2022 秋高等代数习题课

2022-11-18 第六次习题课

第一题 (习题 4.3 第 2 题 (3)) 设 A 是方阵，$A^k=0$ 对某个正整数 k 成立。求证下列方阵可逆，并分别求他们的逆

$$I+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}A^{k-1}.$$

解：我们知道函数 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 附近有展开式

$$f(x)=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}x^{k-1}+\cdots$$

那么我们可以类比考虑 $f(-A)=I+(-A)+\frac{1}{2!}(-A)^2+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}(-A)^{k-1}$, 看它与 $I+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}A^{k-1}$ 相乘是否等于单位阵 I. 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{i!}A^i\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!}(-A)^j=\frac{1}{0!0!}I+\frac{1}{0!1!}A+\frac{1}{0!2!}A^2+\frac{1}{0!3!}A^3+\cdots+\frac{1}{0!(k-1)!}A^{k-1}&\\+\frac{-1}{1!0!}A+\frac{-1}{1!1!}A^2+\frac{-1}{1!2!}A^3+\cdots+\frac{-1}{1!(k-2)!}A^{k-1}&\\+\frac{1}{2!0!}A^2+\frac{1}{2!1!}A^3+\cdots+\frac{1}{2!(k-3)!}A^{k-1}&\\\vdots\quad&\\+\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!0!}A^{k-1}&\end{aligned}$$

可以看到，当 $1\leqslant n\leqslant k-1$ 时，上式右边 A^n 的系数等于

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!(n-i)!}=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}C_n^i1^{n-i}(-1)^i=\frac{1}{n!}(1-1)^n=0.$$

于是有 $\sum\limits_{i=0}^{k-1}\frac{1}{i!}A^i\sum\limits_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!}(-A)^j=\frac{1}{0!0!}I=I$. 所以 $\sum\limits_{i=0}^{k-1}\frac{1}{i!}A^i$ 是可逆的，它的逆就是 $\sum\limits_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!}(-A)^j$.

事实上，我们有所谓的方阵函数 $f:M_n(\mathbb{F})\to M_n(\mathbb{F})$, 可以从多项式扩展定义到一般的（复）函数（由所谓的代表多项式定义），例如 $\sin,\cos,\exp,\log$ 等。这些方阵函数保留了很多原来函数的

性质。这部分内容在学习完方阵的 Jordan 标准形之后比较好理解，所以这里暂时不展开讲了。这题的关键就在于利用实值函数的展开式，猜测一个逆，然后用矩阵的乘法去验证。

第二题 (习题 4.7 第 5 题) 设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, \operatorname{rank} A = r$.

(1) 从 A 中任意取出 s 行组成 $s \times n$ 矩阵 B, 证明：$\operatorname{rank} B \geqslant r + s - m$;

(2) 从 A 中任意指定 s 个行和 t 个列，这些行和列的交叉位置的元组成的 $s \times t$ 矩阵记为 D, 求证：$\operatorname{rank} D \geqslant r + s + t - m - n$.

证明：(1) 我们记这 s 行的下标为 $i_1, \dots, i_s$, 余下的行的下标为 $i_{s+1}, \dots, i_m$.

方法一：考虑 $m - s + 1$ 个行向量组 $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_s}\}, \{v_{i_1}, \dots, v_{i_s}, v_{i_{s+1}}\}, \dots, \{v_{i_1}, \dots, v_{i_s}, \dots, v_{i_m}\}$, 其中 v 为 A 的行向量。记这些向量组的秩为 $r_0, \dots, r_{m-s}$, 那么

$$r_0 = \operatorname{rank} B, r_{m-s} = \operatorname{rank} A = r,\ \text{并且有} r_{k+1} - r_k \leqslant 1,\ k = 0, \dots, m-s-1,$$

其中等号成立当且仅当 v_{s+k+1} 落在前一个向量组张成的空间中。所以有

$$r - \operatorname{rank} B = r_{m-s} - r_0 = \sum_{k=0}^{m-s-1} (r_{k+1} - r_k) \leqslant \sum_{k=0}^{m-s-1} 1 = m - s.$$

方法二：令 P 为 m 阶单位阵删去第 $i_{s+1}, \dots, i_m$ 行组成的 $s \times m$ 矩阵，那么有 $PA = B$, 且容易看出 $\operatorname{rank} P = s$. 根据之前证明的矩阵乘积的秩关系

$$\operatorname{rank} PA \geqslant \operatorname{rank} P + \operatorname{rank} A - m$$

即有

$$\operatorname{rank} B \geqslant s + r - m.$$

(2) 令 B 为从 A 中取出这 s 行构成的 $s \times n$ 矩阵，那么根据 (1) 中结论，有

$$\operatorname{rank} B \geqslant r + s - m.$$

从矩阵 B 中取对应题设的 t 列，可以得到矩阵 D. 那么将 (1) 中结论应用到 B^T 与 D^T, 会有

$$\operatorname{rank} D = \operatorname{rank} D^T \geqslant \operatorname{rank} B^T + t - n = \operatorname{rank} B + t - n \geqslant s + r - m + t - n.$$

第三题 (习题 4.7 第 9 题) 设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 求证：$\operatorname{rank}(I_m - AA^T) - \operatorname{rank}(I_n - A^TA) = m - n$.

证明：容易想到 $I_m - AA^T$ 与 $I_n - A^TA$ 都是某一个（同一个）分块矩阵进行了不同的 “初等行列变换” 得到的某些位置上的矩阵。考虑分块矩阵 $M = \begin{pmatrix} A & I_m \\ I_n & A^T \end{pmatrix}$. 一方面我们以 I_n 为 “中心” 保持不变做 “初等行列变换” 有

$$\begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & I_m \\ I_n & A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -A^T \\ 0 & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & I_m - AA^T \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_m - AA^T \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

从而有 $\operatorname{rank} M=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}0 & I_m-AA^T\\ I_n & 0\end{pmatrix}=n+\operatorname{rank}(I_m-AA^T)$.

另一方面以 I_m 为 “中心” 保持不变做 “初等行列变换” 有

$$\begin{pmatrix}I_m & 0\\ -A^T & I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & I_m\\ I_n & A^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n & 0\\ -A & I_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_m & 0\\ -A^T & I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & I_m\\ I_n-A^TA & A^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & I_m\\ I_n-A^TA & 0\end{pmatrix},$$

从而有 $\operatorname{rank} M=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}0 & I_m\\ I_n-A^TA & 0\end{pmatrix}=m+\operatorname{rank}(I_n-A^TA)$, 进而有

$$\operatorname{rank} M=m+\operatorname{rank}(I_n-A^TA)=n+\operatorname{rank}(I_m-AA^T),$$

即有

$$\operatorname{rank}(I_m-AA^T)-\operatorname{rank}(I_n-A^TA)=m-n.$$

类似的从一个 “中间分块矩阵” 通过不同的 “初等行列变换” 组合得到我们想要的不同形式的矩阵的方法，在之前我们证明 Sherman–Morrison formula，以及 Woodbury matrix identity 的时候已经介绍过了，这里又应用了一次。

第四题 (习题 4.7 第 10 题) 矩阵的广义逆。

(1) 对任意矩阵 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, 存在矩阵 $A^-\in\mathbb{F}^{n\times m}$ 满足条件 $AA^-A=A$. 什么条件下 A^- 由 A 唯一决定?（A^- 称为 A 的广义逆（generalized inverse matrix)。)

(2) 设 $A\in\mathbb{F}^{m\times n},\beta\in\mathbb{F}^{m\times 1},A^-\in\mathbb{F}^{n\times m}$ 满足条件 $AA^-A=A$. 求证：
线性方程组 $AX=\beta$ 有解的充分必要条件是 $AA^-\beta=\beta$;
方程组有解时的通解为 $X=A^-\beta+(I_n-A^-A)Y,\forall Y\in\mathbb{F}^{n\times 1}$.

证明：(1) 我们先证明广义逆 A^- 的存在性。考虑 A 的相抵标准形，即设 P,Q 分别为 m 阶与 n 阶可逆阵，使得 $A=P\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{m\times n}Q$, 那么

$$A^-=Q^{-1}\begin{pmatrix}I_r & *\\ *' & *''\end{pmatrix}_{n\times m}P^{-1}$$

其中 $r=\operatorname{rank} A,*,*',*''$ 分别是大小为 $r\times(m-r),(n-r)\times r$, 以及 $(n-r)\times(m-r)$ 的块，块中元素可以任取。那么很容易验证满足 $AA^-A=A$. 从以上广义逆 A^- 的形式可以看出，一个矩阵 A 的广义逆并不唯一。要使得 A^- 由 A 唯一决定，只有让 $*,*',*''$ 都不存在，即 $m-r=n-r=0$, 即 A 为可逆方阵。

广义逆这个名字指的是 “像是逆” 的一个矩阵：

$$(AA^-)A=A=A(A^-A)$$

AA^- 与 A^-A 都 “像是” 单位阵（左、右）作用于 A 上。他们分别在 A 的列空间与行空间上是恒等变换。这个虽然弱于在全空间上是恒等变换，但已经是比较强的条件了（比不变子空间强很多)。

(2) $\Rightarrow$: 若线性方程组 $AX=\beta$ 有解，任取一个解，记为 X_0, 那么有

$$AA^-\beta=AA^-(AX_0)=(AA^-A)X_0=AX_0=\beta.$$

$\Leftarrow$: 若 $AA^-\beta=\beta$, 那么令 $X_0=A^-\beta$, 我们会有

$$AX_0=A(A^-\beta)=AA^-\beta=\beta,$$

即知 $X_0=A^-\beta$ 为线性方程组 $AX=\beta$ 的一个解。

这一问比较好理解，就是我们知道 $AX=\beta$ 有解，当且仅当 β 属于 A 的列空间 $\mathrm{col}(A)$, 而上面已经提到了，AA^- 在 A 的列空间上是恒等变换，自然会把 β 映成 β.

要证明线性方程组 $AX=\beta$ 有解时的通解为 $X=A^-\beta+(I-A^-A)Y,\forall Y\in\mathbb{F}^{m\times 1}$, 只要证明对应的齐次线性方程组 $AX=0$ 的解的全体为 $X=(I_n-A^-A)Y,\forall Y\in\mathbb{F}^{n\times 1}$.

由于广义逆 A^- 满足 $AA^-A=A$, 即 $A(I_n-A^-A)=0$, 所以

$$\mathrm{col}(I_n-A^-A)\subseteq\mathrm{Null}(A),$$

其中 $\mathrm{col}(I_n-A^-A)$ 为矩阵 I_n-A^-A 的列空间，即由 I_n-A^-A 的列张成的线性空间，$\mathrm{Null}(A)$ 为矩阵 A 的零化空间，即 $AX=0$ 的解空间。要证明以上包含关系实际上是相等的关系，我们需要考察他们的维数。

沿用第 (1) 问的记号，我们有

$$A^-A=Q^{-1}\begin{pmatrix}I_r & *\\ *' & *''\end{pmatrix}_{n\times m}P^{-1}P\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{m\times n}Q=Q^{-1}\begin{pmatrix}I_r & 0\\ *' & 0\end{pmatrix}_{n\times n}Q.$$

所以

$$\dim\left(\mathrm{col}(I_n-A^-A)\right)=\mathrm{rank}(I_n-A^-A)=\mathrm{rank}\left(Q^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ -*' & I_{n-r}\end{pmatrix}_{n\times n}Q\right)=n-r=\dim\left(\mathrm{Null}(A)\right).$$

也就是说，我们实质上有

$$\{(I_n-A^-A)Y\mid Y\in\mathbb{F}^{n\times 1}\}=\mathrm{col}(I_n-A^-A)=\mathrm{Null}(A).$$

所以齐次线性方程组 $AX=0$ 的解的全体为 $X=(I_n-A^-A)Y,\forall Y\in\mathbb{F}^{n\times 1}$.

以上是当我们取定了某一个广义逆 A^- 时，对线性方程组 $AX=\beta$ 解集的刻画。实际上，当 $\beta\neq 0$ 时，我们还有另一种刻画，即非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 解集等于

$$\{A^-\beta\mid A^-\text{ 是 }A\text{ 的广义逆}\}.$$

我们已经知道了形如 $A^-\beta$ 的向量是 $AX=\beta$ 的解，这里的 A^- 是矩阵 A 的任何一个广义逆。我们只要证明对 $AX=\beta$ 的任何一个解 X_0 都存在某个广义逆 A^-, 使得 $X_0=A^-\beta$.

我们利用 A 的相抵标准形以及对应的 A^- 的一般形式。设 E_1,E_2,E_3 分别为元素未定的大小为 $r\times(m-r)$, $(n-r)\times r$, 以及 $(n-r)\times(m-r)$ 的矩阵。我们想要求解下列的方程

$$Q^{-1}\begin{pmatrix}I_r & E_1\\ E_2 & E_3\end{pmatrix}P^{-1}\beta=X_0.$$

我们已知的是 $AX_0=\beta$, 即 $P\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}QX_0=\beta$. 记 $X_0'=QX_0,\beta'=P^{-1}\beta$, 那么我们有

$$\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}X_0'=\beta',\quad \text{要求解矩阵方程}\begin{pmatrix}I_r & E_1\\ E_2 & E_3\end{pmatrix}\beta'=X_0'.$$

即求解
$$X_0' = \begin{pmatrix} I_r & E_1 \\ E_2 & E_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X_0' = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ E_2 & 0 \end{pmatrix} X_0'.$$
令 $X_0' = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, 其中 $v_1 \in \mathbb{F}^{r\times 1}, v_2 \in \mathbb{F}^{(n-s)\times 1}$, 有
$$\beta' = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{相应矩阵方程化为} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ E_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ E_2 v_1 \end{pmatrix}.$$
由于我们假设了 $\beta \neq 0$, 即有 $\beta' \neq 0$, 那么 $v_1 \neq 0$. 设 v_1 的第 i 位元素等于 $a \in \mathbb{F}, a \neq 0$, 那么取
$$E_2 = (0, \ldots, 0, \underbrace{\frac{1}{a} v_2}_{\text{第 } i \text{ 列}}, 0, \ldots, 0),$$
即可以满足 $E_2 v_1 = v_2$. 其余的 E_1, E_3 任取，即可满足
$$\begin{pmatrix} I_r & E_1 \\ E_2 & E_3 \end{pmatrix} \beta' = \begin{pmatrix} I_r & E_1 \\ E_2 & E_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ E_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = X_0'.$$
也就是说，对于非齐次线性方程组 $AX = \beta$ 的任取的一个解 X_0, 我们都找到了相应的 A 的广义逆
$$A^- = Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r & E_1 \\ E_2 & E_3 \end{pmatrix} P^{-1}$$
使得 $X_0 = A^-\beta$.

由于广义逆并不唯一，我们可以在 $AA^-A = A$ 以外多加一些条件（$A^-AA^- = A^-$, AA^- 与 A^-A 都对称），得到满足唯一性的 Moore–Penrose 广义逆（或伪逆，pseudoinverse）A^+. A^+ 的构造可以由 A 的奇异值分解引出。A^+ 可以用于求解最小二乘问题。

第五题 (习题 5.1 第 4 题) (综合除法) 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的多项式，$c \in \mathbb{F}$. 求证：$x - c$ 除 $f(x)$ 的商 $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ 和余式 r 可以用如下的算法得出
$$\begin{array}{c|ccccccccc} c & & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_i & \cdots & a_1 & a_0 \\ & +) & & cb_{n-1} & \cdots & cb_i & \cdots & cb_1 & cb_0 \\ \hline & & b_{n-1} & b_{n-1} & \cdots & b_{i-1} & \cdots & b_0 & r \end{array}$$
其中 $b_{n-1} = a_n, b_{i-1} = a_i + cb_i \ (\forall 1 \leqslant i \leqslant n), r = a_0 + cb_0$.

证明：
考虑 $f(x) = (x-c)g(x) + r$, 即
$$\begin{aligned} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 &= (x-c)(b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0) + r \\ &= b_{n-1}x^n + \cdots + b_1 x^2 + b_0 x + r \\ &\quad - cb_{n-1}x^{n-1} - \cdots - cb_1 x - cb_0 \end{aligned}$$
移项之后即有
$$a_n x^n + (a_{n-1} + cb_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + cb_1)x + (a_0 + cb_0) = b_{n-1}x^n + \cdots + b_1 x^2 + b_0 x + r,$$
对应次项的系数相等，从而有 $b_{n-1} = a_n, b_{n-2} = a_{n-1} + cb_{n-1}, \ldots, b_0 = a_1 + cb_1, r = a_0 + cb_0$.