2021 秋高等代数习题课

2021-10-29 第三次习题课

习题 3.2 第 4 题. **计算** n **阶行列式**

$(1).$ $\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{vmatrix};$ $(3).$ $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 3 & 3 & \cdots & n-1 & 3 \\ 3 & 3 & \cdots & 3 & n \end{vmatrix}$

解： $(1).$ **令原行列式为** D_n**,** $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$**,那么有**

$$D_n = \det(\alpha - b_1\beta, \alpha - b_2\beta, \cdots, \alpha - b_n\beta)$$
$$= \det(\alpha - b_1\beta, (b_1 - b_2)\beta, \cdots, (b_1 - b_n)\beta)$$

于是，因为后 $n-1$ **列秩至多为** 1**，若** $n \geqslant 3$**，那么** $D_n = 0$**; 若** $n \leqslant 2$**，那么**

$$D_2 = (b_1 - b_2)\det(\alpha - b_1\beta, \beta) = (b_1 - b_2)((a_1 - b_1) - (a_2 - b_1)) = (b_1 - b_2)(a_1 - a_2),$$
$$D_1 = a_1 - b_1$$

$(3).$ **令原行列式为** D_n**,** $e_i, i = 1, \cdots, n,$ **为** $\mathbb{F}^n$ **的自然基，** $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$**,那么有**

$$D_n = \det(-2e_1 + 3\beta, -e_2 + 3\beta, 3\beta, e_4 + 3\beta, \cdots, (n-3)e_n + 3\beta)$$
$$= \det(-2e_1, -e_2, 3\beta, e_4, \cdots, (n-3)e_n)$$

于是当 $n \geqslant 3$ **时，** $D_n = 6 \cdot (n-3)!$**,** $D_2 = -7$**,** $D_1 = 1$**.**

习题 3.3 第 1 题. **计算** n **阶行列式**

$(2).$ $\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix};$ $(4).$ $\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & x & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & x & a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x + a_1 \end{vmatrix}$

解：(2). 令原行列式为 D_n，那么有（$n \geqslant 2$ 时）

$$D_n = \begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-a)D_{n-1} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a & x+a & 2a & \cdots & 2a \\ -a & 0 & x+a & \cdots & 2a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & 0 & 0 & \cdots & x+a \end{vmatrix}$$

$$= (x-a)D_{n-1} + a(x+a)^{n-1}$$

$$= (x-a)^2 D_{n-2} + a(x-a)(x+a)^{n-2} + a(x+a)^{n-1}$$

$$\cdots$$

$$= (x-a)^{n-1}D_1 + a\sum_{i=0}^{n-2}(x-a)^i(x+a)^{n-i-1}$$

$$= (x-a)^{n-1}x + a\frac{(x+a)^{n-1}\left(1-\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^{n-1}\right)}{1-\dfrac{x-a}{x+a}}, \quad a \neq 0$$

$$= (x-a)^{n-1}x + \frac{(x+a)^n - (x+a)(x-a)^{n-1}}{2}, \quad a \neq 0$$

$$= \frac{(x+a)^n + (x-a)^n}{2}, \quad a \neq 0$$

容易验证，当 $n=1$ 以及当 $a=0$ 时的特殊情况也符合这个通项公式，所以

$$D_n = \frac{(x+a)^n + (x-a)^n}{2}.$$

(4). 令原行列式为 D_n，从第 n 行开始，逐行乘以 x 加到上一行，有

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & x^2 + a_1 x + a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x + a_1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+n}(x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n)\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+n}(x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n)(-1)^{n-1}$$

2

$$= x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

令 $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, $C(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$, 那么 $D_n = \det(x - C(f))$。

方阵 $C(f)$ 被称作多项式 $f(x)$ 的友阵 (Companion Matrix)。

补充题. **设 $f_k(x)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 k 次多项式，其首项系数为 $a_k \neq 0$, $k = 0, 1, \cdots, n-1$。又设 $b_1, b_2, \cdots, b_n \in \mathbb{F}$. 计算下列行列式**

$$D = \begin{vmatrix} f_0(b_1) & f_0(b_2) & \cdots & f_0(b_n) \\ f_1(b_1) & f_1(b_2) & \cdots & f_1(b_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n-1}(b_1) & f_{n-1}(b_2) & \cdots & f_{n-1}(b_n) \end{vmatrix}$$

解： 令 $f_k(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_{ik} x^{i-1}$, $c_{ik} = 0$ 当 $i \geqslant k+1$, $c_{kk} = a_k$. 令

$$\beta_i = (b_1^i, b_2^i, \cdots, b_n^i), \quad i = 0, \cdots, n-1,$$

那么有

$$
D = \begin{vmatrix} a_0 \beta_0 \\ c_{10}\beta_0 + a_1 \beta_1 \\ c_{20}\beta_0 + c_{21}\beta_1 + a_2 \beta_2 \\ \vdots \\ c_{n0}\beta_0 + c_{n1}\beta_1 + \cdots + a_{n-1}\beta_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 \beta_0 \\ a_1 \beta_1 \\ a_2 \beta_2 \\ \vdots \\ a_{n-1}\beta_{n-1} \end{vmatrix}
$$

$$
= \left(\prod_{k=0}^{n-1} a_k \right) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1^{n-1} & b_2^{n-1} & \cdots & b_n^{n-1} \end{vmatrix}
$$

$$
= \prod_{k=0}^{n-1} a_k \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (b_j - b_i)
$$

习题 3.2 第 1 题. 计算行列式

(1). $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 9 \end{vmatrix}$;   (3). $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$;

(5). $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$

解：(1).
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -8$$

(3).
$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 2(x+y) \\ y & x+y & 2(x+y) \\ x+y & x & 2(x+y) \end{vmatrix} = 2(x+y)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ y-x & x & 1 \\ y & x-y & 1 \end{vmatrix} = 2(x+$$
$y)(-(x-y)^2 - xy) = -2(x^3 + y^3)$

类似的方阵经过行（或列）的调换后可以形成所谓的循环矩阵（Circulant matrix）。关于循环矩阵的行列式，有一般的结论。

(5).

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 0 & 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b \\ 0 & 3a & 7a+3b \end{vmatrix}$$

$$=a^2\begin{vmatrix} a & 2a+b \\ 3a & 7a+3b \end{vmatrix} = a^4$$

习题 3.2 第 3 题. 证明

(1). $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$;　(2). $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ac \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix} = 0.$

证明：(1).

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ q & r+p & p+q \\ y & z+x & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ r & r+p & p+q \\ z & z+x & x+y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & c+a & a \\ q & r+p & p \\ y & z+x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a+b \\ r & p & p+q \\ z & x & x+y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

(2).

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ac \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 0 & b-a & b^2-ac-a^2+bc \\ 0 & c-a & c^2-ab-a^2+bc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & (b-a)(a+b+c) \\ c-a & (c-a)(a+b+c) \end{vmatrix} = 0$$

4

习题 3.2 第 4 题. 计算 n 阶行列式

(2). $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_n & & & a_n \end{vmatrix}$

按最后一行展开有

$$D_n = a_n D_{n-1} + b_n c_n a_2 \cdots a_{n-1} = a_n(a_{n-1}D_{n-2} + b_{n-1}c_{n-1}a_2\cdots a_{n-2}) + b_n c_n a_2 \cdots a_{n-1}$$

$$= a_n a_{n-1} D_{n-2} + b_n c_n a_2 \cdots a_{n-1} + b_{n-1}c_{n-1}a_2\cdots a_{n-2}a_n$$

$$\cdots$$

$$= \left(\prod_{i=2}^{n} a_i\right) D_1 + \sum_{i=2}^{n}\left(b_i c_i \prod_{2 \leqslant j \leqslant n, j \neq i} a_j\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=2}^{n}\left(b_i c_i \prod_{2 \leqslant j \leqslant n, j \neq i} a_j\right)$$

(4). $D_n = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & x \end{vmatrix}$

有

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & x - a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= a_{n-1}\begin{vmatrix} x - a_1 & a_1 - a_2 & a_2 - a_3 & \cdots & 0 \\ 0 & x - a_2 & a_2 - a_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x - a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{vmatrix} + (x - a_{n-1})D_{n-1}$$

$$= a_{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}(x - a_i) + (x - a_{n-1})D_{n-1}$$

$$= (x - a_{n-1})\left((x - a_{n-2})D_{n-2} + a_{n-2}\prod_{i=1}^{n-2}(x - a_i)\right) + a_{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}(x - a_i)$$

$$= (x - a_{n-1})(x - a_{n-2})D_{n-2} + (a_{n-2} + a_{n-1})\prod_{i=1}^{n-1}(x - a_i)$$

$$\cdots$$

$$= x \cdot \prod_{i=1}^{n-1}(x - a_i) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right) \cdot \prod_{i=1}^{n-1}(x - a_i) = \left(x + \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right) \cdot \prod_{i=1}^{n-1}(x - a_i)$$