

# 2022 春高等代数习题课

## 2022-4-22 第四次习题课

第一题. 对于  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^3)$ , 若  $\mathcal{A}$  在基  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{证明:}$$

(1).  $\mathcal{A}$  是可逆线性变换;

(2). 求  $\mathcal{A}$  在基  $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  下的矩阵。

证明. (1). 要证明  $\mathcal{A}$  是可逆线性变换, 只要证  $\det A \neq 0$  即可:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

(2). 由已知条件,  $\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A$ . 令  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  到  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  的过渡矩阵为  $P$ , 即  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P$ , 那么

$$\mathcal{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)AP = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)P^{-1}AP.$$

容易看出  $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ , 利用  $P = (P^{-1})^{-1} = \frac{1}{\det P^{-1}}(P^{-1})^*$  解得  $P = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ,

所以  $\mathcal{A}$  在基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  下的矩阵为

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

第二题. 在向量空间  $V = \mathbb{F}[x]$  中定义线性变换  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  如下:

$$\mathcal{A}(f(x)) = f'(x), \mathcal{B}(f(x)) = xf(x), \quad \forall f(x) \in V.$$

对于  $W = \mathbb{F}_n[x] = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{F}, 0 \leq i \leq n\}$

(1). 证明  $W$  是  $\mathcal{B}\mathcal{A}$  的不变子空间;

(2). 求  $\text{Im}((\mathcal{B}\mathcal{A})^n)$  和  $\ker((\mathcal{B}\mathcal{A})^n)$  的维数与一组基。

解: 这是课本上的原题。

(1). 任取  $f(x) \in V$ , 有  $\mathcal{BA}(f(x)) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(f(x))) = \mathcal{B}(f'(x)) = xf'(x)$ . 令  $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in W$ , 那么  $\mathcal{BA}(f(x)) = na_n x^n + \cdots + a_1 x \in W$ . 所以  $W$  是  $\mathcal{BA}$  的不变子空间。

(2) 由  $\mathcal{BA}(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = na_n x^n + \cdots + a_1 x$  容易看出  $(\mathcal{BA})^n(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = n^n a_n x^n + \cdots + a_1 x$ .

所以当  $\text{char}(\mathbb{F}) = 0$  时, 任取  $g(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x$ , 总有  $(\mathcal{BA})^n \left( \frac{b_n}{n^n} x^n + \cdots + b_1 x \right) = g(x)$ .

于是

$$\text{Im}((\mathcal{BA})^n) = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x \mid a_i \in \mathbb{F}, 1 \leq i \leq n\}$$

$\ker((\mathcal{BA})^n)$  维数为 1, 可取常值函数 (多项式)  $f(x) = 1$  为其中一组基。

当  $\text{char}(\mathbb{F}) = p$ ,  $p$  为某个素数时, 有

$$(\mathcal{BA})^n(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ p \nmid k}} k^n a_k x^k$$

此时有

$$\text{Im}((\mathcal{BA})^n) = \left\{ \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ p \nmid k}} a_k x^k \mid a_k \in \mathbb{F}, 1 \leq k \leq n, p \nmid k \right\}$$

$\ker((\mathcal{BA})^n)$  维数等于  $\#(\{0\} \cup \{k \mid 1 \leq k \leq n, p \nmid k\}) = 1 + \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ . 它的一组基可以取为

$1, a^p, \dots, a^{mp}$ , 其中  $m = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ .

第三题. 在  $V = M_n(\mathbb{F})$  中定义变换  $\sigma : X \mapsto AX, \forall X \in V$ , 其中  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ,

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$  两两不同。

(1). 证明  $\sigma$  是  $V$  上的线性变换;

(2). 判断  $\sigma$  能否对角化, 并证明你的结论。

解: (1). 任取  $a_1, a_2 \in \mathbb{F}, X_1, X_2 \in V$ , 有

$$\sigma(a_1 X_1 + a_2 X_2) = A(a_1 X_1 + a_2 X_2) = a_1 AX_1 + a_2 AX_2 = a_1 \sigma(X_1) + a_2 \sigma(X_2).$$

所以  $\sigma$  是  $V$  上的线性变换。

(2) 由于  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  两两不同, 所以  $A$  可以对角化, 即存在可逆方阵  $P$ , 使得  $PAP^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \Lambda$ .

设  $\lambda$  是  $\sigma$  的一个特征值, 对应特征向量为  $X$ , 即  $\sigma(X) = \lambda X$ , 那么  $P^{-1}\Lambda PX = \lambda X$ , 等价于  $\Lambda PX = \lambda PX$ . 记  $PX = (a_{ij})$ , 那么有

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \cdots & \lambda_1 a_{1n} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_2 a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n a_{n1} & \lambda_n a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix} = (\lambda a_{ij})$$

上式  $\lambda = \lambda_i$  的解有  $E_{i1}, \dots, E_{in}, i = 1, \dots, n$ , 其中  $E_{ij}$  为第  $(i, j)$  位元素值为 1, 其余位置值为 0 的  $n$  阶方阵。从而知  $\sigma(X) = \lambda X$  能解得  $n$  个特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , 其中每个  $\lambda_i$  对应的特征向量有  $n$  个, 为  $P^{-1}E_{i1}, \dots, P^{-1}E_{in}, i = 1, \dots, n$ . 所以  $\sigma$  可以对角化。

第四题. 设  $V$  是  $\mathbb{C}$  上  $n$  维向量空间,  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ , 且  $\varphi_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m g(\lambda), g(\lambda_0) \neq 0$ . 用  $W_{\lambda_0}$  表示  $V$  的属于  $\lambda_0$  的根子空间, 证明

$$W_{\lambda_0} = \{g(\mathcal{A})\alpha \mid \alpha \in V\}.$$

证明: 习题课讲过类似的题目。任取  $\beta \in W_{\lambda_0}$ , 那么存在非负整数  $k$  使得  $(\mathcal{A} - \lambda_0)^k \beta = 0$ . 我们希望找到某个  $\alpha \in V$ , 使得  $g(\mathcal{A})\alpha = \beta$ .

由于多项式  $(\lambda - \lambda_0)^m, g(\lambda)$  互素, 所以存在多项式  $u(\lambda), v(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$ , 使得  $u(\lambda)(\lambda - \lambda_0)^m + v(\lambda)g(\lambda) = 1$ . 那么

$$\beta = (u(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda_0)^m + v(\mathcal{A})g(\mathcal{A}))\beta = u(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda_0)^m \beta + g(\mathcal{A})(v(\mathcal{A})\beta)$$

下面我们证明  $u(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda_0)^m \beta = 0$ . 假设  $k$  是使得  $(\mathcal{A} - \lambda_0)^k \beta = 0$  成立的最小的非负整数。如果  $k \leq m$ , 则证明完毕。若  $k > m$ , 那么

$$(\mathcal{A} - \lambda_0)^{k-m} \beta = u(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda_0)^k \beta + g(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda_0)^{k-m} (v(\mathcal{A})\beta) = g(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda_0)^{k-m} (v(\mathcal{A})\beta)$$

若  $k \geq 2m$ , 则上式右边等于  $\varphi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda_0)^{k-2m} (v(\mathcal{A})\beta) = 0$ . 此时  $k-m$  也满足  $(\mathcal{A} - \lambda_0)^{k-m} \beta = 0$ , 与  $k$  的极小性矛盾。若  $k < 2m$ , 那么上式左右两边同时用  $(\mathcal{A} - \lambda_0)^{2m-k}$  作用, 有

$$(\mathcal{A} - \lambda_0)^m \beta = \varphi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})(v(\mathcal{A})\beta) = 0.$$

这也与  $k > m$  以及  $k$  的极小性的假设矛盾。所以必然有  $k \leq m$ . 于是, 我们证明了  $\beta = g(\mathcal{A})(v(\mathcal{A})\beta)$ , 从而有

$$W_{\lambda_0} = \{g(\mathcal{A})\alpha \mid \alpha \in V\}.$$

第五题. 设  $A$  是数域  $\mathbb{F}$  上  $n$  阶幂零矩阵, 且  $A$  的最小多项式  $d(\lambda) = \lambda^m, m \leq n$ . 证明

$$r(A) \leq \frac{(m-1)n}{m}.$$

证明. 由于  $A$  是  $n$  阶幂零矩阵, 所以  $A$  的 Jordan 标准形可以写为  $\text{diag}(J_{r_1}(0), \dots, J_{r_s}(0))$ . 由于  $A$  的最小多项式  $d(\lambda) = \lambda^m$ , 所以  $\forall 1 \leq i \leq s$ , 有  $r_i \leq m$ . 于是我们有

$$\begin{cases} \text{rank}(A) = \sum_{i=1}^s \text{rank } J_{r_i}(0) = \sum_{i=1}^s r_i - 1, \\ \sum_{i=1}^s r_i = n, \\ r_i \leq m, \forall 1 \leq i \leq s. \end{cases}$$

$$\text{于是 } \text{rank } A = n - s \leq n - \frac{n}{m} = \frac{(m-1)n}{m}.$$

第六题. 设  $\mathcal{A}$  是  $n$  维向量空间  $V$  的一个线性变换。对于  $V$  的一组基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  和  $\alpha = x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n$ , 有

$$\mathcal{A}\alpha = x_n\alpha_1 + \dots + x_1\alpha_n,$$

判断  $\mathcal{A}$  是否可对角化, 并证明你的结论。

解: 设  $\lambda$  为  $\mathcal{A}$  的一个特征值,  $\sum_{i=1}^n x_i \alpha_i \neq 0$  为对应的特征向量, 即  $x_1, \dots, x_n$  不全为 0, 且有

$$\lambda \left( \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i \right) = \mathcal{A} \left( \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i \right) = \sum_{i=1}^n x_{n+1-i} \alpha_i.$$

于是有

$$\begin{cases} \lambda x_i = x_{n+1-i} \\ \lambda x_{n+1-i} = x_i \\ \lambda \neq 0, \end{cases}$$

解得  $\lambda = \pm 1$ .

于是, 当  $n$  为偶数时,  $\mathcal{A}$  对应于特征值  $\lambda = 1$  有  $\frac{n}{2}$  个特征向量  $\alpha_i + \alpha_{n+1-i}$ ,  $i = 1, \dots, \frac{n}{2}$ ,  $\mathcal{A}$  对应于特征值  $\lambda = -1$  有  $\frac{n}{2}$  个特征向量  $\alpha_i - \alpha_{n+1-i}$ ,  $i = 1, \dots, \frac{n}{2}$ . 所以此时  $\mathcal{A}$  可以对角化。

当  $n$  是奇数的时候,  $\mathcal{A}$  对应于特征值  $\lambda = 1$  有  $\frac{n+1}{2}$  个特征向量  $\alpha_i + \alpha_{n+1-i}$ ,  $i = 1, \dots, \frac{n-1}{2}$ , 以及  $\alpha_{(n+1)/2}$ .  $\mathcal{A}$  对应于特征值  $\lambda = -1$  有  $\frac{n-1}{2}$  个特征向量  $\alpha_i - \alpha_{n+1-i}$ ,  $i = 1, \dots, \frac{n-1}{2}$ . 所以此时  $\mathcal{A}$  也可以对角化。

解法二:  $\mathcal{A}$  在这组基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  下的矩阵表示为  $A = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$ , 那么

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda & & & -1 \\ & \ddots & & \ddots \\ & & \lambda & -1 \\ & & -1 & \lambda \\ & \ddots & & \ddots \\ -1 & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad n \text{ 为偶数},$$

或者

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda & & & -1 \\ & \ddots & & \ddots \\ & & \lambda & -1 \\ & & -1 & \lambda \\ & \ddots & & \ddots \\ -1 & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad n \text{ 为奇数}.$$

可以算得

$$\det(\lambda I - A) = \begin{cases} (\lambda + 1)^{\frac{n}{2}} (\lambda - 1)^{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为偶数}, \\ (\lambda + 1)^{\frac{n-1}{2}} (\lambda - 1)^{\frac{n+1}{2}}, & n \text{ 为奇数}, \end{cases}$$

解得特征值为  $\pm 1$ . 通过解对应的特征方程得到和前一种解法一样的特征向量。

解法三: 容易看出  $\mathcal{A}^2$  是恒等映射, 即  $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$ , 所以  $\mathcal{A}$  的一个零化多项式为  $f(\lambda) = \lambda^2 - 1$ , 它没有重根, 所以  $\mathcal{A}$  的极小多项式也没有重根, 所以  $\mathcal{A}$  可以对角化。

第七题. 记  $J_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$ . 若  $A$  是  $n$  阶幂零矩阵, 且幂零指数为  $n$ . 证明  $A$  与

$J_n(0)$  相似, 并求出  $A$  的最小多项式和特征多项式。

解: 由于  $A^{n-1} \neq 0$ , 所以存在  $\alpha \in \mathbb{F}^n, \alpha \neq 0$ , 使得  $A^{n-1}\alpha \neq 0$ . 考虑向量组  $A^{n-1}\alpha, \dots, A\alpha, \alpha$ , 假若它们线性相关, 则存在一组不全为 0 的数  $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$  使得  $\lambda_0\alpha + \dots + \lambda_{n-1}A^{n-1}\alpha = 0$ . 那么

$$0 = A^{n-1}(\lambda_0\alpha + \dots + \lambda_{n-1}A^{n-1}\alpha) = \lambda_0A^{n-1}\alpha + \lambda_1A^n\alpha + \dots + \lambda_{n-1}A^{2n-2}\alpha = \lambda_0A^{n-1}\alpha,$$

从而必须有  $\lambda_0 = 0$ . 依次可推出  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$ . 于是假设不成立, 向量组  $A^{n-1}\alpha, \dots, A\alpha, \alpha$  线性无关, 构成了  $\mathbb{F}^n$  的一组基。  $A$  在这组基下的矩阵表示即为  $J_n(0)$ .  $A$  的极小多项式与特征多项式都是  $f(\lambda) = \lambda^n$ .

第八题. 若  $A$  相似于  $J_1 = \begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{m_s}(0) \end{pmatrix}$  和  $J_2 = \begin{pmatrix} J_{n_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_t}(0) \end{pmatrix}$ , 证明  $s = t$ ,

并且适当调整顺序后可使得  $J_{n_1}(0), \dots, J_{n_s}(0)$  与  $J_{m_1}(0), \dots, J_{m_s}(0)$  相等 (即  $\{m_1, \dots, m_s\} = \{n_1, \dots, n_s\}$ )。

证明: 由于  $s = \dim(\ker(0I - J_1)), t = \dim(\ker(0I - J_2))$  为特征值 0 对应的特征空间的维数, 而  $J_1, J_2$  都相似于  $A$ , 所以

$$s = t = \dim(\ker(0I - A)) = \dim(\ker A).$$

由于  $A, J_1, J_2$  相似, 所以  $\forall k \in \mathbb{N}$ , 有

$$\text{rank } A^k = \text{rank } J_1^k = \text{rank } J_2^k.$$

对于  $r$  阶 Jordan 块  $J_r(0)$ , 有  $\text{rank } J_r(0)^k = \max\{0, r - k\}$ , 进而有

$$\text{rank } J_1^k = \sum_{i=1}^s \max\{0, m_i - k\}, \quad \text{rank } J_2^k = \sum_{i=1}^s \max\{0, n_i - k\}.$$

他们的二阶差分分别为 ( $k \geq 1$ )

$$\begin{aligned} D_1(k) &:= \text{rank } J_1^{k+1} + \text{rank } J_1^{k-1} - 2\text{rank } J_1^k = \#\{i \mid 1 \leq i \leq s, m_i = k\} \\ D_2(k) &:= \text{rank } J_2^{k+1} + \text{rank } J_2^{k-1} - 2\text{rank } J_2^k = \#\{i \mid 1 \leq i \leq s, n_i = k\} \end{aligned}$$

于是对于任意  $k \geq 1$  都有

$$\#\{i \mid 1 \leq i \leq s, m_i = k\} = D_1(k) = D_2(k) = \#\{i \mid 1 \leq i \leq s, n_i = k\}$$

所以存在  $s$  阶对称群中的一个元素  $\sigma$ , 使得  $\sigma(m_1, \dots, m_s) = (n_1, \dots, n_s)$ , 即在不计一个置换作用的意义下,  $A$  的 Jordan 标准形是唯一的。