2022 秋高等代数习题课

2022-09-23 第二次习题课

第一题. 设 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 线性无关。令 $\beta_j = a_{j1}\alpha_1+\cdots+a_{jn}\alpha_n,\ j=1,\dots,n$. 令 $\gamma_j=\begin{pmatrix}a_{j1}\\ \vdots \\ a_{jn}\end{pmatrix}$, $j=1,\dots,n$. 证明 $\beta_1,\dots,\beta_n$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ 线性无关。

证明: $\Longrightarrow$: 假设 $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ 线性相关，那么存在不全为 0 的数 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ 使得

$$\lambda_1\gamma_1+\cdots+\lambda_n\gamma_n=0.$$

那么有

$$\begin{aligned}
& \lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_n\beta_n \\
=\ & \lambda_1(a_{11}\alpha_1+\cdots+a_{1n}\alpha_n)+\cdots+\lambda_n(a_{n1}\alpha_1+\cdots+a_{nn}\alpha_n) \\
=\ & (\lambda_1a_{11}+\cdots+\lambda_na_{n1})\alpha_1+\cdots+(\lambda_1a_{1n}+\cdots+\lambda_na_{nn})\alpha_n \\
=\ & (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1a_{11}+\cdots+\lambda_na_{n1}\\ \vdots \\ \lambda_1a_{1n}+\cdots+\lambda_na_{nn}\end{pmatrix} \\
=\ & (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\left(\begin{pmatrix}\lambda_1a_{11}\\ \vdots \\ \lambda_1a_{1n}\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}\lambda_na_{n1}\\ \vdots \\ \lambda_na_{nn}\end{pmatrix}\right) \\
=\ & (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)(\lambda_1\gamma_1+\cdots+\lambda_n\gamma_n) \\
=\ & 0.
\end{aligned}$$

这与 $\beta_1,\dots,\beta_n$ 线性无关的条件矛盾。

$\Longleftarrow$: 假设 $\beta_1,\dots,\beta_n$ 线性相关，那么存在不全为 0 的数 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ 使得

$$\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_n\beta_n=0.$$

上式左边有

$$\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_n\beta_n=(\lambda_1a_{11}+\cdots+\lambda_na_{n1})\alpha_1+\cdots+(\lambda_1a_{1n}+\cdots+\lambda_na_{nn})\alpha_n$$

由于 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 线性无关，所以有

$$\begin{cases}\lambda_1a_{11}+\cdots+\lambda_na_{n1}=0\\ \qquad\vdots \\ \lambda_1a_{1n}+\cdots+\lambda_na_{nn}=0\end{cases}$$

排成列向量的形式，即有

$$0=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 a_{11}+\cdots+\lambda_n a_{n1}\\ \vdots\\ \lambda_1 a_{1n}+\cdots+\lambda_n a_{nn}\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{1n}\end{pmatrix}+\cdots+\lambda_n\begin{pmatrix}a_{n1}\\ \vdots\\ a_{nn}\end{pmatrix}=\lambda_1\gamma_1+\cdots+\lambda_n\gamma_n.$$

这与 $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ 线性无关矛盾。

习题 **2.2** 第 **6** 题. 设向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 的秩是 r. 求证：

(1). $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 中任意 r 个线性无关向量都是极大线性无关组。

(2). 设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 能被其中某 r 个向量 $\beta_1,\ldots,\beta_r$ 线性表出，则 $\beta_1,\ldots,\beta_r$ 线性无关。

证明：(1). 任取 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 中 r 个线性无关向量 $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r}$，假设它不是极大线性无关组，那么存在 $j,1\leqslant j\leqslant n,j\notin\{i_1,\ldots,i_r\}$，使得 $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r},\alpha_j$ 线性无关。这与 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 的秩为 r 是矛盾的。

(2). 假设 $\beta_1,\ldots,\beta_r$ 线性相关，那么存在不全为 0 的数 $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ 使得 $\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_r\beta_r=0$. 任取 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 的一个极大线性无关组 $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r}$. 由于 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 能被 $\beta_1,\ldots,\beta_r$ 线性表出，所以存在系数 $a_{11},\ldots,a_{rr}$，使得

$$\begin{cases}\alpha_{i_1}=a_{11}\beta_1+\cdots+a_{r1}\beta_r\\ \qquad\vdots\\ \alpha_{i_r}=a_{1r}\beta_1+\cdots+a_{rr}\beta_r,\end{cases}$$

写成矩阵形式 $(\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r})=(\beta_1,\ldots,\beta_r)A$，其中 $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant r}$. 不妨设方阵 A 是满秩的，否则齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解，此时任取其中一个非零解 $x=(x_1,\ldots,x_r)$，即有

$$x_1\alpha_{i_1}+\cdots+x_r\alpha_{i_r}=(\beta_1,\ldots,\beta_r)Ax=0,$$

这与 $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r}$ 是线性无关组是矛盾的。

令 $t_1,\ldots,t_r$ 为未知数，考虑

$$\begin{aligned}t_1\alpha_{i_1}+\cdots+t_r\alpha_{i_r}&=t_1(a_{11}\beta_1+\cdots+a_{r1}\beta_r)+\cdots+t_r(a_{1r}\beta_1+\cdots+a_{rr}\beta_r)\\&=(t_1a_{11}+\cdots+t_ra_{1r})\beta_1+\cdots+(t_1a_{r1}+\cdots+t_ra_{rr})\beta_r\\&=(\beta_1,\ldots,\beta_r)A\begin{pmatrix}t_1\\ \vdots\\ t_r\end{pmatrix}\end{aligned}$$

由于 A 是满秩方阵，那么非齐次线性方程组 $A\begin{pmatrix}t_1\\ \vdots\\ t_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_r\end{pmatrix}$ 有唯一解，记为 $(x_1,\ldots,x_r)$. 由于 $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ 不全为 0，所以 $x_1,\ldots,x_r$ 不全为 0. 那么有

$$x_1\alpha_{i_1}+\cdots+x_r\alpha_{i_r}=(\beta_1,\ldots,\beta_r)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_r\end{pmatrix}=(\beta_1,\ldots,\beta_r)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_r\end{pmatrix}=\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_r\beta_r=0$$

这还是与 $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r}$ 是线性无关组矛盾。故假设不成立，$\beta_1,\ldots,\beta_r$ 必定是线性无关的。

习题 **2.2** 第 **7** 题. **证明：若向量组 (I) 可以由向量组 (II) 线性表出，则 (I) 的秩不超过 (II) 的秩。**

解：这其实已经在上一题（习题 2.2 第 6 题第 (2) 问）中证明了，因为在证明过程中，我们并没有假设 $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 是取自 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 中的。事实上，假设向量组 (I) 秩为 r，可以由秩为 s 的向量组 (II) 线性表出，且 $r > s$, 那么取向量组 (II) 的一个极大线性无关组，再从向量组 (II) 可重复地随机添加 $r - s$ 个向量，构成一个数量为 r 的向量组，那么这个向量组可以线性表出向量组 (I) 可以由这个向量组线性表出。根据上一题结论，这个向量组秩为 r，矛盾。

第四题. **设 A 是 $\mathbb{R}$ 上 n 阶方阵。若 $|a_{ii}| > \sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|, i = 1, \ldots, n,$ 求矩阵 A 的秩 $r(A)$.**

解：假设 A 不满秩，那么 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 列不满秩，其中 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 是 A 的列。那么存在不全为 0 的实数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$，使得

$$0 = \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_n\alpha_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_n a_{1n} \\ \vdots \\ \lambda_1 a_{n1} + \cdots + \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}.$$

令 $i_0 = \operatorname{argmax}\{|\lambda_i| \mid i = 1, \ldots, n\}$ 为满足 λ_i 中绝对值最大者的下标（如果有不止一个则任取一个即可）。考察上式右边第 i_0 位的元素

$$\lambda_1 a_{i_0 1} + \cdots + \lambda_{i_0} a_{i_0 i_0} + \cdots \lambda_n a_{i_0 n} = 0.$$

那么会有

$$\begin{aligned} & |\lambda_1 a_{i_0 1} + \cdots + \lambda_{i_0-1} a_{i_0, i_0-1} + \lambda_{i_0+1} a_{i_0, i_0+1} + \cdots + \lambda_n a_{i_0 n}| \\ = \ & |\lambda_{i_0} a_{i_0 i_0}| = |\lambda_{i_0}| \cdot |a_{i_0 i_0}| \ > \ |\lambda_{i_0}| \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}| \\ \geqslant \ & |\lambda_1 a_{i_0 1}| + \cdots + |\lambda_{i_0-1} a_{i_0, i_0-1}| + |\lambda_{i_0+1} a_{i_0, i_0+1}| + \cdots + |\lambda_n a_{i_0 n}|. \end{aligned}$$

上述不等式是不可能成立的。所以假设不成立，级 A 是满秩的，$r(A) = n$.

满足题设条件的方阵被称为（强）对角优势矩阵（diagonally dominant matrix）。这样的矩阵都是非奇异的。如果学了方阵特征值的知识，此题还可以利用如下结论证明：

> **设 A 是复数域 $\mathbb{C}$ 上 n 阶方阵，对 $i = 1, \ldots, n$, 令**
>
> $$R_i = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|,$$
> $$D(a_{ii}, R_i) = \{x \in \mathbb{C} \mid |x - a_{ii}| \leqslant R_i\}.$$
>
> **那么 A 的每个特征值都落在某个 $D(a_{ii}, R_i)$ 中。**

习题 **2.3** 第 **6** 题. **设 S, T 是向量组。求证：S 与 T 等价 $\Longleftrightarrow \operatorname{rank} S = \operatorname{rank}(S \cup T) = \operatorname{rank} T$.**

证明：$\Longrightarrow$: 若 S 与 T 等价，则他们可以相互线性表出，那么根据上一题（习题 2.2 第 7 题），有 $\operatorname{rank} S \leqslant \operatorname{rank} T$, 以及 $\operatorname{rank} T \leqslant \operatorname{rank} S$. 所以必须有 $\operatorname{rank} S = \operatorname{rank} T$. 对于向量组 $S \cup T$, 它里面的每一个向量，要么属于 S, 要么属于 T, 都可以用 S 的向量线性表出。反之，S 中每一个向量显然可以用向量组 $S \cup T$ 的向量线性表出。所以向量组 S 与 $S \cup T$ 线性等价，从而有 $\operatorname{rank} S = \operatorname{rank}(S \cup T)$.

$\Longleftarrow$: 令向量组 $S \cup T$ 的秩为 r. 任取 S 的一个极大线性无关组，记为 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$. 那么它们也是向量组 $S \cup T$ 中的 r 个线性无关的的向量，根据习题 2.2 第 6 题第 (1) 小题的结论，$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 是向量组 $S \cup T$ 的一个极大线性无关组，从而可以线性表出其中每一个向量。T 作为 $S \cup T$ 的一个子集，其中每一个向量也能被 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 线性表出。所以 T 能被 S 线性表出。

同样地可以证明 S 能被 T 线性表出。二者可以相互线性表出，所以它们是线性等价的。

习题 **2.3** 第 **7** 题. 求证：两个齐次线性方程组 (I), (II) 同解的充分必要条件是他们互为线性组合。

证明：考虑齐次线性方程组 $A_1X = 0$ 与 $A_2X = 0$, 其中 A_1, A_2 分别是 $m_1 \times n$ 与 $m_2 \times n$ 的矩阵。将 A_1, A_2 的行向量组分别记作 S_1, S_2, 那么线性方程组 $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} X = 0$ 的行向量组即为 $S_1 \cup S_2$. 对于齐次线性方程组，我们知道

$$\left(\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} X = 0 \text{ 的解空间}\right) = (A_1X = 0 \text{ 的解空间}) \cap (A_2X = 0 \text{ 的解空间})$$

那么

$$\begin{aligned} & A_1X = 0 \text{ 与} A_2X = 0 \text{ 同解} \\ \Longleftrightarrow\ & A_1X = 0, A_2X = 0, \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} X = 0 \text{ 同解} \\ \Longleftrightarrow\ & \operatorname{rank} S_1 = \operatorname{rank}(S_1 \cup S_2) = \operatorname{rank} S_2 \\ \Longleftrightarrow\ & S_1, S_2 \text{ 线性等价} \end{aligned}$$

最后一个等价是根据习题 2.3 第 6 题。倒数第二个等价的解释如下：

$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} X = 0$ 的解空间是 $A_1X = 0$(或 $A_2X = 0$) 的子空间，其维数分别为 $n - \operatorname{rank}(S_1 \cup S_2)$ 以及 $n - \operatorname{rank} S_1$(或者 $n - \operatorname{rank} S_2$)。一个线性空间与它的一个子空间相等，当且仅当他们维数是相等的，即

$$n - \operatorname{rank}(S_1 \cup S_2) = n - \operatorname{rank} S_1 \ \ (\text{或}\ \ n - \operatorname{rank} S_2),$$

即

$$\operatorname{rank}(S_1 \cup S_2) = \operatorname{rank} S_1 \ \ (\text{或}\ \ \operatorname{rank} S_2).$$