# 2021 秋高等代数习题课

## 2021-12-10 第六次习题课

习题 5.1 第 4 题. **设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的多项式，$c\in\mathbb{F}$. 求证：$x-c$ 除 $f(x)$ 的商 $q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$ 和余式 $r$ 可以用如下的算法得出**

$$
\begin{array}{c|ccccccccc}
c & & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_i & \cdots & a_1 & a_0 \\
 & +) & & cb_{n-1} & \cdots & cb_i & \cdots & cb_1 & cb_0 \\
\hline
 & & b_{n-1} & b_{n-1} & \cdots & b_{i-1} & \cdots & b_0 & r
\end{array}
$$

**其中** $b_{n-1}=a_n, b_{i-1}=a_i+cb_i\ (\forall 1\leqslant i\leqslant n), r=a_0+cb_0$.

证明：**考虑** $f(x)=(x-c)g(x)+r$, **即**

$$
\begin{aligned}
a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 &= (x-c)(b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0)+r \\
&= b_{n-1}x^n+\cdots+b_1x^2+b_0x+r \\
&\quad -cb_{n-1}x^{n-1}-\cdots-cb_1x-cb_0
\end{aligned}
$$

**移项之后即有**

$$a_nx^n+(a_{n-1}+cb_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_1+cb_1)x+(a_0+cb_0)=b_{n-1}x^n+\cdots+b_1x^2+b_0x+r,$$

**对应次项的系数相等，从而有** $b_{n-1}=a_n, b_{n-2}=a_{n-1}+cb_{n-1},\ldots,b_0=a_1+cb_1, r=a_0+cb_0$.

习题 5.1 第 8 题. **给定正整数 $k\geqslant 2$, 求非零实系数多项式 $f(x)$ 满足条件 $f(x^k)=(f(x))^k$.**

解：**设非零实系数多项式** $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, $a_n\neq 0$, $n\geqslant 0$, **满足** $f(x^k)=(f(x))^k$. **考察最高次项，有** $a_n^k=a_n$. **因为** $f(x)$ **是实系数多项式，**$k\geqslant 2$, **于是有**

$$a_n=\begin{cases}\pm 1 & k\ \text{为奇数}, \\ 1 & k\ \text{为偶数}.\end{cases}$$

**假设除** $a_n$ **外还有系数非零，最高次项为** $a_mx^m, 0\leqslant m\leqslant n-1$, **那么** $f(x)=a_nx^n+a_mx^m+g(x)$, **其中** $\deg g<m$. **那么**

$$
\begin{aligned}
&(f(x))^k=a_n^kx^{kn}+ka_mx^{(k-1)n+m}+h(x) \\
&f(x^k)=a_nx^{kn}+a_mx^{km}+g(x^k)
\end{aligned}
$$

**其中** $\deg h<(k-1)n+m$. **因为** $0\leqslant m\leqslant n-1$ **且** $k\geqslant 2$, **所以** $(k-1)n+m\neq km$. **所以要使** $f(x^k)=(f(x))^k$, **必须有** $ka_m=0$, **即** $a_m=0$. **这与假设矛盾. 所以除最高次项外,** $f(x)$ **没有其他非零项。所以**

$$f(x)=\begin{cases}\pm x^n & k\ \text{为奇数}, \\ x^n & k\ \text{为偶数}.\end{cases}\qquad n=0,1,\ldots$$

**习题 5.2 第 3 题**. **对如下多项式** $f(x), g(x)$, **求次数最低的多项式** $u(x), v(x)$, **使** $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$.

(1). $f(x)=x^3, g(x)=(x-3)^2$

**解：辗转相除有**

$$\begin{aligned} x^3 &= (x+6)\cdot(x-3)^2+27(x-2) \\ (x-3)^2 &= \frac{x-4}{27}\cdot 27(x-2)+1 \end{aligned}$$

**进行回代，有**

$$1=\left(1+\frac{(x-4)(x+6)}{27}\right)\cdot(x-3)^2+\frac{-x+4}{27}\cdot x^3$$

**于是** $u(x)=\frac{-x+4}{27}, v(x)=\frac{x^2+2x+3}{27}$.

**习题 5.2 第 4 题**. **如果两个整系数三次方程有公共的无理根，那么它们还有另一个公共根。**

**证明：设整系数三次方程** $f(x)=0, g(x)=0$ **有公共无理根** $\alpha\in\mathbb{R}$. **令** $h(x)\in\mathbb{Q}[x]$ **为** $\alpha$ **在** $\mathbb{Q}$ **上的极小多项式，即满足** $h(\alpha)=0$ **的首一的有理系数多项式中次数最低的。首先，**$\deg h\leqslant\deg f$. **其次，必须有** $h(x)|f(x)$, **否则可以在** $\mathbb{Q}[x]$ **上做带余除法** $f(x)=h(x)\cdot s(x)+r(x)$, **其中** $\deg r<\deg h$, **这与** $h(x)$ **的定义矛盾。基于同样的原因，有** $h(x)|g(x)$.

**由于** $\alpha$ **是无理数，所以** $\deg h\geqslant 2$, **而且** $h(x)$ **没有有理根，否则** $h(x)=h'(x)(x-\beta), \beta\in\mathbb{Q}$, $h'(x)\in\mathbb{Q}[x], \deg h'<\deg h, h'(\alpha)=0$.

**综上可知，**$f(x)$ **与** $g(x)$ **除了** $\alpha$ **外，还至少有另一个公共无理根，为** $h(x)$ **的根。**

**习题 5.2 第 8 题**. **已知多项式** $r_1(x)=x^2+2x+3$, $r_2(x)=3x-7$. **矩阵** $A=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}B_1 & 0\\ 0 & B_2\end{pmatrix}$, **其中**

$$A_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\ &0&1\\ &&0\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}, B_1=\begin{pmatrix}3&2&1\\0&3&2\\0&0&3\end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix}2&3\\0&2\end{pmatrix}.$$

**试验证** $r_1(A_1)=B_1, r_2(A_2)=B_2$. **并求一个最低次数的多项式** $f(x)$ **使** $f(A)=B$.

**解：容易算得** $A_1^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\ &0&0\\ &&0\end{pmatrix}$, **所以**

$$r_1(A_1)=A_1^2+2A_1+3=\begin{pmatrix}0&0&1\\ &0&0\\ &&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2&0\\ &0&2\\ &&0\end{pmatrix}+3=\begin{pmatrix}3&2&1\\ &3&2\\ &&3\end{pmatrix}=B_1.$$

$r_2(A_2)$ **可以直接计算**

$$r_2(A_2)=3\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}-7=\begin{pmatrix}2&3\\0&2\end{pmatrix}=B_2.$$

**易知** $f(A)=f(\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}f(A_1)&0\\0&f(A_2)\end{pmatrix}$. **那么要使** $f(A)=B$, **只要使** $f(A_1)=B_1$, $f(A_2)=B_2$ **即可。易知** $A_1$ **的极小多项式为** $g_1(x)=x^3$, $A_2$ **的极小多项式为** $g_2(x)=(x-3)^2$, **所以**

多项式 $f(x)$ 就是满足

$$f(x) \equiv r_1(x) \mod g_1(x), \quad f(x) \equiv r_2(x) \mod g_2(x)$$

的次数最低的多项式。这一问便化为了习题 5.2 第 7 题。

根据习题 5.2 第 3 题第 (1) 问，有 $u(x) = \frac{-x+4}{27}, v(x) = \frac{x^2+2x+3}{27}$, 使得 $g_1(x)u(x) + g_2(x)v(x) = 1$, 那么

$$\begin{aligned} f_0(x) &:= g_1(x)u(x)r_2(x) + g_2(x)v(x)r_1(x) \\ &= x^3 \cdot \frac{-x+4}{27} \cdot (3x-7) + (x-3)^2 \cdot \frac{x^2+2x+3}{27} \cdot (x^2+2x+3) \end{aligned}$$

即满足

$$f_0(x) \equiv r_1(x) \mod g_1(x), \quad f_0(x) \equiv r_2(x) \mod g_2(x)$$

由于任意两个满足上式的多项式 $f(x), f'(x)$, 都必须有 $g_1(x)g_2(x)|(f(x) - f'(x))$, 所以次数最低的 $f(x)$ 即为 $f_0(x)$ 除以 $g_1(x)g_2(x)$ 的余式:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_0(x) \mod g_1(x)g_2(x) = (g_1(x)u(x)r_2(x) + g_2(x)v(x)r_1(x)) \mod g_1(x)g_2(x) \\ &= g_1(x) \cdot (u(x)r_2(x) \mod g_2(x)) + g_2(x) \cdot (v(x)r_1(x) \mod g_1(x)) \\ &= \frac{x^3}{27}((-x+4) \cdot (3x-7) \mod (x-3)^2) + \frac{(x-3)^2}{27}((x^2+2x+3) \cdot (x^2+2x+3) \mod x^3) \\ &= \frac{x^3}{27}(x-1) + \frac{(x-3)^2}{27}(10x^2+12x+9) \\ &= \frac{1}{27}(11x^4 - 49x^3 + 27x^2 + 54x + 81) \end{aligned}$$

第 **6** 题. 设 $V = \mathbb{F}[x]$ 是 $\mathbb{F}$ 上全体一元多项式关于多项式加法和数乘多项式运算构成的 $\mathbb{F}$ 上线性空间，用 $V_n = \mathbb{F}_n[x]$ 表示 $V$ 中全体次数 $\leqslant n$ 的多项式集合，则 $V_n$ 构成 $V$ 的一个子空间，

(1). 证明 $1, x-1, \ldots, (x-1)^n$ 构成 $V_n$ 的一组基

(2). 对于 $f(x) = x^n + \cdots + x + 1 \in V_n$, 求 $f(x)$ 在上述基下的坐标。

解：这题基本与习题 2.7 第 7 题类似。在哪里我们考察的是 $x-c, c \in \mathbb{F}$, 是比 $x-1$ 更一般的情况。以下我们都考察 $x-c$ 的情形。

(1). 只要证明 $1, (x-c), (x-c)^2, \cdots, (x-c)^n$ 线性无关即可。假设存在不全为 $0$ 的实数 $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ 使得

$$f_0(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-c) + \cdots + \lambda_n(x-c)^n = 0$$

那么 $f_0(x)$ 的 $n$ 阶导函数 $f_0^{(n)}(x) = n!\lambda_n = 0$，从而有 $\lambda_n = 0$。逐步反推可以导出 $\lambda_{n-1} = \cdots = \lambda_0 = 0$，矛盾。

(2). 我们考虑一个更一般的 $n$ 次多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = \lambda_0 + \lambda_1(x-c) + \cdots + \lambda_n(x-c)^n$，那么 $f_0^{(n)}(x) = n!a_n = n!\lambda_n$，故 $\lambda_n = a_n$。将所得的 $\lambda_n, \cdots, \lambda_{n-k}$ 回代，并考察 $f_0^{(n-k-1)}(c)$，则有

$$f_0^{(n-k-1)}(c) = (n-k-1)!\lambda_{n-k-1} = (n-k-1)!a_{n-k-1} + \frac{(n-k)!}{1!}ca_{n-k} + \cdots + \frac{n!}{(k+1)!}c^{k+1}a_n$$

得 $\lambda_{n-k-1}=a_{n-k-1}+C_{n-k}^1 c a_{n-k}+\cdots+C_n^{k+1}c^{k+1}a_n$ 所以有

$$\begin{pmatrix}\lambda_n\\ \vdots\\ \lambda_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&&&\\ C_n^1c&1&&&\\ C_n^2c^2&C_{n-1}^1c&1&&\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\\ C_n^nc^n&C_{n-1}^{n-1}c^{n-1}&C_{n-2}^{n-2}c^{n-2}&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\ \vdots\\ a_0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_n\\ \vdots\\ a_0\end{pmatrix}.$$

故 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 在这组基下的坐标为

$$\begin{pmatrix}\lambda_n\\ \vdots\\ \lambda_0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_n\\ \vdots\\ a_0\end{pmatrix}.$$

若考察 $f_0^{(n-k-1)}(0)$，则有

$$f_0^{(n-k-1)}(0)=(n-k-1)!a_{n-k-1}=(n-k-1)!\lambda_{n-k-1}+\frac{(n-k)!}{1!}(0-c)\lambda_{n-k}+\cdots+\frac{n!}{(k+1)!}(0-c)^{k+1}\lambda_n$$

得 $a_{n-k-1}=\lambda_{n-k-1}+C_{n-k}^1(-c)\lambda_{n-k}+\cdots+C_n^{k+1}(-c)^{k+1}\lambda_n$ 所以有

$$\begin{pmatrix}a_n\\ \vdots\\ a_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&&&\\ C_n^1(-c)&1&&&\\ C_n^2(-c)^2&C_{n-1}^1(-c)&1&&\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\\ C_n^n(-c)^n&C_{n-1}^{n-1}(-c)^{n-1}&C_{n-2}^{n-2}(-c)^{n-2}&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_n\\ \vdots\\ \lambda_0\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}\lambda_n\\ \vdots\\ \lambda_0\end{pmatrix}$$

则 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 在这组基下的坐标为

$$\begin{pmatrix}\lambda_n\\ \vdots\\ \lambda_0\end{pmatrix}=B^{-1}\begin{pmatrix}a_n\\ \vdots\\ a_0\end{pmatrix}.$$