2022 春高等代数习题课

2022-4-22 第四次习题课

第一题. **对于 $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^3)$, 若 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 证明:**

(1). **$\mathscr{A}$ 是可逆线性变换;**

(2). **求 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵。**

证明. (1). **要证明 $\mathscr{A}$ 是可逆线性变换，只要证 $\det A \neq 0$ 即可:**

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

(2). **由已知条件，$\mathscr{A}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A$. 令 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 到 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ 的过渡矩阵为 P, 即 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P$, 那么**

$$\mathscr{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \mathscr{A}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)AP = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)P^{-1}AP.$$

容易看出 $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 利用 $P = (P^{-1})^{-1} = \dfrac{1}{\det P^{-1}}(P^{-1})^*$ 解得 $P = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, 所以 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

第二题. **在向量空间 $V = \mathbb{F}[x]$ 中定义线性变换 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 如下:**

$$\mathscr{A}(f(x)) = f'(x),\ \mathscr{B}(f(x)) = xf(x), \quad \forall f(x) \in V.$$

对于 $W = \mathbb{F}_n[x] = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{F},\ 0 \leqslant i \leqslant n\}$

(1). **证明 W 是 $\mathscr{B}\mathscr{A}$ 的不变子空间;**

(2). **求 $\mathrm{Im}((\mathscr{B}\mathscr{A})^n)$ 和 $\ker((\mathscr{B}\mathscr{A})^n)$ 的维数与一组基。**

解：这是课本上的原题。

(1). 任取 $f(x) \in V$, 有 $\mathscr{B}\mathscr{A}(f(x)) = \mathscr{B}(\mathscr{A}(f(x))) = \mathscr{B}(f'(x)) = xf'(x)$. 令 $f(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 \in W$, 那么 $\mathscr{B}\mathscr{A}(f(x)) = na_nx^n + \cdots + a_1x \in W$. 所以 W 是 $\mathscr{B}\mathscr{A}$ 的不变子空间。

(2). 我们首先将 $\mathscr{B}\mathscr{A}$ 视作 W 上的线性变换。由 $\mathscr{B}\mathscr{A}(a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0) = na_nx^n + \cdots + a_1x$ 容易看出 $(\mathscr{B}\mathscr{A})^n(a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0) = n^na_nx^n + \cdots + a_1x$.

所以当 $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 0$ 时，任取 $g(x) = b_nx^n + \cdots + b_1x$, 总有 $(\mathscr{B}\mathscr{A})^n\left(\dfrac{b_n}{n^n}x^n + \cdots + b_1x\right) = g(x)$. 于是

$$\mathrm{Im}((\mathscr{B}\mathscr{A})^n) = \{a_nx^n + \cdots + a_1x \mid a_i \in \mathbb{F},\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

其维数为 n, 基可取为 $\{x^n, \ldots, x\}$. $\ker((\mathscr{B}\mathscr{A})^n)$ 维数为 1，可取常值函数（多项式）$f(x) = 1$ 为其一组基。

当 $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = p$, p 为某个素数时，有

$$(\mathscr{B}\mathscr{A})^n(a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0) = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ p \nmid k}} k^na_kx^k$$

此时有

$$\mathrm{Im}((\mathscr{B}\mathscr{A})^n) = \left\{ \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ p \nmid k}} a_kx^k \,\middle|\, a_k \in \mathbb{F},\ 1 \leqslant k \leqslant n,\ p \nmid k \right\}$$

它的一组基可取为 $\{x^k \mid 1 \leqslant k \leqslant n, q \nmid k\}$, 维数等于 $n - \left\lfloor \dfrac{n}{p} \right\rfloor$. $\ker((\mathscr{B}\mathscr{A})^n)$ 维数等于 $\#(\{0\} \cup \{k \mid 1 \leqslant k \leqslant n,\ p \nmid k\}) = 1 + \left\lfloor \dfrac{n}{p} \right\rfloor$. 它的一组基可以取为 $1, x^p, \ldots, x^{mp}$, 其中 $m = \left\lfloor \dfrac{n}{p} \right\rfloor$.

若将 $\mathscr{B}\mathscr{A}$ 视作 V 上的线性变换，则以上关于核空间的论断不变。$\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 0$ 时，象空间基为 $\{x^m \mid m \in \mathbb{N}_+\}$, 是一个无穷维线性空间。$\mathrm{char}(\mathbb{F}) = p$ 时象空间基为 $\{x^m \mid m \in \mathbb{N}_+,\ p \nmid m\}$, 也是一个无穷维线性空间。

第三题. 在 $V = M_n(\mathbb{F})$ 中定义变换 $\sigma : X \mapsto AX, \forall X \in V$, 其中 $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 两两不同。

(1). 证明 σ 是 V 上的线性变换；

(2). 判断 σ 能否对角化，并证明你的结论。

解：(1). 任取 $a_1, a_2 \in \mathbb{F}, X_1, X_2 \in V$, 有

$$\sigma(a_1X_1 + a_2X_2) = A(a_1X_1 + a_2X_2) = a_1AX_1 + a_2AX_2 = a_1\sigma(X_1) + a_2\sigma(X_2).$$

所以 σ 是 V 上的线性变换。

(2) 由于 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 两两不同，所以 A 可以对角化，即存在可逆方阵 P, 使得 $PAP^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \Lambda$.

设 λ 是 σ 的一个特征值，对应特征向量为 X, 即 $\sigma(X) = \lambda X$, 那么 $P^{-1}\Lambda PX = \lambda X$, 等价于

$\Lambda PX = \lambda PX$. 记 $PX = (a_{ij})$, 那么有

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \cdots & \lambda_1 a_{1n} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_2 a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n a_{n1} & \lambda_n a_{n2} & \cdots & \lambda_1 a_{nn} \end{pmatrix} = (\lambda a_{ij})$$

上式 $\lambda = \lambda_i$ 的解有 $E_{i1}, \ldots, E_{in}, i = 1, \ldots, n$, 其中 E_{ij} 为第 (i, j) 位元素值为 1, 其余位置值为 0 的 n 阶方阵。从而知 $\sigma(X) = \lambda X$ 能解得 n 个特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, 其中每个 λ_i 对应的特征向量有 n 个，为 $P^{-1}E_{i1}, \ldots, P^{-1}E_{in}, i = 1, \ldots, n$. 所以 σ 可以对角化。

第四题. 设 V 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维向量空间，$\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V)$, 且 $\varphi_{\mathscr{A}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m g(\lambda), g(\lambda_0) \neq 0$. 用 W_{λ_0} 表示 V 的属于 λ_0 的根子空间，证明

$$W_{\lambda_0} = \{g(\mathscr{A})\alpha \mid \alpha \in V\}.$$

证明：习题课讲过类似的题目。任取 $\alpha \in V$, 有 $(\mathscr{A} - \lambda_0)^m g(\mathscr{A})(\alpha) = \varphi_{\mathscr{A}}(\mathscr{A})(\alpha) = 0$, 所以 $W \supseteq \{g(\mathscr{A})\alpha \mid \alpha \in V\}$. 下证 $W \subseteq \{g(\mathscr{A})\alpha \mid \alpha \in V\}$.

任取 $\beta \in W_{\lambda_0}$, 那么存在非负整数 k 使得 $(\mathscr{A} - \lambda_0)^k \beta = 0$. 我们希望找到某个 $\alpha \in V$, 使得 $g(\mathscr{A})\alpha = \beta$.

由于多项式 $(\lambda - \lambda_0)^m$, $g(\lambda)$ 互素，所以存在多项式 $u(\lambda), v(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$, 使得 $u(\lambda)(\lambda - \lambda_0)^m + v(\lambda)g(\lambda) = 1$. 那么

$$\beta = (u(\mathscr{A})(\mathscr{A} - \lambda_0)^m + v(\mathscr{A})g(\mathscr{A}))\beta = u(\mathscr{A})(\mathscr{A} - \lambda_0)^m\beta + g(\mathscr{A})(v(\mathscr{A})\beta)$$

下面我们证明 $u(\mathscr{A})(\mathscr{A} - \lambda_0)^m\beta = 0$. 假设 k 是使得 $(\mathscr{A} - \lambda_0)^k\beta = 0$ 成立的最小的非负整数。如果 $k \leqslant m$, 则证明完毕。若 $k > m$, 那么

$$(\mathscr{A} - \lambda_0)^{k-m}\beta = u(\mathscr{A})(\mathscr{A} - \lambda_0)^k\beta + g(\mathscr{A})(\mathscr{A} - \lambda_0)^{k-m}(v(\mathscr{A})\beta) = g(\mathscr{A})(\mathscr{A} - \lambda_0)^{k-m}(v(\mathscr{A})\beta)$$

若 $k \geqslant 2m$, 则上式右边等于 $\varphi_{\mathscr{A}}(\mathscr{A})(\mathscr{A} - \lambda_0)^{k-2m}(v(\mathscr{A})\beta) = 0$. 此时 $k - m$ 也满足 $(\mathscr{A} - \lambda_0)^{k-m}\beta = 0$, 与 k 的极小性矛盾。若 $k < 2m$, 那么上式左右两边同时用 $(\mathscr{A} - \lambda_0)^{2m-k}$ 作用, 有

$$(\mathscr{A} - \lambda_0)^m\beta = \varphi_{\mathscr{A}}(\mathscr{A})(v(\mathscr{A})\beta) = 0.$$

这也与 $k > m$ 以及 k 的极小性的假设矛盾。所以必然有 $k \leqslant m$. 于是，我们证明了 $\beta = g(\mathscr{A})(v(\mathscr{A})\beta)$, 从而有

$$W_{\lambda_0} = \{g(\mathscr{A})\alpha \mid \alpha \in V\}.$$

第五题. 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶幂零矩阵，且 A 的最小多项式 $d(\lambda) = \lambda^m, m \leqslant n$. 证明

$$r(A) \leqslant \frac{(m-1)n}{m}.$$

证明. 将 A 视作 $\mathbb{F}$ 的代数闭包 $\overline{\mathbb{F}}$ 上的矩阵，秩不改变。由于 A 是 n 阶幂零矩阵，所以 A 的 Jordan 标准形可以写为 $\operatorname{diag}(J_{r_1}(0), \ldots, J_{r_s}(0))$. 由于 A 的最小多项式 $d(\lambda) = \lambda^m$, 所以 $\forall 1 \leqslant i \leqslant s$, 有 $r_i \leqslant m$. 于是我们有

$$\begin{cases} \operatorname{rank}(A) = \sum\limits_{i=1}^{s} \operatorname{rank} J_{r_i}(0) = \sum\limits_{i=1}^{s} r_i - 1, \\ \sum\limits_{i=1}^{s} r_i = n, \\ r_i \leqslant m, \ \forall 1 \leqslant i \leqslant s. \end{cases}$$

于是 $\operatorname{rank} A = n - s \leqslant n - \frac{n}{m} = \frac{(m-1)n}{m}$.

我们以下说明，可以不用将 A 视作 $\overline{\mathbb{F}}$ 上的矩阵，也有 A 相似于 Jordan 形 $\operatorname{diag}(J_{r_1}(0), \ldots, J_{r_s}(0))$ 的结论。我们考虑 A 的有理标准形（或循环标准形）$\operatorname{diag}(C_{r_1}, \ldots, C_{r_s})$，这些 C_{r_i} 是 A 的不变因子组 λ^{r_i} 的友阵。多项式 λ^{r_i} 的友阵是 $\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$，这是一个 Jordan 块（或其转置）$J_{r_i}(0)$. 因此 A 相似于 Jordan 形 $\operatorname{diag}(J_{r_1}(0), \ldots, J_{r_s}(0))$.

第六题. 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维向量空间 V 的一个线性变换。对于 V 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 和 $\alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n$，有

$$\mathscr{A}\alpha = x_n\alpha_1 + \cdots + x_1\alpha_n,$$

判断 $\mathscr{A}$ 是否可对角化，并证明你的结论。

解: 设 λ 为 $\mathscr{A}$ 的一个特征值，$\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i \neq 0$ 为对应的特征向量，即 $x_1, \ldots, x_n$ 不全为 0，且有

$$\lambda(\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i) = \mathscr{A}(\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} x_{n+1-i}\alpha_i.$$

于是有

$$\begin{cases} \lambda x_i = x_{n+1-i} \\ \lambda x_{n+1-i} = x_i \\ \lambda \neq 0, \end{cases}$$

解得 $\lambda = \pm 1$.

于是，当 n 为偶数时，$\mathscr{A}$ 对应于特征值 $\lambda = 1$ 有 $\frac{n}{2}$ 个特征向量 $\alpha_i + \alpha_{n+1-i},\ i = 1, \ldots, \frac{n}{2}$, $\mathscr{A}$ 对应于特征值 $\lambda = -1$ 有 $\frac{n}{2}$ 个特征向量 $\alpha_i - \alpha_{n+1-i},\ i = 1, \ldots, \frac{n}{2}$. 所以此时 $\mathscr{A}$ 可以对角化。

当 n 是奇数的时候，$\mathscr{A}$ 对应于特征值 $\lambda = 1$ 有 $\frac{n+1}{2}$ 个特征向量 $\alpha_i + \alpha_{n+1-i},\ i = 1, \ldots, \frac{n-1}{2}$, 以及 $\alpha_{(n+1)/2}$。$\mathscr{A}$ 对应于特征值 $\lambda = -1$ 有 $\frac{n-1}{2}$ 个特征向量 $\alpha_i - \alpha_{n+1-i},\ i = 1, \ldots, \frac{n-1}{2}$. 所以此时 $\mathscr{A}$ 也可以对角化。

解法二：$\mathscr{A}$ 在这组基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 下的矩阵表示为 $A = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}$，那么

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda & & & & & -1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & \lambda & -1 & & \\ & & -1 & \lambda & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ -1 & & & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad n \text{ 为偶数,}$$

或者

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda & & & & & & -1 \\ & \ddots & & & & \iddots & \\ & & \lambda & & -1 & & \\ & & & \lambda - 1 & & & \\ & & -1 & & \lambda & & \\ & \iddots & & & & \ddots & \\ -1 & & & & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad n \text{ 为奇数}.$$

可以算得

$$\det(\lambda I - A) = \begin{cases} (\lambda+1)^{\frac{n}{2}}(\lambda-1)^{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为偶数}, \\ (\lambda+1)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda-1)^{\frac{n+1}{2}}, & n \text{ 为偶数}, \end{cases}$$

解得特征值为 ± 1. 通过解对应的特征方程得到和前一种解法一样的特征向量。

解法三：容易看出 $\mathscr{A}^2$ 是恒等映射，即 $\mathscr{A}^2 = \mathscr{I}$, 所以 $\mathscr{A}$ 的一个零化多项式为 $f(\lambda) = \lambda^2 - 1$, 它没有重根，所以 $\mathscr{A}$ 的极小多项式也没有重根，所以 $\mathscr{A}$ 可以对角化。

第七题. 记 $J_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$. 若 A 是 n 阶幂零矩阵，且幂零指数为 n. 证明 A 与 $J_n(0)$ 相似，并求出 A 的最小多项式和特征多项式。

解: 由于 $A^{n-1} \neq 0$, 所以存在 $\alpha \in \mathbb{F}^n$, $\alpha \neq 0$, 使得 $A^{n-1}\alpha \neq 0$. 考虑向量组 $A^{n-1}\alpha, \dots, A\alpha, \alpha$, 假若它们线性相关，则存在一组不全为 0 的数 $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ 使得 $\lambda_0\alpha + \cdots + \lambda_{n-1}A^{n-1}\alpha = 0$. 那么

$$0 = A^{n-1}(\lambda_0\alpha + \cdots + \lambda_{n-1}A^{n-1}\alpha) = \lambda_0 A^{n-1}\alpha + \lambda_1 A^n\alpha + \cdots + \lambda_{n-1}A^{2n-2}\alpha = \lambda_0 A^{n-1}\alpha,$$

从而必须有 $\lambda_0 = 0$. 依次可推出 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$. 于是假设不成立，向量组 $A^{n-1}\alpha, \dots, A\alpha, \alpha$ 线性无关，构成了 $\mathbb{F}^n$ 的一组基。A 在这组基下的矩阵表示即为 $J_n(0)$. A 的极小多项式与特征多项式都是 $f(\lambda) = \lambda^n$.

第八题. 若 A 相似于 $J_1 = \begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{m_s}(0) \end{pmatrix}$ 和 $J_2 = \begin{pmatrix} J_{n_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_t}(0) \end{pmatrix}$, 证明 $s = t$, 并且适当调整顺序后可使得 $J_{n_1}(0), \dots, J_{n_s}(0)$ 与 $J_{m_1}(0), \dots, J_{m_s}(0)$ 相等（即 $\{m_1, \dots, m_s\} = \{n_1, \dots, n_s\}$）。

证明: 由于 $s = \dim(\ker(0I - J_1))$, $t = \dim(\ker(0I - J_2))$ 为特征值 0 对应的特征空间的维数，而 J_1, J_2 都相似于 A, 所以

$$s = t = \dim(\ker(0I - A)) = \dim(\ker A).$$

由于 A, J_1, J_2 相似，所以 $\forall k \in \mathbb{N}$, 有

$$\operatorname{rank} A^k = \operatorname{rank} J_1^k = \operatorname{rank} J_2^k.$$

对于 r 阶 Jordan 块 $J_r(0)$, 有 $\operatorname{rank} J_r(0)^k = \max\{0, r-k\}$, 进而有

$$\operatorname{rank} J_1^k = \sum_{i=1}^{s} \max\{0, m_i - k\}, \quad \operatorname{rank} J_1^k = \sum_{i=1}^{s} \max\{0, n_i - k\}.$$

他们的二阶差分分别为（$k \geqslant 1$）

$$D_1(k) := \operatorname{rank} J_1^{k+1} + \operatorname{rank} J_1^{k-1} - 2\operatorname{rank} J_1^k = \#\{i \mid 1 \leqslant i \leqslant s,\ m_i = k\}$$
$$D_2(k) := \operatorname{rank} J_2^{k+1} + \operatorname{rank} J_2^{k-1} - 2\operatorname{rank} J_2^k = \#\{i \mid 1 \leqslant i \leqslant s,\ n_i = k\}$$

于是对于任意 $k \geqslant 1$ 都有

$$\#\{i \mid 1 \leqslant i \leqslant s,\ m_i = k\} = D_1(k) = D_2(k) = \#\{i \mid 1 \leqslant i \leqslant s,\ n_i = k\}$$

所以存在 s 阶对称群中的一个元素 σ, 使得 $\sigma(m_1, \cdots, m_s) = (n_1, \cdots, n_s)$, 即在不计一个置换作用的意义下，$A$ 的 Jordan 标准形是唯一的。