2021 秋高等代数习题课

2021-12-10 第六次习题课

习题 5.1 第 4 题. **设** $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ **是数域** $\mathbb{F}$ **上的多项式，**$c \in \mathbb{F}$. **求证：**$x - c$ **除** $f(x)$ **的商** $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ **和余式** r **可以用如下的算法得出**

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
c & & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_i & \cdots & a_1 & a_0 \\
 & +) & & cb_{n-1} & \cdots & cb_i & \cdots & cb_1 & cb_0 \\
\hline
 & & b_{n-1} & b_{n-1} & \cdots & b_{i-1} & \cdots & b_0 & r
\end{array}
$$

其中 $b_{n-1} = a_n, b_{i-1} = a_i + cb_i \ (\forall 1 \leqslant i \leqslant n), r = a_0 + cb_0$.

证明：**考虑** $f(x) = (x-c)g(x) + r$, **即**

$$
\begin{aligned}
a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 &= (x-c)(b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0) + r \\
&= b_{n-1}x^n + \cdots + b_1 x^2 + b_0 x + r \\
&\quad - cb_{n-1}x^{n-1} - \cdots - cb_1 x - cb_0
\end{aligned}
$$

移项之后即有

$$
a_n x^n + (a_{n-1} + cb_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + cb_1)x + (a_0 + cb_0) = b_{n-1}x^n + \cdots + b_1 x^2 + b_0 x + r,
$$

对应次项的系数相等，从而有 $b_{n-1} = a_n, b_{n-2} = a_{n-1} + cb_{n-1}, \ldots, b_0 = a_1 + cb_1, r = a_0 + cb_0$.

习题 5.1 第 8 题. **给定正整数** $k \geqslant 2$, **求非零实系数多项式** $f(x)$ **满足条件** $f(x^k) = (f(x))^k$.

解：**设非零实系数多项式** $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, $n \geqslant 0$, **满足** $f(x^k) = (f(x))^k$. **考察最高次项，有** $a_n^k = a_n$. **因为** $f(x)$ **是实系数多项式，**$k \geqslant 2$, **于是有**

$$
a_n = \begin{cases} \pm 1 & k \text{ 为奇数}, \\ 1 & k \text{ 为偶数}. \end{cases}
$$

假设除 a_n **外还有系数非零，最高次项为** $a_m x^m, 0 \leqslant m \leqslant n-1$, **那么** $f(x) = a_n x^n + a_m x^m + g(x)$, **其中** $\deg g < m$. **那么**

$$
\begin{aligned}
&(f(x))^k = a_n^k x^{kn} + k a_m x^{(k-1)n+m} + h(x) \\
&f(x^k) = a_n x^{kn} + a_m x^{km} + g(x^k)
\end{aligned}
$$

其中 $\deg h < (k-1)n + m$. **因为** $0 \leqslant m \leqslant n-1$ **且** $k \geqslant 2$, **所以** $(k-1)n + m \neq km$. **所以要使** $f(x^k) = (f(x))^k$, **必须有** $ka_m = 0$, **即** $a_m = 0$. **这与假设矛盾. 所以除最高次项外,** $f(x)$ **没有其他非零项。所以**

$$
f(x) = \begin{cases} \pm x^n & k \text{ 为奇数}, \\ x^n & k \text{ 为偶数}. \end{cases} \quad n = 0, 1, \ldots
$$

习题 5.2 第 3 题. **对如下多项式** $f(x), g(x)$, **求次数最低的多项式** $u(x), v(x)$, **使** $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$.

(1). $f(x) = x^3, g(x) = (x-3)^2$

解：辗转相除有

$$x^3 = (x+6)\cdot(x-3)^2 + 27(x-2)$$
$$(x-3)^2 = \frac{x-4}{27}\cdot 27(x-2) + 1$$

进行回代，有

$$1 = \left(1 + \frac{(x-4)(x+6)}{27}\right)\cdot(x-3)^2 + \frac{-x+4}{27}\cdot x^3$$

于是 $u(x) = \frac{-x+4}{27}, v(x) = \frac{x^2+2x+3}{27}$.

习题 5.2 第 4 题. **如果两个整系数三次方程有公共的无理根，那么它们还有另一个公共根。**

证明：设整系数三次方程 $f(x) = 0, g(x) = 0$ **有公共无理根** $\alpha \in \mathbb{R}$. **令** $h(x) \in \mathbb{Q}[x]$ **为** α **在** $\mathbb{Q}$ **上的极小多项式，即满足** $h(\alpha) = 0$ **的首一的有理系数多项式中次数最低的。首先，**$\deg h \leqslant \deg f$. **其次，必须有** $h(x)|f(x)$, **否则可以在** $\mathbb{Q}[x]$ **上做带余除法** $f(x) = h(x)\cdot s(x) + r(x)$, **其中** $\deg r < \deg h$, **这与** $h(x)$ **的定义矛盾。基于同样的原因，有** $h(x)|g(x)$.

由于 α **是无理数，所以** $\deg h \geqslant 2$, **而且** $h(x)$ **没有有理根，否则** $h(x) = h'(x)(x-\beta), \beta \in \mathbb{Q}$, $h'(x) \in \mathbb{Q}[x], \deg h' < \deg h, h'(\alpha) = 0$.

综上可知，$f(x)$ **与** $g(x)$ **除了** α **外，还至少有另一个公共无理根，为** $h(x)$ **的根。**

习题 5.2 第 8 题. **已知多项式** $r_1(x) = x^2 + 2x + 3$, $r_2(x) = 3x - 7$. **矩阵** $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$, **其中**

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

试验证 $r_1(A_1) = B_1, r_2(A_2) = B_2$. **并求一个最低次数的多项式** $f(x)$ **使** $f(A) = B$.

解：容易算得 $A_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$, **所以**

$$r_1(A_1) = A_1^2 + 2A_1 + 3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ & 0 & 2 \\ & & 0 \end{pmatrix} + 3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 3 & 2 \\ & & 3 \end{pmatrix} = B_1.$$

$r_2(A_2)$ **可以直接计算**

$$r_2(A_2) = 3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 7 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = B_2.$$

易知 $f(A) = f(\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} f(A_1) & 0 \\ 0 & f(A_2) \end{pmatrix}$. **那么要使** $f(A) = B$, **只要使** $f(A_1) = B_1$, $f(A_2) = B_2$ **即可。易知** A_1 **的极小多项式为** $g_1(x) = x^3$, A_2 **的极小多项式为** $g_2(x) = (x-3)^2$, **所以**

多项式 $f(x)$ 就是满足

$$f(x) \equiv r_1(x) \mod g_1(x), \quad f(x) \equiv r_2(x) \mod g_2(x)$$

的次数最低的多项式。这一问便化为了习题 5.2 第 7 题。

根据习题 5.2 第 3 题第 (1) 问，有 $u(x) = \frac{-x+4}{27}, v(x) = \frac{x^2+2x+3}{27}$, 使得 $g_1(x)u(x) + g_2(x)v(x) = 1$, 那么

$$\begin{aligned} f_0(x) &:= g_1(x)u(x)r_2(x) + g_2(x)v(x)r_1(x) \\ &= x^3 \cdot \frac{-x+4}{27} \cdot (3x-7) + (x-3)^2 \cdot \frac{x^2+2x+3}{27} \cdot (x^2+2x+3) \end{aligned}$$

即满足

$$f_0(x) \equiv r_1(x) \mod g_1(x), \quad f_0(x) \equiv r_2(x) \mod g_2(x)$$

由于任意两个满足上式的多项式 $f(x), f'(x)$, 都必须有 $g_1(x)g_2(x)|(f(x) - f'(x))$, 所以次数最低的 $f(x)$ 即为 $f_0(x)$ 除以 $g_1(x)g_2(x)$ 的余式:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_0(x) \mod g_1(x)g_2(x) = (g_1(x)u(x)r_2(x) + g_2(x)v(x)r_1(x)) \mod g_1(x)g_2(x) \\ &= g_1(x) \cdot (u(x)r_2(x) \mod g_2(x)) + g_2(x) \cdot (v(x)r_1(x) \mod g_1(x)) \\ &= \frac{x^3}{27}((-x+4)\cdot(3x-7) \mod (x-3)^2) + \frac{(x-3)^2}{27}((x^2+2x+3)\cdot(x^2+2x+3) \mod x^3) \\ &= \frac{x^3}{27}(x-1) + \frac{(x-3)^2}{27}(10x^2+12x+9) \\ &= \frac{1}{27}(11x^4 - 49x^3 + 27x^2 + 54x + 81) \end{aligned}$$

第 **6** 题. 设 $V = \mathbb{F}[x]$ 是 $\mathbb{F}$ 上全体一元多项式关于多项式加法和数乘多项式运算构成的 $\mathbb{F}$ 上线性空间，用 $V_n = \mathbb{F}_n[x]$ 表示 V 中全体次数 $\leqslant n$ 的多项式集合，则 V_n 构成 V 的一个子空间，

(1). 证明 $1, x-1, \ldots, (x-1)^n$ 构成 V_n 的一组基

(2). 对于 $f(x) = x^n + \cdots + x + 1 \in V_n$, 求 $f(x)$ 在上述基下的坐标。

解：这题基本与习题 2.7 第 7 题类似。在哪里我们考察的是 $x-c, c \in \mathbb{F}$, 是比 $x-1$ 更一般的情况。以下我们都考察 $x-c$ 的情形。

(1). 只要证明 $1, (x-c), (x-c)^2, \cdots, (x-c)^n$ 线性无关即可。假设存在不全为 0 的实数 $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ 使得

$$f_0(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-c) + \cdots + \lambda_n(x-c)^n = 0$$

那么 $f_0(x)$ 的 n 阶导函数 $f_0^{(n)}(x) = n!\lambda_n = 0$，从而有 $\lambda_n = 0$。逐步反推可以导出 $\lambda_{n-1} = \cdots = \lambda_0 = 0$，矛盾。

(2). 我们考虑一个更一般的 n 次多项式 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \lambda_0 + \lambda_1(x-c) + \cdots + \lambda_n(x-c)^n$，那么 $f_0^{(n)}(x) = n!a_n = n!\lambda_n$，故 $\lambda_n = a_n$。将所得的 $\lambda_n, \cdots, \lambda_{n-k}$ 回代，并考察 $f_0^{(n-k-1)}(c)$，则有

$$f_0^{(n-k-1)}(c) = (n-k-1)!\lambda_{n-k-1} = (n-k-1)!a_{n-k-1} + \frac{(n-k)!}{1!}ca_{n-k} + \cdots + \frac{n!}{(k+1)!}c^{k+1}a_n$$

得 $\lambda_{n-k-1}=a_{n-k-1}+C_{n-k}^{1}ca_{n-k}+\cdots+C_{n}^{k+1}c^{k+1}a_{n}$ 所以有

$$\begin{pmatrix}\lambda_n\\ \vdots\\ \lambda_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&&&\\ C_n^1c&1&&&\\ C_n^2c^2&C_{n-1}^1c&1&&\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\\ C_n^1c^n&C_{n-1}^{n-1}c^{n-1}&C_{n-2}^{n-2}c^{n-2}&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\ \vdots\\ a_0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_n\\ \vdots\\ a_0\end{pmatrix}.$$

故 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 在这组基下的坐标为

$$\begin{pmatrix}\lambda_n\\ \vdots\\ \lambda_0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_n\\ \vdots\\ a_0\end{pmatrix}.$$

若考察 $f_0^{(n-k-1)}(0)$，则有

$$f_0^{(n-k-1)}(0)=(n-k-1)!a_{n-k-1}=(n-k-1)!\lambda_{n-k-1}+\frac{(n-k)!}{1!}(0-c)\lambda_{n-k}+\cdots+\frac{n!}{(k+1)!}(0-c)^{k+1}\lambda_n$$

得 $a_{n-k-1}=\lambda_{n-k-1}+C_{n-k}^{1}(-c)\lambda_{n-k}+\cdots+C_{n}^{k+1}(-c)^{k+1}\lambda_{n}$ 所以有

$$\begin{pmatrix}a_n\\ \vdots\\ a_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&&&\\ C_n^1(-c)&1&&&\\ C_n^2(-c)^2&C_{n-1}^1(-c)&1&&\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\\ C_n^1(-c)^n&C_{n-1}^{n-1}(-c)^{n-1}&C_{n-2}^{n-2}(-c)^{n-2}&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_n\\ \vdots\\ \lambda_0\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}\lambda_n\\ \vdots\\ \lambda_0\end{pmatrix}$$

则 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 在这组基下的坐标为

$$\begin{pmatrix}\lambda_n\\ \vdots\\ \lambda_0\end{pmatrix}=B^{-1}\begin{pmatrix}a_n\\ \vdots\\ a_0\end{pmatrix}.$$