2021 秋高等代数习题课

2021-09-17 第一次习题课

习题 1.2 第 3 题 已知两个变量 x, y 之间有某种函数关系 $y = f(x)$，并且有如下对应值

x	1	2	3	4
y	2	7	16	29

问：y 是否可能是 x 的二次函数？如果可能，试求出满足要求的二次函数。
解：假设 y 是 x 的二次函数，即存在实数 a, b, c 使得

$$y = a + bx + cx^2$$

我们有

x	1	2	3	4
x^2	1	4	9	16
y	2	7	16	29

上式需要满足

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 16 \\ 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

高斯消元法化简得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

得 $(a, b, c) = (1, -1, 2)$，即 $y = 1 - x + 2x^2$。

习题 1.2 第 4 题 在实数范围内解线性方程组

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 4 \\ 2x + 5y - 3z = -1 \\ 4x + 11y + z = 7 \end{cases}$$

这个方程组的解集在 3 维空间中的图像 Π 是什么？

将这个方程组的常数项全部变成 0，得到的方程组的解集在 3 维空间中的图像 Π_0 是什么？Π_0 与 Π 有什么关系？

解：该线性方程组的增广系数矩阵为

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 2 & 4\\ 2 & 5 & -3 & -1\\ 4 & 11 & 1 & 7\end{array}\right)$$

通过高斯消元法化为阶梯形

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -19 & -23\\ 0 & 1 & 7 & 9\end{array}\right)$$

所以解集为 $(x,y,z)=(19t-23,-7t+9,t), t\in\mathbb{R}$. 它在 3 维空间中的图像 Π 是一条直线。将这个方程组的常数项全部变成 0，得到的方程组的解集在 3 维空间中的图像 Π_0 一条过原点的直线。Π_0 与 Π 之间可以通过平移相互得到，即 $\Pi=\Pi_0+\begin{pmatrix}-23\\ 9\\ 0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-23\\ 9\\ 0\end{pmatrix}$ 可以换为原非齐次线性方程组的任意一个特解。

习题 **1.3** 第 **2** 题 **讨论当 λ 取什么值时下面的方程组有解**

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$$

当方程组有解时求出解来，并讨论 λ 取什么值时方程组有唯一解，什么时候有无穷多组解。

解：对增广系数矩阵做行变换

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ \lambda & 1 & 1 & 1\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & -(\lambda-1) & -\lambda(\lambda-1)\\ 0 & -(\lambda-1) & -(\lambda-1)(\lambda+1) & -(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & -(\lambda-1) & -\lambda(\lambda-1)\\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+2) & (\lambda-1)(\lambda+1)^2\end{array}\right)$$

所以

- **当 $\lambda=1$ 时，增广系数矩阵化为 $\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)$，原线性方程组有无穷多组解**

$$\begin{pmatrix}1-t_1-t_2\\ t_1\\ t_2\end{pmatrix},\quad t_1,t_2\in\mathbb{R}.$$

- **当 $\lambda=-2$ 时，增广系数矩阵化为**

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & 4\\ 0 & -3 & 3 & -6\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{array}\right)$$

此时原线性方程组无解。

- 其余情况，增广系数矩阵可进一步约化

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{\lambda+1}{\lambda+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \end{array}\right)$$

此时原线性方程组有唯一解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda+1}{\lambda+2} \\ \frac{1}{\lambda+2} \\ \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \end{pmatrix}$$

可以用程序验证答案（在 $\mathbb{Q}(\lambda)$ 中的解，适合一般情况，不适合 $\lambda = 1, -2$ 这样的退化的情况）：

```python
import sympy as sp
from sympy.solvers.solveset import linsolve
x, y, z, u = sp.symbols("x,y,z,u")
linsolve(
    [u*x + y + z - 1, x + u*y + z - u, x + y + u*z - u**2],
    (x, y, z)
)
```

习题四 设齐次线性方程组 (I), (II) 的系数矩阵分别为

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{\ell 1} & \cdots & b_{\ell n} \end{pmatrix}$$

若 A 与 B 的行等价，判断 (I) 与 (II) 是否等价，并证明你的结论。

解：解法一：容易看出齐次线性方程组

$$Ax = 0 \quad \text{与} \quad \begin{pmatrix} A \\ \mathbf{0}_{\ell\times n} \end{pmatrix} x = 0$$

同解，其中 $\mathbf{0}_{\ell\times n}$ 为 $\ell \times n$ 的零矩阵。因为 A 与 B 的行等价，故可通过行的初等变换将

$$\begin{pmatrix} A \\ \mathbf{0}_{\ell\times n} \end{pmatrix} x = 0 \quad \text{化为} \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0$$

于是，齐次线性方程组

$$Ax = 0 \quad \text{与} \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0$$

同解。所以齐次线性方程组 (II) $Bx = 0$ 的解集（解空间）是齐次线性方程组 (I) $Ax = 0$ 的子集（子空间）。同理可以证明齐次线性方程组 (I) $Ax = 0$ 的解集（解空间）是齐次线性方程组 (II) $Bx = 0$ 的子集（子空间）。故二者相同，即齐次线性方程组 (I) 与 (II) 等价。

解法二：若 A 与 B 的行等价，那么矩阵 $P_{\ell\times s}$，使得 $P_{\ell\times s}A = B$，同时存在矩阵 $Q_{s\times\ell}$，使得 $Q_{s\times\ell}B = A$。设 x 满足 $Ax = 0$，那么 $Bx = P_{\ell\times s}Ax = P_{\ell\times s} \cdot 0 = 0$。反过来，若 x 满足 $Bx = 0$，那么 $Ax = Q_{s\times\ell}Bx = Q_{s\times\ell} \cdot 0 = 0$。所以齐次线性方程组 (I), (II) 同解，即是等价的。

解法三：将 A 记作 $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_s \end{pmatrix}$，将 B 记作 $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_\ell \end{pmatrix}$，这里的 a_i, b_j 为 n 维行向量。A 与 B 的行等价即为 A 与 B 的行空间相同，即

$$C(A) = \text{span}\{a_1, \cdots, a_s\} = \text{span}\{b_1, \cdots, b_\ell\} = C(B)$$

所以相应的零空间，即解空间相同

$$N(A) = C(A)^\perp = C(B)^\perp = N(B)$$

习题 **1.1** 第 **2** 题 (1). 求证：如果复数集合的子集 P 包含至少一个非零数，并且对加、减、乘、除（除数不为 0）封闭，则 P 包含 $0, 1$，从而是数域。

(2). 求证：所有的数域都包含有理数域。

(3). 求证：集合 $F = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ 是数域。（其中 $\mathbb{Q}$ 是有理数域。）

(4). 试求包含 $\sqrt[3]{2}$ 的最小的数域。

解：(1). 设 P 包含非零数 a，则 $0 = a - a \in P, 1 = a/a \in P$，所以 P 是数域。

(2). 任意一个数域 F 都包含 $0, 1$，且对加、减、乘、除封闭，故 F 包含整数 $\mathbb{Z}$（包含 $0, 1$ 且对加、减封闭），进而包含有理数域 $\mathbb{Q}$（对乘、除封闭）。有理数域 $\mathbb{Q}$ 与有限域 $\mathbb{F}_p$，p 为素数，为最小的域，即不真包含更小的域，称为素域。

(3) 集合 $F = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ 包含 $0, 1$（分别令 $(a, b) = (0, 0)$ 与 $(a, b) = (1, 0)$）。设 $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Q}$，下面验证

- 加、减法封闭：
$$(a_1 + b_1\sqrt{2}) \pm (a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\sqrt{2}$$

- 乘法封闭：
$$(a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2}$$

- 除法封闭（a_2, b_2 不同时为零）：
$$(a_1 + b_1\sqrt{2})/(a_2 + b_2\sqrt{2}) = \frac{a_1a_2 - 2b_1b_2}{a_2^2 - 2b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 - 2b_2^2}\sqrt{2}$$

(4). 包含 $\sqrt[3]{2}$ 的最小的数域为

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$$

很容易看到任何包含 $\sqrt[3]{2}$ 的数域都必须包含 $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$，从而包含 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$，那么只要证明 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ 是一个数域。

解法一：直接验证 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ 是对加、减、乘、除封闭。其中对加、减、乘封闭好验证。对于除法封闭，只要验证 $1/(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}) \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$，$a, b, c$ 不全为零，即可。不妨设 a, b, c 都不为零（其余情况更简单）。这种情况下，又不妨设 $c = 1$，记 $\theta = \sqrt[3]{2}$，要证明

$$1/(a + b\theta + \theta^2) \in \mathbb{Q}(\theta)$$

利用带余除法，有
$$\theta^3 - 2 = (\theta^2 + b\theta + a)(\theta - b) + ((b^2 - a)\theta + ab - 2)$$

若 $b^2-a=0$，则 $ab-2\neq 0$，此时有

$$1/(\theta^2+b\theta+a)=(\theta-b)/(2-ab).$$

若 $b^2-a\neq 0$，则

$$(\theta^2+b\theta+a)=((b^2-a)\theta+ab-2)\left(\frac{1}{b^2-a}\theta+\frac{b^3-2ab+2}{(b^2-a)^2}\right)+a-(ab-2)\frac{b^3-2ab+2}{(b^2-a)^2}$$

将上式回代，有

$$(\theta^3-2)\left(\frac{1}{b^2-a}\theta+\frac{b^3-2ab+2}{(b^2-a)^2}\right)=(\theta^2+b\theta+a)\left[(\theta-b)\left(\frac{1}{b^2-a}\theta+\frac{b^3-2ab+2}{(b^2-a)^2}\right)+1\right]-\gamma$$

其中 $\gamma=a-(ab-2)\frac{b^3-2ab+2}{(b^2-a)^2}$，只要验证 $\gamma\neq 0$，即有

$$1/(\theta^2+b\theta+a)=\left[(\theta-b)\left(\frac{1}{b^2-a}\theta+\frac{b^3-2ab+2}{(b^2-a)^2}\right)+1\right]/\gamma$$

解法二：

设 $m(x)=x^3-2$，这是 $\sqrt[3]{2}$ 的所谓的（首一的, monic）极小多项式[1](minimal polynomial over $\mathbb{Q}$)。令 $F=\mathbb{Q}[x]/(m(x))$ 为 $\mathbb{Q}$ 系数多项式全体的等价类组成的集合，其中的等价关系为

$$f_1(x)\sim f_2(x)\quad\Longleftrightarrow\quad \exists g(x)\ s.t.\ f_1(x)-f_2(x)=g(x)m(x)$$

作为一个 $\mathbb{Q}$ 线性空间，F 的一组基可以取作 $1,\overline{x},\overline{x}^2$。这是因为对于任意一个 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$，都存在 $g(x),r(x)$，$\deg r(x)<\deg m(x)$，使得

$$f(x)=g(x)m(x)+r(x)$$

于是

$$F=\{a+b\overline{x}+c\overline{x}^2\mid a,b,c\in\mathbb{Q}\}$$

定义

$$\varphi:F\to\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}),\overline{x}\mapsto\sqrt[3]{2}$$

可以验证

- F 关于加、减、乘、除封闭。加、减、乘封闭很容易验证。任取 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]\setminus m(x)\cdot\mathbb{Q}[x]$，即 $\overline{f}\neq 0\in F$，那么 $f(x)$ 与 $m(x)$ 互素，即他们的最大公因子为 1，记作 $(f(x),m(x))=1$。于是（通过辗转相除法）存在 $g_1(x),g_2(x)\in\mathbb{Q}[x]$，使得 $g_1(x)f(x)+g_2(x)m(x)=1$，于是 $\overline{f}$ 在 F 中的逆元即为 $\overline{g}_1$。

- φ 是一个一一对应（且保运算，即是一个域同构）。

[1]使得满足 $f(\sqrt[3]{2})=0$ 的 $\mathbb{Q}$ 系数多项式中次数最低的，如果要求是首一的，即最高次项系数为 1，则这样的多项式是唯一的。