2021 秋高等代数课后习题

第六次作业

习题 **2.8** 第 **1** 题

利用过 A, B 点的一般的圆方程

$$\lambda(x^2+y^2-x+2y-10)+(x^2+y^2+3x-4y-1)=0$$

令其过点 $C=(2,0)$，解出 $\lambda=9/8$。再代入上述方程得

$$x^2+y^2+\frac{15}{17}x-\frac{14}{17}y-\frac{98}{17}=0$$

习题 **2.8** 第 **2** 题

由 $x^2=5x-6$ 解得 $x=2,3$。于是，$a_n=\alpha 2^n+\beta 3^n$。利用 $a_1=a_2=1$ 的条件解得 $\alpha=1,\beta=-1/3$。所以有

$$a_n=2^n-3^{n-1}$$

习题 **2.8** 第 **3** 题

一般给定 n 个点 $(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$，$x_1,\cdots,x_n$ 互不相同，则有拉格朗日插值多项式

$$L(x)=\sum_{i=1}^{n} y_i\ell_i(x)$$

其中，$\ell_i(x)=\prod_{\substack{1\le m\le k\\ m\neq i}}\frac{x-x_m}{x_i-x_m}=\frac{(x-x_0)}{(x_i-x_0)}\cdots\frac{(x-x_{i-1})}{(x_i-x_{i-1})}\frac{(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i+1})}\cdots\frac{(x-x_n)}{(x_i-x_n)},$

满足 $L(x_i)=y_i, i=1,\cdots,n$。本题对应的拉格朗日插值多项式为 $f(x)=L(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1.$ 当然也存在更高次多项式满足题目条件。

任取满足题设条件的多项式 $f(x)$，考察 $g(x)=f(x)-L(x)$。$1,2,3$ 是 $g(x)$ 的根，于是存在 $h(x)$ 使得

$$g(x)=f(x)-L(x)=(x-1)(x-2)(x-3)h(x)$$

于是在 $\mathbb{R}[X]$ 中有

$$f(x)\equiv L(x)\mod (x-1)(x-2)(x-3)$$

观察两边最高次项知上式不可能

习题 **3.1** 第 **2** 题 (1)

$$\tau(n(n-1)\cdots 21) = (n-1)+\cdots+1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

于是 $n(n-1)\cdots 21$ **是偶排列，当且仅当** $n(n-1)\equiv 0 \mod 4$**，即** $n\equiv 0,1 \mod 4$

习题 **3.1** 第 **3** 题

令 A **为每个位置元素值都为** 1 **的** n **阶方阵，那么**

$$0 = det(A) = \text{偶排列个数} - \text{奇排列个数}$$

所以 $\text{偶排列个数} = \text{奇排列个数} = \frac{\text{全体排列个数}}{2} = \frac{n!}{2}$

习题 **3.1** 第 **5** 题

x^4 **的项：由于后** 3 **列只有一个** x**，于是必须选择** $(2,2),(3,3),(4,4)$ **位的** x**，剩余只能选择** $(1,1)$ **位的** x**。于是** x^4 **的项为** x^4**。**

x^3 **的项：由于后** 3 **列只有一个** x**，如果都选择相应位置的** x**，剩余只能选择** $(1,1)$ **位的** x**，那么会得到** x^4**。于是后** 3 **列只能选取** 2 **个** x**，以下是可行的组合：**

- $(2,2),(3,3),(4,1)$ **选取** x**，相应的项为** $(-1)^{\tau(4231)}3x^3$.
- $(3,3),(4,4),(2,1)$ **选取** x**，相应的项为** $(-1)^{\tau(2134)}x^3$.

于是 x^3 **的项为** $-3x^3 - x^3 = -4x^3$**。**