2021 秋高等代数习题课

2021-10-15 第二次习题课

习题 **2.5** 第 **4** 题

设向量组 $S=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}$ 线性无关，并且可以由向量组 $T=\{\beta_1,\cdots,\beta_t\}$ 线性表出。求证：

(1) 向量组 T 与 $S\cup T$ 等价。

(2) 将 S 扩充为 $S\cup T$ 的一个极大线性无关组 $T_1=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_k}\}$，则 T_1 与 T 等价，且 $s+k\leqslant t$。

(3)（Steinitz 替换定理）可以用向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 替换向量 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 中某 s 个向量 $\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_s}$，使得到的向量组 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_{i_{s+1}},\cdots,\beta_{i_t}\}$ 与 $\{\beta_1,\cdots,\beta_t\}$ 等价。

证明：(1). T 作为子集，显然可以由 $S\cup T$ 线性表出。任取向量 $v\in S\cup T$，若 $v\notin T$，则 $v\in S$。由于 S 可以由 T 线性表出，故 v 可以由 T 线性表出。所以由 $S\cup T$ 可以由 T 线性表出。故向量组 T 与 $S\cup T$ 等价。

(2). 容易看出 T_1 可以由向量组 T 线性表出。若 T 不能由 T_1 线性表出，则存在 $\beta\in T\setminus T_1$，使得 β 不能表示为 T_1 中向量的线性组合。将 β 添加到 T_1 中得到 T_1'，则 T_1' 是线性无关组且元素个数比 T_1 多，这与 T_1 是 $S\cup T$ 的一个极大线性无关组矛盾。所以 T 能由 T_1 线性表出，故二者等价。而且有

$$s+k=\text{rank}(T_1)=\text{rank}(T)\leqslant \#T=t.$$

(3). 由第 (2) 问知存在向量组 $T=\{\beta_1,\cdots,\beta_t\}$ 中 k 个线性无关的向量 $\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_k}$，使得向量组 $T_1=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_k}\}$ 与向量组 T 等价，而且有 $s+k\leqslant t$。向量组 T 的秩为 $s+k$。于是从 $\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_k}$ 这 k 个线性无关的向量出发，在 T 中剩下的 $t-k\geqslant s$ 个向量中，可以添加 s 个向量 $\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_s}$，使得 $\{\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_k},\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_s}\}$ 构成向量组 T 的一组极大线性无关组。那么将 $\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_s}$ 替换为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$，得到的向量组（向量组 T_1 是其子集，同时其本身又是 $S\cup T$ 的子集）即与原来的向量组 T 等价。

习题 **2.5** 第 **8** 题

设 V 是复数域上的 n 维线性空间。将它看成实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间 $V_{\mathbb{R}}$，对任意 $\alpha,\beta\in V_{\mathbb{R}}$ 按复线性空间 V 中的加法定义 $\alpha+\beta$，对 $\alpha\in V_{\mathbb{R}}$ 及实数 $\lambda\in\mathbb{R}$ 按 V 中向量与 λ（看作复数）的乘法定义 $\lambda\alpha$。求实线性空间 $V_{\mathbb{R}}$ 的维数，并由复线性空间 V 的一组基求出 $V_{\mathbb{R}}$ 的一组基。

解：设 $e_1,\cdots,e_n$ 为 V 的一组基。令 $i=\sqrt{-1}$。那么 $ie_1,\cdots,ie_n\in V$。下面证明 $E=\{e_1,ie_1\cdots,e_n,ie_n\}$ 构成 $V_{\mathbb{R}}$ 的一组基。进而可以知道 $V_{\mathbb{R}}$ 的维数为 $2n$.

- E 在 R 上线性无关：设 $\lambda_{11},\lambda_{12},\cdots,\lambda_{n1},\lambda_{n2}\in\mathbb{R}$ 使得 $\lambda_{11}e_1+\lambda_{12}(ie_1)+\cdots+\lambda_{n1}e_n+\lambda_{n2}(ie_n)=0$，那么 $(\lambda_{11}+\lambda_{12}i)e_1+\cdots+(\lambda_{n1}+\lambda_{n2}i)e_n=0$. 由于 $e_1,\cdots,e_n$ 为 V 的一组基，故 $\lambda_{11}+\lambda_{12}i=\cdots=\lambda_{n1}+\lambda_{n2}i=0,$ 从而有 $\lambda_{11}=\lambda_{12}=\cdots=\lambda_{n1}=\lambda_{n2}=0.$

- $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(E)=V_{\mathbb{R}}$: 任取 $\alpha\in V_{\mathbb{R}}$，由于 $e_1,\cdots,e_n$ 为 V 的一组基，故存在 $\lambda_{11}+\lambda_{12}i,\cdots,\lambda_{n1}+\lambda_{n2}i\in\mathbb{C}$，使得

$$\alpha=(\lambda_{11}+\lambda_{12}i)e_1+\cdots+(\lambda_{n1}+\lambda_{n2}i)e_n=\lambda_{11}e_1+\lambda_{12}(ie_1)+\cdots+\lambda_{n1}e_n+\lambda_{n2}(ie_n)$$

习题 **2.6** 第 **2** 题

将复数集合 $\mathbb{C}$ 看成实数域上的线性空间 $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$。求 $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ 与实数域上 2 维数组空间 $\mathbb{R}^2=\{(x,y)\parallel x,y\in\mathbb{R}\}$ 之间的同构映射 σ，将 $1+i,1-i$ 分别映到 $(1,0),(0,1)$.

解：$\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ 的一组基可以取为 $1,i$ 有 $\sigma(a+bi)=a\sigma(1)+b\sigma(i)$，只要确定 $\sigma(1),\sigma(i)$ 的值即可确定同构映射 σ。由

$$\begin{cases}\sigma(1+i)=\sigma(1)+\sigma(i)=(1,0)\\ \sigma(1-i)=\sigma(1)-\sigma(i)=(0,1)\end{cases}$$

可得 $\sigma(1)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\sigma(1)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. 故

$$\sigma(a+bi)=a\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)+b\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{a+b}{2},\frac{a-b}{2}\right)$$

补充题. 设 V 为 F（F 特征为 0）上线性空间，$V_1,\cdots,V_s$ 是 V 的真子空间，证明

$$V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_s\subsetneqq V$$

证明：对 s 进行归纳证明。$s=1$ 时，由于是真子空间，结论平凡成立。假设对 $s-1$ 我们证明了结论。接下来对 s，我们用反证法证明。假设 $V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_s=V$。

不妨设任意 V_i 满足 $V_i\subsetneqq\bigcup\limits_{j\neq i}V_j$，否则由归纳假设即能得出矛盾。于是可以取 $v\in V_i$, 满足 $v\notin\bigcup\limits_{j\neq i}V_j$。同时任取 $u\notin V_i$（是真子空间）。这样取出来的 u,v 都不是零向量。

考虑集合 $S=\mathbb{F}v+u$. 有 $S\cap V_i=\emptyset$, 否则能推出 $u\in V_i$，与 u 的取法矛盾。由假设 $V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_s=V$，那么 $S\subseteq\bigcup\limits_{j\neq i}V_j$。与此同时，$S$ 与每一个 $V_j(j\neq i)$ 的交集至多含有一个元素。因为假设存在 V_j 使得有 $\lambda_1v+u,\lambda_2v+u\in V_j\cap S,\lambda_1\neq\lambda_2\in\mathbb{F}$, 由于 V_j 是线性子空间，有 $(\lambda_1v+u)-(\lambda_2v+u)=(\lambda_1-\lambda_2)v\in V_j$，这与 v 的取法矛盾。于是

$$S=S\cap(\bigcup_{j\neq i}V_j)=\bigcup_{j\neq i}(S\cap V_j)$$

那么 $S=\mathbb{F}v+u$ 的元素个数即不能超过 $s-1$，这与域 $\mathbb{F}$ 是特征为 0 的域，元素个数无穷多是矛盾的。所以 $V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_s=V$ 的假设不成立。因此，对任意正整数 s，以及 V 的真子空间 $V_1,\cdots,V_s$，都有

$$V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_s\subsetneqq V\ \square$$

习题 **2.5** 第 **3** 题

设整数 $k\geqslant 2$，数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V 中的向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 线性相关。证明：存在不全为 0 的数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k\in\mathbb{F}$，使得对任何 α_{k+1}，向量组 $\{\alpha_1+\lambda_1\alpha_{k+1},\cdots,\alpha_k+\lambda_k\alpha_{k+1}\}$ 线性相关。

证明：由于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 线性无关，所以存在不全为 0 的数 $x_1,\cdots,x_k$ 使得 $x_1\alpha_1+\cdots+x_k\alpha_k=0$。考虑

$$(\alpha_1+\lambda_1\alpha_{k+1},\cdots,\alpha_k+\lambda_k\alpha_{k+1})\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_k\end{pmatrix}=0$$

变形为

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\alpha_{k+1})\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_k\\x_1\lambda_1+\cdots+x_k\lambda_k\end{pmatrix}=0$$

所以只要存在不全为 0 的 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 使得 $x_1\lambda_1+\cdots+x_k\lambda_k=0$ 即可。因为 $k\geqslant 2$，$(x_1,\cdots,x_k)$ 在 $\mathbb{F}^k$ 中的正交补总是非平凡的，所以这样的 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 总是存在的。

习题 **2.5** 第 **6** 题

设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的秩为 r，在其中任取 m 个向量 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_m}$ 组成向量组 S。求证 S 的秩 $\geqslant r+m-s$。

证明：设 S 的秩为 t，那么 S 中存在一个元素个数为 t 的极大线性无关组。那么从这个线性无关的向量组出发，通过往其中添加不在 S 中的向量，可以得到整个向量组的一个极大线性无关组。假设添加了 k 个向量，那么有 $t+k=r$ 且 $k\leqslant s-m$，从而有

$$t=r-k\geqslant r-(s-m)=r+m-s$$

习题 **2.5** 第 **7** 题

证明：在所有次数不大于 n 的实系数多项式构成的 $n+1$ 维实线性空间中，$1,(x-c),(x-c)^2,\cdots,(x-c)^n$ 构成一组基。并求 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 在这组基下的坐标。

证明：只要证明 $1,(x-c),(x-c)^2,\cdots,(x-c)^n$ 线性无关即可。假设存在不全为 0 的实数 $\lambda_0,\cdots,\lambda_n$ 使得

$$f_0(x)=\lambda_0+\lambda_1(x-c)+\cdots+\lambda_n(x-c)^n=0$$

那么 $f_0(x)$ 的 n 阶导函数 $f_0^{(n)}(x)=n!\lambda_n=0$，从而有 $\lambda_n=0$。逐步反推可以导出 $\lambda_{n-1}=\cdots=\lambda_0=0$，矛盾。

设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=\lambda_0+\lambda_1(x-c)+\cdots+\lambda_n(x-c)^n$，那么 $f_0^{(n)}(x)=n!a_n=n!\lambda_n$，故 $\lambda_n=a_n$。将所得的 $\lambda_n,\cdots,\lambda_{n-k}$ 回代，并考察 $f_0^{(n-k-1)}(0)$，有

$$f_0^{(n-k-1)}(0)=(n-k-1)!a_{n-k-1}=(n-k-1)!\lambda_{n-k-1}+\frac{(n-k)!}{1!}(0-c)\lambda_{n-k}+\cdots+\frac{n!}{(k+1)!}(0-c)^{k+1}\lambda_n$$

得 $a_{n-k-1}=\lambda_{n-k-1}+C_{n-k}^1(-c)\lambda_{n-k}+\cdots+C_n^{k+1}(-c)^{k+1}\lambda_n$ 所以有

$$\begin{pmatrix}a_n\\\vdots\\a_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&&&\\C_n^1(-c)&1&&&\\C_n^2(-c)^2&C_{n-1}^1(-c)&1&&\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\\C_n^1(-c)^n&C_{n-1}^{n-1}(-c)^{n-1}&C_{n-2}^{n-2}(-c)^{n-2}&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_n\\\vdots\\\lambda_0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\lambda_n\\\vdots\\\lambda_0\end{pmatrix}$$

故 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 在这组基下的坐标为

$$\begin{pmatrix}\lambda_n\\ \vdots\\ \lambda_0\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}a_n\\ \vdots\\ a_0\end{pmatrix}.$$

若考察 $f_0^{(n-k-1)}(c)$，则有

$$f_0^{(n-k-1)}(c)=(n-k-1)!\lambda_{n-k-1}=(n-k-1)!a_{n-k-1}+\frac{(n-k)!}{1!}ca_{n-k}+\cdots+\frac{n!}{(k+1)!}c^{k+1}a_n$$

得 $\lambda_{n-k-1}=a_{n-k-1}+C_{n-k}^1ca_{n-k}+\cdots+C_n^{k+1}c^{k+1}a_n$ 所以有

$$\begin{pmatrix}\lambda_n\\ \vdots\\ \lambda_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ C_n^1c & 1 & & & \\ C_n^2c^2 & C_{n-1}^1c & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ C_n^1c^n & C_{n-1}^{n-1}c^{n-1} & C_{n-2}^{n-2}c^{n-2} & \cdots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\ \vdots\\ a_0\end{pmatrix}$$

习题 **2.5** 第 **10** 题

将数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维（$n\geqslant 2$）数组空间 $\mathbb{F}^n$ 中的每个向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 看作一个具有 n 项的数列。如下集合 W 是否组成 $\mathbb{F}^n$ 的一个线性子空间？如果是，求出它的维数及一组基。

(1). $\mathbb{F}^n$ 中所有等比数列组成的集合。

(2). $\mathbb{F}^n$ 中所有等差数列组成的集合。

解：(1). 不构成线性子空间。$(0,\cdots,0)\notin W$ 不构成等比数列。

(2). 构成线性子空间。$(0,\cdots,0)\in W$ 构成等差数列。令 $(a_1,a_2,\cdots,a_n),(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in W$ 为两个等差数列，差分别为 d_1,d_2，那么任取 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$，有 $\lambda_1(a_1,a_2,\cdots,a_n)+\lambda_2(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 是差为 $d_1\lambda_1+d_2\lambda_2$ 的等差数列。所以 $\mathbb{F}^n$ 中所有等差数列组成的集合 W 构成线性子空间。W 的元素都可以表示为

$$(a,a+d,\cdots,a+(n-1)d)=a(1,\cdots,1)+d(0,1,\cdots,n-1),\quad a,d\in\mathbb{R}$$

所以 W 维数为 2，一组基可以取为 $(1,\cdots,1),(0,1,\cdots,n-1)$.

另一解法：W 由以下有 $n-2$ 个方程的齐次线性方程组定义（$n\geqslant 3$ 时）

$$\begin{cases}a_3-a_2=a_2-a_1\\ a_4-a_3=a_3-a_2\\ \cdots\cdots\\ a_n-a_{n-1}=a_{n-1}-a_{n-2}\end{cases}$$

系数矩阵秩为 $n-2$，从而 W 维数为 $n-(n-2)=2$.

习题 **2.6** 第 **1** 题

设复数域上线性空间 V 中的向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关。对复数 λ 的不同值，求向量组 $\{\alpha_1+\lambda\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}+\lambda\alpha_n,\alpha_n+\lambda\alpha_1\}$ 的秩。

解：

$$(\alpha_1+\lambda\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}+\lambda\alpha_n,\alpha_n+\lambda\alpha_1)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}1 & & & & \lambda\\ \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$$

$\{\alpha_1+\lambda\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}+\lambda\alpha_n,\alpha_n+\lambda\alpha_1\}$ 的秩即为矩阵 A 的秩。那么 A 的阶梯形为

$$\begin{pmatrix}1 & & & & \lambda\\ & 1 & & & \lambda\cdot(-\lambda)\\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \lambda\cdot(-\lambda)^{n-2}\\ & & & & 1+\lambda\cdot(-\lambda)^{n-1}\end{pmatrix}$$

所以 $\lambda=-\zeta_n^k, k=0,1,\cdots,n-1$ 时，A 的秩为 $n-1$，其中 $\zeta_n=e^{\frac{2\pi}{n}}$ 为 n 次单位根；其余情况，A 的秩为 n。

习题 **2.6** 第 **3** 题

设 V 是由复数组成的无穷数列 $\{a_n\}=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$ 的全体组成的集合，定义 V 中任意两个数列的加法 $\{a_n\}+\{b_n\}=\{a_n+b_n\}$ 及任意数列与任意复数的乘法 $\lambda\{a_n\}=\{\lambda a_n\}$ 之后称为复数域 $\mathbb{C}$ 上线性空间。

(1) 求证：V 中满足条件 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(\forall n\geqslant 3)$ 的全体数列 $\{a_n\}$ 组成 V 的子空间 W。W 的维数是多少？

(2) 对任意 $(a_1,a_2)\in\mathbb{C}^2$，定义 $\sigma(a_1,a_2)=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}\in W$。求证：$\sigma$ 是 $\mathbb{C}^2$ 到 W 的同构映射。

(3) 求证：W 中存在一组由等比数列组成的基 M

(4) 设数列 $\{F_n\}$ 满足条件 $F_1=F_2=1$ 且 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$。求 $\{F_n\}$ 在基 M 下的坐标，并由此求出 $\{F_n\}$ 的通项公式。

解：(1) 首先 $0,\cdots,0,\cdots\in W$ 起到零元的作用。任取 $\{a_n\},\{b_n\}\in W$ 以及 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$。有

$$\lambda_1a_n+\lambda_2b_n=\lambda_1(a_{n-1}+a_{n-2})+\lambda_2(b_{n-1}+b_{n-2})=(\lambda_1a_{n-1}+\lambda_2b_{n-1})+(\lambda_1a_{n-2}+\lambda_2b_{n-2})$$

故 $\lambda_1\{a_n\}+\lambda_2\{b_n\}\in W$. 所以 W 是 V 的线性子空间。由于 W 中向量的自由变量只有前两项 a_1,a_2，故其维数为 2。

(2) 首先，检查 σ 是线性映射：

$$\begin{aligned}\sigma(\lambda_1(a_1,a_2)+\lambda_2(b_1,b_2))&=\{\lambda_1a_1+\lambda_2b_1,\lambda_1a_2+\lambda_2b_2,\cdots\}\\&=\{\lambda_1a_1,\lambda_1a_2,\cdots\}+\{\lambda_2b_1,\lambda_2b_2,\cdots\}\\&=\lambda_1\sigma(a_1,a_2)+\lambda_2\sigma(b_1,b_2)\end{aligned}$$

其次，检查 $\ker\sigma = \{(0,0)\}$：设 $\sigma(a_1,a_2) = \{0,0,\cdots\}$，那么 $\{a_1,a_2,\cdots\} = \{0,0,\cdots\}$，从而有 $\ker\sigma = \{(0,0)\}$。再由两个线性空间维数相同，即可得出 σ 是线性同构的结论。

(3) 假设有等比数列 $\{a,aq,\cdots,aq^n,\cdots\}\in W$，那么有 $aq^{n+2}=aq^{n+1}+aq^n$。解得 $q=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$。由此可知

$$\left\{1,\frac{1+\sqrt{5}}{2},\cdots,\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,\cdots,\right\},\left\{1,\frac{1-\sqrt{5}}{2},\cdots,\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,\cdots,\right\}\in W$$

而且他们线性无关，故构成了 W 的一组基。

(4) 令 $(1,1)=\lambda_1\left(1,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+\lambda_2\left(1,\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$，解得

$$\lambda_1=\frac{\sqrt{5}}{10}+\frac{1}{2},\quad \lambda_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}$$

所以 $\{F_n\}$ 在这组基下坐标为 $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{10}+\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}\end{pmatrix}$，通项公式为

$$F_n=\left(\frac{\sqrt{5}}{10}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.$$

习题 **2.6** 第 **4** 题

设 $\mathbb{R}^+$ 是所有正实数组成的集合。对任意 $a,b\in\mathbb{R}^+$ 定义 $a\oplus b=ab$（实数 a,b 按通常乘法的乘积），对任意 $a\in\mathbb{R}^+$ 和 $\lambda\in\mathbb{R}$ 定义 $\lambda\circ a=a^\lambda$。求证：

(1) $\mathbb{R}^+$ 按上述定义的加法 $a\oplus b$ 和数乘 $\lambda\circ a$ 成为实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

(2) 实数集合 $\mathbb{R}$ 按通常方式定义加法和乘法看成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，求证：通常的这个线性空间 $\mathbb{R}$ 与按上述方式定义的线性空间 $\mathbb{R}^+$ 同构。并给出这两个空间之间的全部同构映射。

证明：首先，很容易验证 $\mathbb{R}^+$ 关于加法 $a\oplus b$ 封闭，1 为加法零元，$a\in\mathbb{R}^+$ 的加法逆元为 $\frac{1}{a}\in\mathbb{R}^+$。任取 $a,b\in\mathbb{R}^+$, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}
&1\circ a=a^1=a\\
&\lambda_1\circ(a\oplus b)=\lambda_1\circ ab=(ab)^{\lambda_1}=a^{\lambda_1}b^{\lambda_1}=(\lambda_1\circ a)\oplus(\lambda_1\circ b)\\
&(\lambda_1+\lambda_2)\circ a=a^{\lambda_1+\lambda_2}=a^{\lambda_1}a^{\lambda_2}=(\lambda_1\circ a)\oplus(\lambda_2\circ a)\\
&(\lambda_1\lambda_2)\circ a=a^{\lambda_1\lambda_2}=(a^{\lambda_2})^{\lambda_1}=\lambda_1\circ(\lambda_2\circ a)
\end{aligned}$$

(2) 任取 $a\in\mathbb{R}^+, a\neq 1$, 定义 $\sigma_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+, x\mapsto a^x$, 那么有

$$\sigma_a(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)=a^{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2}=(a^{x_1})^{\lambda_1}(a^{x_2})^{\lambda_2}=\lambda_1\circ\sigma_a(x_1)\oplus\lambda_2\circ\sigma_a(x_2)$$

所以 σ_a 是线性映射。任取 $b\in\mathbb{R}^+$, 有 $\sigma_a(\log_a b)=b$，所以 σ_a 是满射。令 $\sigma_a(x)=a^x=1$，那么有 $x=0$，从而知 σ_a 是单射。所以 σ_a 是线性空间的同构映射。

(2) 任取同构映射 $\sigma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, 令 $a=\sigma(1)$，有 $a\neq 1$，否则 σ 不是单射。那么任取 $x\in\mathbb{R}$，有

$$\sigma(x)=\sigma(x\cdot 1)=x\circ\sigma(1)=x\circ a=a^x=\sigma_a(x)$$

所以 $\sigma_a, a\in\mathbb{R}^+\setminus 1$ 即是 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ 的所有线性同构映射。