2022 秋高等代数习题课

2022-12-16 第八次习题课

第一题 (习题 5.6 第 1 题) 证明：二元多项式 x^2+y^2-1 在任意数域上都不可约。

证明：我们用反证法，假设二元多项式 $f(x,y)=x^2+y^2-1$ 可约，那么由于 $\deg f=2$, 它能分解成两个一次多项式的乘积，设为

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2) \\ &= a_1a_2x^2+b_1b_2y^2+c_1c_2+(a_1b_2+a_2b_1)xy+(a_1c_2+a_2c_1)x+(b_1c_2+b_2c_1)y \end{aligned}$$

比较系数有

$$\begin{cases} 1=a_1a_2 \\ 1=b_1b_2 \\ -1=c_1c_2 \\ 0=a_1b_2+a_2b_1 \\ 0=a_1c_2+a_2c_1 \\ 0=b_1c_2+b_2c_1 \end{cases}$$

后三个等式可变形为

$$\begin{cases} a_1b_2=-a_2b_1 \\ a_2c_1=-a_1c_2 \\ b_1c_2=-b_2c_1 \end{cases}$$

将以上三个等式乘在一起有 $a_1a_2b_1b_2c_1c_2=(-1)^3a_1a_2b_1b_2c_1c_2$, 进而有 $-1=1$, 在特征 0 的数域上不可能成立。

在特征为 2 的域上，例如 $\mathbb{F}_2$, $f(x,y)=x^2+y^2-1$ 是可以进行分解的：

$$f(x,y)=x^2+y^2-1=(x+y+1)^2$$

第二题 (习题 5.7 第 1 题) 设 a,b,c 都是实数。求证 a,b,c 都是正数的充分必要条件是：$a+b+c>0$, $ab+ac+bc>0$, $abc>0$.

Hint: 这题可以直接去做，也可以利用 Descartes' Rule of Signs：一般地，设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 为 n 次实系数多项式，$a_n\neq 0$. (一般还假设 $a_0\neq 0$, 否则可以化为更低次的情况) 记 $f(x)$ 所有非零系数按相应的幂次降幂排列的序列记为

$$b_m, b_{m-1}, \ldots, b_0,$$

相应的幂次记为

$$d_m > d_{m-1} > \cdots > d_0.$$

定义

$$\begin{aligned} s(f) &:= \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} \left| \frac{|b_i|}{b_i} - \frac{|b_{i-1}|}{b_{i-1}} \right| \\ &= \#\{i \mid 1 \leqslant i \leqslant m,\ b_i b_{i-1} < 0\} \\ p(f) &:= f(x) \text{ 的正实根数量} \end{aligned}$$

（重根计算重数）那么

$$2|(s(f) - p(f)) \geqslant 0.$$

这里的 $s(f)$ 实际上就是 $f(x)$ 的非零系数序列 $b_m, b_{m-1}, \ldots, b_0$ 相邻两项符号的变化次数。

将此结论应用到多项式 $f(-x)$ 上，可得出 $f(x)$ 负实根数目的结论：

$$2|(s'(f) - p'(f)) \geqslant 0,$$

$$\begin{aligned} s'(f) &:= \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} \left| (-1)^{d_i} \frac{|b_i|}{b_i} - (-1)^{d_{i-1}} \frac{|b_{i-1}|}{b_{i-1}} \right| \\ &= \#\{i \mid 1 \leqslant i \leqslant m,\ (-1)^{d_i + d_{i-1}} b_i b_{i-1} < 0\} \\ p'(f) &:= f(x) \text{ 的负实根数量} \end{aligned}$$

证明：先假定 Descartes' Rule of Signs 成立，并将其应用到此题。假设 a, b, c 都是实数，但不知道正负。现在有的条件是 $a + b + c > 0, ab + ac + bc > 0, abc > 0$. 考察多项式

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc.$$

其非零系数按降幂排列为

$$1, -(a + b + c), ab + ac + bc, -abc,$$

这个序列的符号为

$$+,\ -,\ +,\ -,$$

变号次数为 3，从而知其正实根数目为 3 或 1. 而考察序列

$$1 \cdot (-1)^3, -(a + b + c) \cdot (-1)^2, (ab + ac + bc) \cdot (-1)^1, -abc \cdot (-1)^0$$

即序列

$$-1, -(a + b + c), -(ab + ac + bc), -abc$$

相邻两项的符号变化，知 $f(x)$ 的负实根个数为 0. 所以在题设情况下，$f(x)$ 的根 a, b, c 都是正的。于是充分性得证。必要性是显然的。

下面我们对 f 的次数用归纳法证明 Descartes' Rule of Signs.

$n = 1$ 时，$f(x) = a_1 x + a_0$. 我们不考虑 $a_0 = 0$ 的平凡情况。当 $s(f) = 1$ 时，即 a_1, a_0 异号时，$f(x) = 0$ 的根 $-a_0/a_1$ 是正实数，有 $p(f) = 1$. $s(f) = 0$ 时，a_1, a_0 同号，$f(x) = 0$ 的根 $-a_0/a_1$ 是负实数，有 $p(f) = 0$. 于是，$n = \deg(f) = 1$ 时，总有 $s(f) - p(f) = 0$, 满足我们要证明的结论 $2|s(f) - p(f) \geqslant 0$.

假设对所有次数 $\leqslant n$ 的实系数多项式 f, 都有 $2|s(f)-p(f)\geqslant 0$ 成立。现任取一个 $n+1$ 次实系数多项式

$$f(x)=a_{n+1}x^{n+1}+a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0,\ \ a_{n+1},a_0\neq 0.$$

那么 $g(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 就是一个次数 $\leqslant n$ 的多项式，根据归纳假设，首先有

$$2|s(g)-p(g).$$

我们不妨设 $a_n\neq 0$. 由于 $s(g)-p(g)$ 是一个偶数，那么 $s(g),p(g)$ 必须同时是偶数或者同时是奇数。我们分情况讨论。

情况 1. $s(g),p(g)$ 同时为偶数。那么由于 $s(g)$ 为偶数，即序列 $a_n,\ldots,a_1,a_0$ 除去 0 之后得到的序列的变号次数为偶数，因此 a_n 必须与 a_0 同号。

情况 1.1 a_{n+1},a_n,a_0 都是正实数。由于 a_{n+1},a_n 同号，所以 $s(f)=s(g)$. 由于最高次项系数 a_{n+1} 与常数项 a_0 同号，所以 $f(x)$ 的正实根数目 $p(f)$ 为偶数（随后证明）。于是 $2|s(f)-p(f)$.

情况 1.2 a_{n+1} 是负实数，a_n,a_0 都是正实数。此时 a_{n+1},a_n 异号，$s(f)=s(g)+1$ 为奇数。由于最高次项系数 a_{n+1} 与常数项 a_0 异号，$f(x)$ 的正实根数目 $p(f)$ 为奇数。于是依然有 $2|s(f)-p(f)$.

情况 1.3 a_{n+1} 是正实数，a_n,a_0 都是负实数；情况 1.4 a_{n+1} 是负实数，a_n,a_0 都是负实数；以及情况 2. $s(g),p(g)$ 同时为奇数的相应的 4 种情况都能类似证明有 $2|s(f)-p(f)$.

现在我们来证明，若 $n+1$ 次多项式 $f(x)$ 的最高次项系数 a_{n+1} 与常数项 a_0 同号，则 $f(x)$ 的正实根数目为偶数。将 $f(x)$ 的互不相等的正实根按从小到大排列为

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_m,$$

对应的重数分别为 $n_1,n_2,\ldots,n_m$. 容易看出在 $x\in[0,+\infty)$ 内，$f(x)$ 的值只有可能在 $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ 附近变号。对 $1\leqslant i\leqslant m$ 有

$$f(x)=(x-\lambda_i)^{n_i}g_i(x),$$

$g_i(x)$ 在 λ_i 的某个小邻域内非零（从而是恒正或者恒负的）。若 n_i 为偶数，那么在这个小领域内，$f(x)$ 的值恒非负或者恒非正，不变号。类似可知，若 n_i 为奇数，则多项式 $f(x)$ 在 λ_i 的某个小邻域内变号一次。$f(x)$ 的最高次项系数 a_{n+1} 与常数项 a_0 同号, 所以要么 $f(0)<0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ (对应 a_{n+1},a_0 同负) 或者 $f(0)>0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ (对应 a_{n+1},a_0 同正)。那么 $f(x)$ 的值在 $x\in[0,+\infty)$ 内需要变号偶数次。也就是说 $n_1,n_2,\ldots,n_m$ 中的奇数的数目为一个偶数。所以

$$p(f)=n_1+n_2+\cdots+n_m$$

是一个偶数。同理可证，若 $n+1$ 次多项式 $f(x)$ 的最高次项系数 a_{n+1} 与常数项 a_0 异号，则 $f(x)$ 的正实根数目为奇数。

最后，我们需要证明 $s(f)-p(f)\geqslant 0$. 考虑 $f(x)$ 的微商 $f'(x)$. 它是一个 n 次实系数多项式，而且系数符号都不变（除了 a_0 变为 0）。于是 $s(f)=s(f')+1$, 或者 $s(f)=s(f')$. 另一方面，由于 $f(x)$ 有 $p(f)$ 个正实根。当其中有 $m>1$ 个互异实根，它们构成了 $m-1$ 个闭区间。由微分中值定理，这些区间上都至少有一个点满足 $f'(x)=0$. 而对于其中的每个 k 重根 ($k>1$) 都是 $f'(x)$ 的至少 $k-1$ 重根。于是有 $p(f')\geqslant p(f)-1$. 当 $p(f)\leqslant 1$ 时，$p(f')\geqslant p(f)-1$ 平凡成立。对 $f'(x)$ 用归纳假设，有

$$s(f)\geqslant s(f')\geqslant p(f')\geqslant p(f)-1,$$

即 $s(f)-p(f)\geqslant -1$. 由于 $s(f)-p(f)$ 为偶数，所以上述不等式实际上为 $s(f)-p(f)\geqslant 0$.

另一种做法：必要性显然。我们只要证明充分性。首先，因为有 $abc>0$, 于是 a,b,c 中的负实数数目为偶数。若此数目为零，则证明完毕。下面我们只要证明 a,b,c 中有两个负实数的情况不可能成立即可。

我们用反证法，不妨设 $a,b<0,c>0$. 由于 $a+b+c>0$, 因此有

$$c>-(a+b)>0,$$

那么

$$(a+b)c<-(a+b)^2<0,$$

进而有

$$ab+(a+b)c<ab-(a+b)^2=-\frac{(a+b)^2}{2}-\frac{3}{4}(a^2+b^2)<0.$$

这与条件 $ab+ac+bc>0$ 矛盾。因此 a,b,c 中不可能有两个负实数。因此充分性得证。

第三题 (习题 5.7 第 2 题) 设 $1,\omega_1,\ldots,\omega_{n-1}$ 是 x^n-1, $n\geqslant 2$, 的全部不同的复数根。求证:

$$(1-\omega_1)(1-\omega_2)\cdots(1-\omega_{n-1})=n$$

证明: 令 $f(x)=x^n-1=(x-\omega_0)(x-\omega_1)\cdots(x-\omega_{n-1})$, 其中约定 $\omega_0=1$. 那么 $f(x)$ 的微商为

$$f'(x)=nx^{n-1}=\sum_{i=0}^{n-1}\prod_{\substack{0\leqslant j<n\\ j\neq i}}(x-\omega_j).$$

在上式中取 $x=1$, 由于上式右边的和式中，$i\neq 0$ 的乘积式中都有 $(x-1)$ 这一项，所以

$$\begin{aligned} n&=\prod_{\substack{0\leqslant j<n\\ j\neq 0}}(1-\omega_j)+\sum_{i=1}^{n-1}\prod_{\substack{0\leqslant j<n\\ j\neq i}}(1-\omega_j)\\ &=\prod_{0<j<n}(1-\omega_j)+\sum_{i=1}^{n-1}0\\ &=(1-\omega_1)(1-\omega_2)\cdots(1-\omega_{n-1}). \end{aligned}$$

第四题 设 $f(x)\in\mathbb{C}[x], f(x)|f(x^n), n\in\mathbb{Z}^+$. 证明 $f(x)$ 的根是零或者单位根。

证明: 不妨设 $f(x)$ 的最高次项次数为 m, 系数为 1. 那么 $f(x)$ 可以在 $\mathbb{C}[x]$ 内分解为 1 次式乘积

$$f(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-\lambda_i),$$

其中 $\lambda_1,\ldots,\lambda_m\in\mathbb{C}$ 为 $f(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 内的 m 个根。那么对于 $f(x^n)$, 我们有

$$f(x^n)=\prod_{i=1}^{m}(x^n-\lambda_i)=\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(x-\mu_{ij}),$$

其中 $\mu_{ij}, j=1,\ldots,n$, 是 $z^n=\lambda_i$ 在 $\mathbb{C}$ 内的 n 个根。

如果有 $f(x)|f(x^n)$, 即

$$\prod_{i=1}^{m}(x-\lambda_i)\Bigg|\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(x-\mu_{ij})\ ,$$

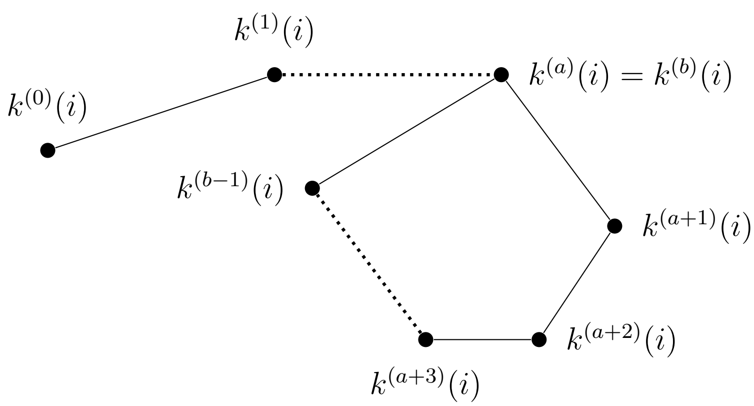
那么 $\forall i=1,\ldots,m$, 都存在下标 $1\leqslant k(i)\leqslant m, 1\leqslant j(i)\leqslant n$, 使得 $\lambda_i=\mu_{k(i)j(i)}$. (并且 $(k(1),j(1)),\ldots,(k(m),j(m))$ 是 m 个互异的二元组)

取定了这 m 个二元组之后, $\forall i=1,\ldots,m$, 如果 $k(i)=i$, 那么我们有 $\lambda_i=\mu_{ij(i)}$. 两边同时 n 次方之后即有 $\lambda_i^n=\mu_{ij(i)}^n=\lambda_i$, 此时必有 λ_i 为零或为 $n-1$ 次单位根。

若 $k(i)\neq i$, 我们可以考虑取值在 $\{1,2,\ldots,m\}$ 的序列

$$k^{(0)}(i):=i,\ \ k^{(1)}(i):=k(i),\ \ k^{(2)}(i):=k(k(i)),\ \ \ldots$$

此序列前 $m+1$ 个元素内必然出现重复的元素:



不妨设有 $k^{(a)}(i)=k^{(b)}(i), 0\leqslant a<b\leqslant m+1$, 那么会有

$$\mu_{k^{(b)}(i)j^{(b)}(i)}=\lambda_{k^{(b-1)}(i)}=\mu^n_{k^{(b-1)}(i)j^{(b-1)}(i)}=\cdots=\lambda^{n(b-a-1)}_{k^{(a)}(i)}.$$

($j^{(*)}(i)$ 的定义类似 $k^{(*)}(i)$) 两边同时 n 次方之后有

$$\lambda^{n(b-a)}_{k^{(a)}(i)}=\mu^n_{k^{(b)}(i)j^{(b)}(i)}=\lambda_{k^{(b)}(i)}=\lambda_{k^{(a)}(i)},$$

也就是说 $\lambda_{k^{(a)}(i)}$ 是零或者 $n(b-a)-1$ 次单位根。但是我们又有

$$\lambda_{k^{(a)}(i)}=\mu^n_{k^{(a)}(i)j^{(a)}(i)}=\lambda^n_{k^{(a-1)}(i)}=\mu^{2n}_{k^{(a-1)}(i)j^{(a-1)}(i)}=\cdots=\lambda_i^{an},$$

即 λ_i 的 an 次幂是零或者某个单位根，那么它本身就是零或者（另一个）单位根。

第五题 (习题 5.4 第 10 题) 求证方程 $x^3-x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}=0$ 的根不可能全为实数。

Hint: 我们再来回顾一下上次课讲的系数在某个域 $\mathbb{F}$ 内的 n 次多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0,\ a_n\neq 0,$$

判别式的定义

$$\mathrm{Disc}_x(f)=a_n^{2n-2}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)^2\in\mathbb{F}.$$

这里的 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 为 $f(x)$ 在代数闭域 $\bar{\mathbb{F}}$ 内的根。它可以通过 f 与其微商 f' 的结式 $R(f, f')$ 来计算：

$$\mathrm{Disc}_x(f) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{a_n} R(f, f')$$

对于一个一般形式的三次多项式 $ax^3 + bx^2 + cx + d$, 它的判别式等于

$$b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd.$$

通过变量替换，三次多项式一般可以（当域特征不等于 3 时）化为 $x^3 + px + q$ 的形式，而它的判别式等于

$$-4p^3 - 27q^2.$$

证明：对于一个一般的 n 次多项式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 其判别式为

$$\Delta = \mathrm{Disc}_x(f) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \in \mathbb{F}.$$

这里的 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 为 $f(x)$ 在代数闭域 $\bar{\mathbb{F}}$ 内的根。对于 3 次实多项式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 来说，如果它有 3 个实根，那么显然它的判别式是一个非负实数；如果他有复根 β, 那么 β 的复共轭 $\bar{\beta}$ 也是它的复根。设它的另一个实根为 α，那么它的判别式为

$$\Delta = a^4(\alpha - \beta)^2(\alpha - \bar{\beta})^2(\beta - \bar{\beta})^2 = a^4(\alpha^2 - \alpha(\beta + \bar{\beta}) + \beta\bar{\beta})^2(\beta - \bar{\beta})^2$$

因为 $\alpha^2 - \alpha(\beta + \bar{\beta}) + \beta\bar{\beta}$ 是实数，$\beta - \bar{\beta}$ 是纯虚数，所以判别式在这种情况下必然是一个负实数。即对 3 次方程来说

$$\begin{cases} \Delta > 0, & \text{有 } 3 \text{ 个互异实根}; \\ \Delta = 0, & \text{有 } 3 \text{ 个实根，并且其中有重根}; \\ \Delta < 0, & \text{有 } 1 \text{ 个实根，} 1 \text{ 对共轭的复根} \end{cases}$$

对于一般的三次方程，其判别式为

$$\Delta = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd$$

对于本题的 $x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}$, 其判别式为

$$(-1)^2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 4(-1)^3\left(-\frac{1}{6}\right) - 27\left(-\frac{1}{6}\right)^2 + 18(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{13}{6} < 0$$

或者做变量替换 $x \to x + \frac{1}{3}$ 得到 $x^3 - \frac{5}{6}x - \frac{11}{27}$，这个多项式的判别式的计算更简单

$$\Delta = -4\left(-\frac{5}{6}\right)^3 - 27\left(\frac{11}{27}\right)^2 = -\frac{13}{6} < 0.$$

所以它有一个实根，两个共轭的复根。