2021 秋高等代数课后习题

第四次作业

习题 **2.3** 第 **1** 题

令 $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$**，那么有**

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \beta^T = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

解得 $(x_1, x_2, x_3) = (-76, 41, -16)$.

习题 **2.3** 第 **2** 题

都写成列向量的形式。令 e_1, e_2, e_3, e_4 **为** $\mathbb{R}^4$ **的自然基。那么向量组** $\alpha_1, \alpha_2, e_1, e_2, e_3, e_4$ **秩为** 4**，将相应矩阵（前两列之间，后四列之间可以调换顺序）化为阶梯形，其主列对应原矩阵的列即为由** α_1, α_2 **扩充得到的为** $\mathbb{R}^4$ **的一组基。**

习题 **2.3** 第 **3** 题

依题有

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = A_{4\times 4} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = A_{4\times 4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

那么有

$$A_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 - 4\alpha_4 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 \\ \alpha_3 + \alpha_4 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}.$$

习题 **2.3** 第 **4(2)** 题

高斯消元法标准解法可解此题。

习题 **2.3** 第 **5** 题

设齐次线性方程组系数矩阵为 A，则任取 A 的一行 $(a_1,\cdots,a_5)$，它必须满足三个方程

$$(a_1,\cdots,a_5)\cdot X_i^T=0,\quad i=1,2,3$$

或者等价地，

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&-1&1&-1&1\\1&2&4&8&16\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_5\end{pmatrix}.$$

解得 $(a_1,\cdots,a_5)=(6,1,-4,1,0)t_1+(16,6,-11,0,1)t_2$. 从中任取 n 个向量，只要这 n 个向量的秩为 2，即可组成一个齐次线性方程组，使得 X_1,X_2,X_3 是其基础解系。

习题 **2.4** 第 **1** 题

(1). 容易计算向量组 X_1,X_2,X_3 秩为 3，由于原方程为 5 元的，且系数矩阵秩为 3，所以原方程必然是非齐次的。令 X_1 为特解，那么通解为 $X_1+t_1\alpha_1+t_2\alpha_2,t_1,t_2\in\mathbb{R}$. 可知 $t_1(X_2)$ 与知 $t_1(X_3)$ 不同时为 0，且 $t_2(X_2)$ 与知 $t_2(X_3)$ 不同时为 0，否则向量组 X_1,X_2,X_3 秩小于 3。于是相应齐次方程组的基础解系可以取为 X_2-X_1,X_3-X_1。所以原方程的通解为

$$(1,1,1,1,1)+t_1(0,1,2,3,4)+t_2(0,-1,-4,-3,-4),\quad t_1,t_2\in\mathbb{R}$$

(2,3). 设原方程为 $AX=\beta,\beta$ 非零向量。那么

$$A(X_1+X_2+X_3)=AX_1+AX_2+AX_3=3\beta\neq\beta$$
$$A\left(\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)\right)=\frac{1}{3}(AX_1+AX_2+AX_3)=\beta$$

所以 $X_1+X_2+X_3$ 不是解，$\dfrac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$ 是解。

习题 **2.4** 第 **2** 题

(1). 当二者都无解时，不需要二者等价。

(2). 设非齐次线性方程组 (I),(II) 分别为 $A_1X=\beta_1,A_2X=\beta_2$.

若他们等价，则可以通过初等行变换

$$\begin{pmatrix}A_1\\\mathbf{0}\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}\beta_1\\\mathbf{0}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}\Longrightarrow \text{(II) 的解集为 (I) 的解集的子集}$$
$$\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\A_2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\beta_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}\Longrightarrow \text{(I) 的解集为 (II) 的解集的子集}$$

所以此时二者同解。

若二者有解且同解，要证明的是矩阵 $\begin{pmatrix}A_1\mid\beta_1\end{pmatrix}$ 与矩阵 $\begin{pmatrix}A_2\mid\beta_2\end{pmatrix}$ 行等价。这等价于齐次线性方程组 $\begin{pmatrix}A_1\mid\beta_1\end{pmatrix}Y=0$ 与 $\begin{pmatrix}A_2\mid\beta_2\end{pmatrix}Y=0$ 同解。设 $Y=\begin{pmatrix}X\\c\end{pmatrix}$ 是 $\begin{pmatrix}A_1\mid\beta_1\end{pmatrix}Y=0$ 的解，那么 $A_1X+c\beta_1=0$. 若 $c\neq0$，那么

$$-c(A_1(-\frac{1}{c}X)-\beta_1)=0\Longrightarrow c(A_2(-\frac{1}{c}X)-\beta_2)=0\Longrightarrow Y=\begin{pmatrix}X\\c\end{pmatrix}\text{ 是 }\begin{pmatrix}A_2\mid\beta_2\end{pmatrix}Y=0\text{ 的解}$$

若 $c=0$，由于 $A_1X=\beta_1$ 有解，任取一解 X_0，即 $A_1X_0=\beta_1$，那么有

$$\begin{aligned} A_1X+(A_1X_0-\beta_1)=0+0=0 &\Longrightarrow A_1(X+X_0)-\beta_1=0 \\ &\Longrightarrow A_2(X+X_0)-\beta_2=0 \\ &\Longrightarrow A_2X+(A_2X_0-\beta_2)=0 \\ &\Longrightarrow A_2X=0 \\ &\Longrightarrow Y=\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 是 } \begin{pmatrix} A_2 \mid \beta_2 \end{pmatrix} Y=0 \text{ 的解} \end{aligned}$$

习题 **2.4** 第 **3** 题

设原方程为 $AX=\beta, \beta$ 非零向量，那么

$$A(\lambda_1X_1+\cdots+\lambda_kX_k)=\lambda_1AX_1+\cdots+\lambda_kAX_k=\lambda_1AX_1+\cdots+\lambda_kAX_k=(\lambda_1+\cdots+\lambda_k)\beta$$

由于 β 非零向量，故

$$\begin{aligned} \lambda_1X_1+\cdots+\lambda_kX_k \text{ 是解} &\Longleftrightarrow (\lambda_1+\cdots+\lambda_k)\beta=\beta \\ &\Longleftrightarrow \lambda_1+\cdots+\lambda_k=1 \end{aligned}$$