2022 春高等代数习题课

2022-5-6 第五次习题课

第一题. **习题 6.8 第 4 题涉及的牛顿公式：记 $f_n(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n = X_n + (-1)^1\sigma_1 X^{n-1} + \cdots + (-1)^n\sigma_n$，其复根 k 次幂之和记为 $S_k = S_k(f_n)$. 那么当 $m \leqslant n$ 时，有**

$$S_m + a_1S_{m-1} + \cdots + a_{m-1}S_1 + ma_m = 0;$$

当 $m > n$ 时，有

$$S_m + a_1S_{m-1} + \cdots + a_nS_{m-n} = 0.$$

证明. **记 $f_n(X)$ 的所有复根为 $x_1, \ldots, x_n$. 那么**

$$\begin{aligned}
S_k &= \sum_{i=1}^{n} x_i^k, \\
\sigma_k &= \mathrm{Sym}_k^1(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{0\leqslant k_1,\ldots,k_n\leqslant 1\\ k_1+\cdots+k_n=k}} x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n} \\
&= \sum_{1\leqslant h_1<\cdots<h_k\leqslant n} x_{h_1}\cdots x_{h_k}
\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}
\sigma_1 S_{m-1} &= (x_1 + \cdots + x_n)(x_1^{m-1} + \cdots + x_n^{m-1}) \\
&= S_m + \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} x_i^{m-1}x_j = {\color{red}S_m} + \mathcal{S}(x_1^{m-1}x_2) \\
\sigma_2 S_{m-2} &= \left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j\right)(x_1^{m-2} + \cdots + x_n^{m-2}) \\
&= \mathcal{S}(x_1^{m-1}x_2) + \mathcal{S}(x_1^{m-2}x_2x_3) \\
&\vdots \\
\sigma_k S_{m-k} &= \left(\sum_{1\leqslant h_1<\cdots<h_k\leqslant n} x_{h_1}\cdots x_{h_k}\right)(x_1^{m-k} + \cdots + x_n^{m-k}) \\
&= \mathcal{S}(x_1^{m-k+1}x_2\cdots x_k) + \mathcal{S}(x_1^{m-k}x_2\cdots x_{k+1})
\end{aligned}$$

以上的 $\mathcal{S}(x_1, \cdots, x_n) = \mathcal{S}(*)$ 为首项为 $*$ 的对称多项式，即满足对于任意的 n 阶置换 $s \in \mathcal{S}_n$，有 $\mathcal{S}(x_{s(1)}, \cdots, x_{s(n)}) = \mathcal{S}(x_1, \cdots, x_n)$. 可以通过对首项的下标用 n 阶置换群 $\mathcal{S}_n$ 作用，剔除重复项之后求和得到。那么，当 $m \leqslant n$ 时，我们有

$$\sigma_{m-1}S_1 = (x_1\cdots x_{m-1} + \cdots + x_{n-m+1}\cdots x_n)(x_1 + \cdots + x_n)$$

$$= \mathcal{S}(x_1^2 x_2 \cdots x_{m-1}) + m\sigma_m$$

交错求和得

$$\begin{aligned} & - a_1 S_{m-1} - a_2 S_{m-2} - \cdots - a_{m-1} S_1 \\ =& \sigma_1 S_{m-1} - \sigma_2 S_{m-2} + \cdots + (-1)^m \sigma_{m-1} S_1 \\ =& S_m + m(-1)^m \sigma_m = S_m + m a_m \end{aligned}$$

即有

$$S_m + a_1 S_{m-1} + \cdots + a_{m-1} S_1 + m a_m = 0.$$

当 $m > n$ 时，最后一个等式变为

$$\sigma_n S_{m-n} = x_1 \cdots x_n (x_1^{m-n} + \cdots + x_n^{m-n}) = \mathcal{S}(x_1^{m-n+1} x_2 \cdots x_n),$$

交错求和得

$$\begin{aligned} & - a_1 S_{m-1} - a_2 S_{m-2} - \cdots - a_n S_{m-n} \\ =& \sigma_1 S_{m-1} - \sigma_2 S_{m-2} + \cdots + (-1)^m \sigma_n S_{m-n} = S_m \end{aligned}$$

即

$$S_m + a_1 S_{m-1} + \cdots + a_n S_{m-n} = 0.$$

回到 6.8 第 4 题。我们要证明 A, B 特征值对应相等 $\Longleftrightarrow \operatorname{tr} A^k = \operatorname{tr} B^k, \forall k \in \mathbb{N}_+$. （在代数闭域下）将 A, B 分别上三角化为 T_1, T_2，对角线元素为 A 的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 以及 B 的特征值 $\mu_1, \ldots, \mu_n$, 那么我们只要证明

$$\begin{aligned} f_A(X) = f_B(X) &\Longleftrightarrow \{\lambda_i\}, \{\mu_j\}\text{对应相等} \\ &\Longleftrightarrow \operatorname{tr} T_1^k = \operatorname{tr} T_2^k, \forall k \in \mathbb{N}_+ \\ &\Longleftrightarrow S_k(f_A(X)) = S_k(f_B(X)), \forall k \in \mathbb{N}_+ \end{aligned}$$

其中 f_A, f_B 分别为 A, B 的特征多项式。$\Longrightarrow$ 是显然的，我们只要证明 $\Longleftarrow$. 取 $k = 1, 2, \ldots, n$, 那么根据 $k \leqslant n$ 时的牛顿公式

$$\begin{cases} a_1 = -S_1 \\ a_1 S_1 + 2a_2 = -S_2 \\ \vdots \\ a_1 S_{n-1} + \cdots + n a_n = -S_n \end{cases}$$

以上以 $a_1, \ldots, a_n$ 为未知元的非齐次线性方程组的系数方阵非奇异，故有唯一解，即 $a_1, \ldots, a_n$ 由 $S_1, \ldots, S_n$ 唯一确定，$\Longleftarrow$ 即证明完毕。

第二题. 习题 7.2 第 4 题. (1). 设 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 为奇数维实线性空间 V 上的线性变换且 $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A}$, 求证 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 有公共特征向量。

证明: (1). $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 的特征多项式都是奇数阶的首一的实系数多项式。一个实系数多项式 $f(X)$ 有分解

$$f(X) = (X - x_1) \cdots (X - x_k)(X^2 - (z_1 + \overline{z}_1)X + z_1\overline{z}_1) \cdots (X^2 - (z_m + \overline{z}_m)X + z_m\overline{z}_m),$$

其中 $x_1, \cdots, x_k$ 为实根, $z_1, \overline{z}_1, \cdots, z_m, \overline{z}_m$ 为复根。奇数阶的实系数多项式至少有一个实根，而且至少有一个实根的代数重数为奇数。

令 λ_0 为 $\mathscr{A}$ 的一个代数重数为奇数的实根，令 W_{λ_0} 为其根子空间，维数为奇数。任取 $\alpha \in W_{\lambda_0}$, 有足够大的正整数 s 满足

$$(\mathscr{A} - \lambda_0)^s(\mathscr{B}(\alpha)) = \mathscr{B}((\mathscr{A} - \lambda_0)^s(\alpha)) = \mathscr{B}(0) = 0.$$

故 $\mathscr{B}(\alpha) \in W_{\lambda_0}$, 即知 W_{λ_0} 是 $\mathscr{B}$ 的不变子空间。由于 W_{λ_0} 是奇数维的实线性空间，故存在实特征值 μ_0 以及对应的特征向量 $\beta \in W_{\lambda_0}$, 满足 $\mathscr{B}(\beta) = \mathscr{B}|_{W_{\lambda_0}}(\beta) = \mu_0\beta$. 由于 $\beta \in W_{\lambda_0}$, 令 s 为满足 $(\mathscr{A} - \lambda_0)^s\beta = 0$ 的最小的正整数，$s \geqslant 1$. 令 $\beta' = (\mathscr{A} - \lambda_0)^{s-1}\beta \neq 0$, 有

$$\begin{aligned}
&(\mathscr{A} - \lambda_0)\beta' = (\mathscr{A} - \lambda_0)^s\beta = 0,\\
&(\mathscr{B} - \mu_0)\beta' = (\mathscr{A} - \lambda_0)^{s-1}((\mathscr{B} - \mu_0)\beta) = 0.
\end{aligned}$$

于是 β' 是 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 的公共特征向量。

第三题. 习题 7.3 第 5 题. 设 $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ 是线性变换 $\mathscr{A}$ 的不同的特征值，$\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ 分别是数域这些特征值的特征向量。求证：$\alpha_1 + \cdots + \alpha_t$ 生成的循环子空间 $U = \mathbb{F}\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}\alpha_t$.

证明：由于 $\mu_1\alpha_1 + \cdots + \mu_t\alpha_t \in \mathbb{F}\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}\alpha_t$ 对任意一组数 $\mu_1, \ldots, \mu_t$, 而且任取 $f(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$, 有 $f(\mathscr{A})(\alpha_i) = f(\lambda_i)\alpha_i$, 所以 $\mathbb{F}[\mathscr{A}](\alpha_1 + \cdots + \alpha_t) \subseteq \mathbb{F}\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}\alpha_t$.

我们来证明另一个方向的包含关系。我们希望证明，任取 $1 \leqslant i \leqslant t$, 都有 $\alpha_i \in \mathbb{F}[\mathscr{A}](\alpha_1 + \cdots + \alpha_t)$. 我们需要寻找一个多项式 $f_i(\lambda)$, 使得 $f_i(\mathscr{A})(\alpha_1 + \cdots + \alpha_t) = \alpha_i$. 我们可以取

$$f_i(\lambda) = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant t\\ j \neq i}} \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j},$$

这个多项式满足 $f_i(\mathscr{A})(\alpha_i) = \alpha_i$, $f_i(\mathscr{A})(\alpha_j) = 0, \forall j \neq i$.

第四题. 习题 7.3 第 6 题. 设向量 α, β 相对于线性变换 $\mathscr{A}$ 的最小多项式 $d_\alpha(\lambda)$ 与 $d_\beta(\lambda)$ 互素。求证：$\mathbb{F}[\mathscr{A}]\alpha \oplus \mathbb{F}[\mathscr{A}]\beta = \mathbb{F}[\mathscr{A}](\alpha + \beta)$.

证明. 这题实际上是要证明两个结论：

1. $\mathbb{F}[\mathscr{A}]\alpha + \mathbb{F}[\mathscr{A}]\beta = \mathbb{F}[\mathscr{A}]\alpha \oplus \mathbb{F}[\mathscr{A}]\beta$;
2. $\mathbb{F}[\mathscr{A}]\alpha \oplus \mathbb{F}[\mathscr{A}]\beta = \mathbb{F}[\mathscr{A}](\alpha + \beta)$.

对于第 1 个结论，我们只要证明 $\mathbb{F}[\mathscr{A}]\alpha \cap \mathbb{F}[\mathscr{A}]\beta = \{0\}$. 任取 $\gamma \in \mathbb{F}[\mathscr{A}]\alpha \cap \mathbb{F}[\mathscr{A}]\beta$, 那么存在多项式 $f_1(\lambda), f_2(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$ 使得

$$\gamma = f_1(\mathscr{A})\alpha = f_2(\mathscr{A})\beta.$$

由于 $d_\alpha(\lambda)$ 与 $d_\beta(\lambda)$ 互素，所以存在多项式 $u(\lambda), v(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$ 使得 $u(\lambda)d_\alpha(\lambda) + v(\lambda)d_\beta(\lambda) = 1$, 那么

$$\begin{aligned}
\gamma &= (u(\mathscr{A})d_\alpha(\mathscr{A}) + v(\mathscr{A})d_\beta(\mathscr{A}))(\gamma)\\
&= f_1(\mathscr{A})u(\mathscr{A})(d_\alpha(\mathscr{A})(\alpha)) + f_2(\mathscr{A})v(\mathscr{A})(d_\beta(\mathscr{A})(\beta))\\
&= 0
\end{aligned}$$

对于第 2 个结论，由于 $\alpha + \beta \in \mathbb{F}[\mathscr{A}]\alpha \oplus \mathbb{F}[\mathscr{A}]\beta$, 所以有 $\mathbb{F}[\mathscr{A}]\alpha \oplus \mathbb{F}[\mathscr{A}]\beta \supseteq \mathbb{F}[\mathscr{A}](\alpha + \beta)$. 我们来证明另一边的包含关系。我们有

$$\alpha = (u(\mathscr{A})d_\alpha(\mathscr{A}) + v(\mathscr{A})d_\beta(\mathscr{A}))(\alpha)$$

$$
\begin{aligned}
&= 0 + v(\mathscr{A})d_\beta(\mathscr{A})(\alpha) \\
&= v(\mathscr{A})d_\beta(\mathscr{A})(\alpha+\beta)
\end{aligned}
$$

同样地有 $\beta = u(\mathscr{A})d_\alpha(\mathscr{A})(\alpha+\beta)$. 所以 $\alpha, \beta \in \mathbb{F}[\mathscr{A}](\alpha+\beta)$, 从而有 $\mathbb{F}[\mathscr{A}]\alpha \oplus \mathbb{F}[\mathscr{A}]\beta \subseteq \mathbb{F}[\mathscr{A}](\alpha+\beta)$.

第五题. 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，且存在循环向量 $\alpha \in V$, 使得 $V = \mathbb{F}[\mathscr{A}]\alpha$. 求证：与 $\mathscr{A}$ 可交换的 V 上任一线性变换 $\mathscr{B}$ 必为 $\mathscr{A}$ 的多项式。

证明: 由于 $V = \mathbb{F}[\mathscr{A}]\alpha$, 所以存在非零多项式 $f_1, \ldots, f_n$ 使得 $f_1(\mathscr{A})(\alpha), \ldots, f_n(\mathscr{A})(\alpha)$ 为 V 的一组基。故存在数 $a_1, \ldots, a_n$, 使得 $\mathscr{B}(\alpha) = a_1 f_1(\mathscr{A})(\alpha) + \cdots + a_n f_n(\mathscr{A})(\alpha) = f(\mathscr{A})(\alpha)$, 其中 $f = a_1 f_1 + \cdots a_n f_n$.

任取 $\beta = b_1 f_1(\mathscr{A})(\alpha) + \cdots + b_n f_n(\mathscr{A})(\alpha) \in V$, 有

$$
\begin{aligned}
\mathscr{B}(\beta) &= \mathscr{B}(b_1 f_1(\mathscr{A})(\alpha) + \cdots + b_n f_n(\mathscr{A})(\alpha)) \\
&= b_1 f_1(\mathscr{A})(\mathscr{B}(\alpha)) + \cdots + b_n f_n(\mathscr{A})(\mathscr{B}(\alpha)) \\
&= b_1 f_1(\mathscr{A})(f(\mathscr{A})(\alpha)) + \cdots + b_n f_n(\mathscr{A})(f(\mathscr{A})(\alpha)) \\
&= f(\mathscr{A})(b_1 f_1(\mathscr{A})(\alpha)) + \cdots + f(\mathscr{A})(b_n f_n(\mathscr{A})(\alpha)) \\
&= f(\mathscr{A})(b_1 f_1(\mathscr{A})(\alpha) + \cdots + b_n f_n(\mathscr{A})(\alpha)) \\
&= f(\mathscr{A})(\beta)
\end{aligned}
$$

由于 β 是任取的，所以有 $\mathscr{B} = f(\mathscr{A})$.

第六题. 设 $\mathscr{A}$ 为线性空间 V 上的线性变换。求证：若 $\mathscr{A}^2$ 有循环向量，即存在 $\alpha \in V$ 使得 $V = \mathbb{F}[\mathscr{A}^2](\alpha)$, 则 $\mathscr{A}$ 也有循环向量。请问反过来是否成立？

证明: 我们有

$$
\begin{aligned}
V &\supseteq \mathbb{F}[\mathscr{A}](\alpha) \supseteq \operatorname{span}\{\alpha, \mathscr{A}\alpha, \mathscr{A}^2\alpha, \ldots, \mathscr{A}^{2k-1}\alpha, \mathscr{A}^{2k}\alpha, \ldots\} \\
&\supseteq \operatorname{span}\{\alpha, \mathscr{A}^2\alpha, \ldots, \mathscr{A}^{2k}\alpha, \ldots\} = \mathbb{F}[\mathscr{A}^2](\alpha) = V
\end{aligned}
$$

所以，上式涉及的 $\supseteq$ 实际上都是相等，于是 $V = \mathbb{F}[\mathscr{A}](\alpha)$, α 也是 $\mathscr{A}$ 的循环向量。

反过来是不成立的。例如习题 7.3 第 4 题中大家举的例子：

$$
\mathscr{A} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix},
$$

任一满足 $y \neq 0$ 的向量 $\alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 都是 $\mathscr{A}$ 的循环向量。但 $\mathscr{A}^2 = 0$, 所以 $\mathscr{A}^2$ 不可能有循环向量。

第七题. 设 $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$ 是线性空间 V 对于线性变换 $\mathscr{A}$ 的根子空间分解，

(1). 求证：正则投影变换 $\mathscr{E}_i : V \to W_i$ 是 $\mathscr{A}$ 的多项式。

注：这里的正则投影变换指的是如下变换：任取 $\alpha \in V$, α 可唯一表示为 $\alpha = \beta_1 + \cdots + \beta_s$, 其中 $\beta_i \in W_i, i = 1, \ldots, s$. 投影变换 $\mathscr{E}_i$ 在向量 α 上的作用为 $\mathscr{E}_i(\alpha) = \beta_i$.

(2). 设 W 是 $\mathscr{A}$ 的任意一个不变子空间，求证

$$
W = (W \cap W_1) \oplus \cdots \oplus (W \cap W_s)
$$

对于一个一般的 W，请问此结论是否成立？

证明: (1). 设 $\mathscr{A}$ 的特征多项式为

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s},$$

那么 $W_i=\ker(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$. 对于 $i=1,\ldots,s$, 令

$$f_i(\lambda)=\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant s\\ j\neq i}}(\lambda-\lambda_j)^{n_j}$$

那么多项式 $f_1,\ldots,f_s$ 互素，故存在多项式 $u_1,\ldots,u_s\in\mathbb{F}[\lambda]$ 使得

$$u_1(\lambda)f_1(\lambda)+\cdots+u_s(\lambda)f_s(\lambda)=1.$$

那么任取 $\alpha\in V$, 有

$$\begin{aligned}\alpha&=(u_1(\mathscr{A})f_1(\mathscr{A})+\cdots+u_s(\mathscr{A})f_s(\mathscr{A}))(\alpha)\\&=u_1(\mathscr{A})f_1(\mathscr{A})(\alpha)+\cdots+u_s(\mathscr{A})f_s(\mathscr{A})(\alpha)\end{aligned}$$

对任意 i, 有

$$(\lambda-\lambda_i)^{n_i}u_i(\mathscr{A})f_i(\mathscr{A})(\alpha)=u_i(\mathscr{A})f(\mathscr{A})(\alpha)=0,$$

从而知 $\beta_i:=u_i(\mathscr{A})f_i(\mathscr{A})(\alpha)\in W_i$. 由于 α 是任取的，所以 $\mathscr{E}_i=u_i(\mathscr{A})f_i(\mathscr{A})$, 是 $\mathscr{A}$ 的多项式。

(2). 由于 $(W\cap W_i)\cap(W\cap W_j)=W\cap W_i\cap W_j=\{0\}$, 对任意 $i\neq j$ 成立，所以 $(W\cap W_1)+\cdots+(W\cap W_s)$ 是直和，且有

$$(W\cap W_1)\oplus\cdots\oplus(W\cap W_s)=(W\cap W_1)+\cdots+(W\cap W_s)\subseteq W.$$

下面证明另一边的包含关系。任取 $\alpha\in W$, 有

$$\alpha=\mathscr{E}_1(\alpha)+\cdots+\mathscr{E}_s(\alpha)$$

$\mathscr{E}_i$ 是 (1) 中定义的正则投影变换，是 $\mathscr{A}$ 的多项式，$\mathscr{E}_i(\alpha)\in W_i$. 由于 W 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，从而也是 $\mathscr{A}$ 的多项式的不变子空间，所以 $\mathscr{E}_i(\alpha)\in W$, 进而有 $\mathscr{E}_i(\alpha)\in W\cap W_i$. 这就证明了 $\alpha\in(W\cap W_1)\oplus\cdots\oplus(W\cap W_s)$.

对于一个一般的 W，此结论一般不成立。例如

$$\mathscr{A}:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\2y\end{pmatrix},$$

$V=\ker(\mathscr{A}-1)\oplus\ker(\mathscr{A}-2)$ 但 $W=\left\{k(1,1)^T\;\middle|\;k\in\mathbb{F}\right\}$ 不满足 $W=(W\cap\ker(\mathscr{A}-1))\oplus(W\cap\ker(\mathscr{A}-2))$, 后者是平凡空间 $\{0\}$.