中国农业大学

2023~2024 学年秋季学期（2023.12）

微积分 I 课程考试试题

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

（注意：本试卷共有七道大题，满分 100 分，考试时间 100 分钟）

一、单项选择题（本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1.以下命题正确的是（**C**）.

(A) 若$f(x)$在一点x_0处连续，则$f(x)$在x_0处可导;

(B) 若$f(x)$在一点x_0处可导，则$f(x)$不一定在x_0处连续;

(C) 若$f(x)$在一点x_0处不连续，则$f(x)$在x_0处不可导;

(D) 若$f(x)$在区间$[a,b]$上可积，则$f(x)$在区间$[a,b]$上连续.

2. 设数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$，则下列命题正确的是（**D**）.

(A) 若$\{x_n\}$发散，则$\{y_n\}$必发散; **(B)** 若$\{x_n\}$无界，则$\{y_n\}$无界;

(C) 若$\{x_n\}$有界，则$\{y_n\}$为无穷小量; **(D)** 若$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$为无穷小量，则$\{y_n\}$必为无穷小量.

3. 设$f(x) = \int_0^{5x} \frac{\sin t}{t}\,dt$，$g(x) = \int_0^{\sin x} (1+t)^{\frac{1}{t}}\,dt$，则当$x \to 0$时，$f(x)$是$g(x)$的（**A**）.

（**A**） 同阶但不等价的无穷小; （**B**） 等价无穷小;

（**C**） 高阶无穷小; （**D**） 低阶无穷小.

4. 下面四个函数中，（**D**）是$f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$的原函数.

(A) $\arcsin x$; **(B)** $\arctan x$; **(C)** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$; **(D)** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$.

5. 积分$\int_0^1 \sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$的值为（**B**）.

(A) $\frac{4}{3}$; **(B)** $\frac{4}{7}$; **(C)** $\frac{3}{4}$; **(D)** $\frac{7}{4}$.

考生诚信承诺

1. 本人清楚学校关于考试管理、考场规则、考试作弊处理的规定，并严格遵照执行。

2. 本人承诺在考试过程中没有作弊行为，所做试卷的内容真实可信。

学院：______________ 班级：__________ 学号：___________姓名： __________

二、填空题（本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x-a})^x=9$,则$a$=________**ln3**__________.

2. 函数$f(x)=x^2e^{2x}$，则$f^{(20)}(x)$=_____ $(95+20x+x^2)2^{20}e^{2x}$ ____________.

3. 设$f(x)=x^2e^x$,则$f(x)$的带皮亚诺余项的麦克劳林公式(展开到x^4)为

____ $x^2+x^3+\frac{x^4}{2}+o(x^4)$ ___________________.

4. $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$,则y的微分dy=___ $\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}dx$__________.

5. $\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}\,dx$=______**4**___________.

三、求解下列各题（本题共有 5 道小题，每小题 6 分，满分 30 分）

1. 计算$\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})$.

$$\lim_{x\to0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}=\frac{1}{2}$$

2. 计算$\lim\limits_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}$.

$$\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$$

3. 设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=3t^2+2t\\e^y\sin t-y+1=0\end{cases}$所确定，求$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=0}$.

$$\frac{dx}{dt}=6t+2$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{e^y\cos t}{1-e^y\sin t}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{e}{2}$$

4. 计算$\int_0^1\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

设$t=\sqrt{1-x}$, 则

$$\int\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}=-2\int\frac{dt}{1+t^2}=-2\arctan t+C=-2\arctan\sqrt{1-x}+C$$

x=1 为原积分的瑕点，所以原式= $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\left(-2\arctan\sqrt{1-x}\,\Big|_0^{1-\varepsilon}\right)=\frac{\pi}{2}$

5. 设$f(x)$的一个原函数是$\frac{\sin x}{x}$， 求$\int x^3f'(x)dx$.

$$\int x^3f'(x)dx=x^3f(x)-\int f(x)dx^3=x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+C$$

四、（本题满分 8 分）

讨论函数$f(x)=\frac{e^x-e}{x(x-1)}$的连续性，若有间断点，判断其类型.

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty\quad\lim\limits_{x\to1}f(x)=e$

无穷间断点$x=0$，可去间断点$x=1$

五、（本题满分 12 分）

设$f(x)=\frac{x+1}{x^2}$，求函数的单调区间和极值，并求曲线$y=f(x)$的凹凸区间，拐点及渐近线.

$f'(x)=-\frac{x+2}{x^3}$ -------------1 分

$f''(x)=\frac{2x+6}{x^4}$ -------------1 分

（单调区间，极值，凹凸区间，拐点及渐近线各 2 分）

单调递增区间	$[-2,0)$	单调递减区间	$(-\infty,-2]\cup(0,+\infty)$
极值点	$x=-2$	极小值	$-\frac{1}{4}$
凹区间	$[-3,0)\cup(0,+\infty)$	凸区间	$(-\infty,-3]$
拐点	$(-3,-\frac{2}{9})$	渐近线	水平渐近线$y=0$ 垂直渐近线$x=0$

六、（本题满分 10 分）已知曲线$y=x^2$和直线$y=x$所围成的区域记为D,求

1. D的面积.

$\int_0^1 (x-x^2)\,dx=\frac{1}{6}$　　---------------4 分

2. D绕x轴旋转一周所生成的旋转体的体积V_1以及D绕y轴旋转一周所生成的旋转体的体积V_2.

$V_1=\int_0^1 \pi x^2\,dx-\int_0^1 \pi x^4\,dx=\frac{2\pi}{15}$　　-------------3 分

$V_2=\int_0^1 \pi(\sqrt{y})^2\,dy-\int_0^1 \pi y^2\,dy=\frac{\pi}{6}$　　------------3 分

七、证明下列各题（本题共有 2 道小题，每小题 5 分，满分 10 分）

1. 证明：当 $x>0$ 时，$e^x>1+x$.

设 $f(x)=e^x-1-x$，则有 $f(0)=0$, $f'(x)=e^x-1$.

因为 $x>0$ 时总有 $f'(x)>0$, 所以 **f(x)**在 $x>0$ 时单调递增，从而有

$f(x)>f(0)=0$,

即成立不等式 $e^x>1+x$.

2. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，$f(0)=f(1)$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$,使得$f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

令$F(x)=(x-1)^2f'(x)$，则

$F(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$F(1)=0$，又由于$f(0)=f(1)$

根据罗尔定理，存在$c\in(0,1)$，使$f'(c)=0$，故$F(c)=0$

再利用罗尔定理，存在$\xi\in(c,1)\subset(0,1)$，使$F'(\xi)=0$，即

$2(\xi-1)f'(\xi)+(\xi-1)^2 f''(\xi)=0$，得$f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.