

# 2021 秋高等代数习题课

## 2021-11-26 第五次习题课

习题 4.3 第 8 题. 设  $A^*$  表示  $n$  阶方阵  $A$  的伴随矩阵. 证明:

- (1).  $(\lambda A)^* = \lambda^{n-1} A^*$  对任意数  $\lambda$  成立;
- (2).  $(AB)^* = B^* A^*$  对任意同阶方阵  $A, B$  成立;
- (3). 当  $n > 2$  时,  $(A^*)^* = (\det A)^{n-2} A$ ; 当  $n = 2$  时,  $(A^*)^* = A$ .

证明: (1). 由于  $(\lambda A)^*$  第  $(j, i)$  位元素为  $\lambda A$  第  $(i, j)$  个代数余子式  $(\lambda A)_{(i, j)}$ . 由于任意  $n-1$  阶方阵  $B$  都有  $\det(\lambda B) = \lambda^{n-1} \det B$ , 所以  $(\lambda A)_{(i, j)} = \lambda^{n-1} A_{(i, j)}$ , 进而有  $(\lambda A)^* = \lambda^{n-1} A^*$ .

(2). 令  $B^* A^* = (c_{ij})$ , 那么

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^n B_{ki} A_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} \det A \begin{pmatrix} 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n \\ 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n \end{pmatrix} \cdot (-1)^{k+i} \det B \begin{pmatrix} 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n \\ 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{i+j} \sum_{k=1}^n \det \hat{A}_j \begin{pmatrix} 1, \dots, n-1 \\ 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n \end{pmatrix} \cdot \det \tilde{B}_i \begin{pmatrix} 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n \\ 1, \dots, n-1 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{i+j} \det(\hat{A}_j \tilde{B}_i), \end{aligned}$$

其中  $B_{ki}, A_{jk}$  分别为  $B$  在第  $(k, i)$  位的代数余子式与  $A$  在第  $(j, k)$  位的代数余子式,  $\hat{A}_j$  为方阵  $A$  删掉第  $j$  行得到的  $(n-1) \times n$  的矩阵,  $\tilde{B}_i$  为方阵  $B$  删掉第  $i$  列得到的  $n \times (n-1)$  的矩阵. 后面这个等号是根据 Binet-Cauchy 公式 (课本定理 4.5.3(3)) 得到的.

另一方面, 方阵  $(AB)^*$  的第  $(i, j)$  位元素, 记为  $d_{ij}$ , 为方阵  $AB$  的第  $(j, i)$  位代数余子式  $(AB)_{ji}$ , 其值为  $(-1)^{i+j}$  乘以方阵  $AB$  删掉第  $j$  行第  $i$  列得到的  $n-1$  阶方阵的行列式, 此  $n-1$  阶方阵就等于  $\hat{A}_j \tilde{B}_i$ , 即我们会有

$$d_{ij} = (AB)_{ji} = (-1)^{i+j} \det(\hat{A}_j \tilde{B}_i).$$

于是, 对于所有的  $1 \leq i, j \leq n$ , 都有  $c_{ij} = d_{ij}$ , 所以相应的矩阵是同一矩阵, 即  $(AB)^* = B^* A^*$ .  
另一种解法: 当  $A, B$  都是可逆阵的时候, 有

$$(AB)^* = \det(AB) \cdot (AB)^{-1} = (\det B \cdot \det A) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = B^* A^*.$$

若  $A$  不可逆, 则考虑  $A(\lambda) = \lambda I + A$ ; 若  $B$  不可逆,  $B(\lambda) = \lambda I + B$ . 由于  $\det A(\lambda), \det B(\lambda)$  都是  $\lambda$  的多项式, 至多有有限多个根, 在  $0$  的一个小的去心邻域  $\dot{U}(0, \delta)$  内,  $A(\lambda), B(\lambda)$  总是可逆的, 从而有

$$(A(\lambda)B(\lambda))^* = B(\lambda)^* A(\lambda)^*$$

对上式取极限  $\lim_{\dot{U}(0, \delta) \ni \lambda \rightarrow 0}$  即有  $(AB)^* = B^* A^*$ .

(3). 由于  $A^*$  的每个元素都是  $A$  的某个  $n-1$  阶代数余子式, 所以若  $r(A) \leq n-2$ , 那么  $A^* = 0$ . 又由于  $AA^* = \det A I_n$ , 所以当  $r(A) = n$  时,  $r(A^*) = n$ . 当  $r(A) = n-1$  时, 由于  $r(A^*) + r(A) - n \leq r(AA^*)$ , 所以  $r(A^*) \leq 1$ , 同时  $A$  至少有一个非零子式, 即  $A^*$  至少有一个非零元, 所以  $r(A^*) \geq 1$ , 从而必须有  $r(A^*) = 1$ . 于是, 我们证明了

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & \text{若 } r(A) = n \\ 1, & \text{若 } r(A) = n-1 \\ 0, & \text{其余情况} \end{cases}$$

所以当  $n > 2$  时, 当  $r(A) = n$  时,

$$(A^*)^* = \det A^* \cdot (A^*)^{-1} = (\det A)^{n-1} (\det A \cdot A^{-1})^{-1} = (\det A)^{n-2} A.$$

当  $r(A) < n$ , 有  $r(A^*) \leq 1 < n-1$ , 进而有  $r((A^*)^*) = 0$ , 也满足  $(A^*)^* = (\det A)^{n-2} A$ . 唯一需要额外讨论的是  $n=2, r(A)=1$  的情形, 但这种情况下能直接通过伴随矩阵的定义得出  $n=2$  时,  $(A^*)^* = A$  的结论.

习题 4.3 第 9 题. 设方阵  $A = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{F}^{n \times n}$  的行列式  $|A| \neq 0, \beta \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ , 则线性方程组  $AX = \beta$  有唯一解  $X = A^{-1}\beta$ . 利用  $A^{-1}$  的表达式  $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$  证明 Cramer 法则.

证明: 线性方程组  $AX = \beta$  的解  $X = A^{-1}\beta = \frac{1}{|A|}A^*\beta$ . 记  $X = (x_1, \dots, x_n)^T, A^* = (c_{ij}), \beta = (b_1, \dots, b_n)^T$ , 其中  $c_{ij} = A_{ji}$  为方阵  $A$  的第  $(j, i)$  位代数余子式. 那么有

$$x_i = \frac{c_{i1}b_1 + \dots + c_{in}b_n}{|A|} = \frac{A_{1i}b_1 + \dots + A_{ni}b_n}{|A|}$$

上式右边分子正好是将矩阵  $A$  的第  $i$  列替换为  $\beta$ , 再按第  $i$  列展开计算得到的替换后方阵的行列式, 此即为 Cramer 法则.

习题 4.4 第 5 题. 已知  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . 求 2 阶初等方阵  $P, Q$  使  $PAQ$  具有形式  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}$ .

解: 这题需要添加条件  $a \neq 0$ , 否则  $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}, b, c \neq 0$  时不可能化成  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}$  的形式.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{pmatrix}$$

所以可以取  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, d_1 = d - \frac{bc}{a}$ .

习题 4.4 第 6 题. 设  $A, B, C, D \in \mathbb{F}^{n \times n}$  且  $A$  可逆. 求  $2n$  阶可逆方阵  $P, Q$  使  $P \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} Q$  具有形式  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}$ , 其中  $D_1$  是某个  $n$  阶方阵.

解: 这题可以依照习题 4.4 第 6 题类似地做, 只是需要注意矩阵相乘的顺序.

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

$$D_1 = D - CA^{-1}B.$$

第5题. 设  $A$  是秩为 1 的  $n$  阶方阵, 若存在正整数  $k$ , 使得  $A^k = 0$ , 证明  $A^2 = 0$ .

证明: 由于  $A$  秩为 1, 所以至少存在某一行元素不全为 0, 记这一行为  $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ 。由于  $A$  秩为 1,  $\{\alpha\}$  即为  $A$  的行的极大线性无关组, 能表出其他所有行。也就是说  $A$  的所有行都能表

示为  $\lambda_1\alpha, \dots, \lambda_n\alpha$ , 于是有  $A = \lambda\alpha$ , 其中  $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ 。那么对于  $k \geq 2$ ,

$$A^k = (\lambda\alpha)^k = \lambda(\alpha\lambda)^{k-1}\alpha = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right)^{k-1} \lambda\alpha = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right)^{k-1} A$$

于是若  $A^k = 0$ , 那么  $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = 0$ , 所以

$$A^2 = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right) A = 0.$$

第6题. 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times s$  矩阵。证明

$$r\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\right) \leq r\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ I_n & B \end{pmatrix}\right) = r\left(\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\right)$$

证明: 由于有

$$\begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ I & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ B & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

而且  $\begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & 0 \\ B & I \end{pmatrix}$  都是满秩方阵, 所以  $r\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ I_n & B \end{pmatrix}\right) = r\left(\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\right)$ 。

设可逆矩阵  $P_1, Q_1, P_2, Q_2$  使得  $P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} I_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2 B Q_2 = \begin{pmatrix} I_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 那么

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{r_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ I & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{r_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{12} & I_{r_2} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中  $P_2 Q_1 = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$ 。于是上式中第一行的方阵的秩小于等于第二行的方阵的秩, 同时又由于  $\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$  都是可逆 (满秩) 的, 所以有  $r\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\right) \leq r\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ I_n & B \end{pmatrix}\right)$ 。