2022 春高等代数习题课

2022-3-11 第一次习题课

习题 **6.1** 第 **2** 题. （1）设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是平面上绕原点分别旋转角 α,β 的变换。试分别写出 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 的矩阵 A,B，计算 $\mathscr{B}\mathscr{A}$ 的矩阵 BA，它表示什么变换？

（2）设在直角坐标平面上将 x 轴绕原点沿逆时针方向旋转角 α,β 分别得到直线 ℓ_α,ℓ_β. $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是平面上的点分别关于直线 ℓ_α,ℓ_β 作轴对称的变换。试分别写出 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 的矩阵 A,B，计算 $\mathscr{B}\mathscr{A}$ 的矩阵 BA 和计算 $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 的矩阵 AB，它们分别表示什么变换？

解：任取平面上非原点的一点，设其坐标为 $(r\cos\theta,r\sin\theta)^T$, 那么其绕原点（逆时针）旋转 α 角之后的坐标为

$$\begin{aligned}(r\cos(\theta+\alpha),r\sin(\theta+\alpha))^T&=(r\cos\theta\cos\alpha-r\sin\theta\sin\alpha,r\sin\theta\cos\alpha+r\cos\theta\sin\alpha)^T\\&=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}(r\cos\theta,r\sin\theta)^T.\end{aligned}$$

于是 $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$, 同理 $B=\begin{pmatrix}\cos\beta&-\sin\beta\\\sin\beta&\cos\beta\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta)&-\sin(\alpha+\beta)\\\sin(\alpha+\beta)&\cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$. $\mathscr{B}\mathscr{A}$ 表示的是平面上绕原点（逆时针）旋转角 $\alpha+\beta$ 的变换。

（2）任取 $r>0$ 为实数，则 $v_\alpha=(r\cos\alpha,r\sin\alpha)^T$ 为直线 ℓ_α 上的一个向量。在平面上任取一点 $P=(x,y)^T$, 那么向量 $v_P=\overrightarrow{OP}$ 在 v_α 上的投影（即在直线 ℓ_α 上的投影）为 $\frac{1}{r^2}\langle v_\alpha,v_P\rangle v_\alpha$. 点 P 指向投影点的向量为 $-v_P+\frac{1}{r^2}\langle v_\alpha,v_P\rangle v_\alpha$, 所以 P 点关于直线 ℓ_α 对称点的坐标为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r^2}\langle v_\alpha,v_P\rangle v_\alpha+(-v_P+\frac{1}{r^2}\langle v_\alpha,v_P\rangle v_\alpha)\\=&\frac{2}{r^2}\langle v_\alpha,v_P\rangle v_\alpha-v_P\\=&\begin{pmatrix}2x\cos^2\alpha+2y\sin\alpha\cos\alpha-x\\2x\sin\alpha\cos\alpha+2y\sin^2\alpha-y\end{pmatrix}\\=&\begin{pmatrix}2\cos^2\alpha-1&2\sin\alpha\cos\alpha\\2\sin\alpha\cos\alpha&2\sin^2\alpha-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\=&\begin{pmatrix}\cos2\alpha&\sin2\alpha\\\sin2\alpha&-\cos2\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

所以 $\mathscr{A}$ 对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix}\cos2\alpha&\sin2\alpha\\\sin2\alpha&-\cos2\alpha\end{pmatrix}$. 同理 $\mathscr{B}$ 对应的矩阵 $B=\begin{pmatrix}\cos2\beta&\sin2\beta\\\sin2\beta&-\cos2\beta\end{pmatrix}$.

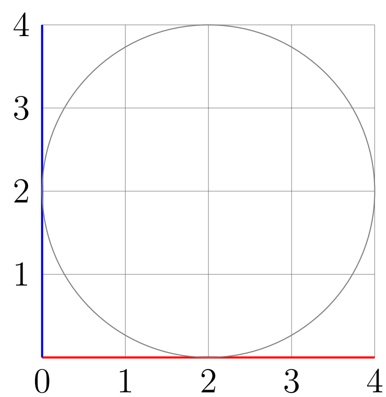
$BA=\begin{pmatrix}\cos2\beta&\sin2\beta\\\sin2\beta&-\cos2\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos2\alpha&\sin2\alpha\\\sin2\alpha&-\cos2\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos2(\beta-\alpha)&-\sin2(\beta-\alpha)\\\sin2(\beta-\alpha)&\cos2(\beta-\alpha)\end{pmatrix}$, 代表绕原点旋转 $2(\beta-\alpha)$ 角度的变换。同理，$AB=\begin{pmatrix}\cos2(\alpha-\beta)&-\sin2(\alpha-\beta)\\\sin2(\alpha-\beta)&\cos2(\alpha-\beta)\end{pmatrix}$, 代表绕原点旋转 $2(\alpha-\beta)$ 角度的变换。

习题 **6.1** 第 **3** 题. **由 2 阶可逆实方阵 A 在直角坐标平面 $\mathbb{R}^2$ 上定义可逆线性变换 $\mathscr{A}:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.**

(1) $\mathscr{A}$ 将平行四边形 $ABCD$ 变到平行四边形 $A'B'C'D'$, 求证: 变换后和变换前的面积比 $k=\dfrac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}}=|\det A|$; 由此可以得出平面上任何图形经过变换 $\mathscr{A}$ 之后的面积为变换前的 $|\det A|$ 倍。

(2) 用线性变换 $\mathscr{A}:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{b}{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 将圆 $C:x^2+y^2=a^2$ 变成椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 利用 C_1 与 C 的面积比得出椭圆 C_1 面积公式。

(3) 画出下图经过线性变换 $\mathscr{A}:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1.2&-0.8\\-0.4&1.1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 得到的图形。



证明: **(1) 令向量 $\overrightarrow{AB}=v,\overrightarrow{AC}=u$ (列向量), 那么平行四边形 $ABCD$ 的面积 $S_{ABCD}=|\det(u,v)|$. 同理平行四边形 $A'B'C'D'$ 的面积有**

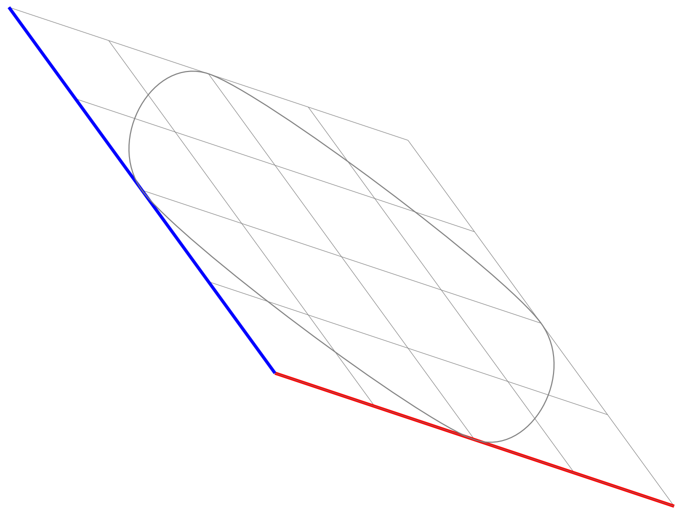
$$S_{A'B'C'D'}=|\det(Au,Av)|=|\det(A(u,v))|=|\det A|\cdot|\det(u,v))|=|\det A|S_{ABCD}$$

平面上任意图形可以用正方形覆盖 (的极限) 计算面积, 因此其经过变换 $\mathscr{A}$ 之后的面积为变换前的 $|\det A|$ 倍。

事实上, n 维空间中由(线性无关)向量组 $v_1,\dots,v_n$ 确定的多面体(有向)体积等于 $\det(v_1,\dots,v_n)$. 对一个积分做变量替换之后要乘以 Jacobi 矩阵的行列式, 原因也在于此。

(2) 由第 (1) 问知 $S_{C_1}=|\det A|\cdot S_C=|b/a|\cdot\pi a^2=\pi|ab|$, 其中 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{b}{a}\end{pmatrix}$

(3)



习题 6.2 第 11 题. 设 $F_n[x]$ 是数域 F 上次数低于 n 的一元多项式组成的 n 维空间，$n \geqslant 2$。$\mathscr{A}: f(x) \mapsto f(x+1)$ 与 $\mathscr{D}: f(x) \mapsto f'(x)$ 是 $F_n[x]$ 的线性变换。求证

$$\mathscr{A} = \mathscr{I} + \frac{\mathscr{D}}{1!} + \frac{\mathscr{D}^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathscr{D}^{n-1}}{(n-1)!}$$

证明: 令 $\mathscr{B} = \mathscr{A} - \left(\mathscr{I} + \frac{\mathscr{D}}{1!} + \frac{\mathscr{D}^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathscr{D}^{n-1}}{(n-1)!}\right)$. 要证明 $\mathscr{B}$ 在 $F_n[x]$ 上是零变换，只要证明 $\mathscr{B}$ 在 $F_n[x]$ 的一组基上取值都是零即可。取这组基为 $\{1, x, \ldots, x^{n-1}\}$. 对于 $0 \leqslant k \leqslant n-1$, 有

$$\begin{aligned}
\mathscr{B}(x^k) &= \mathscr{A}(x) - \left(\mathscr{I}(x) + \frac{\mathscr{D}(x)}{1!} + \frac{\mathscr{D}^2(x)}{2!} + \cdots + \frac{\mathscr{D}^{n-1}(x)}{(n-1)!}\right) \\
&= (x+1)^k - \left(x^k + \frac{kx^{k-1}}{1!} + \frac{k(k-1)x^{k-2}}{2!} + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots 1x^0}{k!} + 0 + \cdots + 0\right) \\
&= \sum_{t=0}^{k} C_k^t x^t - \left(\frac{k!}{0!(k-0)!}x^k + \frac{k!}{1!(k-1)!}x^{k-1} + \frac{k!}{2!(k-2)!}x^{k-2} + \cdots + \frac{k!}{k!(k-k)!}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

习题 6.2 第 4 题. 设 $\mathbb{R}_n[t]$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上以 t 为字母、次数 $< n$ 的多项式及零组成的线性空间。$V = \{f(\cos x) \mid f \in \mathbb{R}_n[t]\}$. 试写出 V 中的基 $M_1 = \{1, \cos x, \cos^2 x, \cdots, \cos^{n-1} x\}$ 到 $M_2 = \{1, \cos x, \cos 2x, \cdots, \cos(n-1)x\}$ 的过渡矩阵。

解. 有 $\cos kx + i\sin kx = e^{ikx} = \left(e^{ix}\right)^k = (\cos x + i\sin x)^k$, 那么

$$\begin{aligned}
\cos kx &= \mathfrak{Re}\,(\cos x + i\sin x)^k \\
&= \sum_{t=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^t C_k^{2t} \cos^{k-2t} x \sin^{2t} x \\
&= \sum_{t=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^t C_k^{2t} \cos^{k-2t} x (1 - \cos^2 x)^t
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{t=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^t C_k^{2t} \cos^{k-2t} x \sum_{s=0}^{t} (-1)^s C_t^s \cos^{2s} x \\
&= \sum_{t=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_k^{2t} \sum_{s=0}^{t} (-1)^{t+s} C_t^s \cos^{k-2t+2s} x \\
&= \sum_{t=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_k^{2t} \sum_{s=0}^{t} (-1)^{2t-s} C_t^{t-s} \cos^{k-2s} x \\
&= \sum_{t=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_k^{2t} \sum_{s=0}^{t} (-1)^{s} C_t^{s} \cos^{k-2s} x \\
&= \sum_{t=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^t \left(\sum_{m=t}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_k^{2m} C_m^t \right) \cos^{k-2t} x
\end{aligned}
$$

设过渡矩阵为 A, 即 $M_1 A = M_2$, 那么 A 的第 k 列为

$$
\begin{aligned}
&\left(0, (-1)^{\lfloor k/2 \rfloor} k \cos x, 0, \cdots, 0, (-1)^t \left(\sum_{m=t}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_k^{2m} C_m^t \right), 0, \cdots 0, \sum_{m=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_k^{2m}, 0, \cdots \right)^T ,k \text{ 为奇数} \\
&\left((-1)^{\lfloor k/2 \rfloor} k \cos x, 0, \cdots, 0, (-1)^t \left(\sum_{m=t}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_k^{2m} C_m^t \right), 0, \cdots 0, \sum_{m=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_k^{2m}, 0, \cdots \right)^T ,k \text{ 为偶数}
\end{aligned}
$$

上式中的 t 对应相应向量的第 $k-2t$ 位。以上即为第一类切比雪夫多项式（Chebyshev polynomials of the first kind**）的系数。第一类切比雪夫多项式的一种定义方式即为**

$$
T_k(\cos x) = \cos(kx)
$$