2021 秋高等代数课后习题

第六次作业

习题 **2.8** 第 **1** 题

利用过 A, B 点的一般的圆方程

$$\lambda(x^2+y^2-x+2y-10)+(x^2+y^2+3x-4y-1)=0$$

令其过点 $C=(2,0)$，解出 $\lambda=9/8$。再代入上述方程得

$$x^2+y^2+\frac{15}{17}x-\frac{14}{17}y-\frac{98}{17}=0$$

习题 **2.8** 第 **2** 题

由 $x^2=5x-6$ 解得 $x=2,3$。于是，$a_n=\alpha 2^n+\beta 3^n$。利用 $a_1=a_2=1$ 的条件解得 $\alpha=1,\beta=-1/3$。所以有

$$a_n=2^n-3^{n-1}$$

习题 **2.8** 第 **3** 题

一般给定 n 个点 $(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$，$x_1,\cdots,x_n$ 互不相同，则有拉格朗日插值多项式

$$L(x)=\sum_{i=1}^{n} y_i\ell_i(x)$$

其中，$\ell_i(x)=\prod_{\substack{1\le m\le k\\ m\ne i}}\frac{x-x_m}{x_i-x_m}=\frac{(x-x_0)}{(x_i-x_0)}\cdots\frac{(x-x_{i-1})}{(x_i-x_{i-1})}\frac{(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i+1})}\cdots\frac{(x-x_n)}{(x_i-x_n)},$

满足 $L(x_i)=y_i, i=1,\cdots,n$。本题对应的拉格朗日插值多项式为 $f(x)=L(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1$. 当然也存在更高次多项式满足题目条件。

任取满足题设条件的多项式 $f(x)$，考察 $g(x)=f(x)-L(x)$。$1,2,3$ 是 $g(x)$ 的根，于是存在 $h(x)$ 使得

$$g(x)=f(x)-L(x)=(x-1)(x-2)(x-3)h(x)$$

于是在 $\mathbb{R}[X]$ 中有

$$f(x)\equiv L(x)\mod (x-1)(x-2)(x-3)$$

由于 $f(X)$ 在 $\mathbb{R}[x]$ 中利用辗转相除法除以 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 所得的商多项式与余多项式都是整系数的，所以上式不可能成立。

习题 **3.1** 第 **2** 题 (1)

$$\tau(n(n-1)\cdots 21) = (n-1)+\cdots+1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

于是 $n(n-1)\cdots 21$ 是偶排列，当且仅当 $n(n-1) \equiv 0 \mod 4$，即 $n \equiv 0,1 \mod 4$

习题 **3.1** 第 **3** 题

令 A 为每个位置元素值都为 1 的 n 阶方阵，那么

$$0 = det(A) = \text{偶排列个数} - \text{奇排列个数}$$

所以 偶排列个数 $=$ 奇排列个数 $= \dfrac{\text{全体排列个数}}{2} = \dfrac{n!}{2}$

习题 **3.1** 第 **5** 题

x^4 的项：由于后 3 列只有一个 x，于是必须选择 $(2,2),(3,3),(4,4)$ 位的 x，剩余只能选择 $(1,1)$ 位的 x。于是 x^4 的项为 x^4。

x^3 的项：由于后 3 列只有一个 x，如果都选择相应位置的 x，剩余只能选择 $(1,1)$ 位的 x，那么会得到 x^4。于是后 3 列只能选取 2 个 x，以下是可行的组合：

- $(2,2),(3,3),(4,1)$ 选取 x，相应的项为 $(-1)^{\tau(4231)}3x^3$.
- $(3,3),(4,4),(2,1)$ 选取 x，相应的项为 $(-1)^{\tau(2134)}x^3$.

于是 x^3 的项为 $-3x^3 - x^3 = -4x^3$。