2021 秋高等代数课后习题

第三次作业

习题 **2.2**

一般来说，将向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 排成向量，组成矩阵 A。求向量组 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 的线性关系，即求齐次线性方程组

$$0 = Ax = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

的性质。事实上，如果 $\{\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_m}\}$ 线性无关，那么

$$(\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_m})\begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_m} \end{pmatrix} = 0$$

只有零解。于是，只要将 A 通过高斯消元法化为阶梯阵 $B = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$，将每行第一个非零元（可以设为 1，被称作主元，pivot）对应的列（被称作主列，pivot columns）拿到一起，设其下标为 $i_1, \cdots, i_m$，那么 $\{\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_m}\}$ 就是一个极大线性无关组。这是因为，此时

$$(\beta_{i_1}, \cdots, \beta_{i_m}) = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 \\ & \mathbf{0} & \end{pmatrix}$$

要注意的是改变 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 排列次序组成矩阵 A，可能得到不同的极大线性无关组。

矩阵化为阶梯形可以利用如下的程序进行

```python
import sympy as sp

mat = sp.Matrix(
    [[1,-1,2,4],[0,3,1,2],[3,0,7,14],[1,-1,2,0],[2,1,5,6]]
).T
echelon, pivots = mat.rref()
```

以上得到的 “echelon” 即为阶梯形，“pivots” 为主列的下标（下标从 0 开始）。

第 (1) 问，全部四个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 组成极大线性无关组。第 (2) 问的一个线性无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$.

习题 **2.2** 第 **2** 题

将 $\alpha_1, \cdots, \alpha_5$ 排成向量，组成矩阵 A（可以顺序不同，但 α_1, α_2 排在前 2 位），并化为阶梯型

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是 α_1, α_2 线性无关，且式原向量组的一个极大线性无关组，不能再扩充了。

习题 **2.2** 第 **3** 题

通过高斯消元法将矩阵化为阶梯形，主列对应的原矩阵的列即为一个极大线性无关组，列的数目即为秩。矩阵的转置的主列对应原矩阵的行即为一个极大线性无关组。于是

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^T \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 的秩为 2，前两列（行）构成极大线性无关组。(2) 的秩为 3，全部 3 行构成极大线性无关组，第 1,2,4 列构成极大线性无关组。

习题 **2.2** 第 **6** 题

(1). 如果某 r 个线性无关向量不构成极大线性无关组，那么这 r 个向量还可以进一步添加向量得到极大线性无关组，这样得到的极大线性无关组中向量个数大于 r，与秩为 r 矛盾。

(2). 在第 7 题中证明。

习题 **2.2** 第 **7** 题

设向量组 (I) 为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，向量组 (II) 为 $\beta_1, \cdots, \beta_m$。设向量组 (II) 的一个极大线性无关组为 $R = \{\beta_{i_1}, \cdots, \beta_{i_r}\}$，那么向量组 (II) 可以由这个极大线性无关组 R 线性表出，从而向量组 (I) 可以由 R 线性表出。任取向量组 (I) 的一个极大线性无关组 $S = \{\alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_s}\}$，那么有

$$(\alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_s}) = (\beta_{i_1}, \cdots, \beta_{i_r}) A_{r\times s}$$

$A_{r\times s}$ 为某个 $r\times s$ 的矩阵。假设 $s>r$，那么齐次线性方程组

$$A_{r\times s}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_s\end{pmatrix}=0$$

必然有非零解。那么

$$(\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_s})\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_s\end{pmatrix}=(\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_r})A_{r\times s}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_s\end{pmatrix}=0$$

有非零解，从而 $\{\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_s}\}$ 线性相关，这与它是极大线性无关组矛盾。

其实，可以直接利用不等式

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_s}) &\leqslant \min\{\operatorname{rank}(\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_r}),\operatorname{rank}(A_{r\times s})\}\\ &\leqslant \min\{r,\min\{r,s\}\}=\min\{r,s\}\\ &\leqslant r\end{aligned}$$