2021 秋高等代数习题课

2021-11-12 第四次习题课

第 1 题. **讨论参数 λ 决定 $n\times n$ 的矩阵 $A(\lambda)=\begin{pmatrix}1&\cdots&1&\lambda\\1&\cdots&\lambda&1\\\vdots&\iddots&\vdots&\vdots\\\lambda&\cdots&1&1\end{pmatrix}$ 的秩**

解：首先计算 $A(\lambda)$ 的行列式，有

$$\begin{aligned}\det A(\lambda)&=\begin{vmatrix}1&\cdots&1&\lambda\\1&\cdots&\lambda&1\\\vdots&\iddots&\vdots&\vdots\\\lambda&\cdots&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&\cdots&1&\lambda\\0&\cdots&\lambda-1&1-\lambda\\\vdots&\iddots&\vdots&\vdots\\\lambda-1&\cdots&0&1-\lambda\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}1&\cdots&1&\lambda+(n-1)\\0&\cdots&\lambda-1&0\\\vdots&\iddots&&\vdots\\\lambda-1&\cdots&\cdots&0\end{vmatrix}\\&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(\lambda+(n-1))(\lambda-1)^{n-1}\end{aligned}$$

所以当 $\lambda\neq 1,1-n$ 时，矩阵 $A(\lambda)$ 行列式不为 0，从而满秩，秩为 n. 当 $n=1$ 时，矩阵 $A(\lambda)$ 所有元素值都为 1，这样的矩阵秩为 1. 当 $n=1-n$ 时，矩阵 $A(\lambda)$ 在之前求行列式化简到最后一步对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&\cdots&1&0\\0&\cdots&-n&0\\\vdots&\iddots&&\vdots\\-n&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}$$

很容易看出这个矩阵的秩为 $n-1$. 另一种做法是把矩阵 $A(\lambda)$ 化为阶梯形

$$A(1-n)=\begin{pmatrix}1&\cdots&1&1-n\\1&\cdots&1-n&1\\\vdots&\iddots&\vdots&\vdots\\1-n&\cdots&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\cdots&1&1-n\\0&\cdots&-n&n\\\vdots&\iddots&\vdots&\vdots\\-n&\cdots&0&n\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&\cdots&1&1-n\\0&\cdots&1&-1\\\vdots&\iddots&\vdots&\vdots\\1&\cdots&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&\cdots&0&0\\0&\cdots&1&-1\\\vdots&\iddots&\vdots&\vdots\\1&\cdots&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&-1\\0&1&\cdots&0&-1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-1\\0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$$

第 **2** 题. 设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间，$\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 是一组基。证明 V 也是实数域 $\mathbb{R}$ 上的 $2n$ 维线性空间，并求出它的一组基。更一般地，设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间，$\mathbb{F}$ 是子域 $\mathbb{F}_0$ 的 m 维线性空间，问 V 是域 $\mathbb{F}_0$ 上多少维线性空间，如何确定它的一组基?

解：由于 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间，其本身有加法，满足有零元，结合律，交换律（即 V 是一个交换群）。任取 $\lambda\in\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}, v\in V$，定义数乘 λv 为 V 作为复数域 $\mathbb{C}$ 上线性空间时的数乘，相关的性质同样满足。所以 V 也是实数域 $\mathbb{R}$ 上的维线性空间，记作 $V_{\mathbb{R}}$。下面证明

$$\alpha_1, i\alpha_1,\dots,\alpha_n, i\alpha_n$$

是 $V_{\mathbb{R}}$ 的一组基。由于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 V 作为复数域 $\mathbb{C}$ 上线性空间的一组基，任取 $v\in V_{\mathbb{R}}$，存在 $\lambda_{11}+i\lambda_{12},\dots,\lambda_{n1}+i\lambda_{n2}\in\mathbb{C}$ 使得

$$v=(\lambda_{11}+i\lambda_{12})\alpha_1+\cdots+(\lambda_{n1}+i\lambda_{n2})\alpha_n=\lambda_{11}\alpha_1+\lambda_{12}(i\alpha_1)+\cdots+\lambda_{n1}\alpha_n+\lambda_{n2}(i\alpha_n)$$

所以 $\alpha_1, i\alpha_1,\dots,\alpha_n, i\alpha_n$ 可以线性表出 $V_{\mathbb{R}}$ 中所有向量。上式同时也可看出 $\alpha_1, i\alpha_1,\dots,\alpha_n, i\alpha_n$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关（取 $v=0$）。所以它是 $V_{\mathbb{R}}$ 的一组基，从而知 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的 $2n$ 维线性空间。

若 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间，$\mathbb{F}$ 是子域 $\mathbb{F}_0$ 的 m 维线性空间，那么 V 是域 $\mathbb{F}_0$ 上的 mn 维线性空间。设 $\mathbb{F}$ 作为 $\mathbb{F}_0$ 上线性空间的一组基为 $\mu_1,\dots,\mu_m$，那么 V 作为域 $\mathbb{F}_0$ 上的线性空间的一组基可以取为

$$\{\mu_i\alpha_j \mid 1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n\}.$$

利用同样的方法可以证明以上这组向量在可以在 $\mathbb{F}_0$ 上线性表出 V 中所有向量，并且在 $\mathbb{F}_0$ 上线性无关。

第 **3** 题. 设 $V=\mathbb{F}^n, W=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\middle|\, a_1+a_2=a_2-a_3=0\right\}$. 求商空间 V/W 的维数与一组基。

解：W 为齐次线性方程组 $\begin{cases}a_1+a_2=0\\ a_2-a_3=0\end{cases}$ 的解空间，所以 $\dim W=n-2$，根据维数公式有

$$\dim V/W=\dim V-\dim W=n-(n-2)=2$$

令 $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$，那么 $W^{\perp}=\operatorname{span}\{v_1,v_2\}$，所以商空间 V/W 的一组基可以取为 $\overline{v}_1=v_1+W, \overline{v}_2=v_2+W$.

第 **4** 题. 设 $\mathbb{R}^2$ 中三条不同直线的方程为

$$\begin{aligned}\ell_1:&\quad ax+by+c=0\\ \ell_2:&\quad cx+ay+b=0\\ \ell_3:&\quad bx+cy+a=0\end{aligned}$$

证明 ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3 交于一点 $\Longleftrightarrow a+b+c=0$.

证明：求三条直线方程交点的方程组可写为

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0,\quad \text{其中}A=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}.$$

ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3 交于一点当且仅当 $A\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0$ 有唯一解，这又等价于 $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0$ 解空间维数为 1，即 A 的秩为 2，且在 z 轴上的投影非平凡。对 A 做行、列的初等变换有

$$A=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\a+b+c&a+b+c&a+b+c\end{pmatrix}$$

若 $a+b+c\neq 0$，则有进一步变换

$$\begin{aligned}A=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}&\to\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\a+b+c&a+b+c&a+b+c\end{pmatrix}\\&\to\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a-c&b-c&0\\c-b&a-b&0\\0&0&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

由于 $\det\begin{pmatrix}a-c&b-c\\c-b&a-b\end{pmatrix}=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=\frac{1}{2}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)$. 于是若有 $a=b=c$，此时 $\operatorname{rank}(A)=1$，其余情况下 $\operatorname{rank}(A)=3$, 都不满足 $\operatorname{rank}(A)=2$.

若 $a+b+c=0$，则进一步变换为

$$\begin{aligned}A=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}&\to\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\a+b+c&a+b+c&a+b+c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\0&0&0\end{pmatrix}\\&\to\begin{pmatrix}a&b&a+b+c\\c&a&a+b+c\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&0\\c&a&0\\0&0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

考虑到 $\det\begin{pmatrix}a&b\\c&a\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left(a^2-bc\right)$，此式等于 0 当且仅当 $a=b=c=0$，但此时 ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3 就不是直线方程了。所以在 $a+b+c=0$ 的情况下，总有 $\operatorname{rank}(A)=2$。于是

$$\ell_1,\ell_2,\ell_3\ \text{交于一点} \Longleftrightarrow\ a+b+c=0$$

第 **5** 题 **求循环矩阵（Circulant Matrix）A 的行列式，**

$$A=\begin{pmatrix}a_0&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}\\a_{n-1}&a_0&a_1&\cdots&a_{n-2}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_0\end{pmatrix},\quad a_0,\ldots,a_{n-1}\in\mathbb{C}$$

解：设 u 为任一 n 次单位根，令 $\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ \vdots \\ u^{n-1} \end{pmatrix}$, 那么有

$$A\mu = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 u + \cdots + a_{n-1}u^{n-1} \\ a_{n-1} + a_0 u + \cdots + a_{n-2}u^{n-1} \\ \vdots \\ a_1 + a_2 u + \cdots + a_0 u^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u) \\ uf(u) \\ \vdots \\ u^{n-1}f(u) \end{pmatrix} = f(u)\mu,$$

其中 $f(u) = a_0 + a_1 u + \cdots + a_{n-1}u^{n-1}$. 现令 $u = \exp(2\pi i/n)$ 为 n 次本原单位根，$\omega_j = \begin{pmatrix} 1 \\ u^j \\ \vdots \\ u^{(n-1)j} \end{pmatrix}$, $j = 0, \ldots, n-1$, 那么有 $A\omega_j = f(u^j)\omega_j$. 又令 $W = (\omega_0, \cdots, \omega_{n-1})$, 有

$$AW = (A\omega_0, \cdots, A\omega_{n-1}) = (f(u^0)\omega_0, \cdots, f(u^{n-1})\omega_{n-1}).$$

于是有

$$\det A \cdot \det W = \det(AW) = \det(f(u^0)\omega_0, \cdots, f(u^{n-1})\omega_{n-1}) = \prod_{j=0}^{n-1} f(u^j) \det W$$

因为 u 为 n 次本原单位根，$u^0, \ldots, u^{n-1}$ 互不相同，$\det W \neq 0$, 上式两边同时消去 $\det W$ 有

$$\det A = \prod_{j=0}^{n-1} f(u^j),$$

其中 $u = \exp(2\pi i/n),\ f(u) = a_0 + a_1 u + \cdots + a_{n-1}u^{n-1}$.

以上情况比较特殊，实际上我们直接观察出来了 A 的所有特征向量与特征值，于是有

$$AW = W \operatorname{diag}(f(u^0), \ldots, f(u^{n-1})),$$

从而有 $\det A = \det(\operatorname{diag}(f(u^0), \ldots, f(u^{n-1})))$.

习题 **3.5** 第 **1** 题. (2). 记 $D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$, 令 $\alpha_i = \begin{pmatrix} x_1^i \\ \vdots \\ x_n^i \end{pmatrix}$, $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, 那么

$$\begin{aligned} D_n &= \det(e+\alpha_1, e+\alpha_2, \cdots, e+\alpha_n) \\ &= \det(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) + \det(e, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) + \cdots + \det(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, e) \\ &= \det(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) + \det(e, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) + \cdots + (-1)^{n-1}\det(e, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}) \\ &= 2\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) - \left\{(-1)^2 \det(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) + \cdots + (-1)^{n+2}\det(e, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})\right\} \\ &= 2\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) - \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ e & \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2x_1\cdots x_n\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)-\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\quad (\textbf{其中 } x_0=1)\\
&= \left(2\prod_{k=1}^{n}x_k-\prod_{k=1}^{n}(x_k-1)\right)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)
\end{aligned}
$$

习题 3.5 第 2 题. 记 $D=\begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+a_2 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$, 令 $\alpha_1=\begin{pmatrix} -a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},\ldots,\alpha_n=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ -a_n \end{pmatrix}$, $e=\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, 那么类似上一题有

$$
\begin{aligned}
D_n &= \det(\alpha_1+a_1e,\cdots,\alpha_n+a_ne)\\
&= 2\det(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)-\det\begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_n \\ e & \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

这两个都是比较好计算的行列式。