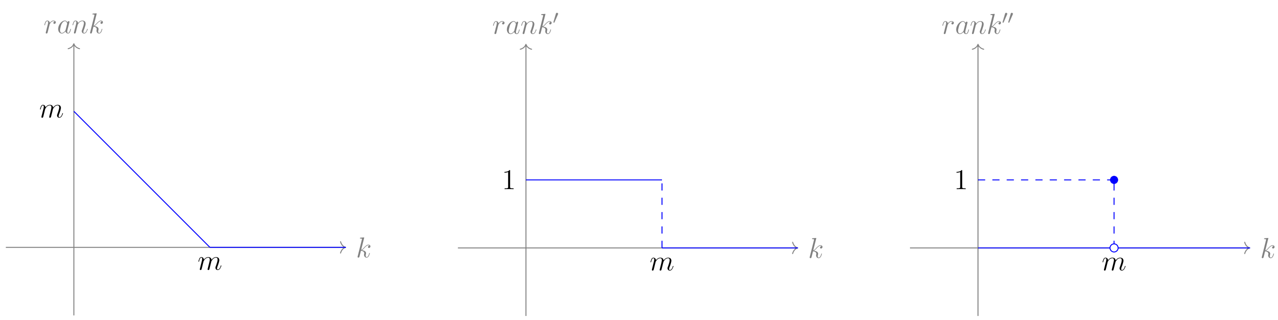
2022 春高等代数习题课

2022-4-8 第三次习题课

一个重要结论：考虑 m 阶 Jordan 块 $J_m(0)$, 容易看到当 $1 \leqslant k \leqslant m-1$ 时，$J_m(0)^k$ 是一个第 $(i, i+k)$ 位（或者第第 $(i+k, i)$ 位），$i = 1, \ldots m-k$, 元素值为 1, 其余位置为 0 的方阵，因此

$$\operatorname{rank} J_m(0)^k = \max\{0, m-k\}.$$

这个关于 k 的函数，以及它的一二阶差分图像如下



一个由 $J_{m_1}(0), \ldots, J_{m_r}(0)$ 组成的准对角矩阵（Jordan 形矩阵）的 k 次方的秩即为以上的函数（图像）进行求和。这样就很容易得出课本上定理 7.1.1 的结论。

第一题（习题 **7.1** 第 **2** 题）. **已知 5 阶方阵 A 相似与 Jordan 形矩阵 J，且满足条件**

$$\operatorname{rank} A = 3, \operatorname{rank} A^2 = 2, \operatorname{rank}(A+I) = 4, \operatorname{rank}(A+I)^2 = 3.$$

求 J.

解. **由于 $\operatorname{rank} A = 3 < 5$, 所以 $\det A = 0$, 故 0 是 A 的特征值. 类似可知 -1 也是 A 的特征值。由于 $\operatorname{rank} A^2 = 2, \operatorname{rank}(A+I)^2 = 3$, 即知**

$$\dim\ker A^2 + \dim\ker(A+I)^2 = (5-2) + (5-3) = 5,$$

故（可以考虑根子空间分解）A 的特征值只有 $-1, 0$. 并且由上式可知 $\operatorname{rank} A^k = 2, \operatorname{rank}(A+I)^k = 3$ 对任意 $k \geqslant 2$ 成立。于是，由定理 7.1.1 知，J 中

- 1 **阶 Jordan 块** $J_1(0)$ **的数量为** $(5 - \operatorname{rank} A) - (\operatorname{rank} A - \operatorname{rank} A^2) = 1$;
- 2 **阶 Jordan 块** $J_2(0)$ **的数量为** $(\operatorname{rank} A - \operatorname{rank} A^2) = 1$;
- 1 **阶 Jordan 块** $J_1(-1)$ **的数量为** $(5 - \operatorname{rank}(A+I)) - (\operatorname{rank}(A+I) - \operatorname{rank}(A+I)^2) = 0$;

- 2 阶 Jordan 块 $J_2(-1)$ 的数量为 $(\operatorname{rank}(A+I)-\operatorname{rank}(A+I)^2)=1$.

所以
$$J=\operatorname{diag}(J_1(0),J_2(0),J_2(-1)).$$

第二题（习题 **7.1** 第 **3** 题第（**2**）问）. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\3&0&4&0\\2&3&0&4\end{pmatrix}$ 相似于 Jordan 形 J. 根据条件 $\operatorname{rank}(A-\lambda_i I)^k=\operatorname{rank}(J-\lambda_i I)^k$（$\lambda_i$ 取遍 A 的各特征值，$k=1,2,\ldots$），求 J.

解：容易计算 A 的特征多项式为 $f(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda-4)^4$, 于是矩阵 A 有 4 重特征值 4. 那么

- $\operatorname{rank}(A-4I)=\operatorname{rank}(J-4I)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\3&0&0&0\\2&3&0&0\end{pmatrix}=2;$
- $\operatorname{rank}(A-4I)^k=\operatorname{rank}(J-4I)^k=\operatorname{rank}\mathbf{0}=0,\forall k\geqslant 2.$

那么由定理 7.1.1 知

- 1 阶 Jordan 块 $J_1(4)$ 的数量为 $(4-\operatorname{rank}(A-4I))-(\operatorname{rank}(A-4I)-\operatorname{rank}(A-4I)^2)=0$;
- 2 阶 Jordan 块 $J_2(4)$ 的数量为 $(\operatorname{rank}(A-4I)-\operatorname{rank}(A-4I)^2)=2$.

所以
$$J=\operatorname{diag}(J_2(4),J_2(4)).$$

第三题. 设 $A=J_5(0)^2$ 相似于一个 Jordan 形矩阵 J, 求 J.

解：易知 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}J_5(0)^2=3$, $\operatorname{rank}A^2=\operatorname{rank}J_5(0)^4=1$; $\operatorname{rank}A^k=\operatorname{rank}J_5(0)^{2k}=0$; $k\geqslant 3$. 那么由定理 7.1.1 知

- 1 阶 Jordan 块 $J_1(0)$ 的数量为 $(5-\operatorname{rank}A)-(\operatorname{rank}A-\operatorname{rank}A^2)=0$;
- 2 阶 Jordan 块 $J_2(0)$ 的数量为 $(\operatorname{rank}A-\operatorname{rank}A^2)-(\operatorname{rank}A^2-\operatorname{rank}A^3)=1$.
- 3 阶 Jordan 块 $J_3(0)$ 的数量为 $(\operatorname{rank}A^2-\operatorname{rank}A^3)=1$.

所以
$$J=\operatorname{diag}(J_2(0),J_3(0)).$$

第四题. 设 $\mathscr{A}\in\mathcal{L}(V)$ 在基 M 下的矩阵是 $A\in M_n(\mathbb{C})$. 若 $d_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^m g(\lambda)$, $g(\lambda_0)\neq 0$, 是 A 的一个极小多项式，以及 $u(\lambda),v(\lambda)\in\mathbb{C}[\lambda]$ 使得
$$u(\lambda)(\lambda-\lambda_0)^m+v(\lambda)g(\lambda)=1.$$
令 $W=u(\mathscr{A})(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^m V$. 证明 $(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})|_W$ 是可逆线性变换。

证明: 首先，容易看出 W 是 $(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})$ 的不变子空间。由于 $d_A(\lambda)$ 是 A 的一个极小多项式，所以 $d_A(\mathscr{A})=\mathscr{O}$ 为 V 上的零映射。要证明 $(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})|_W$ 是可逆线性变换，只要证明 $\ker(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})|_W=\{0\}$ 即可。

任取 $\alpha\in\ker(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})|_W\subset W$. 我们想证明 $\alpha=0$. 由于 $W=u(\mathscr{A})(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^mV$, 所以存在 $\beta\in V$, 使得

$$\alpha=u(\mathscr{A})(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^m\beta.$$

又由于 $u(\lambda)(\lambda-\lambda_0)^m+v(\lambda)g(\lambda)=1$, 所以有 $u(\mathscr{A})(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^m\beta=(\mathscr{I}-v(\mathscr{A})g(\mathscr{A}))\beta$. 所以有

$$\begin{aligned}
0=(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^m\alpha&=(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^m u(\mathscr{A})(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^m\beta\\
&=(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^m(\mathscr{I}-v(\mathscr{A})g(\mathscr{A}))\beta\\
&=(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^m\beta-v(\mathscr{A})(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^m g(\mathscr{A})\beta\\
&=(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^m\beta-v(\mathscr{A})d_A(\mathscr{A})\beta\\
&=(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^m\beta-v(\mathscr{A})\mathscr{O}\beta\\
&=(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^m\beta
\end{aligned}$$

从而知 $\alpha=u(\mathscr{A})(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^m\beta=0$, 所以 $\ker(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})|_W=\{0\}$, 故 $(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})|_W$ 是 W 上的可逆线性变换。

第五题（习题 **7.1** 第 **1** 题）. 已知 $A=\begin{pmatrix}0&0&-2\\1&0&3\\0&1&0\end{pmatrix}$, 求 A^n.

解. A 的特征多项式

$$f_A(\lambda)=\det(\lambda I_3-A)=\det\begin{pmatrix}\lambda&0&2\\-1&\lambda&-3\\0&-1&\lambda\end{pmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda&-3\\-1&\lambda\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}0&2\\-1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2-3)+2.$$

可算得 A 的特征值为 $1,1,-2$.

由 $(A-I)v=0$ 解得 $v=k\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $k\neq 0$. 由此可知 A 的 Jordan 标准形有 1 个 2 阶 Jordan 块 $J_2(1)$, 以及 1 个 1 阶 Jordan 块 $J_1(-2)$.

继续解 $(A-I)v'=v$ 得 $v'=k'\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}-k\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$（和之前同一个 k. k' 任取）。

解 $(A+2I)w=w$ 得 $w=t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, $t\neq 0$. 那么令 $k=t=1, k'=0$, 取 $P=(v,v',w)=\begin{pmatrix}2&-2&1\\-1&-1&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}$, 即有

$$AP=(Av,Av',Aw)=(v,v+v',-2w)=(v,v',w)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}=P\cdot\operatorname{diag}(J_2(1),J_1(-2)).$$

从而有 $A = P\cdot \mathrm{diag}(J_2(1), J_1(-2))\cdot P^{-1}$, 其中 $P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -3 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. 所以

$$
\begin{aligned}
A^n &= (P\cdot \mathrm{diag}(J_2(1), J_1(-2))\cdot P^{-1})^n = P\cdot \mathrm{diag}(J_2(1)^n, J_1(-2)^n)\cdot P^{-1} \\
&= P\cdot \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}\cdot P^{-1} \\
&= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -3 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8-6n+(-2)^n & 2-6n+(-2)^{n+1} & -4-6n+(-2)^{n+2} \\ 2+3n+(-2)^{n+1} & 5+3n+(-2)^{n+2} & 8+3n+(-2)^{n+3} \\ -1+3n+(-2)^n & 2+3n+(-2)^{n+1} & 5+3n+(-2)^{n+2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

第六题（习题 **7.1** 第 **4** 题）. (1) 已知 Jordan 形矩阵 J 满足条件 $\mathrm{rank}\, J^k = \mathrm{rank}\, J^{k+1} = r$, 根据 J^k 所满足的条件，对任意正整数 s 求 $\mathrm{rank}\, J^{k+s}$.

(2) 已知方阵 A 相似于 Jordan 形矩阵 J. 且 $\mathrm{rank}\, A^k = \mathrm{rank}\, A^{k+1} = r$. 对任意正整数 s 求 $\mathrm{rank}\, A^{k+s}$.

解. (1) 考察任意的 Jordan 块 $J_m(\lambda) = \lambda I_m + \Lambda$, 其中 Λ 为次对角线（$(i, i+1)$ 位，$i = 1, \ldots, m-1$）元素值为 1, 其余位置元素值为 0 的方阵。Λ 和 λI_m 可交换，且有

$$
J_m(\lambda)^k = (\lambda I_m + \Lambda)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \lambda^{k-i} I_m \Lambda^i.
$$

那么

- 若 $\lambda = 0$, 那么 $\mathrm{rank}\, J_m(\lambda)^k = \mathrm{rank}\, \Lambda^k = \max\{0, m-k\}$;
- 若 $\lambda \neq 0$, 那么 $\mathrm{rank}\, J_m(\lambda)^k = m$;

令 k_0 为 J 中对应于特征值 0 的 Jordan 块的阶数的最大值（若没有这样的 Jordan 块则令 $k_0 = 0$）。由以上讨论，以及由题设条件 $\mathrm{rank}\, J^k = \mathrm{rank}\, J^{k+1} = r$ 知 $k \geqslant k_0$, 否则 $\mathrm{rank}\, J^{k+1}$ 必然小于 $\mathrm{rank}\, J^k$. 对于任意的 $k' \geqslant k \geqslant k_0$, 有

$$
\mathrm{rank}\, J^{k_0} = \mathrm{rank}\, J^{k_0+1} = \cdots = \mathrm{rank}\, J^{k'} = r,
$$

故对任意的正整数 s, 有 $\mathrm{rank}\, J^{k+s} = r$.

(2) 设有可逆矩阵 P, 使得 $A = PJP^{-1}$, 其中 J 为 A 的 Jordan 标准形。那么 $\mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}\, J$. 由第 (1) 问可知对任意正整数 s 求 $\mathrm{rank}\, A^{k+s} = r$.

第七题（习题 **7.1** 第 **5** 题）. 已知 n 阶方阵 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 相似于 Jordan 形矩阵 J, 且满足条件 $A^n = O \neq A^{n-1}$. 求 J.

解. 由条件 $A^n = O \neq A^{n-1}$ 知 A 的极小多项式为 $f_A(\lambda) = \lambda^n$, 所以 A 的特征值都是 0, 其 Jordan 型可写为

$$
J = \mathrm{diag}(J_{r_1}(0), \ldots, J_{r_m}(0)), \quad r_1 + \cdots + r_m = n.
$$

由第六题的讨论知，

$$\operatorname{rank} J_{r_i}(0)^k = \max\{0, r_i - k\}.$$

所以

$$\operatorname{rank} A^k = \operatorname{rank} J^k = \sum_{i=1}^{m} \max\{0, r_i - k\}.$$

由条件 $A^n = O \neq A^{n-1}$ **知** $\operatorname{rank} A^{n-1} > 0$**, 所以我们有**

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} \max\{0, r_i - (n-1)\} > 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} r_i = n. \end{cases}$$

于是必然有 $m = 1, r_1 = n$. **故** $J = J_n(0)$.