2021 秋高等代数课后习题

第五次作业

习题 **2.5** 第 **3** 题

设整数 $k \geqslant 2$，数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V 中的向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 线性相关。证明：存在不全为 0 的数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{F}$，使得对任何 α_{k+1}，向量组 $\{\alpha_1 + \lambda_1\alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_k + \lambda_k\alpha_{k+1}\}$ 线性相关。

证明：由于 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 线性无关，所以存在不全为 0 的数 $x_1, \cdots, x_k$ 使得 $x_1\alpha_1 + \cdots + x_k\alpha_k = 0$。考虑

$$(\alpha_1 + \lambda_1\alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_k + \lambda_k\alpha_{k+1}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = 0$$

变形为

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \alpha_{k+1}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_1\lambda_1 + \cdots + x_k\lambda_k \end{pmatrix} = 0$$

所以只要存在不全为 0 的 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 使得 $x_1\lambda_1 + \cdots + x_k\lambda_k = 0$ 即可。因为 $k \geqslant 2$，$(x_1, \cdots, x_k)$ 在 $\mathbb{F}^k$ 中的正交补总是非平凡的，所以这样的 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 总是存在的。

习题 **2.5** 第 **6** 题

设向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 的秩为 r，在其中任取 m 个向量 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_m}$ 组成向量组 S。求证 S 的秩 $\geqslant r + m - s$。

证明：设 S 的秩为 t，那么 S 中存在一个元素个数为 t 的极大线性无关组。那么从这个线性无关的向量组出发，通过往其中添加不在 S 中的向量，可以得到整个向量组的一个极大线性无关组。假设添加了 k 个向量，那么有 $t + k = r$ 且 $k \leqslant s - m$，从而有

$$t = r - k \geqslant r - (s - m) = r + m - s$$

习题 **2.5** 第 **7** 题

证明：在所有次数不大于 n 的实系数多项式构成的 $n+1$ 维实线性空间中，$1, (x-c), (x-c)^2, \cdots, (x-c)^n$ 构成一组基。并求 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 在这组基下的坐标。

证明：只要证明 $1, (x-c), (x-c)^2, \cdots, (x-c)^n$ 线性无关即可。假设存在不全为 0 的实数 $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ 使得

$$f_0(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-c) + \cdots + \lambda_n(x-c)^n = 0$$

那么 $f_0(x)$ 的 n 阶导函数 $f_0^{(n)}(x) = n!\lambda_n = 0$，从而有 $\lambda_n = 0$。逐步反推可以导出 $\lambda_{n-1} = \cdots = \lambda_0 = 0$，矛盾。

设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=\lambda_0+\lambda_1(x-c)+\cdots+\lambda_n(x-c)^n$，那么 $f_0^{(n)}(x)=n!a_n=n!\lambda_n$，故 $\lambda_n=a_n$。将所得的 $\lambda_n,\cdots,\lambda_{n-k}$ 回代，并考察 $f_0^{(n-k-1)}(0)$，有

$$f_0^{(n-k-1)}(0)=(n-k-1)!a_{n-k-1}=(n-k-1)!\lambda_{n-k-1}+\frac{(n-k)!}{1!}(0-c)\lambda_{n-k}+\cdots+\frac{n!}{(k+1)!}(0-c)^{k+1}\lambda_n$$

得 $a_{n-k-1}=\lambda_{n-k-1}+C_{n-k}^1(-c)\lambda_{n-k}+\cdots+C_n^{k+1}(-c)^{k+1}\lambda_n$ 所以有

$$\begin{pmatrix}a_n\\ \vdots\\ a_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&&&\\ C_n^1(-c)&1&&&\\ C_n^2(-c)^2&C_{n-1}^1(-c)&1&&\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\\ C_n^1(-c)^n&C_{n-1}^{n-1}(-c)^{n-1}&C_{n-2}^{n-2}(-c)^{n-2}&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_n\\ \vdots\\ \lambda_0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\lambda_n\\ \vdots\\ \lambda_0\end{pmatrix}$$

故 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 在这组基下的坐标为

$$\begin{pmatrix}\lambda_n\\ \vdots\\ \lambda_0\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}a_n\\ \vdots\\ a_0\end{pmatrix}.$$

若考察 $f_0^{(n-k-1)}(c)$，则有

$$f_0^{(n-k-1)}(c)=(n-k-1)!\lambda_{n-k-1}=(n-k-1)!a_{n-k-1}+\frac{(n-k)!}{1!}ca_{n-k}+\cdots+\frac{n!}{(k+1)!}c^{k+1}a_n$$

得 $\lambda_{n-k-1}=a_{n-k-1}+C_{n-k}^1ca_{n-k}+\cdots+C_n^{k+1}c^{k+1}a_n$ 所以有

$$\begin{pmatrix}\lambda_n\\ \vdots\\ \lambda_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&&&\\ C_n^1c&1&&&\\ C_n^2c^2&C_{n-1}^1c&1&&\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\\ C_n^1c^n&C_{n-1}^{n-1}c^{n-1}&C_{n-2}^{n-2}c^{n-2}&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\ \vdots\\ a_0\end{pmatrix}$$

习题 **2.5** 第 **10** 题

将数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维（$n\geqslant 2$）数组空间 $\mathbb{F}^n$ 中的每个向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 看作一个具有 n 项的数列。如下集合 W 是否组成 $\mathbb{F}^n$ 的一个线性子空间？如果是，求出它的维数及一组基。

(1). $\mathbb{F}^n$ 中所有等比数列组成的集合。

(2). $\mathbb{F}^n$ 中所有等差数列组成的集合。

解：(1). 不构成线性子空间。$(0,\cdots,0)\notin W$ 不构成等比数列。

(2). 构成线性子空间。$(0,\cdots,0)\in W$ 构成等差数列。令 $(a_1,a_2,\cdots,a_n),(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in W$ 为两个等差数列，差分别为 d_1,d_2，那么任取 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$，有 $\lambda_1(a_1,a_2,\cdots,a_n)+\lambda_2(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 是差为 $d_1\lambda_1+d_2\lambda_2$ 的等差数列。所以 $\mathbb{F}^n$ 中所有等差数列组成的集合 W 构成线性子空间。W 的元素都可以表示为

$$(a,a+d,\cdots,a+(n-1)d)=a(1,\cdots,1)+d(0,1,\cdots,n-1),\quad a,d\in\mathbb{R}$$

所以 W 维数为 2，一组基可以取为 $(1,\cdots,1),(0,1,\cdots,n-1)$.

另一解法：W 由以下有 $n-2$ 个方程的齐次线性方程组定义（$n\geqslant 3$ 时）

$$\begin{cases} a_3-a_2=a_2-a_1\\ a_4-a_3=a_3-a_2\\ \cdots\cdots\\ a_n-a_{n-1}=a_{n-1}-a_{n-2}\end{cases}$$

系数矩阵秩为 $n-2$，从而 W 维数为 $n-(n-2)=2$.

习题 **2.6** 第 **1** 题

设复数域上线性空间 V 中的向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关。对复数 λ 的不同值，求向量组 $\{\alpha_1+\lambda\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}+\lambda\alpha_n,\alpha_n+\lambda\alpha_1\}$ 的秩。

解：

$$(\alpha_1+\lambda\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}+\lambda\alpha_n,\alpha_n+\lambda\alpha_1)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}1&&&&\lambda\\ \lambda&1&&&\\ &\lambda&\ddots&&\\ &&\ddots&\ddots&\\ &&&\lambda&1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$$

$\{\alpha_1+\lambda\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}+\lambda\alpha_n,\alpha_n+\lambda\alpha_1\}$ 的秩即为矩阵 A 的秩。那么 A 的阶梯形为

$$\begin{pmatrix}1&&&&\lambda\\ &1&&&\lambda\cdot(-\lambda)\\ &&\ddots&&\\ &&&\ddots&\lambda\cdot(-\lambda)^{n-2}\\ &&&&1+\lambda\cdot(-\lambda)^{n-1}\end{pmatrix}$$

所以 $\lambda=-\zeta_n^k,k=0,1,\cdots,n-1$ 时，A 的秩为 $n-1$，其中 $\zeta_n=e^{\frac{2\pi}{n}}$ 为 n 次单位根；其余情况，A 的秩为 n。

习题 **2.6** 第 **3** 题

设 V 是由复数组成的无穷数列 $\{a_n\}=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$ 的全体组成的集合，定义 V 中任意两个数列的加法 $\{a_n\}+\{b_n\}=\{a_n+b_n\}$ 及任意数列与任意复数的乘法 $\lambda\{a_n\}=\{\lambda a_n\}$ 之后称为复数域 $\mathbb{C}$ 上线性空间。

(1) 求证：V 中满足条件 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(\forall n\geqslant 3)$ 的全体数列 $\{a_n\}$ 组成 V 的子空间 W。W 的维数是多少？

(2) 对任意 $(a_1,a_2)\in\mathbb{C}^2$，定义 $\sigma(a_1,a_2)=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}\in W$。求证：$\sigma$ 是 $\mathbb{C}^2$ 到 W 的同构映射。

(3) 求证：W 中存在一组由等比数列组成的基 M

(4) 设数列 $\{F_n\}$ 满足条件 $F_1=F_2=1$ 且 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$。求 $\{F_n\}$ 在基 M 下的坐标，并由此求出 $\{F_n\}$ 的通项公式。

解：(1) 首先 $0,\cdots,0,\cdots\in W$ 起到零元的作用。任取 $\{a_n\},\{b_n\}\in W$ 以及 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$。有

$$\lambda_1 a_n+\lambda_2 b_n=\lambda_1(a_{n-1}+a_{n-2})+\lambda_2(b_{n-1}+b_{n-2})=(\lambda_1 a_{n-1}+\lambda_2 b_{n-1})+(\lambda_1 a_{n-2}+\lambda_2 b_{n-2})$$

故 $\lambda_1\{a_n\}+\lambda_2\{b_n\}\in W$. 所以 W 是 V 的线性子空间。由于 W 中向量的自由变量只有前两项 a_1,a_2，故其维数为 2。

(2) 首先，检查 σ 是线性映射：

$$\begin{aligned}\sigma(\lambda_1(a_1,a_2)+\lambda_2(b_1,b_2))&=\{\lambda_1 a_1+\lambda_2 b_1,\lambda_1 a_2+\lambda_2 b_2,\cdots\}\\&=\{\lambda_1 a_1,\lambda_1 a_2,\cdots\}+\{\lambda_2 b_1,\lambda_2 b_2,\cdots\}\\&=\lambda_1\sigma(a_1,a_2)+\lambda_2\sigma(b_1,b_2)\end{aligned}$$

其次，检查 $\ker\sigma=\{(0,0)\}$：设 $\sigma(a_1,a_2)=\{0,0,\cdots\}$，那么 $\{a_1,a_2,\cdots\}=\{0,0,\cdots\}$，从而有 $\ker\sigma=\{(0,0)\}$。再由两个线性空间维数相同，即可得出 σ 是线性同构的结论。

(3) 假设有等比数列 $\{a,aq,\cdots,aq^n,\cdots\}\in W$，那么有 $aq^{n+2}=aq^{n+1}+aq^n$。解得 $q=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$。由此可知

$$\left\{1,\frac{1+\sqrt{5}}{2},\cdots,\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,\cdots,\right\},\left\{1,\frac{1-\sqrt{5}}{2},\cdots,\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,\cdots,\right\}\in W$$

而且他们线性无关，故构成了 W 的一组基。

(4) 令 $(1,1)=\lambda_1\left(1,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+\lambda_2\left(1,\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$，解得

$$\lambda_1=\frac{\sqrt{5}}{10}+\frac{1}{2},\quad \lambda_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}$$

所以 $\{F_n\}$ 在这组基下坐标为 $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{10}+\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}\end{pmatrix}$，通项公式为

$$F_n=\left(\frac{\sqrt{5}}{10}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.$$

习题 **2.6** 第 **4** 题

设 $\mathbb{R}^+$ 是所有正实数组成的集合。对任意 $a,b\in\mathbb{R}^+$ 定义 $a\oplus b=ab$（实数 a,b 按通常乘法的乘积），对任意 $a\in\mathbb{R}^+$ 和 $\lambda\in\mathbb{R}$ 定义 $\lambda\circ a=a^\lambda$。求证：

(1) $\mathbb{R}^+$ 按上述定义的加法 $a\oplus b$ 和数乘 $\lambda\circ a$ 成为实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

(2) 实数集合 $\mathbb{R}$ 按通常方式定义加法和乘法看成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，求证：通常的这个线性空间 $\mathbb{R}$ 与按上述方式定义的线性空间 $\mathbb{R}^+$ 同构。并给出这两个空间之间的全部同构映射。

证明：首先，很容易验证 $\mathbb{R}^+$ 关于加法 $a\oplus b$ 封闭，1 为加法零元，$a\in\mathbb{R}^+$ 的加法逆元为 $\frac{1}{a}\in\mathbb{R}^+$。任取 $a,b\in\mathbb{R}^+,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, 有

$$1\circ a=a^1=a$$

$$\lambda_1 \circ (a \oplus b) = \lambda_1 \circ ab = (ab)^{\lambda_1} = a^{\lambda_1} b^{\lambda_1} = (\lambda_1 \circ a) \oplus (\lambda_1 \circ b)$$
$$(\lambda_1 + \lambda_2) \circ a = a^{\lambda_1 + \lambda_2} = a^{\lambda_1} a^{\lambda_2} = (\lambda_1 \circ a) \oplus (\lambda_2 \circ a)$$
$$(\lambda_1 \lambda_2) \circ a = a^{\lambda_1 \lambda_2} = (a^{\lambda_2})^{\lambda_1} = \lambda_1 \circ (\lambda_2 \circ a)$$

(2) **任取** $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$, **定义** $\sigma_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto a^x$, **那么有**

$$\sigma_a(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = a^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2} = (a^{x_1})^{\lambda_1} (a^{x_2})^{\lambda_2} = \lambda_1 \circ \sigma_a(x_1) \oplus \lambda_2 \circ \sigma_a(x_2)$$

所以 σ_a **是线性映射。任取** $b \in \mathbb{R}^+$, **有** $\sigma_a(\log_a b) = b$**，所以** σ_a **是满射。令** $\sigma_a(x) = a^x = 1$**，那么有** $x = 0$**，从而知** σ_a **是单射。所以** σ_a **是线性空间的同构映射。**

(2) **任取同构映射** $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, **令** $a = \sigma(1)$**，有** $a \neq 1$**，否则** σ **不是单射。那么任取** $x \in \mathbb{R}$**，有**

$$\sigma(x) = \sigma(x \cdot 1) = x \circ \sigma(1) = x \circ a = a^x = \sigma_a(x)$$

所以 $\sigma_a, a \in \mathbb{R}^+ \setminus 1$ **即是** $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ **的所有线性同构映射。**