

卡特兰数题型详解和取模处理

前置知识

- 讲解097 - 欧拉筛，最小质因子筛法
- 因子计数法计算卡特兰数，需要最小质因子表
- 讲解099 - 逆元和除法同余
- 卡特兰数计算公式的实现，需要阶乘余数表、阶乘逆元表、连续数逆元表

本节课讲述

卡特兰数的三种题目类型

不同取模要求下的处理，算法竞赛的同学必须掌握，尤其是本节课题目5重点讲述的因子计数法

卡特兰数的九道经典题目

卡特兰数题型详解和取模处理

卡特兰数

[1,	1,	2,	5,	14,	42,	132,	429,	1430,	4862,	16796,	58786,	208012,	742900	..]
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	..

$$f(n) = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

四个公式都是卡特兰数公式

$$f(n) = \binom{2n}{n} / (n + 1)$$

公式1、公式2、公式3时间复杂度O(n)

$$f(n) = f(n-1) \cdot (4n-2) / (n+1)$$

公式4时间复杂度O(n平方)

$$f(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) \cdot f(n-1-i)$$

经常根据数据状况、取模要求来选择公式

卡特兰数题型详解和取模处理

卡特兰数题目类型1 - 进出栈模型

进栈顺序规定为1、2、3...n，返回有多少种不同的出栈顺序

课上重点图解，该问题如何转化为公式1

很多题目都是进出栈模型，本质都是卡特兰数，这里再列三个

1，门票5元，卖票人没钱，n个游客只有5元，n个游客只有10元，确保顺利找零，返回排队的方法数

2，有n个1和n个-1，要组成2n长度的数列，保证任意前缀和 ≥ 0 ，有多少种排列方法

3，圆上有2n个点，这些点成对连接起来，形成n条线段，任意两条线段不能相交，返回连接的方法数

卡特兰数题型详解和取模处理

卡特兰数题目类型2 - 路径计数模型

正方形中， $(0,0)$ 到 (n,n) ，每一步只能向上或向右，可以碰对角线但不能走出右下半区，路径有几种

课上重点图解，该问题如何转化为公式1

掌握卡特兰数的路径计数模型后，利用类似的分析方法，可以解决更多类似的路径计数问题

正方形中， $(0,0)$ 到 (n,n) ，每一步只能向上或向右，除了起点和终点外，不碰对角线，路径有几种

答案为 $2\binom{2n-2}{n-1} - 2\binom{2n-2}{n}$

还有题目6，也是类似的分析方法

卡特兰数题型详解和取模处理

卡特兰数题目类型3 - 划分左右相乘模型

有 $n+2$ 条边的凸多边形，通过顶点连线的方式，完全划分为三角形，连线不能相交，返回划分的方法数

一共有 n 个节点，认为节点之间无差别，返回能形成多少种不同结构的二叉树

课上重点图解，这两个问题如何转化为公式4

卡特兰数题型详解和取模处理

题目1

卡特兰数模版

进栈顺序规定为1、2、3...n，返回有多少种不同的出栈顺序

测试题目的数据量很小，得到的卡特兰数没有多大，不需要取模处理

但是请假设，当n比较大时，卡特兰数是很大的，答案对 1000000007 取模

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P1044>

务必掌握讲解099 - 逆元和除法同余，讲述了阶乘余数表、阶乘逆元表、连续数逆元表的生成过程

公式1：阶乘余数表、阶乘逆元表

公式2：阶乘余数表、阶乘逆元表、求单独数字的逆元

公式3：连续数逆元表

公式4：不需要额外的表，简单的乘法同余、加法同余

公式1、公式2、公式3的时间复杂度 $O(n)$ ，公式4的时间复杂度 $O(n^2)$

公式4不需要，阶乘余数表、阶乘逆元表、连续数逆元表，因为公式4没有用到除法同余

卡特兰数题型详解和取模处理

题目2

圆上连线

圆上有 $2n$ 个点，这些点成对连接起来，形成 n 条线段，任意两条线段不能相交，返回连接的方法数

注意！答案不对 $10^9 + 7$ 取模！而是对 $10^8 + 7$ 取模！

$1 \leq n \leq 2999$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P1976>

卡特兰数题型详解和取模处理

题目3

任意前缀上红多于黑

有 n 个红和 n 个黑，要组成 $2n$ 长度的数列，保证任意前缀上，红的数量 \geq 黑的数量

返回有多少种排列方法，答案对 100 取模

$1 \leq n \leq 100$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P1722>

卡特兰数题型详解和取模处理

题目4

不同结构的二叉树数量

一共有 n 个节点，认为节点之间无差别，返回能形成多少种不同结构的二叉树

$1 \leq n \leq 19$

测试链接：<https://leetcode.cn/problems/unique-binary-search-trees/>

卡特兰数题型详解和取模处理

卡特兰数的取模处理

求解卡特兰数第 n 项，答案对 p 取模，有如下几种数据状况

情况1， n 是 ≤ 35 规模，答案不会溢出`long`类型的范围，往往不取模就返回真实值，使用：公式4

情况2， n 是 10^3 规模， p 为质数，使用：公式1、公式2、公式3、公式4

情况3， n 是 10^3 规模， p 可能是质数也可能是合数，使用：公式4

情况4， n 是 10^6 规模， p 为质数，使用：公式1、公式2、公式3

情况5， n 是 10^6 规模， p 可能是质数也可能是合数，使用：公式2 + 因子计数法

通过题目5重点讲解，公式2 + 因子计数法

情况6， n 是 10^3 规模，题目要求打印长度很大的真实结果，这就是题目8的要求

情况7， n 是 10^6 规模，题目要求打印长度很大的真实结果，这是不可能的，不取模一定算不完

卡特兰数题型详解和取模处理

题目5

有趣的数列(重要！ 因子计数法)

求第n项卡特兰数，要求答案对p取模

$1 \leq n \leq 10^6$

$1 \leq p \leq 10^9$

p可能不为质数

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P3200>

公式2 + 因子计数法，需要最小质因子表，务必掌握讲解097，欧拉筛

课上重点图解，因子计数法的过程

1~n范围上的质因子差不多 $n/(\log n)$ 个，每个质因子求快速幂 $O(\log n)$

总复杂度 = 欧拉筛 $O(n)$ + 因子计数过程 $O(n)$ + 所有质因子计算快速幂 $O(n)$

卡特兰数题型详解和取模处理

题目6

生成字符串

有 n 个1和 m 个0，要组成 $n+m$ 长度的数列，保证任意前缀上，1的数量 \geq 0的数量

返回有多少种排列方法，答案对 20100403 取模

$1 \leq m \leq n \leq 10^6$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P1641>

卡特兰数题型详解和取模处理

题目7

不含递增三元组的排列方法数

数字从1到n，可以形成很多排列，要求任意从左往右的三个位置，不能出现依次递增的样子

返回排列的方法数，答案对 1000000 取模

$1 \leq n \leq 1000$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/SP7897>

测试链接：<https://www.spoj.com/problems/SKYLINE>

这个问题设定不复杂，并且结论居然是卡特兰数，挺有趣，但是目前为止，我没有想到合理的解释

我是用暴力方法生成全部排列，然后把符合要求的数量打印出来，发现是卡特兰数

所以提醒一下，入参简单的问题，莫不如用暴力方法得到前几项，然后观察出答案是什么

建议记住卡特兰数前几项：1, 1, 2, 5, 14, 42, 132...

如果你有比较好的解释，欢迎评论留言！

卡特兰数题型详解和取模处理

题目8

树屋阶梯

地面高度是0，想搭建一个阶梯，要求每一个台阶上升1的高度，最终到达高度n
有无穷多任意规格的矩形材料，但是必须选择n个矩形，希望能搭建出阶梯的样子
返回搭建阶梯的不同方法数，答案可能很大，不取模！就打印真实答案

$1 \leq n \leq 500$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P2532>

java同学可以直接使用BigInteger

C++同学需要自己实现高精度乘法

卡特兰数题型详解和取模处理

题目9

叶子节点数的期望

一共有 n 个节点，认为节点之间无差别，能形成很多不同结构的二叉树

假设所有不同结构的二叉树，等概率出现一棵，返回叶子节点的期望

$1 \leq n \leq 10^9$

答案误差小于 10^{-9} 次方

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P3978>