2022 秋高等代数习题课

2022-11-4 第五次习题课

第一题 (习题 4.2 第 6 题第（2）小题). 已知 A 是 n 阶方阵且满足条件 $A^3=I$. 计算

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}A & -\frac{\sqrt{3}}{2}A \\ \frac{\sqrt{3}}{2}A & \frac{1}{2}A \end{pmatrix}^{2000}.$$

解: 令 $\theta=\frac{\pi}{3}$, 那么

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}A & -\frac{\sqrt{3}}{2}A \\ \frac{\sqrt{3}}{2}A & \frac{1}{2}A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \\ & A \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta I_n & -\sin\theta I_n \\ \sin\theta I_n & \cos\theta I_n \end{pmatrix}}_{M},$$

并且矩阵 $\begin{pmatrix} A & \\ & A \end{pmatrix}$ 和 M 是可交换的。于是

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}A & -\frac{\sqrt{3}}{2}A \\ \frac{\sqrt{3}}{2}A & \frac{1}{2}A \end{pmatrix}^{2000} &= \begin{pmatrix} A & \\ & A \end{pmatrix}^{2000} M^{2000} = \begin{pmatrix} A^{2000} & \\ & A^{2000} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2000\theta I_n & -\sin 2000\theta I_n \\ \sin 2000\theta I_n & \cos 2000\theta I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^2 & \\ & A^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\theta I_n & -\sin 2\theta I_n \\ \sin 2\theta I_n & \cos 2\theta I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 & \\ & A^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}I_n & -\frac{\sqrt{3}}{2}I_n \\ \frac{\sqrt{3}}{2}I_n & -\frac{1}{2}I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}A^2 & -\frac{\sqrt{3}}{2}A^2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}A^2 & -\frac{1}{2}A^2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

第二题 (习题 4.3 第 8 题). 设 A^* 表示 n 阶方阵 A 的伴随方阵。证明:

(1) $(\lambda A)^* = \lambda^{n-1}A^*$ 对任意数 λ 成立;

(2) $(AB)^* = B^*A^*$ 对任意同阶方阵 A, B 成立;

(3) 当 $n>2$ 时，$(A^*)^*=(\det A)^{n-2}A$; 当 $n=2$ 时，$(A^*)^*=A$.

证明：(1). 由于 $(\lambda A)^*$ 第 (j,i) 位元素为 λA 第 (i,j) 个代数余子式 $(\lambda A)_{(i,j)}$。由于任意 $n-1$ 阶方阵 B 都有 $\det(\lambda B)=\lambda^{n-1}\det B$, 所以 $(\lambda A)_{(i,j)}=\lambda^{n-1}A_{(i,j)}$, 进而有 $(\lambda A)^*=\lambda^{n-1}A^*$.

(2). 令 $B^*A^*=(c_{ij})$, 那么

$$
\begin{aligned}
c_{ij}&=\sum_{k=1}^{n}B_{ki}A_{jk}\\
&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}\det A\begin{pmatrix}1,\cdots,j-1,j+1,\cdots,n\\1,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n\end{pmatrix}\cdot(-1)^{k+i}\det B\begin{pmatrix}1,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n\\1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n\end{pmatrix}\\
&=(-1)^{i+j}\sum_{k=1}^{n}\det\widehat{A}_j\begin{pmatrix}1,\cdots,n-1\\1,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n\end{pmatrix}\cdot\det\widetilde{B}_i\begin{pmatrix}1,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n\\1,\cdots,n-1\end{pmatrix}\\
&=(-1)^{i+j}\det(\widehat{A}_j\widetilde{B}_i),
\end{aligned}
$$

其中 B_{ki},A_{jk} 分别为 B 在第 (k,i) 位的代数余子式与 A 在第 (j,k) 位的代数余子式，$\widehat{A}_j$ 为方阵 A 删掉第 j 行得到的 $(n-1)\times n$ 的矩阵，$\widetilde{B}_i$ 为方阵 B 删掉第 i 列得到的 $n\times(n-1)$ 的矩阵。后面这个等号是根据 Binet-Cauchy 公式（课本定理 4.5.3(3)）得到的。

另一方面，方阵 $(AB)^*$ 的第 (i,j) 位元素，记为 d_{ij}，为方阵 AB 的第 (j,i) 位代数余子式 $(AB)_{ji}$, 其值为 $(-1)^{i+j}$ 乘以方阵 AB 删掉第 j 行第 i 列得到的 $n-1$ 阶方阵的行列式，此 $n-1$ 阶方阵就等于 $\widehat{A}_j\widetilde{B}_i$, 即我们会有

$$d_{ij}=(AB)_{ji}=(-1)^{i+j}\det(\widehat{A}_j\widetilde{B}_i).$$

于是，对于所有的 $1\leqslant i,j\leqslant n$, 都有 $c_{ij}=d_{ij}$，所以相应的矩阵是同一矩阵，即 $(AB)^*=B^*A^*$.

另一种解法：当 A,B 都是可逆阵的时候，有

$$(AB)^*=\det(AB)\cdot(AB)^{-1}=(\det B\cdot B^{-1})\cdot(\det A\cdot A^{-1})=B^*A^*.$$

若 A 不可逆，则考虑 $A(\lambda)=\lambda I+A$; 若 B 不可逆，$B(\lambda)=\lambda I+B$. 由于 $\det A(\lambda),\det B(\lambda)$ 都是 λ 的多项式，至多有有限多个根，在 0 的一个小的去心领域 $\mathring{U}(0,\delta)$ 内，$A(\lambda),B(\lambda)$ 总是可逆的，从而有

$$(A(\lambda)B(\lambda))^*=B(\lambda)^*A(\lambda)^*$$

对上式取极限 $\lim\limits_{\mathring{U}(0,\delta)\ni x\to 0}$ 即有 $(AB)^*=B^*A^*$. 这里可以取极限，是因为以上的每一个（伴随）矩阵的元素，都是 λ 的多项式，关于 λ 都是连续的。

(3). 由于 A^* 的每个元素都是 A 的某个 $n-1$ 阶代数余子式，所以若 $r(A)\leqslant n-2$, 那么 $A^*=0$. 又由于 $AA^*=\det AI_n$, 所以当 $r(A)=n$ 时，$r(A^*)=n$. 当 $r(A)=n-1$ 时，由于 $r(A^*)+r(A)-n\leqslant r(AA^*)$, 所以 $r(A^*)\leqslant 1$, 同时 A 至少有一个非零子式，即 A^* 至少有一个非零元，所以 $r(A^*)\geqslant 1$, 从而必须有 $r(A^*)=1$. 于是，我们证明了

$$r(A^*)=\begin{cases}n, & \text{若} r(A)=n\\ 1, & \text{若} r(A)=n-1\\ 0, & \text{其余情况}\end{cases}$$

所以当 $n>2$ 时，当 $r(A)=n$ 时，

$$(A^*)^*=\det A^*\cdot(A^*)^{-1}=(\det A)^{n-1}(\det A\cdot A^{-1})^{-1}=(\det A)^{n-2}A.$$

当 $r(A)<n$，有 $r(A^*)\leqslant 1<n-1$ (注意，这里用到了 $n>2$ 的条件), 进而有 $r((A^*)^*)=0$, 也满足 $(A^*)^*=(\det A)^{n-2}A$. 唯一需要额外讨论的是 $n=2, r(A)=1$ 的情形，但这种情况下能直接通过伴随矩阵的定义得出 $n=2$ 时，$(A^*)^*=A$ 的结论。

第三题 (习题 4.3 第 9 题). 设方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 的行列式 $|A|\neq 0, \beta\in\mathbb{F}^{n\times 1}$, 则线性方程组 $AX=\beta$ 有唯一解 $X=A^{-1}\beta$. 利用 A^{-1} 的表达式 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$ 证明 Cramer 法则。

证明：线性方程组 $AX=\beta$ 的解 $X=A^{-1}\beta=\frac{1}{|A|}A^*\beta$. 记 $X=(x_1,\cdots,x_n)^T, A^*=(c_{ij}), \beta=(b_1,\cdots,b_n)^T$, 其中 $c_{ij}=A_{ji}$ 为方阵 A 的第 (j,i) 位代数余子式。那么有

$$x_i=\frac{c_{i1}b_1+\cdots+c_{in}b_n}{|A|}=\frac{A_{1i}b_1+\cdots+A_{ni}b_n}{|A|}$$

上式右边分子正好是将矩阵 A 的第 i 列替换为 β, 再按第 i 列展开计算得到的替换后方阵的行列式，此即为 Cramer 法则。

第四题. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵。令 $C=\begin{pmatrix}0&A\\B&I_n\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}AB&0\\0&I_n\end{pmatrix}$, 证明

(1) $r(C)=r(D)$;

(2) $r(C)\geqslant r(A)+r(B)$;

(3) $r(AB)\geqslant r(A)+r(B)-n$.

证明: (1) 由于有

$$\begin{pmatrix}I&-A\\0&I\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}0&A\\B&I\end{pmatrix}}_{C}\begin{pmatrix}-I&0\\B&I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AB&0\\0&I\end{pmatrix}=D,$$

而且 $\begin{pmatrix}I&-A\\0&I\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-I&0\\B&I\end{pmatrix}$ 都是可逆矩阵，所以 $r(C)=r(D)$.

(2) 设 $P_AAQ_A=\begin{pmatrix}I_{r(A)}&0\\0&0\end{pmatrix}, P_BBQ_B=\begin{pmatrix}I_{r(B)}&0\\0&0\end{pmatrix}$, 其中 P_A, Q_A, P_B, Q_B 分别是 m 阶，n 阶，n 阶，s 阶可逆方阵。那么

$$\begin{pmatrix}P_A&0\\0&P_B\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}0&A\\B&I\end{pmatrix}}_{C}\begin{pmatrix}Q_B&0\\0&Q_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&P_AAQ_A\\P_BBQ_B&P_BQ_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\multicolumn{2}{c}{\mathbf{0}}&I_{r(A)}&0\\&&0&0\\I_{r(B)}&0&E_{11}&E_{12}\\0&0&E_{21}&E_{22}\end{pmatrix},$$

其中 P_BQ_A 被划分为分块矩阵 $\begin{pmatrix}E_{11}&E_{12}\\E_{21}&E_{22}\end{pmatrix}$. 于是 $r(C)\geqslant r(A)+r(B)$, 并且只要 E_{22} 不是零矩阵，上述不等号就成立。

一般来说，$r(C) = r\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & I_n \end{pmatrix} = r(A) + n$（或者 $r(B) + n$）是不成立的。反例：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{此时} C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

此时 $r(C) = 2 \neq 1 + 2 = r(A) + 2$.

(3) 由前面 2 个小问知有不等式

$$r(A) + r(B) \leqslant r(C) = r(D) = r\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = r(AB) + n,$$

所以 $r(AB) \geqslant r(A) + r(B) - n$.

第五题. (Sherman–Morrison formula) 设 A 是 n 阶可逆实方阵，u, v 是两个 n 维实的列向量。证明 n 阶实方阵 $A + uv^T$ 可逆当且仅当实数 $1 + v^T A^{-1} u \neq 0$, 并且此时有

$$\left(A + uv^T\right)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1 + v^TA^{-1}u}.$$

证明：考虑分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & u \\ -v^T & 1 \end{pmatrix}$ 的对角化。一方面以 A 为中心，用第一行、第一列去 "乘以倍数" 加到第二行、第二列，有

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ v^TA^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & u \\ -v^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 + v^TA^{-1}u \end{pmatrix},$$

另一方面 1 为中心，用第二行、第二列去 "乘以倍数" 加到第一行、第一列，有

$$\begin{pmatrix} I & -u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & u \\ -v^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ v^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + uv^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

于是我们有等价关系：

$$\begin{aligned} A + uv^T \text{ 可逆} &\iff \begin{pmatrix} A + uv^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 可逆} \iff \begin{pmatrix} A & u \\ -v^T & 1 \end{pmatrix} \text{ 可逆} \iff \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 + v^TA^{-1}u \end{pmatrix} \text{ 可逆} \\ &\iff 1 + v^TA^{-1}u \neq 0. \end{aligned}$$

此时，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} (A + uv^T)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A + uv^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ v^T & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & u \\ -v^T & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I & -u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ v^T & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 + v^TA^{-1}u \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I & 0 \\ v^TA^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ -v^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1 + v^TA^{-1}u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ v^TA^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} I & -A^{-1}u \\ -v^T & 1+v^TA^{-1}u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1+v^TA^{-1}u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & u \\ v^TA^{-1} & 1+v^TA^{-1}u \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A^{-1} & \dfrac{-A^{-1}u}{1+v^TA^{-1}u} \\ -v^TA^{-1} & \dfrac{1}{1+v^TA^{-1}u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & u \\ v^TA^{-1} & 1+v^TA^{-1}u \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A^{-1} - \dfrac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

所以 $(A+uv^T)^{-1} = A^{-1} - \dfrac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u}$.

扩展练习：设 A **为** n **阶可逆实方阵，**U **为** $n\times m$ **的实方阵，**C **为** m **阶可逆实方阵，**V **为** $m\times n$ **的实方阵。证明** n **阶方阵** $A+UCV$ **可逆当且仅当** m **阶方阵** $C^{-1}+VA^{-1}U$ **可逆，以及如下的** Woodbury matrix identity

$$
(A+UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U\left(C^{-1}+VA^{-1}U\right)^{-1}VA^{-1}.
$$

第六题 **求循环矩阵（**Circulant Matrix**）**A **的行列式，**

$$
A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}, \quad a_0,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{C}
$$

解：设 u **为任一** n **次单位根，令** $\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ \vdots \\ u^{n-1} \end{pmatrix}$**，那么有**

$$
A\mu = \begin{pmatrix} a_0+a_1u+\cdots+a_{n-1}u^{n-1} \\ a_{n-1}+a_0u+\cdots+a_{n-2}u^{n-1} \\ \vdots \\ a_1+a_2u+\cdots+a_0u^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u) \\ uf(u) \\ \vdots \\ u^{n-1}f(u) \end{pmatrix} = f(u)\mu,
$$

其中 $f(u) = a_0+a_1u+\cdots+a_{n-1}u^{n-1}$. **现令** $u=\exp(2\pi i/n)$ **为** n **次本原单位根，**$\omega_j = \begin{pmatrix} 1 \\ u^j \\ \vdots \\ u^{(n-1)j} \end{pmatrix}$,

$j=0,\dots,n-1$, **那么有** $A\omega_j = f(u^j)\omega_j$. **又令** $W=(\omega_0,\cdots,\omega_{n-1})$, **有**

$$
AW = (A\omega_0,\cdots,A\omega_{n-1}) = (f(u^0)\omega_0,\cdots,f(u^{n-1})\omega_{n-1}).
$$

于是有

$$\det A\cdot\det W=\det(AW)=\det(f(u^0)\omega_0,\cdots,f(u^{n-1})\omega_{n-1})=\prod_{j=0}^{n-1}f(u^j)\det W$$

因为 u 为 n 次本原单位根，$u^0,\ldots,u^{n-1}$ 互不相同，$\det W\neq 0$, 上式两边同时消去 $\det W$ 有

$$\det A=\prod_{j=0}^{n-1}f(u^j),$$

其中 $u=\exp(2\pi i/n),\ f(u)=a_0+a_1u+\cdots+a_{n-1}u^{n-1}$.

以上情况比较特殊，实际上我们直接观察出来了 A 的所有特征向量与特征值，于是有

$$AW=W\,\mathrm{diag}(f(u^0),\ldots,f(u^{n-1})),$$

从而有 $\det A=\det(\mathrm{diag}(f(u^0),\ldots,f(u^{n-1})))$.