

2021 秋高等代数习题课

2021-10-15 第二次习题课

习题 2.5 第 4 题

设向量组 $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ 线性无关, 并且可以由向量组 $T = \{\beta_1, \dots, \beta_t\}$ 线性表出。求证:

(1) 向量组 T 与 $S \cup T$ 等价。

(2) 将 S 扩充为 $S \cup T$ 的一个极大线性无关组 $T_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_k}\}$, 则 T_1 与 T 等价, 且 $s + k \leq t$ 。

证明: (1). T 作为子集, 显然可以由 $S \cup T$ 线性表出。任取向量 $v \in S \cup T$, 若 $v \notin T$, 则 $v \in S$ 。由于 S 可以由 T 线性表出, 故 v 可以由 T 线性表出。所以由 $S \cup T$ 可以由 T 线性表出。故向量组 T 与 $S \cup T$ 等价。

(2). 容易看出 T_1 可以由向量组 T 线性表出。若 T 不能由 T_1 线性表出, 则存在 $\beta \in T \setminus T_1$, 使得 β 不能表示为 T_1 中向量的线性组合。将 β 添加到 T_1 中得到 T'_1 , 则 T'_1 是线性无关组且元素个数比 T_1 多, 这与 T_1 是 $S \cup T$ 的一个极大线性无关组矛盾。所以 T 能由 T_1 线性表出, 故二者等价。而且有

$$s + k = \text{rank}(T_1) = \text{rank}(T) \leq \#T = t$$

习题 2.5 第 8 题

设 V 是复数域上的 n 维线性空间。将它看成实数域 \mathbb{R} 上的线性空间 $V_{\mathbb{R}}$, 对任意 $\alpha, \beta \in V_{\mathbb{R}}$ 按复线性空间 V 中的加法定义 $\alpha + \beta$, 对 $\alpha \in V_{\mathbb{R}}$ 及实数 $\lambda \in \mathbb{R}$ 按 V 中向量与 λ (看作复数) 的乘法定义 $\lambda\alpha$ 。求实线性空间 $V_{\mathbb{R}}$ 的维数, 并由复线性空间 V 的一组基求出 $V_{\mathbb{R}}$ 的一组基。

解: 设 e_1, \dots, e_n 为 V 的一组基。令 $i = \sqrt{-1}$ 。那么 $ie_1, \dots, ie_n \in V$ 。下面证明 $E = \{e_1, ie_1, \dots, e_n, ie_n\}$ 构成 $V_{\mathbb{R}}$ 的一组基。进而可以知道 $V_{\mathbb{R}}$ 的维数为 $2n$ 。

- E 在 \mathbb{R} 上线性无关: 设 $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{n1}, \lambda_{n2} \in \mathbb{R}$ 使得 $\lambda_{11}e_1 + \lambda_{12}(ie_1) + \dots + \lambda_{n1}e_n + \lambda_{n2}(ie_n) = 0$, 那么 $(\lambda_{11} + \lambda_{12}i)e_1 + \dots + (\lambda_{n1} + \lambda_{n2}i)e_n = 0$ 。由于 e_1, \dots, e_n 为 V 的一组基, 故 $\lambda_{11} + \lambda_{12}i = \dots = \lambda_{n1} + \lambda_{n2}i = 0$, 从而有 $\lambda_{11} = \lambda_{12} = \dots = \lambda_{n1} = \lambda_{n2} = 0$ 。
- $\text{span}_{\mathbb{R}}(E) = V_{\mathbb{R}}$: 任取 $\alpha \in V_{\mathbb{R}}$, 由于 e_1, \dots, e_n 为 V 的一组基, 故存在 $\lambda_{11} + \lambda_{12}i, \dots, \lambda_{n1} + \lambda_{n2}i \in \mathbb{C}$, 使得

$$\alpha = (\lambda_{11} + \lambda_{12}i)e_1 + \dots + (\lambda_{n1} + \lambda_{n2}i)e_n = \lambda_{11}e_1 + \lambda_{12}(ie_1) + \dots + \lambda_{n1}e_n + \lambda_{n2}(ie_n)$$

习题 2.6 第 2 题

将副书记何 \mathbb{C} 看成实数域上的线性空间 $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ 。求 $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ 与实数域上 2 维数组空间 $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ 之间的同构映射 σ , 将 $1+i, 1-i$ 分别映到 $(1, 0), (0, 1)$ 。

解: $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ 的一组基可以取为 $1, i$ 有 $\sigma(a+bi) = a\sigma(1) + b\sigma(i)$, 只要确定 $\sigma(1), \sigma(i)$ 的值即可确定同构映射 σ 。由

$$\begin{cases} \sigma(1+i) = \sigma(1) + \sigma(i) = (1, 0) \\ \sigma(1-i) = \sigma(1) - \sigma(i) = (0, 1) \end{cases}$$

可得 $\sigma(1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \sigma(i) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 。故

$$\sigma(a+bi) = a\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + b\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right)$$

补充题. 设 V 为 F (F 特征为 0) 上线性空间, V_1, \dots, V_s 是 V 的真子空间, 证明

$$V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_s \subsetneq V$$

证明: 对 s 进行归纳证明。 $s=1$ 时, 由于是真子空间, 结论平凡成立。假设对 $s-1$ 我们证明了结论。接下来对 s , 我们用反证法证明。假设 $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_s = V$ 。

不妨设任意 V_i 满足 $V_i \subsetneq \bigcup_{j \neq i} V_j$, 否则由归纳假设即能得出矛盾。于是可以取 $v \in V_i$, 满足 $v \notin \bigcup_{j \neq i} V_j$ 。同时任取 $u \notin V_i$ (是真子空间)。这样取出来的 u, v 都不是零向量。

考虑集合 $S = \mathbb{F}v + u$ 。有 $S \cap V_i = \emptyset$, 否则能推出 $u \in V_i$, 与 u 的取法矛盾。由假设 $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_s = V$, 那么 $S \subseteq \bigcup_{j \neq i} V_j$ 。与此同时, S 与每一个 $V_j (j \neq i)$ 的交集至多含有一个元素。因为假设存在 V_j 使得有 $\lambda_1 v + u, \lambda_2 v + u \in V_j \cap S, \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{F}$, 由于 V_j 是线性子空间, 有 $(\lambda_1 v + u) - (\lambda_2 v + u) = (\lambda_1 - \lambda_2)v \in V_j$, 这与 v 的取法矛盾。于是

$$S = S \cap \left(\bigcup_{j \neq i} V_j\right) = \bigcup_{j \neq i} (S \cap V_j)$$

那么 $S = \mathbb{F}v + u$ 的元素个数即不能超过 $s-1$, 这与域 \mathbb{F} 是特征为 0 的域, 元素个数无穷多是矛盾的。所以 $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_s = V$ 的假设不成立。因此, 对任意正整数 s , 以及 V 的真子空间 V_1, \dots, V_s , 都有

$$V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_s \subsetneq V \square$$

习题 2.5 第 3 题

设整数 $k \geq 2$, 数域 \mathbb{F} 上的线性空间 V 中的向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 线性相关。证明: 存在不全为 0 的数 $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{F}$, 使得对任何 α_{k+1} , 向量组 $\{\alpha_1 + \lambda_1 \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_k + \lambda_k \alpha_{k+1}\}$ 线性相关。

证明: 由于 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 线性无关, 所以存在不全为 0 的数 x_1, \dots, x_k 使得 $x_1 \alpha_1 + \dots + x_k \alpha_k = 0$ 。考虑

$$(\alpha_1 + \lambda_1 \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_k + \lambda_k \alpha_{k+1}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = 0$$

变形为

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_1\lambda_1 + \dots + x_k\lambda_k \end{pmatrix} = 0$$

所以只要存在不全为 0 的 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 使得 $x_1\lambda_1 + \dots + x_k\lambda_k = 0$ 即可。因为 $k \geq 2$, (x_1, \dots, x_k) 在 \mathbb{R}^k 中的正交补总是非平凡的, 所以这样的 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 总是存在的。

习题 2.5 第 6 题

设向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 的秩为 r , 在其中任取 m 个向量 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_m}$ 组成向量组 S 。求证 S 的秩 $\geq r + m - s$ 。

证明: 设 S 的秩为 t , 那么 S 中存在一个元素个数为 t 的极大线性无关组。那么从这个线性无关的向量组出发, 通过往其中添加不在 S 中的向量, 可以得到整个向量组的一个极大线性无关组。假设添加了 k 个向量, 那么有 $t + k = r$ 且 $k \leq s - m$, 从而有

$$t = r - k \geq r - (s - m) = r + m - s$$

习题 2.5 第 7 题

证明: 在所有次数不大于 n 的实系数多项式构成的 $n + 1$ 维实线性空间中, $1, (x - c), (x - c)^2, \dots, (x - c)^n$ 构成一组基。并求 $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ 在这组基下的坐标。

证明: 只要证明 $1, (x - c), (x - c)^2, \dots, (x - c)^n$ 线性无关即可。假设存在不全为 0 的实数 $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ 使得

$$f_0(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x - c) + \dots + \lambda_n(x - c)^n = 0$$

那么 $f_0(x)$ 的 n 阶导函数 $f_0^{(n)}(x) = n!\lambda_n = 0$, 从而有 $\lambda_n = 0$ 。逐步反推可以导出 $\lambda_{n-1} = \dots = \lambda_0 = 0$, 矛盾。

设 $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \lambda_0 + \lambda_1(x - c) + \dots + \lambda_n(x - c)^n$, 那么 $f_0^{(n)}(x) = n!a_n = n!\lambda_n$, 故 $\lambda_n = a_n$ 。将所得的 $\lambda_n, \dots, \lambda_{n-k}$ 回代, 并考察 $f_0^{(n-k-1)}(0)$, 有

$$f_0^{(n-k-1)}(0) = (n-k-1)!a_{n-k-1} = (n-k-1)!\lambda_{n-k-1} + \frac{(n-k)!}{1!}(0-c)\lambda_{n-k} + \dots + \frac{n!}{(k+1)!}(0-c)^{k+1}\lambda_n$$

得 $a_{n-k-1} = \lambda_{n-k-1} + C_{n-k}^1(-c)\lambda_{n-k} + \dots + C_n^{k+1}(-c)^{k+1}\lambda_n$ 所以有

$$\begin{pmatrix} a_n \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ C_n^1(-c) & 1 & & \\ C_n^2(-c)^2 & C_{n-1}^1(-c) & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ C_n^1(-c)^n & C_{n-1}^{n-1}(-c)^{n-1} & C_{n-2}^{n-2}(-c)^{n-2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_n \\ \vdots \\ \lambda_0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda_n \\ \vdots \\ \lambda_0 \end{pmatrix}$$

故 $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ 在这组基下的坐标为

$$\begin{pmatrix} \lambda_n \\ \vdots \\ \lambda_0 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a_n \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix}.$$

若考察 $f_0^{(n-k-1)}(c)$, 则有

$$f_0^{(n-k-1)}(c) = (n-k-1)! \lambda_{n-k-1} = (n-k-1)! a_{n-k-1} + \frac{(n-k)!}{1!} c a_{n-k} + \cdots + \frac{n!}{(k+1)!} c^{k+1} a_n$$

得 $\lambda_{n-k-1} = a_{n-k-1} + C_{n-k}^1 c a_{n-k} + \cdots + C_n^{k+1} c^{k+1} a_n$ 所以有

$$\begin{pmatrix} \lambda_n \\ \vdots \\ \lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ C_n^1 c & 1 & & & \\ C_n^2 c^2 & C_{n-1}^1 c & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ C_n^1 c^n & C_{n-1}^{n-1} c^{n-1} & C_{n-2}^{n-2} c^{n-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix}$$

习题 2.5 第 10 题

将数域 \mathbb{F} 上的 n 维 ($n \geq 2$) 数组空间 \mathbb{F}^n 中的每个向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 看作一个具有 n 项的数列。如下集合 W 是否组成 \mathbb{F}^n 的一个线性子空间? 如果是, 求出它的维数及一组基。

(1). \mathbb{F}^n 中所有等比数列组成的集合。

(2). \mathbb{F}^n 中所有等差数列组成的集合。

解: (1). 不构成线性子空间。 $(0, \cdots, 0) \notin W$ 不构成等比数列。

(2). 构成线性子空间。 $(0, \cdots, 0) \in W$ 构成等差数列。令 $(a_1, a_2, \cdots, a_n), (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in W$ 为两个等差数列, 差分别为 d_1, d_2 , 那么任取 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, 有 $\lambda_1(a_1, a_2, \cdots, a_n) + \lambda_2(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 是差为 $d_1 \lambda_1 + d_2 \lambda_2$ 的等差数列。所以 \mathbb{F}^n 中所有等差数列组成的集合 W 构成线性子空间。 W 的元素都可以表示为

$$(a, a+d, \cdots, a+(n-1)d) = a(1, \cdots, 1) + d(0, 1, \cdots, n-1), \quad a, d \in \mathbb{R}$$

所以 W 维数为 2, 一组基可以取为 $(1, \cdots, 1), (0, 1, \cdots, n-1)$ 。

另一解法: W 由以下有 $n-2$ 个方程的齐次线性方程组定义 ($n \geq 3$ 时)

$$\begin{cases} a_3 - a_2 = a_2 - a_1 \\ a_4 - a_3 = a_3 - a_2 \\ \cdots \cdots \\ a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2} \end{cases}$$

系数矩阵秩为 $n-2$, 从而 W 维数为 $n - (n-2) = 2$ 。

习题 2.6 第 1 题

设复数域上线性空间 V 中的向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性无关。对复数 λ 的不同值, 求向量组 $\{\alpha_1 + \lambda \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1} + \lambda \alpha_n, \alpha_n + \lambda \alpha_1\}$ 的秩。

解:

$$(\alpha_1 + \lambda \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1} + \lambda \alpha_n, \alpha_n + \lambda \alpha_1) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \begin{pmatrix} 1 & & & & \lambda \\ \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) A$$

$\{\alpha_1 + \lambda\alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} + \lambda\alpha_n, \alpha_n + \lambda\alpha_1\}$ 的秩即为矩阵 A 的秩。那么 A 的阶梯形为

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \lambda \\ & 1 & & \lambda \cdot (-\lambda) \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots & \lambda \cdot (-\lambda)^{n-2} \\ & & & & 1 + \lambda \cdot (-\lambda)^{n-1} \end{pmatrix}$$

所以 $\lambda = -\zeta_n^k, k = 0, 1, \dots, n-1$ 时, A 的秩为 $n-1$, 其中 $\zeta_n = e^{\frac{2\pi}{n}}$ 为 n 次单位根; 其余情况, A 的秩为 n 。

习题 2.6 第 3 题

设 V 是由复数组成的无穷数列 $\{a_n\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ 的全体组成的集合, 定义 V 中任意两个数列的加法 $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$ 及任意数列与任意复数的乘法 $\lambda\{a_n\} = \{\lambda a_n\}$ 之后称为复数域 \mathbb{C} 上线性空间。

- (1) 求证: V 中满足条件 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (\forall n \geq 3)$ 的全体数列 $\{a_n\}$ 组成 V 的子空间 W 。 W 的维数是多少?
- (2) 对任意 $(a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2$, 定义 $\sigma(a_1, a_2) = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} \in W$ 。求证: σ 是 \mathbb{C}^2 到 W 的同构映射。
- (3) 求证: W 中存在一组由等比数列组成的基 M
- (4) 设数列 $\{F_n\}$ 满足条件 $F_1 = F_2 = 1$ 且 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ 。求 $\{F_n\}$ 在基 M 下的坐标, 并由此求出 $\{F_n\}$ 的通项公式。

解: (1) 首先 $0, \dots, 0, \dots \in W$ 起到零元的作用。任取 $\{a_n\}, \{b_n\} \in W$ 以及 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ 。有

$$\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n = \lambda_1 (a_{n-1} + a_{n-2}) + \lambda_2 (b_{n-1} + b_{n-2}) = (\lambda_1 a_{n-1} + \lambda_2 b_{n-1}) + (\lambda_1 a_{n-2} + \lambda_2 b_{n-2})$$

故 $\lambda_1 \{a_n\} + \lambda_2 \{b_n\} \in W$ 。所以 W 是 V 的线性子空间。由于 W 中向量的自由变量只有前两项 a_1, a_2 , 故其维数为 2。

(2) 首先, 检查 σ 是线性映射:

$$\begin{aligned} \sigma(\lambda_1(a_1, a_2) + \lambda_2(b_1, b_2)) &= \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1, \lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2, \dots\} \\ &= \{\lambda_1 a_1, \lambda_1 a_2, \dots\} + \{\lambda_2 b_1, \lambda_2 b_2, \dots\} \\ &= \lambda_1 \sigma(a_1, a_2) + \lambda_2 \sigma(b_1, b_2) \end{aligned}$$

其次, 检查 $\ker \sigma = \{(0, 0)\}$: 设 $\sigma(a_1, a_2) = \{0, 0, \dots\}$, 那么 $\{a_1, a_2, \dots\} = \{0, 0, \dots\}$, 从而有 $\ker \sigma = \{(0, 0)\}$ 。再由两个线性空间维数相同, 即可得出 σ 是线性同构的结论。

(3) 假设有等比数列 $\{a, aq, \dots, aq^n, \dots\} \in W$, 那么有 $aq^{n+2} = aq^{n+1} + aq^n$ 。解得 $q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ 。由此可知

$$\left\{1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \dots, \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \dots\right\}, \left\{1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \dots, \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \dots\right\} \in W$$

而且他们线性无关, 故构成了 W 的一组基。

(4) 令 $(1, 1) = \lambda_1 \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \lambda_2 \left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$, 解得

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}$$

所以 $\{F_n\}$ 在这组基下坐标为 $\left(\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right)$, 通项公式为

$$F_n = \left(\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.$$

习题 2.6 第 4 题

设 \mathbb{R}^+ 是所有正实数组成的集合。对任意 $a, b \in \mathbb{R}^+$ 定义 $a \oplus b = ab$ (实数 a, b 按通常乘法的乘积), 对任意 $a \in \mathbb{R}^+$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$ 定义 $\lambda \circ a = a^\lambda$ 。求证:

- (1) \mathbb{R}^+ 按上述定义的加法 $a \oplus b$ 和数乘 $\lambda \circ a$ 成为实数域 \mathbb{R} 上的线性空间。
- (2) 实数集合 \mathbb{R} 按通常方式定义加法和乘法看成 \mathbb{R} 上的线性空间, 求证: 通常的这个线性空间 \mathbb{R} 与按上述方式定义的线性空间 \mathbb{R}^+ 同构。并给出这两个空间之间的全部同构映射。

证明: 首先, 很容易验证 \mathbb{R}^+ 关于加法 $a \oplus b$ 封闭, 1 为加法零元, $a \in \mathbb{R}^+$ 的加法逆元为 $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}^+$ 。任取 $a, b \in \mathbb{R}^+, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} 1 \circ a &= a^1 = a \\ \lambda_1 \circ (a \oplus b) &= \lambda_1 \circ ab = (ab)^{\lambda_1} = a^{\lambda_1} b^{\lambda_1} = (\lambda_1 \circ a) \oplus (\lambda_1 \circ b) \\ (\lambda_1 + \lambda_2) \circ a &= a^{\lambda_1 + \lambda_2} = a^{\lambda_1} a^{\lambda_2} = (\lambda_1 \circ a) \oplus (\lambda_2 \circ a) \\ (\lambda_1 \lambda_2) \circ a &= a^{\lambda_1 \lambda_2} = (a^{\lambda_2})^{\lambda_1} = \lambda_1 \circ (\lambda_2 \circ a) \end{aligned}$$

(2) 任取 $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$, 定义 $\sigma_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto a^x$, 那么有

$$\sigma_a(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = a^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2} = (a^{x_1})^{\lambda_1} (a^{x_2})^{\lambda_2} = \lambda_1 \circ \sigma_a(x_1) \oplus \lambda_2 \circ \sigma_a(x_2)$$

所以 σ_a 是线性映射。任取 $b \in \mathbb{R}^+$, 有 $\sigma_a(\log_a b) = b$, 所以 σ_a 是满射。令 $\sigma_a(x) = a^x = 1$, 那么有 $x = 0$, 从而知 σ_a 是单射。所以 σ_a 是线性空间的同构映射。

(2) 任取同构映射 $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, 令 $a = \sigma(1)$, 有 $a \neq 1$, 否则 σ 不是单射。那么任取 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$\sigma(x) = \sigma(x \cdot 1) = x \circ \sigma(1) = x \circ a = a^x = \sigma_a(x)$$

所以 $\sigma_a, a \in \mathbb{R}^+ \setminus 1$ 即是 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ 的所有线性同构映射。