2021 秋高等代数习题课

2021-11-26 第五次习题课

习题 **4.3** 第 **8** 题. 设 A^* 表示 n 阶方阵 A 的伴随矩阵。证明：

(1). $(\lambda A)^* = \lambda^{n-1}A^*$ 对任意数 λ 成立；

(2). $(AB)^* = B^*A^*$ 对任意同阶方阵 A, B 成立；

(3). 当 $n > 2$ 时，$(A^*)^* = (\det A)^{n-2}A$; 当 $n = 2$ 时，$(A^*)^* = A$.

证明： (1). 由于 $(\lambda A)^*$ 第 (j,i) 位元素为 λA 第 (i,j) 个代数余子式 $(\lambda A)_{(i,j)}$。由于任意 $n-1$ 阶方阵 B 都有 $\det(\lambda B) = \lambda^{n-1}\det B$, 所以 $(\lambda A)_{(i,j)} = \lambda^{n-1}A_{(i,j)}$, 进而有 $(\lambda A)^* = \lambda^{n-1}A^*$.

(2). 令 $B^*A^* = (c_{ij})$, 那么

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} B_{ki}A_{jk} = (-1)^{2k}(-1)^{i+j}\det(\widehat{A}_j\widetilde{B}_i),$$

其中 B_{ki}, A_{jk} 分别为 B 在第 (k,i) 位的代数余子式与 A 在第 (j,k) 位的代数余子式，$\widehat{A}_j$ 为方阵 A 删掉第 j 行得到的 $(n-1)\times n$ 的矩阵，$\widetilde{B}_i$ 为方阵 B 删掉第 i 列得到的 $n\times(n-1)$ 的矩阵。后面这个等号是根据 Binet-Cauchy 公式（课本定理 4.5.3(3)）得到的。

另一方面，方阵 $(AB)^*$ 的第 (i,j) 位元素，记为 d_{ij}，为方阵 AB 的第 (j,i) 位代数余子式 $(AB)_{ji}$, 其值为 $(-1)^{i+j}$ 乘以方阵 AB 删掉第 j 行第 i 列得到的 $n-1$ 阶方阵的行列式，此 $n-1$ 阶方阵就等于 $\widehat{A}_j\widetilde{B}_i$, 即我们会有

$$d_{ij} = (AB)_{ji} = (-1)^{i+j}\det(\widehat{A}_j\widetilde{B}_i).$$

于是，对于所有的 $1 \leqslant i,j \leqslant n$, 都有 $c_{ij} = d_{ij}$，所以相应的矩阵是同一矩阵，即 $(AB)^* = B^*A^*$.

另一种解法：当 A, B 都是可逆阵的时候，有

$$(AB)^* = \det(AB)\cdot(AB)^{-1} = (\det B\cdot B^{-1})\cdot(\det A\cdot A^{-1}) = B^*A^*.$$

若 A 不可逆，则考虑 $A(\lambda) = lambdaI + A$; 若 B 不可逆，$B(\lambda) = lambdaI + B$. 由于 $\det A(\lambda)$, $\det B(\lambda)$ 都是 λ 的多项式，至多有有限多个根，在 0 的一个小的去心领域 $\mathring{U}(0,\delta)$ 内，$A(\lambda), B(\lambda)$ 总是可逆的，从而有

$$(A(\lambda)B(\lambda))^* = B(\lambda)^*A(\lambda)^*$$

对上式取极限 $\lim\limits_{\mathring{U}(0,\delta)\ni x\to 0}$ 即有 $(AB)^* = B^*A^*$.

(3). 由于 A^* 的每个元素都是 A 的某个 $n-1$ 阶代数余子式，所以若 $r(A) \leqslant n-2$, 那么 $A^* = 0$. 又由于 $AA^* = \det AI_n$, 所以当 $r(A) = n$ 时，$r(A^*) = n$. 当 $r(A) = n-1$ 时，由于 $r(A^*) + r(A) - n \leqslant r(AA^*)$, 所以 $r(A^*) \leqslant 1$, 同时 A 至少有一个非零子式，即 A^* 至少有一个非零元，所以 $r(A*) \geqslant 1$, 从而必须由 $r(A^*) = 1$. 于是，我们证明了

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & \text{若} r(A) = n \\ 1, & \text{若} r(A) = n-1 \\ 0, & \text{其余情况} \end{cases}$$

所以当 $n>2$ 时，当 $r(A)=n$ 时，

$$(A^*)^* = \det A^* \cdot (A^*)^{-1} = (\det A)^{n-1}(\det A \cdot A^{-1})^{-1} = (\det A)^{n-2}A.$$

当 $r(A)<n$，有 $r(A*) \leqslant 1 < n-1$, 进而有 $r((A^*)^*)=0$, 也满足 $(A^*)^* = (\det A)^{n-2}A$. 唯一需要额外讨论的是 $n=2, r(A)=1$ 的情形，但这种情况下能直接通过伴随矩阵的定义得出 $n=2$ 时，$(A^*)^*=A$ 的结论。

习题 **4.3** 第 **9** 题. 设方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 的行列式 $|A|\neq 0$, $\beta\in\mathbb{F}^{n\times 1}$, 则线性方程组 $AX=\beta$ 有唯一解 $X=A^{-1}\beta$. 利用 A^{-1} 的表达式 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$ 证明 Cramer 法则。

证明：线性方程组 $AX=\beta$ 的解 $X=A^{-1}\beta=\frac{1}{|A|}A^*\beta$. 记 $X=(x_1,\cdots,x_n)^T, A^*=(c_{ij}), \beta=(b_1,\cdots,b_n)^T$, 其中 $c_{ij}=A_{ji}$ 为方阵 A 的第 (j,i) 位代数余子式。那么有

$$x_i = \frac{c_{i1}b_1+\cdots+c_{in}b_n}{|A|} = \frac{A_{1i}b_1+\cdots+A_{ni}b_n}{|A|}$$

上式右边分子正好是将矩阵 A 的第 i 列替换为 β, 再按第 i 列展开计算得到的替换后方阵的行列式，此即为 Cramer 法则。

习题 **4.4** 第 **5** 题. 已知 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$. 求 2 阶初等方阵 P,Q 使 PAQ 具有形式 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d_1\end{pmatrix}$.

解：这题需要添加条件 $a\neq 0$，否则 $A=\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d\end{pmatrix}, b,c\neq 0$ 时不可能能化成 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_1\end{pmatrix}$ 的形式。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d-\frac{bc}{a}\end{pmatrix}$$

所以可以取 $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 1\end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1\end{pmatrix}, d_1=d-\frac{bc}{a}$.

习题 **4.4** 第 **6** 题. 设 $A,B,C,D\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 且 A 可逆。求 $2n$ 阶可逆方阵 P,Q 使 $P\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}Q$ 具有形式 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D_1\end{pmatrix}$, 其中 D_1 是某个 n 阶方阵。

解：这题可以依照习题 4.4 第 6 题类似地做，只是需要注意矩阵相乘的顺序。

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B\end{pmatrix}$$

$D_1 = D-CA^{-1}B.$

第 **5** 题. 设 A 是秩为 1 的 n 阶方阵，若存在正整数 k，使得 $A^k=0$, 证明 $A^2=0$.

证明：由于 A 秩为 1，所以至少存在某一行元素不全为 0，记这一行为 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)$。由于 A 秩为 1，$\{\alpha\}$ 即为 A 的行的极大线性无关组，能表出其他所有行。也就是说 A 的所有行都能表

示为 $\lambda_1\alpha,\ldots,\lambda_n\alpha$，于是有 $A=\lambda\alpha$，其中 $\lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$. 那么对于 $k\geqslant 2$,

$$A^k=(\lambda\alpha)^k=\lambda(\alpha\lambda)^{k-1}\alpha=\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i a_i\right)^{k-1}\lambda\alpha=\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i a_i\right)^{k-1}A$$

于是若 $A^k=0$, 那么 $\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i a_i=0$, 所以

$$A^2=\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i a_i\right)A=0.$$

第 **6** 题. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵。证明

$$r(\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix})\leqslant r(\begin{pmatrix}A&0\\I_n&B\end{pmatrix})=r(\begin{pmatrix}AB&0\\0&I_n\end{pmatrix})$$

证明：由于有

$$\begin{pmatrix}I&-A\\0&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&0\\I&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&I\\-I&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&0\\B&I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AB&0\\0&I\end{pmatrix},$$

而且 $\begin{pmatrix}I&-A\\0&I\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&I\\-I&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}I&0\\B&I\end{pmatrix}$ 都是满秩方阵，所以 $r(\begin{pmatrix}A&0\\I_n&B\end{pmatrix})=r(\begin{pmatrix}AB&0\\0&I_n\end{pmatrix})$。

设可逆矩阵 P_1,Q_1,P_2,Q_2 使得 $P_1AQ_1=\begin{pmatrix}I_{r_1}&0\\0&0\end{pmatrix}$, $P_2BQ_2=\begin{pmatrix}I_{r_2}&0\\0&0\end{pmatrix}$, 那么

$$\begin{pmatrix}P_1&0\\0&P_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1&0\\0&Q_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_{r_1}&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&I_{r_2}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}P_1&0\\0&P_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&0\\I&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1&0\\0&Q_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_{r_1}&0&0&0\\0&0&0&0\\C_{11}&C_{12}&I_{r_2}&0\\C_{21}&C_{22}&0&0\end{pmatrix}$$

其中 $P_2Q_1=\begin{pmatrix}C_{11}&C_{12}\\C_{21}&C_{22}\end{pmatrix}$. 于是上式中第一行的方阵的秩小于等于第二行的方阵的秩，同时又由于 $\begin{pmatrix}P_1&0\\0&P_2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}Q_1&0\\0&Q_2\end{pmatrix}$ 都是可逆（满秩）的，所以有 $r(\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix})\leqslant r(\begin{pmatrix}A&0\\I_n&B\end{pmatrix})$.