# 2021 秋高等代数习题课

## 2021-11-26 第五次习题课

习题 **4.3** 第 **8** 题. 设 $A^*$ 表示 $n$ 阶方阵 $A$ 的伴随矩阵。证明：

(1). $(\lambda A)^* = \lambda^{n-1}A^*$ 对任意数 $\lambda$ 成立；

(2). $(AB)^* = B^*A^*$ 对任意同阶方阵 $A, B$ 成立；

(3). 当 $n > 2$ 时，$(A^*)^* = (\det A)^{n-2}A$; 当 $n = 2$ 时，$(A^*)^* = A$.

证明：(1). 由于 $(\lambda A)^*$ 第 $(j,i)$ 位元素为 $\lambda A$ 第 $(i,j)$ 个代数余子式 $(\lambda A)_{(i,j)}$。由于任意 $n-1$ 阶方阵 $B$ 都有 $\det(\lambda B) = \lambda^{n-1}\det B$, 所以 $(\lambda A)_{(i,j)} = \lambda^{n-1}A_{(i,j)}$, 进而有 $(\lambda A)^* = \lambda^{n-1}A^*$.

(2). 令 $B^*A^* = (c_{ij})$, 那么

$$\begin{aligned}
c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} B_{ki}A_{jk} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}\det A\begin{pmatrix}1,\cdots,j-1,j+1,\cdots,n\\1,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n\end{pmatrix}\cdot(-1)^{k+i}\det B\begin{pmatrix}1,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n\\1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n\end{pmatrix} \\
&= (-1)^{i+j}\sum_{k=1}^{n}\det\widehat{A}_j\begin{pmatrix}1,\cdots,n-1\\1,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n\end{pmatrix}\cdot\det\widetilde{B}_i\begin{pmatrix}1,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n\\1,\cdots,n-1\end{pmatrix} \\
&= (-1)^{i+j}\det(\widehat{A}_j\widetilde{B}_i),
\end{aligned}$$

其中 $B_{ki}, A_{jk}$ 分别为 $B$ 在第 $(k,i)$ 位的代数余子式与 $A$ 在第 $(j,k)$ 位的代数余子式，$\widehat{A}_j$ 为方阵 $A$ 删掉第 $j$ 行得到的 $(n-1)\times n$ 的矩阵，$\widetilde{B}_i$ 为方阵 $B$ 删掉第 $i$ 列得到的 $n\times(n-1)$ 的矩阵。后面这个等号是根据 Binet-Cauchy 公式（课本定理 4.5.3(3)）得到的。

另一方面，方阵 $(AB)^*$ 的第 $(i,j)$ 位元素，记为 $d_{ij}$，为方阵 $AB$ 的第 $(j,i)$ 位代数余子式 $(AB)_{ji}$，其值为 $(-1)^{i+j}$ 乘以方阵 $AB$ 删掉第 $j$ 行第 $i$ 列得到的 $n-1$ 阶方阵的行列式，此 $n-1$ 阶方阵就等于 $\widehat{A}_j\widetilde{B}_i$, 即我们会有

$$d_{ij} = (AB)_{ji} = (-1)^{i+j}\det(\widehat{A}_j\widetilde{B}_i).$$

于是，对于所有的 $1\leqslant i,j\leqslant n$, 都有 $c_{ij} = d_{ij}$，所以相应的矩阵是同一矩阵，即 $(AB)^* = B^*A^*$.

另一种解法：当 $A, B$ 都是可逆阵的时候，有

$$(AB)^* = \det(AB)\cdot(AB)^{-1} = (\det B\cdot B^{-1})\cdot(\det A\cdot A^{-1}) = B^*A^*.$$

若 $A$ 不可逆，则考虑 $A(\lambda) = \lambda I + A$; 若 $B$ 不可逆，$B(\lambda) = \lambda I + B$. 由于 $\det A(\lambda), \det B(\lambda)$ 都是 $\lambda$ 的多项式，至多有有限多个根，在 $0$ 的一个小的去心领域 $\mathring{U}(0,\delta)$ 内，$A(\lambda), B(\lambda)$ 总是可逆的，从而有

$$(A(\lambda)B(\lambda))^* = B(\lambda)^*A(\lambda)^*$$

对上式取极限 $\lim\limits_{\mathring{U}(0,\delta)\ni x\to 0}$ 即有 $(AB)^* = B^*A^*$.

(3). 由于 $A^*$ 的每个元素都是 $A$ 的某个 $n-1$ 阶代数余子式，所以若 $r(A)\leqslant n-2$, 那么 $A^*=0$. 又由于 $AA^*=\det AI_n$, 所以当 $r(A)=n$ 时，$r(A^*)=n$. 当 $r(A)=n-1$ 时，由于 $r(A^*)+r(A)-n\leqslant r(AA^*)$, 所以 $r(A^*)\leqslant 1$, 同时 $A$ 至少有一个非零子式，即 $A^*$ 至少有一个非零元，所以 $r(A^*)\geqslant 1$, 从而必须有 $r(A^*)=1$. 于是，我们证明了

$$r(A^*)=\begin{cases} n, & \text{若} r(A)=n \\ 1, & \text{若} r(A)=n-1 \\ 0, & \text{其余情况} \end{cases}$$

所以当 $n>2$ 时，当 $r(A)=n$ 时，

$$(A^*)^*=\det A^*\cdot(A^*)^{-1}=(\det A)^{n-1}(\det A\cdot A^{-1})^{-1}=(\det A)^{n-2}A.$$

当 $r(A)<n$，有 $r(A*)\leqslant 1<n-1$, 进而有 $r((A^*)^*)=0$, 也满足 $(A^*)^*=(\det A)^{n-2}A$. 唯一需要额外讨论的是 $n=2, r(A)=1$ 的情形，但这种情况下能直接通过伴随矩阵的定义得出 $n=2$ 时，$(A^*)^*=A$ 的结论。

习题 **4.3** 第 **9** 题. 设方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 的行列式 $|A|\neq 0$, $\beta\in\mathbb{F}^{n\times 1}$, 则线性方程组 $AX=\beta$ 有唯一解 $X=A^{-1}\beta$. 利用 $A^{-1}$ 的表达式 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$ 证明 Cramer 法则。

证明：线性方程组 $AX=\beta$ 的解 $X=A^{-1}\beta=\frac{1}{|A|}A^*\beta$. 记 $X=(x_1,\cdots,x_n)^T, A^*=(c_{ij}), \beta=(b_1,\cdots,b_n)^T$, 其中 $c_{ij}=A_{ji}$ 为方阵 $A$ 的第 $(j,i)$ 位代数余子式。那么有

$$x_i=\frac{c_{i1}b_1+\cdots+c_{in}b_n}{|A|}=\frac{A_{1i}b_1+\cdots+A_{ni}b_n}{|A|}$$

上式右边分子正好是将矩阵 $A$ 的第 $i$ 列替换为 $\beta$, 再按第 $i$ 列展开计算得到的替换后方阵的行列式，此即为 Cramer 法则。

习题 **4.4** 第 **5** 题. 已知 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. 求 2 阶初等方阵 $P,Q$ 使 $PAQ$ 具有形式 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}$.

解：这题需要添加条件 $a\neq 0$，否则 $A=\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $b,c\neq 0$ 时不可能能化成 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}$ 的形式。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d-\frac{bc}{a} \end{pmatrix}$$

所以可以取 $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, d_1=d-\frac{bc}{a}$.

习题 **4.4** 第 **6** 题. 设 $A,B,C,D\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 且 $A$ 可逆。求 $2n$ 阶可逆方阵 $P,Q$ 使 $P\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}Q$ 具有形式 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}$, 其中 $D_1$ 是某个 $n$ 阶方阵。

解：这题可以依照习题 4.4 第 6 题类似地做，只是需要注意矩阵相乘的顺序。

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

$D_1 = D - CA^{-1}B.$

第 **5** 题. **设** $A$ **是秩为** $1$ **的** $n$ **阶方阵，若存在正整数** $k$**，使得** $A^k = 0$**, 证明** $A^2 = 0$.

**证明：由于** $A$ **秩为** $1$**，所以至少存在某一行元素不全为** $0$**，记这一行为** $\alpha = (a_1, \cdots, a_n)$**。由于** $A$ **秩为** $1$**，**$\{\alpha\}$ **即为** $A$ **的行的极大线性无关组，能表出其他所有行。也就是说** $A$ **的所有行都能表示为** $\lambda_1\alpha, \dots, \lambda_n\alpha$**，于是有** $A = \lambda\alpha$**，其中** $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$. **那么对于** $k \geqslant 2$,

$$A^k = (\lambda\alpha)^k = \lambda(\alpha\lambda)^{k-1}\alpha = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right)^{k-1} \lambda\alpha = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right)^{k-1} A$$

**于是若** $A^k = 0$**, 那么** $\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i a_i = 0$**, 所以**

$$A^2 = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right) A = 0.$$

第 **6** 题. **设** $A$ **是** $m \times n$ **矩阵，**$B$ **是** $n \times s$ **矩阵。证明**

$$r(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}) \leqslant r(\begin{pmatrix} A & 0 \\ I_n & B \end{pmatrix}) = r(\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix})$$

**证明：由于有**

$$\begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ I & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ B & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

**而且** $\begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & 0 \\ B & I \end{pmatrix}$ **都是满秩方阵，所以** $r(\begin{pmatrix} A & 0 \\ I_n & B \end{pmatrix}) = r(\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix})$。

**设可逆矩阵** $P_1, Q_1, P_2, Q_2$ **使得** $P_1AQ_1 = \begin{pmatrix} I_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2BQ_2 = \begin{pmatrix} I_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$**, 那么**

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{r_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ I & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{r_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{12} & I_{r_2} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**其中** $P_2Q_1 = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$. **于是上式中第一行的方阵的秩小于等于第二行的方阵的秩，同时又由于** $\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$ **都是可逆（满秩）的，所以有** $r(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}) \leqslant r(\begin{pmatrix} A & 0 \\ I_n & B \end{pmatrix})$.