

2021 秋高等代数习题课

2021-11-12 第四次习题课

第 1 题. 讨论参数 λ 决定 $n \times n$ 的矩阵 $A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & \lambda \\ 1 & \cdots & \lambda & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩

解: 首先计算 $A(\lambda)$ 的行列式, 有

$$\begin{aligned} \det A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & \lambda \\ 1 & \cdots & \lambda & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & \lambda \\ 0 & \cdots & \lambda-1 & 1-\lambda \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda-1 & \cdots & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & \lambda+(n-1) \\ 0 & \cdots & \lambda-1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda-1 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (\lambda + (n-1)) (\lambda-1)^{n-1} \end{aligned}$$

所以当 $n \neq 1, 1-n$ 时, 矩阵 $A(\lambda)$ 行列式不为 0, 从而满秩, 秩为 n . 当 $n = 1$ 时, 矩阵 $A(\lambda)$ 所有元素值都为 1, 这样的矩阵秩为 1. 当 $n = 1-n$ 时, 矩阵 $A(\lambda)$ 在之前求行列式化简到最后一步对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -n & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

很容易看出这个矩阵的秩为 $n-1$. 另一种做法是把矩阵 $A(\lambda)$ 化为阶梯形

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1-n & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & \cdots & -n & n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -n & \cdots & 0 & n \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & \cdots & 1 & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

第2题. 设 V 是复数域 \mathbb{C} 上的 n 维线性空间, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是一组基. 证明 V 也是实数域 \mathbb{R} 上的 $2n$ 维线性空间, 并求出它的一组基. 更一般地, 设 V 是数域 \mathbb{F} 上的 n 维线性空间, \mathbb{F} 是子域 \mathbb{F}_0 的 m 维线性空间, 问 V 是域 \mathbb{F}_0 上多少维线性空间, 如何确定它的一组基?

解: 由于 V 是复数域 \mathbb{C} 上的线性空间, 其本身有加法, 满足有零元, 结合律, 交换律 (即 V 是一个交换群). 任取 $\lambda \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}, v \in V$, 定义数乘 λv 为 V 作为复数域 \mathbb{C} 上线性空间时的数乘, 相关的性质同样满足. 所以 V 也是实数域 \mathbb{R} 上的维线性空间, 记作 $V_{\mathbb{R}}$. 下面证明

$$\alpha_1, i\alpha_1, \dots, \alpha_n, i\alpha_n$$

是 $V_{\mathbb{R}}$ 的一组基. 由于 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是 V 作为复数域 \mathbb{C} 上线性空间的一组基, 任取 $v \in V_{\mathbb{R}}$, 存在 $\lambda_{11} + i\lambda_{12}, \dots, \lambda_{n1} + i\lambda_{n2} \in \mathbb{C}$ 使得

$$v = (\lambda_{11} + i\lambda_{12})\alpha_1 + \dots + (\lambda_{n1} + i\lambda_{n2})\alpha_n = \lambda_{11}\alpha_1 + \lambda_{12}(i\alpha_1) + \dots + \lambda_{n1}\alpha_n + \lambda_{n2}(i\alpha_n)$$

所以 $\alpha_1, i\alpha_1, \dots, \alpha_n, i\alpha_n$ 可以线性表出 $V_{\mathbb{R}}$ 中所有向量. 上式同时也可看出 $\alpha_1, i\alpha_1, \dots, \alpha_n, i\alpha_n$ 在 \mathbb{R} 上线性无关 (取 $v = 0$). 所以它是 $V_{\mathbb{R}}$ 的一组基, 从而知 V 是实数域 \mathbb{R} 上的 $2n$ 维线性空间.

若 V 是数域 \mathbb{F} 上的 n 维线性空间, \mathbb{F} 是子域 \mathbb{F}_0 的 m 维线性空间, 那么 V 是域 \mathbb{F}_0 上的 mn 维线性空间. 设 \mathbb{F} 作为 \mathbb{F}_0 上线性空间的一组基为 μ_1, \dots, μ_m , 那么 V 作为域 \mathbb{F}_0 上的线性空间的一组基可以取为

$$\{\mu_i\alpha_j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

第3题. 设 $V = \mathbb{F}^n, W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_1 + a_2 = a_2 - a_3 = 0 \right\}$. 求商空间 V/W 的维数与一组基.

解: W 为齐次线性方程组 $\begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ a_2 - a_3 = 0 \end{cases}$ 的解空间, 所以 $\dim W = n - 2$, 根据维数公式有

$$\dim V/W = \dim V - \dim W = n - (n - 2) = 2$$

令 $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, 那么 $W^\perp = \text{span}\{v_1, v_2\}$, 所以商空间 V/W 的一组基可以取为 $\bar{v}_1 = v_1 + W, \bar{v}_2 = v_2 + W$.

第4题. 设 \mathbb{R}^2 中三条不同直线的方程为

$$\ell_1: ax + by + c = 0$$

$$\ell_2: cx + ay + b = 0$$

$$\ell_3: bx + cy + a = 0$$

证明 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 交于一点 $\iff a + b + c = 0$.

证明：求三条直线方程交点的方程组可写为

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{其中 } A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 交于一点当且仅当 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ 有唯一解，这又等价于 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ 解空间维数为 1，即 A 的秩为 2。对 A 做行、列的初等变换有

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$$

若 $a+b+c \neq 0$ ，则有进一步变换

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a-c & b-c & 0 \\ c-b & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

由于 $\det \begin{pmatrix} a-c & b-c \\ c-b & a-b \end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = \frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)$ 。于是若有 $a=b=c$ ，此时 $\text{rank}(A) = 1$ ，其余情况下 $\text{rank}(A) = 3$ ，都不满足 $\text{rank}(A) = 2$ 。

若 $a+b+c = 0$ ，则进一步变换为

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} a & b & a+b+c \\ c & a & a+b+c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

考虑到 $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(a^2 - bc)$ ，此式等于 0 当且仅当 $a = b = c = 0$ ，但此时 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 就不是直线方程了。所以在 $a+b+c = 0$ 的情况下，总有 $\text{rank}(A) = 2$ 。于是

$$\ell_1, \ell_2, \ell_3 \text{ 交于一点} \iff a+b+c = 0$$

第 5 题 求循环矩阵 (Circulant Matrix) A 的行列式，

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}, \quad a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$$

解: 设 u 为任一 n 次单位根, 令 $\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ \vdots \\ u^{n-1} \end{pmatrix}$, 那么有

$$A\mu = \begin{pmatrix} a_0 + a_1u + \cdots + a_{n-1}u^{n-1} \\ a_{n-1} + a_0u + \cdots + a_{n-2}u^{n-1} \\ \vdots \\ a_1 + a_2u + \cdots + a_0u^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u) \\ uf(u) \\ \vdots \\ u^{n-1}f(u) \end{pmatrix} = f(u)\mu,$$

其中 $f(u) = a_0 + a_1u + \cdots + a_{n-1}u^{n-1}$. 现令 $u = \exp(2\pi i/n)$ 为 n 次本原单位根, $\omega_j = \begin{pmatrix} 1 \\ u^j \\ \vdots \\ u^{(n-1)j} \end{pmatrix}$,

$j = 0, \dots, n-1$, 那么有 $A\omega_j = f(u^j)\omega_j$. 又令 $W = (\omega_0, \dots, \omega_{n-1})$, 有

$$AW = (A\omega_0, \dots, A\omega_{n-1}) = (f(u^0)\omega_0, \dots, f(u^{n-1})\omega_{n-1}).$$

于是有

$$\det A \cdot \det W = \det(AW) = \det(f(u^0)\omega_0, \dots, f(u^{n-1})\omega_{n-1}) = \prod_{j=0}^{n-1} f(u^j) \det W$$

因为 u 为 n 次本原单位根, u^0, \dots, u^{n-1} 互不相同, $\det W \neq 0$, 上式两边同时消去 $\det W$ 有

$$\det A = \prod_{j=0}^{n-1} f(u^j),$$

其中 $u = \exp(2\pi i/n)$, $f(u) = a_0 + a_1u + \cdots + a_{n-1}u^{n-1}$

习题 3.5 第 1 题. (2). 记 $D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$, 令 $\alpha_i = \begin{pmatrix} x_1^i \\ \vdots \\ x_n^i \end{pmatrix}$, $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, 那么

$$\begin{aligned} D_n &= \det(e + \alpha_1, e + \alpha_2, \dots, e + \alpha_n) \\ &= \det(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + \det(e, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + \cdots + \det(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, e) \\ &= \det(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + \det(e, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + \cdots + (-1)^{n-1} \det(e, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \\ &= 2 \det(\alpha_1, \dots, \alpha_n) - \{(-1)^2 \det(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + \cdots + (-1)^{n+2} \det(e, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})\} \\ &= 2 \det(\alpha_1, \dots, \alpha_n) - \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ e & \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \\ &= 2x_1 \cdots x_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) - \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \quad (\text{其中 } x_0 = 1) \\ &= \left(2 \prod_{k=1}^n x_k - \prod_{k=1}^n (x_k - 1) \right) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \end{aligned}$$

习题 3.5 第 2 题. 记 $D = \begin{vmatrix} 0 & a_1 + a_2 & \cdots & a_1 + a_n \\ a_2 + a_1 & 0 & \cdots & a_2 + a_n \\ a_n + a_2 & a_n + a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$, 令 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \dots, \alpha_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ -a_n \end{pmatrix}$,

$e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, 那么类似上一题有

$$\begin{aligned} D_n &= \det(\alpha_1 + a_1 e, \dots, \alpha_n + a_n e) \\ &= 2 \det(\alpha_1, \dots, \alpha_n) - \det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_n \\ e & \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

这两个都是比较好计算的行列式。