

# 2022 春高等代数习题课

## 2022-3-11 第一次习题课

习题 6.1 第 2 题. (1) 设  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  是平面上绕原点分别旋转角  $\alpha, \beta$  的变换。试分别写出  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  的矩阵  $A, B$ , 计算  $\mathcal{B}\mathcal{A}$  的矩阵  $BA$ , 它表示什么变换?

(2) 设在直角坐标平面上将  $x$  轴绕原点沿逆时针方向旋转角  $\alpha, \beta$  分别得到直线  $\ell_\alpha, \ell_\beta$ .  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  是平面上的点分别关于直线  $\ell_\alpha, \ell_\beta$  作轴对称的变换。试分别写出  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  的矩阵  $A, B$ , 计算  $\mathcal{B}\mathcal{A}$  的矩阵  $BA$  和计算  $\mathcal{A}\mathcal{B}$  的矩阵  $AB$ , 它们分别表示什么变换?

解: 任取平面上非原点的一点, 设其坐标为  $(r \cos \theta, r \sin \theta)^T$ , 那么其绕原点 (逆时针) 旋转  $\alpha$  角之后的坐标为

$$\begin{aligned}(r \cos(\theta + \alpha), r \sin(\theta + \alpha))^T &= (r \cos \theta \cos \alpha - r \sin \theta \sin \alpha, r \sin \theta \cos \alpha + r \cos \theta \sin \alpha)^T \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} (r \cos \theta, r \sin \theta)^T.\end{aligned}$$

于是  $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ , 同理  $B = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$ ,  $BA = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$ .  $\mathcal{B}\mathcal{A}$  表示的是平面上绕原点 (逆时针) 旋转角  $\alpha + \beta$  的变换。

(2) 任取  $r > 0$  为实数, 则  $v_\alpha = (r \cos \alpha, r \sin \alpha)^T$  为直线  $\ell_\alpha$  上的一个向量。在平面上任取一点  $P = (x, y)^T$ , 那么向量  $v_P = \overrightarrow{OP}$  在  $v_\alpha$  上的投影 (即在直线  $\ell_\alpha$  上的投影) 为  $\frac{1}{r^2} \langle v_\alpha, v_P \rangle v_\alpha$ . 点  $P$  指向投影点的向量为  $-v_P + \frac{1}{r^2} \langle v_\alpha, v_P \rangle v_\alpha$ , 所以  $P$  点关于直线  $\ell_\alpha$  对称点的坐标为

$$\begin{aligned}& \frac{1}{r^2} \langle v_\alpha, v_P \rangle v_\alpha + (-v_P + \frac{1}{r^2} \langle v_\alpha, v_P \rangle v_\alpha) \\ &= \frac{2}{r^2} \langle v_\alpha, v_P \rangle v_\alpha - v_P \\ &= \begin{pmatrix} 2x \cos^2 \alpha + 2y \sin \alpha \cos \alpha - x \\ 2x \sin \alpha \cos \alpha + 2y \sin^2 \alpha - y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cos^2 \alpha - 1 & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ 2 \sin \alpha \cos \alpha & 2 \sin^2 \alpha - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

所以  $\mathcal{A}$  对应的矩阵  $A = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$ . 同理  $\mathcal{B}$  对应的矩阵  $B = \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix}$ .

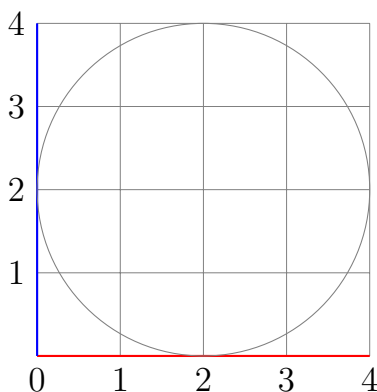
$BA = \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2(\beta - \alpha) & -\sin 2(\beta - \alpha) \\ \sin 2(\beta - \alpha) & \cos 2(\beta - \alpha) \end{pmatrix}$ , 代表绕原点旋转  $2(\beta - \alpha)$  角度的变换。同理,  $AB = \begin{pmatrix} \cos 2(\alpha - \beta) & -\sin 2(\alpha - \beta) \\ \sin 2(\alpha - \beta) & \cos 2(\alpha - \beta) \end{pmatrix}$ , 代表绕原点旋转  $2(\alpha - \beta)$  角度的变换。

习题 6.1 第 3 题. 由 2 阶可逆实方阵  $A$  在直角坐标平面  $\mathbb{R}^2$  上定义可逆线性变换  $\mathcal{A} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

(1)  $\mathcal{A}$  将平行四边形  $ABCD$  变到平行四边形  $A'B'C'D'$ , 求证: 变换后和变换前的面积比  $k = \frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = |\det A|$ ; 由此可以得出平面上任何图形经过变换  $\mathcal{A}$  之后的面积为变换前的  $|\det A|$  倍。

(2) 用线性变换  $\mathcal{A} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{b}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  将圆  $C : x^2 + y^2 = a^2$  变成椭圆  $C_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . 利用  $C_1$  与  $C$  的面积比得出椭圆  $C_1$  面积公式。

(3) 画出下图经过线性变换  $\mathcal{A} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1.2 & -0.8 \\ -0.4 & 1.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  得到的图形。



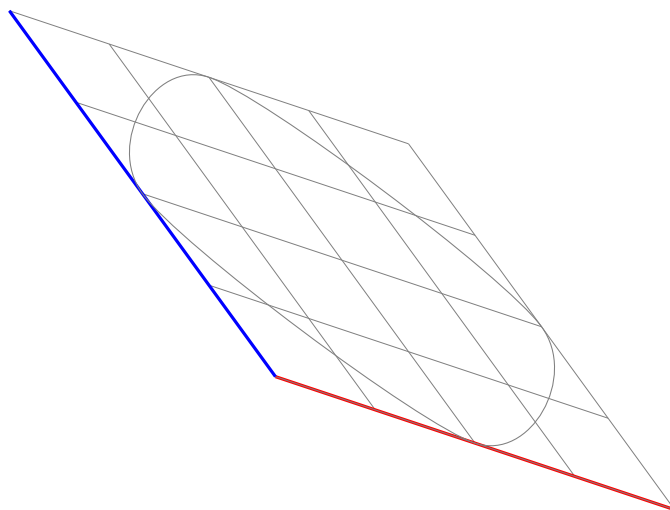
证明: (1) 令向量  $\overrightarrow{AB} = v, \overrightarrow{AC} = u$  (列向量), 那么平行四边形  $ABCD$  的面积  $S_{ABCD} = |\det(u, v)|$ . 同理平行四边形  $A'B'C'D'$  的面积有

$$S_{A'B'C'D'} = |\det(Au, Av)| = |\det(A(u, v))| = |\det A| \cdot |\det(u, v)| = |\det A| S_{ABCD}$$

平面上任意图形可以用正方形覆盖 (的极限) 计算面积, 因此其经过变换  $\mathcal{A}$  之后的面积为变换前的  $|\det A|$  倍。

(2) 由第 (1) 问知  $S_{C_1} = |\det A| \cdot S_C = |b/a| \cdot \pi a^2 = \pi |ab|$ , 其中  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{b}{a} \end{pmatrix}$

(3)



习题 6.2 第 11 题. 设  $F_n[x]$  是数域  $F$  上次数低于  $n$  的一元多项式组成的  $n$  维空间,  $n \geq 2$ .  $\mathcal{A}: f(x) \mapsto f(x+1)$  与  $\mathcal{D}: f(x) \mapsto f'(x)$  是  $F_n[x]$  的线性变换. 求证

$$\mathcal{A} = \mathcal{I} + \frac{\mathcal{D}}{1!} + \frac{\mathcal{D}^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathcal{D}^{n-1}}{(n-1)!}$$

证明: 令  $\mathcal{B} = \mathcal{A} - \left( \mathcal{I} + \frac{\mathcal{D}}{1!} + \frac{\mathcal{D}^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathcal{D}^{n-1}}{(n-1)!} \right)$ . 任取  $f \in F_n[x]$ , 令  $g = \mathcal{B}(f) \in F_n[x]$ . 将  $g$  写为  $g(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ . 那么  $\mathcal{D}^{n-1}(g) = (n-1)!a_{n-1}$ . 另一方面,

$$\mathcal{D}^{n-1}\mathcal{B} = \mathcal{D}^{n-1}\mathcal{A} - \left( \mathcal{D}^{n-1} + \frac{\mathcal{D}^n}{1!} + \frac{\mathcal{D}^{n+1}}{2!} + \cdots + \frac{\mathcal{D}^{2n-2}}{(n-1)!} \right) = \mathcal{D}^{n-1}\mathcal{A} - \mathcal{D}^{n-1} = \mathcal{O}.$$

其中  $\mathcal{O}$  为  $F_n[x]$  上的零变换, 将任意元素映为 0. 于是  $a_{n-1} = 0$ , 从而有  $g \in F_{n-1}[x] \subset F_n[x]$ . 再依次考察  $\mathcal{D}^{n-2}(g), \dots, \mathcal{D}(g)$ , 可得出  $a_{n-2} = \cdots = a_1 = 0$ . 令  $f(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}$ , 那么

$$a_0 = g(0) = f(1) - \left( f(0) + \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \right) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i - \sum_{i=0}^{n-1} b_i = 0.$$

习题 6.2 第 4 题. 设  $\mathbb{R}_n[t]$  是实数域  $\mathbb{R}$  上以  $t$  为字母、次数  $< n$  的多项式及零组成的线性空间.  $V = \{f(\cos x) \mid f \in \mathbb{R}_n[t]\}$ . 试写出  $V$  中的基  $M_1 = \{1, \cos x, \cos^2 x, \dots, \cos^{n-1} x\}$  到  $M_2 = \{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos(n-1)x\}$  的过渡矩阵.

解. 有  $\cos kx + i \sin kx = e^{ikx} = (e^{ix})^k = (\cos x + i \sin x)^k$ , 那么

$$\begin{aligned} \cos kx &= \Re(\cos x + i \sin x)^k \\ &= \sum_{t=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^t C_k^{2t} \cos^{k-2t} x \sin^{2t} x \\ &= \sum_{t=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^t C_k^{2t} \cos^{k-2t} x (1 - \cos^2 x)^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{t=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^t C_k^{2t} \cos^{k-2t} x \sum_{s=0}^t (-1)^s C_t^s \cos^{2s} x \\
&= \sum_{t=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_k^{2t} \sum_{s=0}^t (-1)^{t+s} C_t^s \cos^{k-2t+2s} x \\
&= \sum_{t=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_k^{2t} \sum_{s=0}^t (-1)^{2t-s} C_t^{t-s} \cos^{k-2s} x \\
&= \sum_{t=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_k^{2t} \sum_{s=0}^t (-1)^s C_t^s \cos^{k-2s} x \\
&= \sum_{t=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^t \left( \sum_{m=t}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_k^{2m} C_m^t \right) \cos^{k-2t} x
\end{aligned}$$

设过渡矩阵为  $A$ , 即  $M_1 A = M_2$ , 那么  $A$  的第  $k$  列为

$$\begin{aligned}
&\left( 0, (-1)^{\lfloor k/2 \rfloor} k \cos x, 0, \dots, 0, (-1)^t \left( \sum_{m=t}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_k^{2m} C_m^t \right), 0, \dots, 0, \sum_{m=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_k^{2m}, 0, \dots \right)^T, k \text{ 为奇数} \\
&\left( (-1)^{\lfloor k/2 \rfloor} k \cos x, 0, \dots, 0, (-1)^t \left( \sum_{m=t}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_k^{2m} C_m^t \right), 0, \dots, 0, \sum_{m=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_k^{2m}, 0, \dots \right)^T, k \text{ 为偶数}
\end{aligned}$$

上式中的  $t$  对应相应向量的第  $k - 2t$  位。以上即为第一类切比雪夫多项式 (Chebyshev polynomials of the first kind) 的系数。第一类切比雪夫多项式的一种定义方式即为

$$T_k(\cos x) = \cos(kx)$$