$ 和 $x=g(y)$ 是互逆的连续、非负、单调递增的函数, 并且满足 $f(0)=g(0)=0$.

（1）证明对任意 $x\geqslant 0$, 有如下的等式成立：

$$xf(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t.$$

（2）证明对任意 $x,y\geqslant 0$, 有如下的不等式成立：

$$xy\leqslant\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^y g(t)\mathrm{d}t.$$

（3）证明对任意 $x,y\geqslant 0$, 以及 $p,q>0, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 有

$$xy\leqslant\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q.$$

3.（10 分）设 $f(x)$ 是次数大于 1 的多项式, 求证反常积分 $\int_0^{+\infty}\sin(f(x))\mathrm{d}x$ 收敛.

4.（10 分）设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 记 $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 为级数的前 n 项和.

（1）证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 发散.

（2）证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n}$ 发散.

（3）证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n^2}$ 收敛.

5.（12 分）考虑数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 记 $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 为它的部分和（前 n 项和）. 令

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n}$$

为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 部分和序列 $\{s_n\}$ 的前 n 项均值. 我们称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是 $(c,1)$ 可和的, 若序列 σ_n 收敛到一个有限的实数 A, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = A$, 并记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A\,(c,1)$. 实数 A 称作是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 在 $(c,1)$ 意义下的和.

（1）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ 在 $(c,1)$ 意义下的和.

（2）设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 在通常意义下收敛到有限实数 A, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = A$, 求证：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是 $(c,1)$ 可和, 而且有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A\,(c,1)$.

（3）设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A\,(c,1)$, A 为一个有限实数, 并且满足当 $n \to \infty$ 时有 $a_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, 求证：在通常的意义下有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$.