

2022 秋高等代数习题课

2022-09-09 第一次习题课

习题 1.2 第 3 题 已知两个变量 x, y 之间有某种函数关系 $y = f(x)$, 并且有如下对应值

x	1	2	3	4
y	2	7	16	29

问: y 是否可能是 x 的二次函数? 如果可能, 试求出满足要求的二次函数。

解: 假设 y 是 x 的二次函数, 即存在实数 a, b, c 使得

$$y = a + bx + cx^2$$

我们有

x	1	2	3	4
x^2	1	4	9	16
y	2	7	16	29

上式需要满足

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 16 \\ 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

高斯消元法化简

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 2 & 4 & | & 7 \\ 1 & 3 & 9 & | & 16 \\ 1 & 4 & 16 & | & 29 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 3 & | & 5 \\ 0 & 2 & 8 & | & 14 \\ 0 & 3 & 15 & | & 27 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 3 & | & 5 \\ 0 & 1 & 4 & | & 7 \\ 0 & 1 & 5 & | & 9 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 3 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

得 $(a, b, c) = (1, -1, 2)$, 即 $y = 1 - x + 2x^2$ 。

这题也可以用拉格朗日插值多项式来做。一般来说, 过 $n+1$ 个点 $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ 的 n 次插值多项式为

$$L(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

一般来说这是一个 n 次多项式, 它也有可能退化为更低次的多项式。在这题中, 我们有 4 个点, 会得到次数 ≤ 3 次的多项式。大家可以具体去算一算, 最后答案还是 $y = 1 - x + 2x^2$ 。我们可以用程序验证这个结果:

```
1 import numpy as np
2 import sympy as sp
3
4 def LagrangePolynomial(xs, ys):
5     X = sp.symbols("x")
6     assert len(xs) == len(ys)
7     y = 0
8     for k in range(len(xs)):
9         t = 1
10        for j in range(len(xs)):
11            if j != k:
12                t = t * (X - xs[j]) / (xs[k] - xs[j])
13        y += t * ys[k]
14    return sp.simplify(y)
15
16 xs = np.array([1, 2, 3, 4])
17 ys = np.array([2, 7, 16, 29])
18
19 LagrangePolynomial(xs, ys)
```

习题 1.2 第 4 题 在实数范围内解线性方程组

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 4 \\ 2x + 5y - 3z = -1 \\ 4x + 11y + z = 7 \end{cases}$$

这个方程组的解集在 3 维空间中的图像 Π 是什么?

将这个方程组的常数项全部变成 0, 得到的方程组的解集在 3 维空间中的图像 Π_0 是什么? Π_0 与 Π 有什么关系?

解: 该线性方程组的增广系数矩阵为

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -3 & -1 \\ 4 & 11 & 1 & 7 \end{array} \right)$$

通过高斯消元法（具体过程类似上一题，这里略去）化为阶梯形

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -19 & -23 \\ 0 & 1 & 7 & 9 \end{array}\right)$$

所以解集为 $(x, y, z) = (19t - 23, -7t + 9, t), t \in \mathbb{R}$. 它在 3 维空间中的图像 Π 是一条直线。

将这个方程组的常数项全部变成 0，得到的方程组的解集在 3 维空间中的图像 Π_0 一条过原点的直线。 Π_0 与 Π 之间可以通过平移相互得到，即 $\Pi = \Pi_0 + \begin{pmatrix} -23 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$ ， $\begin{pmatrix} -23 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$ 可以换为原非齐次线性方程组的任意一个特解。

习题 1.3 第 2 题 讨论当 λ 取什么值时下面的方程组有解

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

当方程组有解时求出解来，并讨论 λ 取什么值时方程组有唯一解，什么时候有无穷多组解。

解：对增广系数矩阵做行变换

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda - 1 & -(\lambda - 1) & -\lambda(\lambda - 1) \\ 0 & -(\lambda - 1) & -(\lambda - 1)(\lambda + 1) & -(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) \end{array}\right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda - 1 & -(\lambda - 1) & -\lambda(\lambda - 1) \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)(\lambda + 2) & (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2 \end{array}\right) \end{aligned}$$

所以

- 当 $\lambda = 1$ 时，增广系数矩阵化为 $(1 \ 1 \ 1 \mid 1)$ ，原线性方程组有无穷多组解

$$\begin{pmatrix} 1 - t_1 - t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

- 当 $\lambda = -2$ 时，增广系数矩阵化为

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

此时原线性方程组无解。

- 其余情况, 增广系数矩阵可进一步约化

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{\lambda+1}{\lambda+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \end{array} \right)$$

此时原线性方程组有唯一解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda+1}{\lambda+2} \\ \frac{1}{\lambda+2} \\ \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \end{pmatrix}$$

可以用程序验证答案 (在 $\mathbb{Q}(\lambda)$ 中的解, 适合一般情况, 不适合 $\lambda = 1, -2$ 这样的退化的情况):

```
1 import sympy as sp
2 from sympy.solvers.solveset import linsolve
3 x, y, z, u = sp.symbols("x,y,z,u")
4 linsolve(
5     [u*x + y + z - 1, x + u*y + z - u, x + y + u*z - u**2],
6     (x, y, z)
7 )
```

习题 1.1 第 2 题 (1). 求证: 如果复数集合的子集 P 包含至少一个非零数, 并且对加、减、乘、除 (除数不为 0) 封闭, 则 P 包含 $0, 1$, 从而是数域。

(2). 求证: 所有的数域都包含有理数域。

(3). 求证: 集合 $F = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ 是数域。(其中 \mathbb{Q} 是有理数域。)

(4). 试求包含 $\sqrt[3]{2}$ 的最小的数域。

解: (1). 设 P 包含非零数 a , 则 $0 = a - a \in P, 1 = a/a \in P$, 所以 P 是数域。

(2). 任意一个数域 F 都包含 $0, 1$, 且对加、减、乘、除封闭, 故 F 包含整数 \mathbb{Z} (包含 $0, 1$ 且对加、减封闭), 进而包含有理数域 \mathbb{Q} (对乘、除封闭)。有理数域 \mathbb{Q} 与有限域 \mathbb{F}_p, p 为素数, 为最小的域, 即不真包含更小的域, 称为素域。

(3) 集合 $F = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ 包含 $0, 1$ (分别令 $(a, b) = (0, 0)$ 与 $(a, b) = (1, 0)$)。设 $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Q}$, 下面验证

- 加、减法封闭:

$$(a_1 + b_1\sqrt{2}) \pm (a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\sqrt{2}$$

- 乘法封闭:

$$(a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2}$$

- 除法封闭 (a_2, b_2 不同时为零):

$$(a_1 + b_1\sqrt{2}) / (a_2 + b_2\sqrt{2}) = \frac{a_1a_2 - 2b_1b_2}{a_2^2 - 2b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 - 2b_2^2}\sqrt{2}$$

(4). 包含 $\sqrt[3]{2}$ 的最小的数域为

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$$

很容易看到任何包含 $\sqrt[3]{2}$ 的数域都必须包含 $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$, 从而包含 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, 那么只要证明 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ 是一个数域。

解法一: 直接验证 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ 是对加、减、乘、除封闭。其中对加、减、乘封闭好验证。对于除法封闭, 只要验证 $1/(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}) \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, a, b, c 不全为零, 即可。不妨设 a, b, c 都不为零 (其余情况更简单)。这种情况下, 又不妨设 $c = 1$, 记 $\theta = \sqrt[3]{2}$, 要证明

$$1/(a + b\theta + \theta^2) \in \mathbb{Q}(\theta)$$

利用带余除法, 有

$$\theta^3 - 2 = (\theta^2 + b\theta + a)(\theta - b) + ((b^2 - a)\theta + ab - 2)$$

若 $b^2 - a = 0$, 则 $ab - 2 \neq 0$, 此时有

$$1/(\theta^2 + b\theta + a) = (\theta - b)/(2 - ab).$$

若 $b^2 - a \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} & (\theta^2 + b\theta + a) \\ &= ((b^2 - a)\theta + ab - 2) \left(\frac{1}{b^2 - a}\theta + \frac{b^3 - 2ab + 2}{(b^2 - a)^2} \right) + a - (ab - 2) \frac{b^3 - 2ab + 2}{(b^2 - a)^2} \end{aligned}$$

将上式回代, 有

$$\begin{aligned} & (\theta^3 - 2) \left(\frac{1}{b^2 - a}\theta + \frac{b^3 - 2ab + 2}{(b^2 - a)^2} \right) \\ &= (\theta^2 + b\theta + a) \left[(\theta - b) \left(\frac{1}{b^2 - a}\theta + \frac{b^3 - 2ab + 2}{(b^2 - a)^2} \right) + 1 \right] - \gamma \end{aligned}$$

其中 $\gamma = a - (ab - 2) \frac{b^3 - 2ab + 2}{(b^2 - a)^2}$, 只要验证 $\gamma \neq 0$, 即有

$$1/(\theta^2 + b\theta + a) = \left[(\theta - b) \left(\frac{1}{b^2 - a}\theta + \frac{b^3 - 2ab + 2}{(b^2 - a)^2} \right) + 1 \right] / \gamma$$

解法二:

设 $m(x) = x^3 - 2$, 这是 $\sqrt[3]{2}$ 的所谓的 (首一的, monic) 极小多项式¹ (minimal polynomial over \mathbb{Q})。令 $F = \mathbb{Q}[x]/(m(x))$ 为 \mathbb{Q} 系数多项式全体的等价类组成的集合, 其中的等价关系为

$$f_1(x) \sim f_2(x) \iff \exists g(x) \text{ s.t. } f_1(x) - f_2(x) = g(x)m(x)$$

作为一个 \mathbb{Q} 线性空间, F 的一组基可以取作 $1, \bar{x}, \bar{x}^2$ 。这是因为对于任意一个 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, 都存在 $g(x), r(x)$, $\deg r(x) < \deg m(x)$, 使得

$$f(x) = g(x)m(x) + r(x)$$

¹使得满足 $f(\sqrt[3]{2}) = 0$ 的 \mathbb{Q} 系数多项式中次数最低的, 如果要求是首一的, 即最高次项系数为 1, 则这样的多项式是唯一的。

于是

$$F = \{a + b\bar{x} + c\bar{x}^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$$

定义

$$\varphi : F \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), \bar{x} \mapsto \sqrt[3]{2}$$

可以验证

- F 关于加、减、乘、除封闭。加、减、乘封闭很容易验证。任取 $f(x) \in \mathbb{Q}[x] \setminus m(x) \cdot \mathbb{Q}[x]$, 即 $\bar{f} \neq 0 \in F$, 那么 $f(x)$ 与 $m(x)$ 互素, 即他们的最大公因子为 1, 记作 $(f(x), m(x)) = 1$ 。于是 (通过辗转相除法) 存在 $g_1(x), g_2(x) \in \mathbb{Q}[x]$, 使得 $g_1(x)f(x) + g_2(x)m(x) = 1$, 于是 \bar{f} 在 F 中的逆元即为 \bar{g}_1 。
- φ 是一个一一对应 (且保运算, 即是一个域同构)。