2022 春高等代数习题课

2022-3-25 第二次习题课

第一题. 设 $A \in M_n(\mathbb{F})$, 并且 $A^2 = I$. 证明 A 相似于矩阵 $B = \begin{pmatrix} I_r & \\ & -I_s \end{pmatrix}$, 其中 $r + s = n$.

证明：由于 $A^2 = I$, 所以 $f(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$ 是 A 的一个零化多项式。若 A 的极小多项式是 $\lambda + 1$, 那么 $A = -I_n$; 若 A 的极小多项式是 $\lambda - 1$, 那么 $A = I_n$. 若 A 的极小多项式是 $\lambda^2 - 1$, 那么依据定理 6.7.2 可知，由于 A 的极小多项式无重根，所以可对角化，其对角元就是它的特征值 ± 1. 假设特征值 $1, -1$ 的重数分别为 r, s, 那么 $r + s = n$, A 相似于 $\begin{pmatrix} I_r & \\ & -I_s \end{pmatrix}$.

另一种证法：考察特征子空间 V_1, V_{-1}, 设 $\dim V_1 = s, \dim V_2 = r$. 由于 $V_1 + V_{-1}$ 是直和，只要证明 $\dim V_1 + \dim V_{-1} = n$，那么存在 V_1 的一组基 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, V_{-1} 的一组基 $\beta_1, \ldots, \beta_r$, 他们构成 V 的一组基 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_r$, 在这组基下 A 的矩阵表示为 $\begin{pmatrix} I_r & \\ & -I_s \end{pmatrix}$. 或者等价地，令 $P = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_r)$, 有 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_r & \\ & -I_s \end{pmatrix}$. 令

$$\sigma_1 : v \mapsto (A - I)v, \quad \sigma_{-1} : v \mapsto (A + I)v.$$

那么 $\sigma_1 \sigma_{-1}(v) = 0$, 于是 $V_1 = \ker(\sigma_1) \supset \mathrm{Im}(\sigma_{-1})$, 从而有

$$s = \dim V_1 = \dim \ker(\sigma_1) \geqslant \dim \mathrm{Im}(\sigma_{-1}) = n - \dim \ker(\sigma_{-1}) = n - \dim V_{-1} = n - r,$$

于是有 $n \geqslant \dim V_1 + \dim V_{-1} = s + r \geqslant n$.

第二题. 若 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 满足 $A^n = I$, 证明 A 的特征值是 n 次单位根。

证明：令 $f(\lambda)$ 为 A 的极小多项式，令 $g(\lambda) = \lambda^n - 1$, 那么 $g(\lambda)$ 为 A 的零化多项式，$f(\lambda) | g(\lambda)$. 由于 A 的特征值都是 $f(\lambda)$ 的根，所以他们也都是 $g(\lambda) = \lambda^n - 1$ 的根，从而是 n 次单位根。

第三题. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $AB = BA$, 若 A, B 均相似于对角矩阵，证明存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 与 $P^{-1}BP$ 同时为对角形。

证明：令 $V = \mathbb{F}^n$, 并将 A, B 视作 $V \to V$ 的线性映射。由于 A 可对角化，即存在可逆的 $P_A \in M_n(\mathbb{F})$，使得

$$P_A^{-1} A P_A = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \cdots, \lambda_1}_{r_1}, \cdots, \underbrace{\lambda_m, \cdots, \lambda_m}_{r_m}).$$

其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 为其互不相等的特征值，（代数，也是几何重数）重数分别为 $r_1, \ldots, r_m$. 令 $V_{\lambda_i} = \ker(\lambda_i I_n - A)$ 为 λ_i 对应的特征空间。由于 $V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_m}$ 是直和，而且他们维数之和等于 $\dim V = n$，所以

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} V_{\lambda_i}.$$

任取 $v \in V_{\lambda_i}$, 有

$$A(Bv) = ABv = BAv = B(Av) = B(\lambda_i v) = \lambda_i Bv$$

所以有 $Bv \in V_{\lambda_i}$, 即 $BV_{\lambda_i} \subset V_{\lambda_i}$. 考虑 $B|_{V_{\lambda_i}} : V_{\lambda_i} \to V_{\lambda_i}$. 若 $B|_{V_{\lambda_i}}$ 可对角化，那么存在 V_{λ_i} 的一组基 $v_{i1}, \ldots, v_{ir_i} \in V_{\lambda_i}$ 使得

$$Bv_{i1} = B|_{V_{\lambda_i}} v_{i1} = \mu_{i1} v_{i1}, \quad \ldots, \quad Bv_{ir_i} = B|_{V_{\lambda_i}} v_{ir_i} = \mu_{ir_i} v_{ir_i}$$

同时又有 $Av_{i1} = \lambda_i v_{i1}, \ldots, Av_{i1} = \lambda_i v_{i1}$. 于是在 V 的这组基 $v_{11}, \ldots, v_{1r_1}, \ldots, v_{m1}, \ldots, v_{mr_m}$ 下，A, B 的矩阵表示分别为 $\mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \cdots, \lambda_1}_{r_1}, \cdots, \underbrace{\lambda_m, \cdots, \lambda_m}_{r_m})$, $\mathrm{diag}(\mu_{11}, \ldots, \mu_{1r_1}, \ldots, \mu_{m1}, \ldots, \mu_{mr_m})$. 亦即令 $P = (v_{11}, \ldots, v_{1r_1}, \ldots, v_{m1}, \ldots, v_{mr_m})$, 有

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \cdots, \lambda_1}_{r_1}, \cdots, \underbrace{\lambda_m, \cdots, \lambda_m}_{r_m}) \\ P^{-1}BP &= \mathrm{diag}(\mu_{11}, \ldots, \mu_{1r_1}, \ldots, \mu_{m1}, \ldots, \mu_{mr_m}) \end{aligned}$$

下证 $B|_{V_{\lambda_i}}$ 可对角化。令 B 的极小多项式为 $f(\lambda)$, 那么 $f(B)$ 是 V 上的零变换，从而也是 V_{λ_i} 上的零变换，所以 $f(\lambda)$ 是 $B|_{V_{\lambda_i}}$ 的零化多项式。由于 B 可对角化，所以 $f(\lambda)$ 无重根，$B|_{V_{\lambda_i}}$ 的极小多项式整除 $f(\lambda)$, 所以也无重根，故可对角化。

注意，此题可以稍微加强为如下结论：设 $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, 若 A, B 均相似于对角矩阵，那么 $AB = BA$ 当且仅当 A, B 可同时对角化。

此外，还可以扩展为如下的结论：设 $M_n(\mathbb{F})$ 中有一族矩阵，它们两两可相互交换而且均可对角化，那么这些矩阵可以同时对角化。

第四题. 设 $V = M_n(\mathbb{F})$, $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, 且满足 $AB = BA$ 以及 A, B 均相似于对角矩阵。在 V 中定义线性变换 $\sigma : X \mapsto AX - XB, \forall X \in V$. 判断 σ 是否可对角化并证明你的结论。

解. 由第三题知 A, B 可同时对角化，即存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 与 $P^{-1}BP$ 同时为对角形 $D_A = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n), D_B = \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n)$. 令

$$\begin{aligned} \theta :& V \to V, X \mapsto PXP^{-1}, \\ \mu :& V \to V, X \mapsto D_A X - X D_B. \end{aligned}$$

若 X 为 μ 的特征向量，即 $\mu(X) = \lambda X$, 那么

$$\begin{aligned} \sigma(\theta(X)) &= APXP^{-1} - PXP^{-1}B = PP^{-1}APXP^{-1} - PXP^{-1}BPP^{-1} \\ &= P(D_A X - X D_B)P^{-1} = P(\mu(X))P^{-1} = P(\lambda X)P^{-1} = \lambda PXP^{-1} \\ &= \lambda\theta(X). \end{aligned}$$

任取 $X = (x_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$, 那么

$$\begin{aligned} D_A X - X D_B &= \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) X - X\,\mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n) \\ &= \begin{pmatrix} a_1 x_{11} & \cdots & a_1 x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_n x_{n1} & \cdots & a_n x_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 x_{11} & \cdots & b_n x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_1 x_{n1} & \cdots & b_n x_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
= \begin{pmatrix} (a_1-b_1)x_{11} & \cdots & (a_1-b_n)x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ (a_n-b_1)x_{n1} & \cdots & (a_n-b_n)x_{nn} \end{pmatrix}
$$

所以取 $E_{ij} \in M_n(\mathbb{F})$, 为第 (i,j) 位元素为 1, 其余位置元素为 0 的矩阵，即有

$$
D_A E_{ij} - E_{ij} D_B = (a_i - b_j) E_{ij}
$$

$\{E_{11}, \ldots, E_{1n}, \ldots, E_{nn}\}$ **构成了 $M_n(\mathbb{F})$ 的一组基。由于 P 可逆，所以**

$$
\{PE_{11}P^{-1}, \ldots, PE_{1n}P^{-1}, \ldots, PE_{nn}P^{-1}\}
$$

也构成了 $M_n(\mathbb{F})$ 的一组基。在这组基下，σ 相似于对角矩阵

$$
\operatorname{diag}(a_1 - b_1, \ldots, a_1 - b_n, \ldots, a_n - b_n).
$$

第五题. **求证复线性空间的任何两个可交换的线性变换必有公共的特征向量。**

证明. **任取一个 n 维的复线性空间 V，设 σ, μ 为 V 上可交换的两个线性变换，满足 $\sigma\mu - \mu\sigma = 0$. 任取 μ 的一个特征值 λ, 以及对应的一个特征向量 v. 因为 V 是复线性空间，这样的 λ, v 总是存在的。**

考察 $\mu' = \mu - \lambda$. 若 $\mu' = 0$, 那么 V 中任何非零向量都是 μ 对应于特征值 λ 的特征向量，要证明的结论自动成立。以下假设 μ' 非零映射，令 $V' = \ker \mu'$ 为 λ 对应的 μ 的特征子空间. 那么 $v \in V'$, 从而知道 $1 \leqslant \dim V' < n$. 而且我们有

$$
\sigma\mu' = \sigma(\mu - \lambda) = \sigma\mu - \lambda\sigma = \mu\sigma - \lambda\sigma = (\mu - \lambda)\sigma = \mu'\sigma.
$$

于是，任取 $w \in V'$, 有

$$
\mu'(\sigma(w)) = \sigma(\mu'(w)) = \sigma(0) = 0,
$$

也就是说 $\sigma(w) \in V'$. 所以 V' 是 σ 的不变子空间。于是 $\sigma|_{V'}$ 是非平凡复线性空间 V' 上的线性变换，至少有一个特征向量 λ', 以及对应的特征向量 $v' \in V'$. v' 即为 σ, μ 的公共特征向量。

第六题. **设 A, B 为实方阵，求证：若 A, B 在复数域 $\mathbb{C}$ 上相似，则他们在实数域 $\mathbb{R}$ 上相似。**

证明. **：若 A, B 在复数域 $\mathbb{C}$ 上相似，那么存在可逆的复矩阵 $P = P_1 + iP_2 \in M_n(\mathbb{C})$ 使得 $P^{-1}BP = A$. 其中 $P_1, P_2 \in M_n(\mathbb{R})$ 是实矩阵，但不一定可逆。由 $P^{-1}BP = A$ 有 $BP = PA$, 从而有 $P_1A + iP_2A = BP_1 + iBP_2$, 所以有**

$$
P_1A = BP_1, \quad P_2A = BP_2
$$

考虑实系数多项式 $f(\lambda) = \det(P_1 + \lambda P_2)$. 由于 $f(i) = \det(P_1 + iP_2) = \det P \neq 0$, 所以 $f(\lambda)$ 是非平凡的实系数多项式，从而存在 $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, 使得 $f(\lambda_0) \neq 0$. 令 $P' = P_1 + \lambda_0 P_2 \in M_n(\mathbb{R})$, 那么 $\det P' = f(\lambda_0) \neq 0$, P' 是可逆的实矩阵，而且有

$$
P'A = P_1A + \lambda_0 P_2 A = BP_2 + \lambda_0 BP_2 = BP'
$$

从而有 $P'^{-1}BP' = A$, 即 A, B 在实数域 $\mathbb{R}$ 上也是相似的。