2022 秋高等代数习题课

2022-12-2 第七次习题课

第一题 (习题 5.4 第 4 题)

(1) 求以 $2+\sqrt{3}$ 为根的最低次数的首一的有理系数多项式 $g(x)$.

(2) 设 $f(x)=x^5-4x^4+3x^3-2x^2+x-1$, 求 $f(2+\sqrt{3})$.

(3) 用 (1) 中求出的 $g(x)$ 除 $f(x)=x^5-4x^4+3x^3-2x^2+x-1$ 得到商 $q(x)$ 和余式 $r(x)$, 将 $f(x)$ 写成 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$ 的形式，再将 $x=2+\sqrt{3}$ 代入求 $f(2+\sqrt{3})$. 是否比 (2) 中更简便?

(4) 设 $h(x)$ 是任一有理系数多项式，$2+\sqrt{3}$ 是 $h(x)$ 的根，求证：$g(x)$ 整除 $h(x)$, 并且 $2-\sqrt{3}$ 也是 $h(x)$ 的根。

解：(1) 记 $a=2+\sqrt{3}$, 容易看到 $(a-2)^2=3$, 所以多项式

$$(x-2)^2-3=x^2-4x+1$$

的一个根为 a. 此多项式为 2 次的首一的有理系数多项式。由于 $2+\sqrt{3}$ 不是有理数，所以 $g(x)$ 次数必须大于 1.（大家应该在数学分析课上证明过类似 $\sqrt{3}$ 不是有理数这种结论）因此

$$g(x)=x^2-4x+1$$

即为以 $2+\sqrt{3}$ 为根的最低次数的首一的有理系数多项式。假设 $h(x)$ 是另一个以 $2+\sqrt{3}$ 为根的 2 次的首一的有理系数多项式。那么 $\deg(g-h)<2$, 且 $(g-h)(2+\sqrt{3})=g(2+\sqrt{3})-h(2+\sqrt{3})=0$, 那么必须有 $h=g$, 否则 $g-h$ 就是一个以 $2+\sqrt{3}$ 为根的次数低于 2 的多项式，与 $2+\sqrt{3}$ 不是有理数矛盾。

(2) 由于 $a=2+\sqrt{3}$ 满足 $g(a)=0$, 即 $a^2-4a+1=0$, 即

$$a^2=4a-1.$$

根据上式，可以以一种递归的方式把 a^n 化为 a 的 1 次多项式，$n\geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
a^3&=a\cdot a^2=a(4a-1)=4a^2-a=4(4a-1)-a=15a-4\\
a^4&=a\cdot a^3=a(15a-4)=15(4a-1)-4a=56a-15\\
a^5&=a\cdot a^4=a(56a-15)=56(4a-1)-15a=209a-56
\end{aligned}$$

因此有

$$f(a)=a^5-4a^4+3a^3-2a^2+a-1$$

$$
\begin{aligned}
&= (209a-56) - 4(56a-15) + 3(15a-4) - 2(4a-1) + a - 1 \\
&= 23a - 7 = 23(2+\sqrt{3}) - 7 \\
&= 39 + 23\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

(3) 我们用多项式的带余除法：

$$
\begin{aligned}
r_1(x) &= f(x) - x^3 \cdot g(x) = -4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1 - x^3(-4x+1) \\
&= -4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1 + 4x^4 - x^3 \\
&= 2x^3 - 2x^2 + x - 1 \\
r_2(x) &= r_1(x) - 2x \cdot g(x) = -2x^2 + x - 1 - 2x(-4x+1) \\
&= -2x^2 + x - 1 + 8x^2 - 2x \\
&= 6x^2 - x - 1 \\
r_3(x) &= r_2(x) - 6 \cdot g(x) = -x - 1 - 6(-4x+1) = 23x - 7
\end{aligned}
$$

因为 $\deg r_3 = 1 < 2 = \deg g$, 带余除法结束。可以看到和 (2) 中计算结果一致。或者我们写成更加熟悉的形式：

$$
\begin{array}{r@{}l}
 & \quad\; x^3 \qquad\qquad\quad + 2x + 6 \\
\cline{2-2}
x^2 - 4x + 1 \big) & \; x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1 \\
 & -x^5 + 4x^4 - x^3 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 2x^3 - 2x^2 + x \\
 & \qquad\quad -2x^3 + 8x^2 - 2x \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad 6x^2 - x - 1 \\
 & \qquad\qquad\quad -6x^2 + 24x - 6 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 23x - 7
\end{array}
$$

(4) 若 $2+\sqrt{3}$ 是 $h(x)$ 的根，那么根据 $g(x)$ 的选取知道 $\deg h \geqslant \deg g$. 于是令 $h(x) = g(x)q(x) + r(x)$, $\deg r < \deg g$. 若 $r(x) \neq 0$, 那么 $2+\sqrt{3}$ 也是 $r(x)$ 的根，这与 $2+\sqrt{3}$ 不是有理数矛盾。于是必须有 $r(x) = 0$, 即知 $g(x)$ 整除 $h(x)$. 由于 $2-\sqrt{3}$ 是 $g(x)$ 的根，从而也是 $h(x)$ 的根。

这里 $2-\sqrt{3}$ 是 $2+\sqrt{3}$ 的共轭元（在 involution $\sigma : \mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q}$, $\sqrt{3} \mapsto -\sqrt{3}$ 下），从而也是 $g(x)$ 的根。类似的结论大家会在日后要学习的抽象代数、代数数论等后续课程中学习更多。

第二题 (习题 5.4 第 6 题) 求多项式 $x^3 + px + q$ 有重根的条件。

Hint: 这题考察了 “5.4.2 重因式与重根” 的知识。

解：令 $f(x) = x^3 + px + q$. 由定理 5.4.3 知，

$$
f(x) \text{ 有重根} \iff (f(x), f'(x)) = r(x) \neq 1.
$$

容易算得 $f'(x) = 3x^2 + p$. 利用辗转相除法（同时假设 $p \neq 0$），

$$
r_1(x) = f(x) - \frac{1}{3}x \cdot f'(x) = x^3 + px + q - \left(x^3 + \frac{p}{3}x\right) = \frac{2}{3}px + q
$$

$$r_2(x) = f'(x) - \left(\frac{9}{2p}x - \frac{27q}{4p^2}\right) \cdot r_1(x)$$
$$= 3x^2 + p - \left(3x^2 + \frac{9q}{2p}x - \frac{9q}{2p}x - \frac{27q^2}{4p^2}\right) = p + \frac{27q^2}{4p^2}$$

于是必须有 $0 = r_2(x) = p + \dfrac{27q^2}{4p^2}$, 即 $4p^3 + 27q^2 = 0$. 以上辗转相除过程中的 $\dfrac{1}{3}x$, $\dfrac{9}{2p}x - \dfrac{27q}{4p^2}$ 都是多项式的带余除法得到的商。

若 $p = 0$, 那么显然只要 q 不等于 0, $f(x)$ 就没有重根。所以，此时 $f(x)$ 有重根 $\Rightarrow q = 0$. 这个关系也能用 $4p^3 + 27q^2 = 0$ 表达。

更一般地，我们可以通过多项式的判别式（discriminant）来判断它是否有重根。一个多项式有重根当且仅当它的判别式为 0. 例如我们在中学已经学习过了，对一个二次多项式 $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, 它在实数域内的根的情况完全由它的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 决定：

- $\Delta > 0 \Rightarrow f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 内有两个不同的实根；
- $\Delta = 0 \Rightarrow f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 内有一个实根；
- $\Delta < 0 \Rightarrow f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 内无实根，但在 $\mathbb{C}$ 内有两个共轭（不同）的虚根。

设 n 次多项式
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,\ a_n \neq 0,$$
系数属于某个域 $\mathbb{F}$, 那么它的判别式定义为
$$\mathrm{Disc}_x(f) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \in \mathbb{F}.$$
这里的 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 为 $f(x)$ 在代数闭域 $\bar{\mathbb{F}}$ 内的根。

多项式 f 的判别式可以利用多项式 f 与它的微商 f' 的结式（resultant）进行计算。一般地，设
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0,\ b_m \neq 0,$$
是另一个系数在域 $\mathbb{F}$ 内的 m 次多项式，那么 f, g 的结式被定义为
$$\mathrm{Res}(f, g) = a_n^n b_m^m \prod_{\substack{(\lambda,\mu)\in\bar{\mathbb{F}}^2 \\ f(\lambda)=0, g(\mu)=0}} (\lambda - \mu) \in \mathbb{F}$$
可以看出判别式与结式的关系为
$$\mathrm{Disc}_x(f) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{a_n} \mathrm{Res}_x(f, f')$$
可以很容易地列举结式的部分性质：

- $\mathrm{Res}(f, g) = (-1)^{mn}\,\mathrm{Res}(g, f)$
- $\mathrm{Res}(f_1 f_2, g) = \mathrm{Res}(f_1, g) \cdot \mathrm{Res}(f_2, g)$
- 设 $r(x) = f(x) - q(x) \cdot g(x)$, 那么 $\mathrm{Res}(r, g) = b_m^{\deg r - n}\,\mathrm{Res}(f, g)$

结式可用如下的（Sylvester matrix 的）行列式进行计算

$$\operatorname{Res}(f,g)=\begin{vmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & b_m & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 & b_{m-1} & b_m & \cdots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \ddots & 0 & b_{m-2} & b_{m-1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_n & \vdots & \vdots & \ddots & b_m \\ a_0 & a_1 & \cdots & \vdots & b_0 & b_1 & \cdots & \vdots \\ 0 & a_0 & \ddots & \vdots & 0 & b_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_1 & \vdots & \vdots & \ddots & b_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 \end{vmatrix}_{(m+n)\times(m+n)}$$

可以算得三次多项式 $f(x)=x^3+px+q$ 的判别式为

$$\operatorname{Disc}_x(f)=-4p^3-27q^2.$$

Python 软件包 sympy 提供了计算多项式判别式的功能，例子如下

```
>>> import sympy as sp
>>> x, p, q = sp.symbols("x, p, q")
>>> f = sp.Poly(x**3 + p * x + q, x)
>>> f.discriminant()
```

更多例子可见Jupyter Notebook.

第三题 (习题 5.4 第 8 题 (2)) n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 是任意正整数，证明：

$$(x^4+x^3+x^2+x+1)|(x^{5n_1}+x^{5n_2+1}+x^{5n_3+2}+x^{5n_4+3}+x^{5n_5+4})$$

Hint: 这题考察了同余的一些性质：

- $a\equiv b \mod m, c\equiv d \mod m \Rightarrow a-c\equiv b-d \mod m.$
- $a\equiv b \mod m, c\equiv d \mod m \Rightarrow ac\equiv bd \mod m$, 特别地，$a^k\equiv b^k \mod m.$

解：考察 $x^{5n+k}=(x^5)^n\cdot x^k$ 除以 $x^4+x^3+x^2+x+1$ 的余式，其中 n 为任意正整数，$0\le k<5$. 由同余的形式知道，我们只要计算 x^5 除以 $x^4+x^3+x^2+x+1$ 的余式即可。由于

$$x^5=(x-1)\cdot(x^4+x^3+x^2+x+1)+1,$$

所以有

$$x^5\equiv 1 \mod x^4+x^3+x^2+x+1,$$

进而有

$$x^{5n+k}\equiv 1^n\cdot x^k=x^k \mod x^4+x^3+x^2+x+1.$$

所以

$$
\begin{aligned}
&x^{5n_1}+x^{5n_2+1}+x^{5n_3+2}+x^{5n_4+3}+x^{5n_5+4}\\
&\qquad\qquad\equiv 1+x+x^2+x^3+x^4\equiv 0 \mod x^4+x^3+x^2+x+1,
\end{aligned}
$$

即 $(x^4+x^3+x^2+x+1)|(x^{5n_1}+x^{5n_2+1}+x^{5n_3+2}+x^{5n_4+3}+x^{5n_5+4})$.

第四题 设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{C}[x]$, $a_n\neq 0$, 且 $f(x)$ 的 n 个根为 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. 求

(1) 以 $c\alpha_1,\ldots,c\alpha_n$ 为根的一个 n 次多项式，$c\neq 0$.

(2) 以 $1/\alpha_1,\ldots,1/\alpha_n$ 为根的一个 n 次多项式，$\alpha_i\neq 0$.

解: (1) 依题，我们有

$$
f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0=a_n\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i),
$$

从而有

$$
\frac{a_{n-k}}{a_n}=(-1)^ke_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=(-1)^k\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n}\alpha_{j_1}\cdots\alpha_{j_k},
$$

这里的 $e_k=e_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $0\leqslant k\leqslant n$, 是 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 的初等对称多项式，同时约定 $e_0=1$.

若 $g(x)$ 以 $c\alpha_1,\ldots,c\alpha_n$ 为根，那么

$$
\begin{aligned}
g(x)=t\prod_{i=1}^{n}(x-c\alpha_i)&=t\sum_{k=0}^{n}x^{n-k}(-c)^ke_k\\
&=t\sum_{k=0}^{n}x^{n-k}(-c)^k(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}=\frac{t}{a_n}\sum_{k=0}^{n}x^{n-k}c^ka_{n-k}\\
&=\frac{t}{a_n}\sum_{k=0}^{n}c^{n-k}a_kx^k
\end{aligned}
$$

取 $t=a_n$, 则 $g(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}c^{n-k}a_kx^k$ 以 $c\alpha_1,\ldots,c\alpha_n$ 为根。

(2) 考虑有理式

$$
\tilde{f}(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)=a_n\frac{1}{x^n}+\cdots+a_1\frac{1}{x}+a_0=\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^{n-k}}{x^n}=\frac{g(x)}{h(x)}.
$$

其中 $g(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^{n-k}, h(x)=x^n$ 为多项式。那么任取 α_k, 令 $x=1/\alpha_k$, 有

$$
\tilde{f}(x)=f(1/x)=f(\alpha_k)=0,
$$

同时 $h(x)=h(1/\alpha_k)=1/\alpha_k^n\neq 0$, 所以必须有 $g(1/\alpha_k)=0$. 于是 $g(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^{n-k}$ 就是一个以 $1/\alpha_1,\ldots,1/\alpha_n$ 为根的 n 次多项式。

第五题 **给出实系数 4 次多项式在 $\mathbb{R}$ 上所有不同类型的标准分解式。**

解: 4 次实系数多项式在复数域 $\mathbb{C}$ 上的根的所有可能的情况如下

- **有 4 个实根** a_1, a_2, a_3, a_4;
- **有 2 个实根** a_1, a_2, **以及 1 对复共轭的虚根** $a \pm bi$;
- **有 2 对复共轭的虚根** $a_1 \pm b_1 i, a_2 \pm b_2 i$.

于是, 对应第一种情况的分解式为

$$f(x) = t(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4);$$

对应第二种情况的分解式为

$$\begin{aligned} f(x) &= t(x-a_1)(x-a_2)(x-(a+bi))(x-(a-bi)) \\ &= t(x-a_1)(x-a_2)(x^2-2ax+a^2+b^2); \end{aligned}$$

对应第二种情况的分解式为

$$\begin{aligned} f(x) &= t(x-(a_1+b_1 i))(x-(a_1-b_1 i))(x-(a_2+b_2 i))(x-(a_2-b_2 i)) \\ &= t(x^2-2a_1 x+a_1^2+b_1^2)(x^2-2a_2 x+a_2^2+b_2^2). \end{aligned}$$

以上的 $a, b, a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, t \in \mathbb{R}, t \neq 0.$

第六题 **(习题 5.1 第 8 题) 给定正整数 $k \geqslant 2$, 求非零实系数多项式 $f(x)$ 满足条件 $f(x^k) = (f(x))^k$.**

解: 设非零实系数多项式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, $n \geqslant 0$, **满足** $f(x^k) = (f(x))^k$. **考察最高次项，有** $a_n^k = a_n$. **因为** $f(x)$ **是实系数多项式，**$k \geqslant 2$, $a^{k-1} = 1$ **的实根至多是** ± 1. **于是有**

$$a_n = \begin{cases} \pm 1 & k \text{ 为奇数}, \\ 1 & k \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

假设除 a_n **外还有系数非零，最高次项为** $a_m x^m$, $0 \leqslant m \leqslant n-1$, **那么** $f(x) = a_n x^n + a_m x^m + g(x)$, **其中** $\deg g < m$. **那么**

$$\begin{aligned} &(f(x))^k = a_n^k x^{kn} + k a_n^{k-1} a_m x^{(k-1)n+m} + h(x) \\ &f(x^k) = a_n x^{kn} + a_m x^{km} + g(x^k) \end{aligned}$$

其中 $\deg h < (k-1)n + m$. **因为** $0 \leqslant m \leqslant n-1$ **且** $k \geqslant 2$, **所以** $(k-1)n + m \neq km$. **所以要使** $f(x^k) = (f(x))^k$, **必须有** $k a_m = 0$, **即** $a_m = 0$. **这与假设矛盾. 所以除最高次项外,** $f(x)$ **没有其他非零项。所以**

$$f(x) = \begin{cases} \pm x^n & k \text{ 为奇数}, \\ x^n & k \text{ 为偶数}. \end{cases} \quad n = 0, 1, \ldots$$