2022 春高等代数习题课

2022-4-8 第三次习题课

第一题（习题 **7.1** 第 **2** 题）. **已知** 5 **阶方阵** A **相似与 Jordan 形矩阵** J**，且满足条件**

$$\operatorname{rank} A = 3, \operatorname{rank} A^2 = 2, \operatorname{rank}(A+I) = 4, \operatorname{rank}(A+I)^2 = 3.$$

求 J.

解. **由于** $\operatorname{rank} A = 3 < 5$, **所以** $\det A = 0$, **故** 0 **是** A **的特征值. 类似可知** -1 **也是** A **的特征值。由于** $\operatorname{rank} A^2 = 2, \operatorname{rank}(A+I)^2 = 3$, **即知**

$$\dim\ker A^2 + \dim\ker(A+I)^2 = (5-2)+(5-3) = 5,$$

故（可以考虑根子空间分解）A **的特征值只有** $-1, 0$. **并且由上式可知** $\operatorname{rank} A^k = 2, \operatorname{rank}(A+I)^k = 3$ **对任意** $k \geqslant 2$ **成立。于是，由定理** 7.1.1 **知，**J **中**

- 1 **阶 Jordan 块** $J_1(0)$ **的数量为** $(5 - \operatorname{rank} A) - (\operatorname{rank} A - \operatorname{rank} A^2) = 1$;
- 2 **阶 Jordan 块** $J_2(0)$ **的数量为** $(\operatorname{rank} A - \operatorname{rank} A^2) = 1$;
- 1 **阶 Jordan 块** $J_1(-1)$ **的数量为** $(5 - \operatorname{rank}(A+I)) - (\operatorname{rank}(A+I) - \operatorname{rank}(A+I)^2) = 0$;
- 2 **阶 Jordan 块** $J_2(-1)$ **的数量为** $(\operatorname{rank}(A+I) - \operatorname{rank}(A+I)^2) = 1$.

所以

$$J = \operatorname{diag}(J_1(0), J_2(0), J_2(-1)).$$

第二题（习题 **7.1** 第 **3** 题第（**2**）问）. **已知矩阵** $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ **相似于 Jordan 形** J. **根据条件** $\operatorname{rank}(A-\lambda_i I)^k = \operatorname{rank}(J-\lambda_i I)^k$ **（**λ_i **取遍** A **的各特征值，**$k = 1, 2, \ldots$**），求** J.

解**：容易计算** A **的特征多项式为** $f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda-4)^4$, **于是矩阵** A **有** 4 **重特征值** 4. **那么**

- $\operatorname{rank}(A-4I) = \operatorname{rank}(J-4I) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$;
- $\operatorname{rank}(A-4I)^k = \operatorname{rank}(J-4I)^k = \operatorname{rank} \mathbf{0} = 0, \forall k \geqslant 2$.

那么由定理 7.1.1 知

- 1 **阶** Jordan **块** $J_1(4)$ **的数量为** $(4-\operatorname{rank}(A-4I))-(\operatorname{rank}(A-4I)-\operatorname{rank}(A-4I)^2)=0$;
- 2 **阶** Jordan **块** $J_2(4)$ **的数量为** $(\operatorname{rank}(A-4I)-\operatorname{rank}(A-4I)^2)=2$.

所以

$$J=\operatorname{diag}(J_2(4),J_2(4)).$$

第三题. **设** $A=J_5(0)^2$ **相似于一个** Jordan **形矩阵** J, **求** J.

解: **易知** $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}J_5(0)^2=3$, $\operatorname{rank}A^2=\operatorname{rank}J_5(0)^4=1$; $\operatorname{rank}A^k=\operatorname{rank}J_5(0)^{2k}=0$; $k\geqslant 3$. **那么由定理** 7.1.1 **知**

- 1 **阶** Jordan **块** $J_1(0)$ **的数量为** $(5-\operatorname{rank}A)-(\operatorname{rank}A-\operatorname{rank}A^2)=0$;
- 2 **阶** Jordan **块** $J_2(0)$ **的数量为** $(\operatorname{rank}A-\operatorname{rank}A^2)-(\operatorname{rank}A^2-\operatorname{rank}A^3)=1$.
- 3 **阶** Jordan **块** $J_3(0)$ **的数量为** $(\operatorname{rank}A^2-\operatorname{rank}A^3)=1$.

所以

$$J=\operatorname{diag}(J_2(0),J_3(0)).$$

第四题. **设** $\mathscr{A}\in\mathcal{L}(V)$ **在基** M **下的矩阵是** $A\in M_n(\mathbb{C})$. **若** $d_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^m g(\lambda)$, $g(\lambda_0)\neq 0$, **是** A **的一个极小多项式，以及** $u(\lambda),v(\lambda)\in\mathbb{C}[\lambda]$ **使得**

$$u(\lambda)(\lambda-\lambda_0)^m+v(\lambda)g(\lambda)=1.$$

令 $W=u(\mathscr{A})(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^m V$. **证明** $(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})|_W$ **是可逆线性变换。**

证明: **首先，容易看出** W **是** $(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})$ **的不变子空间。由于** $d_A(\lambda)$ **是** A **的一个极小多项式，所以** $d_A(\mathscr{A})=\mathscr{O}$ **为** V **上的零映射。要证明** $(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})|_W$ **是可逆线性变换，只要证明** $\ker(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})|_W=\{0\}$ **即可。**

任取 $\alpha\in\ker(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})|_W\subset W$. **我们想证明** $\alpha=0$. **由于** $W=u(\mathscr{A})(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^m V$, **所以存在** $\beta\in V$, **使得**

$$\alpha=u(\mathscr{A})(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^m\beta.$$

又由于 $u(\lambda)(\lambda-\lambda_0)^m+v(\lambda)g(\lambda)=1$, **所以有** $u(\mathscr{A})(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^m\beta=(\mathscr{I}-v(\mathscr{A})g(\mathscr{A}))\beta$. **所以有**

$$\begin{aligned}
0=(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^m\alpha&=(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^m u(\mathscr{A})(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^m\beta\\
&=(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^m(\mathscr{I}-v(\mathscr{A})g(\mathscr{A}))\beta\\
&=(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^m\beta-v(\mathscr{A})(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^m g(\mathscr{A})\beta\\
&=(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^m\beta-v(\mathscr{A})d_A(\mathscr{A})\beta\\
&=(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^m\beta-v(\mathscr{A})\mathscr{O}\beta\\
&=(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^m\beta
\end{aligned}$$

从而知 $\alpha=u(\mathscr{A})(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^m\beta=0$, **所以** $\ker(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})|_W=\{0\}$, **故** $(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})|_W$ **是** W **上的可逆线性变换。**

第五题（习题 7.1 第 1 题）. **已知** $A=\begin{pmatrix}0&0&-2\\1&0&3\\0&1&0\end{pmatrix}$, **求** A^n.

解. A **的特征多项式**

$$f_A(\lambda)=\det(\lambda I_3-A)=\det\begin{pmatrix}\lambda&0&2\\-1&\lambda&-3\\0&-1&\lambda\end{pmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda&-3\\-1&\lambda\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}0&2\\-1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2-3)+2.$$

可算得 A **的特征值为** $1,1,-2$.

由 $(A-I)v=0$ **解得** $v=k\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $k\neq 0$. **由此可知** A **的** Jordan **标准形有** 1 **个** 2 **阶** Jordan **块** $J_2(1)$, **以及** 1 **个** 1 **阶** Jordan **块** $J_1(-2)$.

继续解 $(A-I)v'=v$ **得** $v'=k'\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}-k\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ **（和之前同一个** k. k' **任取）。**

解 $(A+2I)w=w$ **得** $w=t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, $t\neq 0$. **那么令** $k=t=1, k'=0$, **取** $P=(v,v',w)=\begin{pmatrix}2&-2&1\\-1&-1&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}$, **即有**

$$AP=(Av,Av',Aw)=(v,v+v',-2w)=(v,v',w)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}=P\cdot\mathrm{diag}(J_2(1),J_1(-2)).$$

从而有 $A=P\cdot\mathrm{diag}(J_2(1),J_1(-2))\cdot P^{-1}$, **其中** $P^{-1}=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}1&-2&-5\\-3&-3&-3\\1&-2&4\end{pmatrix}$. **所以**

$$\begin{aligned}A^n&=(P\cdot\mathrm{diag}(J_2(1),J_1(-2))\cdot P^{-1})^n=P\cdot\mathrm{diag}(J_2(1)^n,J_1(-2)^n)\cdot P^{-1}\\&=P\cdot\begin{pmatrix}1&n&0\\0&1&0\\0&0&(-2)^n\end{pmatrix}\cdot P^{-1}\\&=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2&-2&1\\-1&-1&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&n&0\\0&1&0\\0&0&(-2)^n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2&-5\\-3&-3&-3\\1&-2&4\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}8-6n+(-2)^n&2-6n+(-2)^{n+1}&-4-6n+(-2)^{n+2}\\2+3n+(-2)^{n+1}&5+3n+(-2)^{n+2}&8+3n+(-2)^{n+3}\\-1+3n+(-2)^n&2+3n+(-2)^{n+1}&5+3n+(-2)^{n+2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

第六题（习题 7.1 第 4 题）. (1) **已知** Jordan **形矩阵** J **满足条件** $\mathrm{rank}\, J^k=\mathrm{rank}\, J^{k+1}=r$, **根据** J^k **所满足的条件，对任意正整数** s **求** $\mathrm{rank}\, J^{k+s}$.

(2) 已知方阵 A 相似于 Jordan 形矩阵 J. 且 $\mathrm{rank}\, A^k = \mathrm{rank}\, A^{k+1} = r$. 对任意正整数 s 求 $\mathrm{rank}\, A^{k+s}$.

解. (1) 考察任意的 Jordan 块 $J_m(\lambda) = \lambda I_m + \Lambda$, 其中 Λ 为次对角线($(i, i+1)$ 位, $i = 1, \ldots, m-1$)元素值为 1, 其余位置元素值为 0 的方阵。Λ 和 λI_m 可交换，且有

$$J_m(\lambda)^k = (\lambda I_m + \Lambda)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \lambda^{k-i} I_m \Lambda^i.$$

那么

- 若 $\lambda = 0$, 那么 $\mathrm{rank}\, J_m(\lambda)^k = \mathrm{rank}\, \Lambda^k = \max\{0, m-k\}$;
- 若 $\lambda \neq 0$, 那么 $\mathrm{rank}\, J_m(\lambda)^k = m$;

令 k_0 为 J 中对应于特征值 0 的 Jordan 块的阶数的最大值（若没有这样的 Jordan 块则令 $k_0 = 0$）。由以上讨论，以及由题设条件 $\mathrm{rank}\, J^k = \mathrm{rank}\, J^{k+1} = r$ 知 $k \geqslant k_0$, 否则 $\mathrm{rank}\, J^{k+1}$ 必然小于 $\mathrm{rank}\, J^k$. 对于任意的 $k' \geqslant k \geqslant k_0$, 有

$$\mathrm{rank}\, J^{k_0} = \mathrm{rank}\, J^{k_0+1} = \cdots = \mathrm{rank}\, J^{k'} = r,$$

故对任意的正整数 s, 有 $\mathrm{rank}\, J^{k+s} = r$.

(2) 设有可逆矩阵 P, 使得 $A = PJP^{-1}$, 其中 J 为 A 的 Jordan 标准形。那么 $\mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}\, J$. 由第 (1) 问可知对任意正整数 s 求 $\mathrm{rank}\, A^{k+s} = r$.

第七题（习题 **7.1** 第 **5** 题）. 已知 n 阶方阵 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 相似于 Jordan 形矩阵 J, 且满足条件 $A^n = O \neq A^{n-1}$. 求 J.

解. 由条件 $A^n = O \neq A^{n-1}$ 知 A 的极小多项式为 $f_A(\lambda) = \lambda^n$, 所以 A 的特征值都是 0, 其 Jordan 型可写为

$$J = \mathrm{diag}(J_{r_1}(0), \ldots, J_{r_m}(0)), \quad r_1 + \cdots + r_m = n.$$

由第六题的讨论知，

$$\mathrm{rank}\, J_{r_i}(0)^k = \max\{0, r_i - k\}.$$

所以

$$\mathrm{rank}\, A^k = \mathrm{rank}\, J^k = \sum_{i=1}^{m} \max\{0, r_i - k\}.$$

由条件 $A^n = O \neq A^{n-1}$ 知 $\mathrm{rank}\, A^{n-1} > 0$, 所以我们有

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} \max\{0, r_i - (n-1)\} > 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} r_i = n. \end{cases}$$

于是必然有 $m = 1, r_1 = n$. 故 $J = J_n(0)$.