

2022 秋高等代数习题课

2022-11-4 第五次习题课

第一题 (习题 4.2 第 6 题第 (2) 小题). 已知 A 是 n 阶方阵且满足条件 $A^3 = I$. 计算

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}A & -\frac{\sqrt{3}}{2}A \\ \frac{\sqrt{3}}{2}A & \frac{1}{2}A \end{pmatrix}^{2000}.$$

解: 令 $\theta = \frac{\pi}{3}$, 那么

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}A & -\frac{\sqrt{3}}{2}A \\ \frac{\sqrt{3}}{2}A & \frac{1}{2}A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \\ & A \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta I_n & -\sin \theta I_n \\ \sin \theta I_n & \cos \theta I_n \end{pmatrix}}_M,$$

并且矩阵 $\begin{pmatrix} A & \\ & A \end{pmatrix}$ 和 M 是可交换的。于是

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}A & -\frac{\sqrt{3}}{2}A \\ \frac{\sqrt{3}}{2}A & \frac{1}{2}A \end{pmatrix}^{2000} &= \begin{pmatrix} A & \\ & A \end{pmatrix}^{2000} M^{2000} = \begin{pmatrix} A^{2000} & \\ & A^{2000} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2000\theta I_n & -\sin 2000\theta I_n \\ \sin 2000\theta I_n & \cos 2000\theta I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^2 & \\ & A^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\theta I_n & -\sin 2\theta I_n \\ \sin 2\theta I_n & \cos 2\theta I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 & \\ & A^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}I_n & -\frac{\sqrt{3}}{2}I_n \\ \frac{\sqrt{3}}{2}I_n & -\frac{1}{2}I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}A^2 & -\frac{\sqrt{3}}{2}A^2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}A^2 & -\frac{1}{2}A^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

第二题 (习题 4.3 第 8 题). 设 A^* 表示 n 阶方阵 A 的伴随方阵。证明:

- (1) $(\lambda A)^* = \lambda^{n-1} A^*$ 对任意数 λ 成立;
- (2) $(AB)^* = B^* A^*$ 对任意同阶方阵 A, B 成立;

(3) 当 $n > 2$ 时, $(A^*)^* = (\det A)^{n-2} A$; 当 $n = 2$ 时, $(A^*)^* = A$.

证明: (1). 由于 $(\lambda A)^*$ 第 (j, i) 位元素为 λA 第 (i, j) 个代数余子式 $(\lambda A)_{(i, j)}$ 。由于任意 $n - 1$ 阶方阵 B 都有 $\det(\lambda B) = \lambda^{n-1} \det B$, 所以 $(\lambda A)_{(i, j)} = \lambda^{n-1} A_{(i, j)}$, 进而有 $(\lambda A)^* = \lambda^{n-1} A^*$ 。

(2). 令 $B^* A^* = (c_{ij})$, 那么

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^n B_{ki} A_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} \det A \begin{pmatrix} 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n \\ 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n \end{pmatrix} \cdot (-1)^{k+i} \det B \begin{pmatrix} 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n \\ 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{i+j} \sum_{k=1}^n \det \hat{A}_j \begin{pmatrix} 1, \dots, n-1 \\ 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n \end{pmatrix} \cdot \det \tilde{B}_i \begin{pmatrix} 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n \\ 1, \dots, n-1 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{i+j} \det(\hat{A}_j \tilde{B}_i), \end{aligned}$$

其中 B_{ki}, A_{jk} 分别为 B 在第 (k, i) 位的代数余子式与 A 在第 (j, k) 位的代数余子式, \hat{A}_j 为方阵 A 删掉第 j 行得到的 $(n-1) \times n$ 的矩阵, \tilde{B}_i 为方阵 B 删掉第 i 列得到的 $n \times (n-1)$ 的矩阵。后面这个等号是根据 Binet-Cauchy 公式 (课本定理 4.5.3(3)) 得到的。

另一方面, 方阵 $(AB)^*$ 的第 (i, j) 位元素, 记为 d_{ij} , 为方阵 AB 的第 (j, i) 位代数余子式 $(AB)_{ji}$, 其值为 $(-1)^{i+j}$ 乘以方阵 AB 删掉第 j 行第 i 列得到的 $n-1$ 阶方阵的行列式, 此 $n-1$ 阶方阵就等于 $\hat{A}_j \tilde{B}_i$, 即我们会有

$$d_{ij} = (AB)_{ji} = (-1)^{i+j} \det(\hat{A}_j \tilde{B}_i).$$

于是, 对于所有的 $1 \leq i, j \leq n$, 都有 $c_{ij} = d_{ij}$, 所以相应的矩阵是同一矩阵, 即 $(AB)^* = B^* A^*$ 。

另一种解法: 当 A, B 都是可逆阵的时候, 有

$$(AB)^* = \det(AB) \cdot (AB)^{-1} = (\det B \cdot \det A) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = B^* A^*.$$

若 A 不可逆, 则考虑 $A(\lambda) = \lambda I + A$; 若 B 不可逆, $B(\lambda) = \lambda I + B$. 由于 $\det A(\lambda), \det B(\lambda)$ 都是 λ 的多项式, 至多有有限多个根, 在 0 的一个小的去心邻域 $\dot{U}(0, \delta)$ 内, $A(\lambda), B(\lambda)$ 总是可逆的, 从而有

$$(A(\lambda)B(\lambda))^* = B(\lambda)^* A(\lambda)^*$$

对上式取极限 $\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda \in \dot{U}(0, \delta)}} \quad$ 即有 $(AB)^* = B^* A^*$. 这里可以取极限, 是因为以上的每一个 (伴随) 矩阵的元素, 都是 λ 的多项式, 关于 λ 都是连续的。

(3). 由于 A^* 的每个元素都是 A 的某个 $n-1$ 阶代数余子式, 所以若 $r(A) \leq n-2$, 那么 $A^* = 0$. 又由于 $AA^* = \det A I_n$, 所以当 $r(A) = n$ 时, $r(A^*) = n$. 当 $r(A) = n-1$ 时, 由于 $r(A^*) + r(A) - n \leq r(AA^*)$, 所以 $r(A^*) \leq 1$, 同时 A 至少有一个非零子式, 即 A^* 至少有一个非零元, 所以 $r(A^*) \geq 1$, 从而必须有 $r(A^*) = 1$. 于是, 我们证明了

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & \text{若 } r(A) = n \\ 1, & \text{若 } r(A) = n-1 \\ 0, & \text{其余情况} \end{cases}$$

所以当 $n > 2$ 时, 当 $r(A) = n$ 时,

$$(A^*)^* = \det A^* \cdot (A^*)^{-1} = (\det A)^{n-1} (\det A \cdot A^{-1})^{-1} = (\det A)^{n-2} A.$$

当 $r(A) < n$, 有 $r(A^*) \leq 1 < n-1$ (注意, 这里用到了 $n > 2$ 的条件), 进而有 $r((A^*)^*) = 0$, 也满足 $(A^*)^* = (\det A)^{n-2}A$. 唯一需要额外讨论的是 $n=2, r(A)=1$ 的情形, 但这种情况下能直接通过伴随矩阵的定义得出 $n=2$ 时, $(A^*)^* = A$ 的结论。

第三题 (习题 4.3 第 9 题). 设方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 的行列式 $|A| \neq 0, \beta \in \mathbb{F}^{n \times 1}$, 则线性方程组 $AX = \beta$ 有唯一解 $X = A^{-1}\beta$. 利用 A^{-1} 的表达式 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$ 证明 Cramer 法则。

证明: 线性方程组 $AX = \beta$ 的解 $X = A^{-1}\beta = \frac{1}{|A|}A^*\beta$. 记 $X = (x_1, \dots, x_n)^T, A^* = (c_{ij}), \beta = (b_1, \dots, b_n)^T$, 其中 $c_{ij} = A_{ji}$ 为方阵 A 的第 (j, i) 位代数余子式。那么有

$$x_i = \frac{c_{i1}b_1 + \dots + c_{in}b_n}{|A|} = \frac{A_{1i}b_1 + \dots + A_{ni}b_n}{|A|}$$

上式右边分子正好是将矩阵 A 的第 i 列替换为 β , 再按第 i 列展开计算得到的替换后方阵的行列式, 此即为 Cramer 法则。

第四题. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵。令 $C = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & I_n \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$, 证明

- (1) $r(C) = r(D)$;
- (2) $r(C) \geq r(A) + r(B)$;
- (3) $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$.

证明: (1) 由于有

$$\begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & I \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} -I & 0 \\ B & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = D,$$

而且 $\begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -I & 0 \\ B & I \end{pmatrix}$ 都是可逆矩阵, 所以 $r(C) = r(D)$.

(2) 设 $P_A A Q_A = \begin{pmatrix} I_{r(A)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_B B Q_B = \begin{pmatrix} I_{r(B)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中 P_A, Q_A, P_B, Q_B 分别是 m 阶, n 阶, n 阶, s 阶可逆方阵。那么

$$\begin{pmatrix} P_A & 0 \\ 0 & P_B \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & I \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} Q_B & 0 \\ 0 & Q_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & P_A A Q_A \\ P_B B Q_B & P_B Q_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_{r(A)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ I_{r(B)} & 0 & E_{11} & E_{12} \\ 0 & 0 & E_{21} & E_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $P_B Q_A$ 被划分为分块矩阵 $\begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{pmatrix}$. 于是 $r(C) \geq r(A) + r(B)$, 并且只要 E_{22} 不是零矩阵, 上述不等号就成立。

一般来说, $r(C) = r \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & I_n \end{pmatrix} = r(A) + n$ (或者 $r(B) + n$) 是不成立的。反例:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 此时 } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

此时 $r(C) = 2 \neq 1 + 2 = r(A) + 2$.

(3) 由前面 2 个小问知有不等式

$$r(A) + r(B) \leq r(C) = r(D) = r \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = r(AB) + n,$$

所以 $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$.

第五题. (Sherman-Morrison formula) 设 A 是 n 阶可逆实方阵, u, v 是两个 n 维实的列向量。证明 n 阶实方阵 $A + uv^T$ 可逆当且仅当实数 $1 + v^T A^{-1}u \neq 0$, 并且此时有

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1}u}.$$

证明: 考虑分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & u \\ -v^T & 1 \end{pmatrix}$ 的对角化。一方面以 A 为中心, 用第一行、第一列去“乘以倍数”加到第二行、第二列, 有

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ v^T A^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & u \\ -v^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 + v^T A^{-1}u \end{pmatrix},$$

另一方面 1 为中心, 用第二行、第二列去“乘以倍数”加到第一行、第一列, 有

$$\begin{pmatrix} I & -u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & u \\ -v^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ v^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + uv^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

于是我们有等价关系:

$$\begin{aligned} A + uv^T \text{ 可逆} &\iff \begin{pmatrix} A + uv^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 可逆} \iff \begin{pmatrix} A & u \\ -v^T & 1 \end{pmatrix} \text{ 可逆} \iff \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 + v^T A^{-1}u \end{pmatrix} \text{ 可逆} \\ &\iff 1 + v^T A^{-1}u \neq 0. \end{aligned}$$

此时,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} (A + uv^T)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A + uv^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ v^T & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & u \\ -v^T & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I & -u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ v^T & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 + v^T A^{-1}u \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I & 0 \\ v^T A^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ -v^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 + v^T A^{-1}u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ v^T A^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} I & -A^{-1}u \\ -v^T & 1 + v^T A^{-1}u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 + v^T A^{-1}u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & u \\ v^T A^{-1} & 1 + v^T A^{-1}u \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A^{-1} & \frac{-A^{-1}u}{1 + v^T A^{-1}u} \\ -v^T A^{-1} & \frac{1}{1 + v^T A^{-1}u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & u \\ v^T A^{-1} & 1 + v^T A^{-1}u \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1}u} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

所以 $(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1}u}$. 注意, 最后算得的这个矩阵非对角元一定是 0, 如果不是, 说明你哪一步算错了, 需要检查改正。

扩展练习: 设 A 为 n 阶可逆实方阵, U 为 $n \times m$ 的实方阵, C 为 m 阶可逆实方阵, V 为 $m \times n$ 的实方阵。证明 n 阶方阵 $A + UCV$ 可逆当且仅当 m 阶方阵 $C^{-1} + VA^{-1}U$ 可逆, 以及如下的 Woodbury matrix identity

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}.$$

第六题 求循环矩阵 (Circulant Matrix) A 的行列式,

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}, \quad a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$$

解: 设 u 为任一 n 次单位根, 令 $\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ \vdots \\ u^{n-1} \end{pmatrix}$, 那么有

$$A\mu = \begin{pmatrix} a_0 + a_1u + \cdots + a_{n-1}u^{n-1} \\ a_{n-1} + a_0u + \cdots + a_{n-2}u^{n-1} \\ \vdots \\ a_1 + a_2u + \cdots + a_0u^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u) \\ uf(u) \\ \vdots \\ u^{n-1}f(u) \end{pmatrix} = f(u)\mu,$$

其中 $f(u) = a_0 + a_1u + \cdots + a_{n-1}u^{n-1}$. 现令 $u = \exp(2\pi i/n)$ 为 n 次本原单位根, $\omega_j = \begin{pmatrix} 1 \\ u^j \\ \vdots \\ u^{(n-1)j} \end{pmatrix}$,

$j = 0, \dots, n-1$, 那么有 $A\omega_j = f(u^j)\omega_j$. 又令 $W = (\omega_0, \dots, \omega_{n-1})$, 有

$$AW = (A\omega_0, \dots, A\omega_{n-1}) = (f(u^0)\omega_0, \dots, f(u^{n-1})\omega_{n-1}).$$

于是有

$$\det A \cdot \det W = \det(AW) = \det(f(u^0)\omega_0, \dots, f(u^{n-1})\omega_{n-1}) = \prod_{j=0}^{n-1} f(u^j) \det W$$

因为 u 为 n 次本原单位根, u^0, \dots, u^{n-1} 互不相同, $\det W \neq 0$, 上式两边同时消去 $\det W$ 有

$$\det A = \prod_{j=0}^{n-1} f(u^j),$$

$$\text{其中 } u = \exp(2\pi i/n), f(u) = a_0 + a_1 u + \dots + a_{n-1} u^{n-1}.$$

以上情况比较特殊, 实际上我们直接观察出来了 A 的所有特征向量与特征值, 于是有

$$AW = W \operatorname{diag}(f(u^0), \dots, f(u^{n-1})),$$

从而有 $\det A = \det(\operatorname{diag}(f(u^0), \dots, f(u^{n-1})))$.

这次期中考试第一个计算行列式就差不多是一个循环矩阵的行列式, 如果把中间两行调换一下的话。不过它只是一个 4 阶的行列式, 不太需要用到这里的结论。用这个结论反而会把问题复杂化。