

Stolt 偏移算法中的插值方法研究

刘 鑫

(广东理工学院 基础教学部, 广东 肇庆 526100)

摘 要:为了提高 Stolt 偏移算法的精度和效率,对该算法采用多种不同的插值方法,有线性插值法、拉格朗日插值法、三次样条插值法和 Sinc 插值法,并进行模型试算。根据程序运行时间和偏移图像得出不同的插值法对偏移成像结果有不同的影响,其中,Sinc 插值法运行速度快且成像精度高,是最适合 Stolt 偏移的插值法。为了保持运行速度,进一步提高成像精度,对 Sinc 插值法进行适当地改进,用数值模型试算结果验证改进是有效的。

关键词:Stolt 偏移;插值方法;Sinc 插值法;成像精度;改进

中图分类号: O174 **文献标识码:** A **文章编号:** 1671-4679(2019)04-0049-05

On the interpolation in Stolt migration

LIU Xin

(Department of Basic Courses, Guangdong Polytechnic College, Zhaoqing 526100, China)

Abstract: In order to improve the accuracy and efficiency of Stolt migration algorithm, many different interpolation methods are used in this paper, such as Linear interpolation, Lagrange interpolation, Cubic spline interpolation and Sinc interpolation, to carry on the model trial calculation. According to the program running time and migration images, different interpolation method has different effect on migration imaging result. Sinc interpolation running speed is fast and imaging accuracy is high, and the best one for Stolt migration is Sinc interpolation by our comparison. To maintain running speed and further improve the imaging accuracy, appropriate improvement have been made to Sinc interpolation method. The experimental results of the numerical model verify that the improvement is effective.

Key words: Stolt migration; interpolation method; Sinc interpolation; imaging accuracy; improvement

由于计算机技术的不断发展以及勘探难度的不断增大,从而使偏移成像进入到复杂地质结构成像阶段^[1]。最初 Stolt 偏移的实现是在介质速度为常数的条件下,但之后 Stolt 改进了此方法,改进的 Stolt 偏移引入坐标拉伸技术,完全可以处理介质速度随地层变化的问题^[2]。基于波动方程的偏移方法大致归为三类:Kirchhoff 积分法、时间域有限差分法 $f-k$ (频率-波数域)变换而实现的偏移算法^[3]。Stolt 偏移属于频率-波数域方法,利用傅里叶变换实现偏移的方法涉及到坐标变换,在保持水平波数不变的情况下,频率轴变换成垂直波数轴(前后分别为结合输入时间轴及输出深度轴的转换变量)。

Stolt 偏移经常作为两步偏移的第一步,因此,研究 Stolt 偏移对于地震勘探仍有着重要的意义^[4-5]。

在 Stolt 偏移过程中,进行傅里叶变换时要作变量代换,由于快速傅里叶变换(FFT)及其逆变换(IFFT)需要整点采样,变量代换无法保证采样点为整数,因此,这里需要进行插值^[6],通过插值完成对波场的重采样,所以插值是 Stolt 偏移过程中极为重要的一步,用不同插值偏移所得到的偏移图像质量不同,因为在离散傅里叶正反变换的过程中会带入假像到偏移剖面里,不恰当的粗糙插值法会导致能量不集中,产生明显的假同相轴,以及大量规则或不规则的噪声,从而使偏移效果差,图像不清晰,不正确的插值甚至会使精确的偏移面扭曲变形,同时插值法也是影响偏移算法运行速度的主要部分之一,不同的插值法会使其运算速度有较大的差别^[7-8]。因此,选择一种精确而又快速的插值法对于

Stolt 偏移算法是非常重要的,本文选用线性插值、拉格朗日插值、三次样条插值、Sinc 插值以及 Sinc 插值的几种改进插值法进行偏移试算。

1 Stolt 偏移理论

从数学的角度来讲,基于波场延拓的正演与偏移问题^[9],它以如下形式的波动方程为基础。

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (1)$$

式中: $P(x, z, t)$ 为传波波场, x 为地表水平距离, z 为地下深度, v 为传播速度, t 为传播时间。

若对方程(1)进行三维傅里叶变换^[10],并记

$$\tilde{P}(k_x, k_z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(x, z, t) \exp$$

$$[-i(k_x x + k_z z + \omega t)] dx dz dt.$$

则根据傅里叶变换中的微分性质

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (i\omega)^n X(\omega) \quad (2)$$

可得

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \leftrightarrow (i\omega)^2 \tilde{P}(k_x, k_z, \omega),$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \leftrightarrow (ik_x)^2 \tilde{P}(k_x, k_z, \omega),$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \leftrightarrow (ik_z)^2 \tilde{P}(k_x, k_z, \omega).$$

将上述关系式代入方程(1)中,得

$$\omega^2 = v^2 (k_x^2 + k_z^2). \quad (3)$$

方程(3)称为单程标量波动方程的频散关系,其中, k_x 为水平波数, k_z 为垂直波数, ω 为角频率。

偏移的过程是由地面上检波器接收到的波场 $P(x, z=0, t)$ 导出地下深度 z 处,且 $t=0$ 时的波场 $P(x, z, t=0)$,那么先对方程(1)两边同时作二维傅里叶变换,且有

$$\tilde{P}(k_x, z, \omega) = \iint P(x, z, t) \exp[-i(k_x x + \omega t)] dx dt.$$

根据傅里叶变换中的微分性质

$$(-it)^n x(t) \leftrightarrow \frac{d^n X(\omega)}{d\omega^n} \quad (4)$$

可得

$$\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial z^2} - k_x^2 \tilde{P} + \frac{\omega^2}{v^2} \tilde{P} = 0. \quad (5)$$

对方程(5)求解,则有

$$\lambda^2 + \left(\frac{\omega^2}{v^2} - k_x^2\right) = 0,$$

$$\lambda = \pm \sqrt{k_x^2 - \frac{\omega^2}{v^2}}.$$

又已知初值为 $P(x, z=0, t)$,其二维傅里叶变换记为 $\tilde{P}(k_x, z=0, \omega)$,根据单程波理论可得方程

(5)的解,即下行波场为

$$\begin{aligned} \tilde{P}(k_x, z, \omega) &= \tilde{P}(k_x, z=0, \omega) \exp\left(iz \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - k_x^2}\right) = \\ &= \tilde{P}(k_x, z=0, \omega) \exp(ik_z z). \end{aligned} \quad (6)$$

然后利用二维傅里叶逆变换,则式(6)变为

$$\begin{aligned} P(x, z, t) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint \tilde{P}(k_x, z=0, \omega) \\ &\exp(i(k_x x + k_z z - i\omega t)) d\omega dk_x. \end{aligned}$$

取 $t=0$,得到 (x, z) 的映像为

$$\begin{aligned} P(x, z, t=0) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint \tilde{P}(k_x, z=0, \omega) \\ &\exp(i(k_x x + k_z z)) d\omega dk_x. \end{aligned} \quad (7)$$

对式(7)直接进行计算是比较困难的,Stolt 处理过程就是把式(7)所表示的二维含参积分转换成一个二维傅里叶变换。根据式(3),将

$$\omega = -\operatorname{sgn}(k_z) v \sqrt{(k_x^2 + k_z^2)},$$

$$d\omega = -v \frac{k_z}{\sqrt{(k_x^2 + k_z^2)}} dk_z.$$

代入到式(7)作变量替换,得到最后的成像结果

$$\begin{aligned} P(x, z, t=0) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint \tilde{P}(k_x, z=0, \omega) \\ &\frac{v k_z}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}} \exp(i(k_x x + k_z z)) dk_x dk_z. \end{aligned} \quad (8)$$

Stolt 偏移就是直接完成式(8)的计算。

2 插值方法与数值算例

2.1 单脉冲记录偏移

输入的叠加记录是 256×256 的数据,水平采样间隔为 $dx=25$ m,时间间隔为 $dt=0.004$ s,介质速度为 $v=6\,000$ m/s,偏移剖面的深度采样间隔为 $dz=12$ m,采样点为256。单脉冲模型如图1所示。

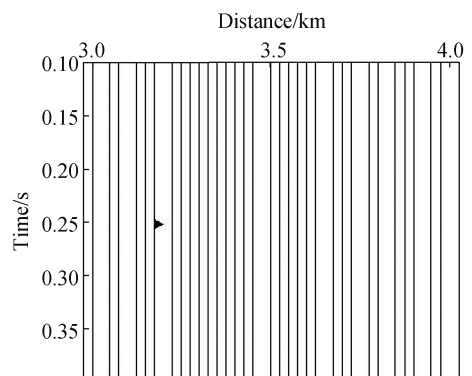


图 1 单脉冲记录

1)线性(Linear)插值。此方法是最简单的两点插值,取最邻近的两个样本点,用以下方程式来得

到两点间插值点。

$$\tilde{P}_{n+\delta n} = (1 - \delta n) \tilde{P}_n + (\delta n) \tilde{P}_{n+1}.$$

式中： $\tilde{P}_{n+\delta n}$ 是待求点的离散频谱值， \tilde{P}_n 是其左边数据点的离散频谱值， \tilde{P}_{n+1} 是其右边数据点的离散频谱值， δn 是点 n 与点 $n+\delta n$ 之间的距离。各点关系如图 2 所示。

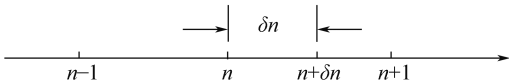


图 2 待求点与其邻近样本点的关系

偏移结果中圆弧的成像位置正确,没有出现假同相轴,基本满足成像要求,但是在圆弧底端与中心轴位置有较强噪音,如图 3 所示。

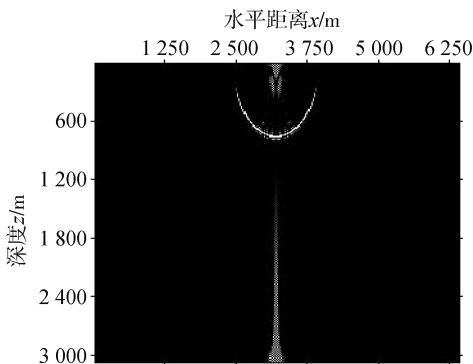


图 3 线性插值的偏移结果

2)拉格朗日(Lagrange)插值。该插值的基本思想是构造通过 $m+1$ 个节点 $x_0 < x_1 < \dots < x_m$ 的 m 次插值多项式 $C_m(x)$ 。先假定它满足以下条件

$$C_m(x_j) = y_j, \quad j = 0, 1, \dots, n. \tag{9}$$

构造满足式(9)的函数,先来定义 m 次插值基函数。

若 m 次多项式 $l_j(x)$ 在 $m+1$ 个节点 $x_0 < x_1 < \dots < x_m$ 上满足条件

$$l_j(x_k) = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases} \quad j, k = 0, 1, \dots, m.$$

那么就称这 $m+1$ 个多项式 $l_0(x), l_1(x), \dots, l_m(x)$ 为节点 x_0, x_1, \dots, x_m 上的 m 次插值基函数,其表达式为

$$l_k(x) =$$

$$\frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_m)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_m)},$$

线性插值的公式实质上就是一次拉格朗日插值多项式^[11],那么 m 次插值多项式 $C_m(x)$ 的表达式为

$$C_m(x) = \sum_{k=0}^m C_k l_k(x).$$

采用二次拉格朗日插值,其偏移结果中噪音的

能量加强了而且噪音主要集中在中心轴上,如图 4 所示。因此,对于复数域的插值使用实数系数,即便是提高插值阶数也不能使成像质量有所改进。

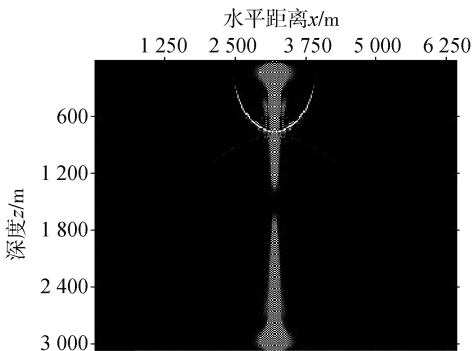


图 4 拉格朗日插值的偏移结果

3)三次样条(Cubic spline)插值。若函数 $S(x)$ 满足以下条件:①函数 $S(x) \in C^2[a, b]$;②函数 $S(x)$ 在每一个区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 上都是三次多项式,且 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ 为给定节点,若对每个节点 x_j ,给定其函数值 $y_j = f(x_j) (j = 0, 1, \dots, n)$,并有

$$S(x_j) = y_j$$

成立,则称 $S(x)$ 是三次样条插值函数^[12]。

要求出 $S(x)$,需要在每个小区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 上确定 4 个待定系数,总共有 n 个区间,所以要确定 $4n$ 个数。根据 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶导数连续,在节点 $x_j (j = 1, 2, \dots, n-1)$ 处应满足连续条件

$$\begin{aligned} S(x_j - 0) &= S(x_j + 0), \\ S'(x_j - 0) &= S'(x_j + 0), \\ S''(x_j - 0) &= S''(x_j + 0). \end{aligned} \tag{10}$$

故式(10)给出 $3n-3$ 个条件,算上满足的插值条件,总共 $4n-2$ 个条件,这样还差 2 个条件,因此,一般在区间 $[a, b]$ 的端点加上一个条件(即边界条件)。通过实际算例可知,使用三次样条插值得到的图像效果与图 4 基本相似,偏移效果不佳,如图 5 所示。

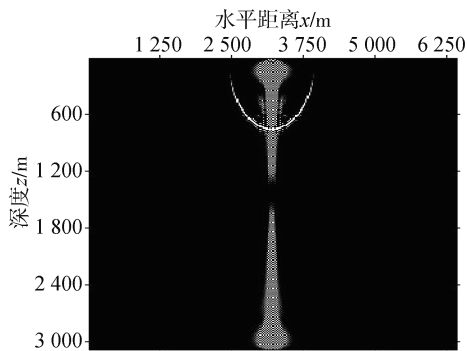


图 5 三次样条插值的偏移结果

4)Sinc 插值。Sinc 插值是数字信号处理中对复数数据采用的较为有效的插值法^[13],其公式为

$$C_r = \sum_{n=0}^{N-1} C_n \exp[i(r-n)\pi] \frac{\sin[(r-n)\pi]}{(r-n)\pi} \tag{11}$$

式中: C_r 为待插值点, C_n 则是采样点, N 表示插值中用到的采样点个数。此插值法利用 Sinc 函数

$$\text{Sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$

Sinc 函数在频域就是一个矩形函数,等同于一个滤波器,可以抑制正确位置以外的成分,再乘上相位因子 $\exp[i(r-n)\pi]$,使偏移结果更为精确。

在试算过程中,分别取用两采样点和八采样点的 Sinc 插值来比较其精确度,即

$$\begin{aligned} \hat{P}_{n+\delta n} &= \exp[i\delta n\pi] \frac{\sin[\delta n\pi]}{\delta n\pi} \hat{P}_n + \\ &\exp[-i(1-\delta n)\pi] \frac{\sin[(1-\delta n)\pi]}{(1-\delta n)\pi} \hat{P}_{n+1}, \\ \hat{P}_{n+\delta n} &= \\ &\sum_{k=-3}^4 \hat{P}_{n+k} \exp[i(\delta n-k)\pi] \frac{\sin[(\delta n-k)\pi]}{(\delta n-k)\pi}. \end{aligned}$$

Sinc 插值的偏移效果非常好,偏移剖面中的半圆弧十分清晰且周围没有明显的噪声,如图 6、图 7 所示。从这两幅图像中难以确定样本点数的差异是否会造成偏移结果的差异,但从理论上讲截取样本点数越多,精度越高,图像效果越好,但同时也会增加计算量,对于不复杂的模型两点 Sinc 插值就可以保证其成像精度。

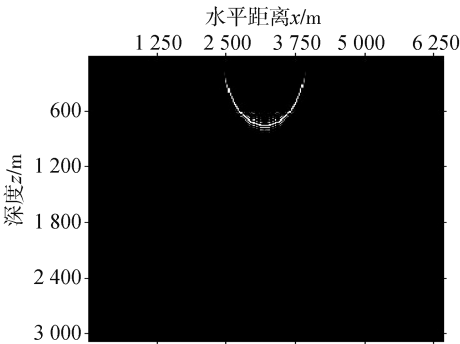


图 6 两点 Sinc 插值的偏移结果

2.2 Sinc 插值的改进

根据算例与图像结果得出 Sinc 插值的效果最好,因此,选取 Sinc 插值来加以改进,看是否能使其更为精确。在对波场插值进行重采样时,显然距离点 $\hat{P}_{n+\delta n}$ 最近的两点 \hat{P}_n 和 \hat{P}_{n+1} 比远离 $\hat{P}_{n+\delta n}$ 的其余点对波场 $\hat{P}_{n+\delta n}$ 的影响要大,那么如果在式(11)中根据距离 $\hat{P}_{n+\delta n}$ 的远近对系数加权,应该可以使插值更

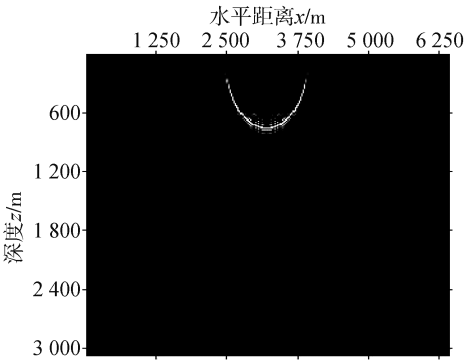


图 7 八点 Sinc 插值的偏移结果

为接近真实波场值,提高运算精度,其基本思想是利用相邻系数之间的差构成新的权系数^[14],不同项的权值不同,对插值的影响也不同,原式(11)可写成

$$C_r = a C_1 + a C_2 + a C_3 + \dots + a_n C_n. \tag{12}$$

式中: a 为权系数, C_r 为待插值点, C_n 为样本点。将式(12)重写为

$$C_r = (a - a) B_1 + (a - a) B_2 + \dots + (a_{n-1} - a_n) B_{n-1} + a_n B_n.$$

式中: B 值满足以下关系

$$\begin{aligned} B_1 &= C_1, \\ B_2 &= C_1 + C_2, \\ B_3 &= C_1 + C_2 + C_3, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$B_n = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n.$$

这里要注意末项 B_n 是个例外,其权系数依旧为 a_n 。

于是在 C_r 之间的插值可分为两步:第一步通过累加算出 B_1 到 B_n 的值,用它们取代 C_1 到 C_n ;第二步用与 B_k 对应的权系数差 $(a_k - a_{k+1})$ 在 B_k 之间插值即可求得 C_r 。

对单脉冲模型的偏移结果比图 6 的两点 Sinc 插值偏移结果的半圆弧更为干净清晰,这说明在截取同样样本点的情况下,该方法要比原 Sinc 插值更为精确,因此,改进是有效的,如图 8 所示。

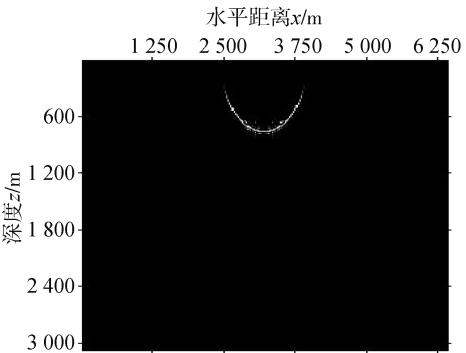


图 8 单脉冲两点改进插值的偏移结果

3 结果与分析

根据各种不同插值偏移后的图像效果及程序运行时间能够得出 Sinc 插值的精度很高,得到的偏移剖面效果最好,而且随着插值样本点的增加,精度会逐渐提高,但相对其运算速度则会下降,经改进的 Sinc 插值比采用同样本点的原 Sinc 插值要更为精确,偏移图像效果更好,而且它的运算速度也没有明显降低,与原插值的速度相差无几,如表 1 所示。

表 1 不同插值法的偏移效果

插值法	精度	运行速度
Linear 插值	++	+++++
Lagrange 插值	+	+++++
Cubic spline 插值	+	++
两点 Sinc 插值	++++	+++++
八点 Sinc 插值	+++++	++++
改进的 Sinc 插值(两点)	+++++	+++++

注:“+”的数量越多,说明精度越高,运算速度越快。

当初始数据经过一次二维快速傅里叶变换后,实数变成了复数,因此,对复波场谱进行插值的时候,常用的实数域插值方法如线性插值、拉格朗日插值和三次样条插值等效果不佳,而 Sinc 插值事实上是频率域插值的一种近似^[15],用该方法对复波场谱进行插值是精确的,为了提高计算效率,实际运用中要选取有限点,但同时也会产生截断误差,改进的插值法以精确的 Sinc 插值为基础,通过改变各插值采样点的权值来减少因丢项而引起的截断误差。

4 结束语

本文主要对 Stolt 偏移算法中的插值方法进行研究,分别选用几种不同的插值法,并且对其中的 Sinc 插值法进行改进。通过对偏移成像效果和程序运行速度的比较分析,得出 Sinc 插值的效果最好,是最适用于 Stolt 偏移算法的插值法,且随着其采样点数的增加,精度也随之提高,通过实际算例证明 Sinc 插值的改进也是有效的,它不仅保有精

确的插值效果同时还保持了计算效率。当实际数据庞大,计算精度要求高的情况下,相信此改进的插值法会成为 Stolt 偏移中适用的插值法。

参考文献

[1] 张宇.从成像到反演:叠前深度偏移的理论、实践与发展[J].石油物探,2018,57(1):1-23.

[2] 张春城,周正欧.基于 Stolt 偏移的探地雷达合成孔径成像研究[J].电波科学学报,2004,19(3):316-320.

[3] 王东,李文卉,熊登,等.静校正对波动方程叠前深度偏移成像效果的影响[J].石油地球物理勘探,2017,52(2):76-80.

[4] STOLT R H. Migration by fourier transform[J]. Geophysics, 2012, 43(1): 23-48.

[5] 梁之勇. Stolt 插值在多核多 DSP 上并行实现[J].雷达科学与技术,2016,14(1):65-70.

[6] YU Z, FERGUSON J, MCMECHAN G. Wavelet-Radon domain dealiasing and interpolation of seismic data[J]. Geophysics, 2007, 72(2):41-49.

[7] 李秀英,耿发展,吴勃英.一种插值新方法[J].大学数学,2018,34(3):1-6.

[8] 杨灿灿,唐震,戈吉南,等.内插方法对黄土丘陵 DEM 精度的影响[J].黑龙江工程学院学报,2018,32(6):11-15.

[9] 俞岱,杨飞龙,孙渊,等.井间地震高斯束叠前深度偏移成像方法[J].物探勘探计算技术,2018,40(2):141-149.

[10] 施博.基于傅立叶变换的无线传感器网络数据建模[J].自动化技术与应用,2016,35(8):71-74.

[11] 林昌华,杨岩.拉格朗日插值法在工程设计及 CAD 中的应用[J].重庆理工大学学报(自然科学),2013,27(12):34-37.

[12] 刘永来,段永宝,官立祥.三次样条插值方法及其在形变数据预处理中的应用[J].勘察科学技术,2017,30(6):47-50.

[13] 王荐,吴波,徐天吉.基于 Sinc 插值与相关谱的纵横波速度比扫描方法[J].西南石油大学学报(自然科学版),2019,41(1):85-90.

[14] 贺振华,G H F. 加德纳. F-K 波动方程偏移的频率域插值方法[J].石油物探,1985,21(1):1-22.

[15] 张东良,孙建国. F-K 反偏移中的插值映射[J].吉林大学学报(地球科学版),2009,39(4):749-754.

[责任编辑:郝丽英]