中国农业大学

2024~2025 学年春季学期

数学分析 II 课程考试试题

题号	一	二	三	四	总分
分数					

（本试卷共 4 道大题）

考生诚信承诺

本人承诺自觉遵守考试纪律，诚信应考，服从监考人员管理。
本人清楚学校考试考场规则，如有违纪行为，将按照学校违纪处分规定严肃处理。

一、选择题：本题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 以下集合是紧集的是 （　　）

A. $\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n : |x_1|+\cdots+|x_n|=1\}$

B. $\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]\}$

C. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[n,n+1/2]$

D. $\left\{\dfrac{1}{n} : n\in\mathbb{N}_+\right\}$

2. 以下是道路连通集的是 （　　）

A. $\{(0,y) : -1\leqslant y\leqslant 1\}\cup\{(x,\sin(1/x)) : 0<x<1\}$

B. n 可逆阶实系数方阵全体 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})=\{A\in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : \det A\neq 0\}$

C. n 阶实系数正交方阵全体 $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})=\{A\in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : A^TA=AA^T=I_n\}$

D. 行列式等于 1 的 n 阶实系数方阵全体 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})=\{A\in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : \det A=1\}$

3. 以下说法正确的是 （　　）

A. 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空点集, $x\in\mathbb{R}^n$ 为一点, 若存在点列 (序列) $x_n\in E, n=1,2,\cdots$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, 则 x 是集合 E 的聚点.

B. 设 f 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上取值在 $\mathbb{R}^m$ 中的连续向量值函数, E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空有界闭集, 那么 E 在 f 下的像集 $f(E)$ 必然是 $\mathbb{R}^m$ 中的闭集.

C. 设 f 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上取值在 $\mathbb{R}^m$ 中的连续向量值函数, E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空有界开集, 那么 E 在 f 下的像集 $f(E)$ 必然是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集.

D. 设数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 满足 $|a_n| > |b_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 那么若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 必然也收敛.

4. 设 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是定义在 $[0,1]$ 区间上的黎曼可积函数列, 并且有公共的界, 即存在正实数 M, 使得 $|f_n(x)| \leqslant M$ 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 以及任意的 $x \in [0,1]$ 都成立. 若 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的极限函数存在 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, 那么以下说法正确的是 (　　)

A. 若积分值序列的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ 也存在, 则极限函数 $f(x)$ 必然黎曼可积

B. 若积分值序列的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ 也存在, 则 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 必然一致收敛到 $f(x)$

C. 若极限函数 $f(x)$ 黎曼可积, 则 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 必然一致收敛到 $f(x)$

D. 若极限函数 $f(x)$ 黎曼可积, 则积分值序列的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ 也必存在, 并且有 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

5. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径是 R, $0 < R < +\infty$, 那么下面正确的论断是 (　　)

A. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ 必然存在且等于 $\dfrac{1}{R}$

B. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 必然存在且等于 $\dfrac{1}{R}$

C. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 可能不存在, 若极限存在则必等于 $\dfrac{1}{R}$

D. 以上说法都不对

二、填空题：本题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分。

1. 柯西主值积分 (cpv) $\int_{-1}^{1} \dfrac{2}{2x-1}\mathrm{d}x =$ ______.

2. 设 $a > 0$ 为常数, 那么星形线 $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ 的长度等于 ______.

3. 积分 $\int_{-\pi}^{3\pi} \cos(2025x)\cos(2024x)\,\mathrm{d}x =$ ______.

4. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-2)^n \ln n}{n}(x-1)^n$ 的收敛域为 ______.

5. 设 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为斐波那契数列, 即满足 $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, 那么正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} =$ ______.

三、计算题：本题共 2 小题, 共 20 分。本题应写出具体演算步骤。

1.（10 分）考虑二元函数 $f(x,y) = x\sin\dfrac{1}{y} + y\sin\dfrac{1}{x}$, 问二重极限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 以及二次极限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$ 是否分别存在? 若存在, 求出相应的值; 若不存在, 说明原因.

2.（10 分）设 $n \in \mathbb{N}_+$ 为正整数, 请计算定积分 $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(nx)}{\sin x}\right)^2 \mathrm{d}x$. (提示: 先计算 $I_{n+1} - I_n$.)

四、解答题：本题共 5 小题, 共 50 分。解答应写出文字说明或者证明过程。注意，若一道题分为多个小问，则该题前面小问的结论可以用于后面的小问，但反过来不行。

1.（8 分）设 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为一实数列, 请证明 $\displaystyle\overline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n) = -\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$.

2.（10 分）设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处无穷次可微, 请问是否必然存在 x_0 的某个邻域 $O(x_0,\rho) = (x_0-\rho, x_0+\rho)$, $\rho > 0$, 使得 $f(x)$ 在 $O(x_0,\rho)$ 上可以展开成幂级数? 若是, 请给出证明; 若否, 请举反例并简要说明该反例不能展开成幂级数的原因.

3.（10 分）设 $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空点集, 定义点 x 到集合 E 的距离为

$$\rho(x,E) = \inf_{y\in E} \|x-y\|,$$

其中 $\|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$.

（1）设 F 为 $\mathbb{R}^n$ 中的非空闭集, 证明存在点 $y_0 \in F$, 使得 $\rho(x,F) = \|x-y_0\|$.

（2）设 F_1, F_2 为 $\mathbb{R}^n$ 中两个不交的非空闭集, 请构造一个 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数$f(x)$, 同时满足以下两个条件

（a）$0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$;

（b）$f(x)$ 在 F_1 上取值恒等于 0, 在 F_2 上取值恒等于 1.

4.（10 分）设 $a > 0, b > 0$ 为常数, $f(x)$ 为定义在 $[0,+\infty)$ 上的连续函数, 并且当 $x \to +\infty$ 时有极限 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = c_\infty \in \mathbb{R}$. 记 $c_0 = f(0)$.

（1）请证明: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = (c_0 - c_\infty)\ln\frac{b}{a}$.

（2）计算反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\frac{1+2e^{-ax}}{1+2e^{-bx}} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{x}$ 的值.

5.（12 分）设 $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是通项恒不为零的数列, 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q_n}{q_n - q_{n-1}} \cdot \dfrac{p_n - p_{n-1}}{p_n} = c$, $c \in \mathbb{R}$.

（1）假设数列 $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 单调递增且 $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = +\infty$, 请证明: 对任意数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{p_n}\sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k = B$ 存在, 那么极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{q_n}\sum\limits_{k=1}^{n} q_k a_k$ 也必存在, 且等于 Bc. (提示: 由 $b_n = \dfrac{1}{p_n}\sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k$ 反推 a_n 的表达式, 并代入 $\dfrac{1}{q_n}\sum\limits_{k=1}^{n} q_k a_k$ 中进行分析.)

（2）设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 单调递增且 $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = +\infty$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{q_n}\sum\limits_{k=1}^{n} q_k a_k = 0$.

（3）设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 并且 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 单调递减, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$.

（4）设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 并且 $\{n a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 单调递减, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = 0$, 并由此进一步证明 $\lim\limits_{n\to\infty} (n \ln n) a_n = 0$.