中国农业大学

2022～2023 学年秋季学期

高等数学 C 上 课程考试试题解答

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

（注意：本试卷共有八道大题，满分 100 分，考试时间 100 分钟）

一、单项选择题

1. C； 2. B； 3. C； 4.C； 5. D.

二、填空题

1． e^3 2. $\frac{1}{2^{28}}+2^{28}$ 3. $x-y=\frac{\pi}{2}-2$ 4. a=2 5. $2\sqrt{2}$

三、求解下列各题（本题共有 6 道小题，每小题 5 分，满分 30 分）.

1. 设 $y=e^{3x}\sin x$，求 y' 和 y''.

解：
$$y'=3e^{3x}\sin x+e^{3x}\cos x=e^{3x}(3\sin x+\cos x);$$
$$y''=3e^{3x}(3\sin x+\cos x)+e^{3x}(3\cos x-\sin x)=2e^{3x}(4\sin x+3\cos x).$$

2. 计算 $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$.

解：

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}+1\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x}+1)}+1\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3. 计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+2x^2}-1}{\tan x\ \ln(1+x)}$.

解：$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+2x^2}-1}{\tan x\ \ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\left(1+2x^2\right)^{\frac{1}{3}}-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}\times2x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{2}{3}.$$

4. 计算 $\int\frac{x+1}{x^2+x-2}dx.$

解：$$\int\frac{x+1}{x^2+x-2}dx=\int\frac{x+1}{(x-1)(x+2)}dx=\frac{2}{3}\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+2}dx$$

$$=\frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{3}\ln|x+2|+C.$$

5. 计算$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+2^x}dx.$

解：
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+2^x}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos x}{1+2^x}dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+2^x}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+2^{-x}}dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+2^x}dx$$
$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+2^x}+\frac{2^x}{1+2^x}\right)\cos xdx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=1.$$

6. 设$y=y(x)$由方程$e^{x-y}-x\sin y=1$确定，求 dy.

解：$e^{x-y}(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)-\sin ydx-x\cos ydy=0,\quad dy=\dfrac{e^{x-y}-\sin y}{e^{x-y}+x\cos y}dx.$

四、（本题满分 8 分）讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x+4)}{\sin(\pi x)}, & x<0, x\neq -n\\ \dfrac{\sin x}{x^2-1}, & x\geq 0, x\neq 1\end{cases}$ **的连续性，若有间断点，判别其类型.**

解：当$x=0$时，

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(x+4)}{\sin(\pi x)}=\frac{4}{\pi},\ \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x^2-1}=0,$$

故$x=0$是跳跃间断点。

当$x=-n$且$n\neq 4$时，

$$\lim_{x\to -n}f(x)=\lim_{x\to -n}\frac{x(x+4)}{\sin \pi x}=\infty,$$

故$x=-n(n\neq 4)$是无穷间断点.

当$x=-4$时，

$$\lim_{x\to -4}f(x)=\lim_{x\to -4}\frac{x(x+4)}{\sin \pi x}=\lim_{x\to -4}\frac{x(x+4)}{\sin \pi(x+4)}=-\frac{4}{\pi},$$

故$x=-4$是可去间断点.

当$x=1$时，

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sin x}{x^2-1}=\infty,$$ 故$x=1$是无穷间断点.

综上所述，除$x=0,1,-n,-4$外，f(x)在其定义域上连续.

五. 讨论函数$y=xe^{\frac{1}{x^2}}$的性质（单调区间、凹凸区间、极值、渐近线）.

解： $y'=e^{\frac{1}{x^2}}(1-\frac{2}{x^2})$，$y''=e^{\frac{1}{x^2}}\frac{2x^2+4}{x^5}$

单增区间：$(-\infty,-\sqrt{2})$，$(\sqrt{2},+\infty)$，单减区间：$(-\sqrt{2},0)$，$(0,\sqrt{2})$

凸区间：$(-\infty,0)$，凹区间 $(0,+\infty)$

令 $y'=0$ 得 $x=\pm\sqrt{2}$， $y''(\sqrt{2})>0,\quad y''(-\sqrt{2})<0$ 故极大值为 $-\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}}$，极小值为 $\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}}$.

$\lim\limits_{x\to 0}xe^{\frac{1}{x^2}}=\infty$， a=$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{xe^{\frac{1}{x^2}}}{x}=1,\quad b=\lim\limits_{x\to\infty}(xe^{\frac{1}{x^2}}-x)=0$

渐近线 $x=0, y=x.$

六. 求由 $y=2x-x^2, y=0, y=x$ 所围图形的面积，并求该图形绕 y 轴所得旋转体的体积.

解：面积 A=$\int_0^1(1+\sqrt{1-y}-y)dy=\frac{7}{6}$;

体积 $V=\pi[\int_0^1(1+\sqrt{1-y})^2dy-\int_0^1 y^2dy]=\frac{5}{2}\pi.$

七. 求过点 P（2，1，-3）与平面 $x+y+z-10=0$ 平行且与直线 $\begin{cases}x+2y-z-5=0\\ z-10=0\end{cases}$ 垂直的直线方程.

解：平面的法向量为 $\vec{n}=(1,1,1)$，$\begin{cases}x+2y-z-5=0\\ z-10=0\end{cases}$ 的方向向量为

$$\vec{s}_1=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(2,-1,0)$$

所求直线的方向向量为 $\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=(1,2,-3)$

故所求直线方程为 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{-3}$.

八．证明下列各题（本题共有 2 道小题，每小题 5 分，满分 10 分）

1．证明：当 $0<x<1$ 时，$\frac{1+x}{1-x}>e^{2x}$.

证明：要证明 $\frac{1+x}{1-x}>e^{2x}$，只需证明 $\ln\frac{1+x}{1-x}>2x$.

令 $f(x)=2x-\ln\frac{1+x}{1-x}=2x-\ln(1+x)+\ln(1-x)$, 则 f(x)在$[0,1)$ 上连续、可导，且

$$f'(x)=2-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}=\frac{-2x^2}{1-x^2},$$

由于在(0, 1)内 $f'(x)$<0, 因此 f(x)在[0, 1)上单调减少，从而当$0<x<1$ 时，

f(x)<f(0)=0, 这就得到$2x-\ln\frac{1+x}{1-x}<0$, 即$\frac{1+x}{1-x}>\mathrm{e}^{2x}$.

2. 设 $f(x)$ 在[0, 1]连续，在(0, 1)可导，且 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathrm{d}x$，证明在(0, 1)内至少存在一点$\xi$，使$\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$.

证明：由积分中值定理得

$$2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathrm{d}x=\xi_1 f(\xi_1),\quad \xi_1\in(0,\frac{1}{2})$$

令 F(x)=xf(x), 则 $F(x)\in C[0,1]$, $F(x)\in D(0,1)$，且 $F(\xi_1)=F(1)$，

在$\left[\xi_1,1\right]$上应用罗尔定理知存在$\xi\in\left(\xi_1,1\right)\subset\left(0,1\right)$使得

$\xi f'(\xi)+f(\xi)=0.$