

基于 MATLAB 的电磁场有限差分法的数值分析

朱永芳

(安徽三联学院 基础部, 安徽 合肥 230601)

摘要:采用 FDTD 方法,通过 MATLAB 软件对二维电磁场进行仿真,对电磁场有限差分法的数值进行分析.结果表明:FDTD 法适合用于计算复杂电磁场数值,矩形无限长槽模型和二维正方形静电场模型都可进行简单电磁场域计算,数值分析显示,矩形无限长槽模型迭代次数为 213,二维正方形静电场模型迭代次数为 62. 电场强度大小从图中线密集程度可反映出来,超松弛法、简单迭代法求解结果和设置的网格数有关.当网格区域值不均时,场的变化不能通过差分格式反映出来.使用麦克斯韦方程组积分形式可将网格内场变化信息能反映出来,得到的差分方程更准确.

关键词:MATLAB 软件;有限差分法;电磁场;数值分析

中图分类号:O175;TM15

文献标识码:A

文章编号:1009-8879(2023)03-0009-06

0 引言

在电磁场计算中,具有简单场域几何形状规则、边界条件的问题才有解析解,多数问题求解须用数值计算方法^[1].在和电磁场相关问题中,要求最好能与实际条件相符的麦克斯韦方程精确解求出^[2].实际应用中得到严格精确解并不容易,只有部分结构简单、典型几何形状的问题才能达到精确解要求^[3].随着计算机技术提高,各种数值求解方法在现代电磁场应用工程中发展起来,且应用广泛^[4].在多种数值求解方法中,根据时域、频域两类进行区分,如矩量法、有限元法、单矩法等都属于频域技术内数值计算方法,属于时域计算方法是传输线法、有限差分法、时域积分方程法等^[5].相对于其他方法,时域有限差分法优点是时域计算直接进行.时域有限差分法能将大量丰富的时域信息直接给出,可对复杂物理过程进行图像描述.在时域有限差分法中,按照空间网格给出被模拟空间电磁性质参量,只要进行相应空间点的设置,复

杂的电磁场结构就能模拟出来;时域有限差分法计算模型是麦克斯韦方程,计算时无需其他方程,以该方程出发,避免使用多种数学工具.在电磁场工程,时域有限差分法各方面均获得应用^[6].在 MATLAB 中,自带有限元工具即偏微分方程工具箱.在进行有限元求解时,使用图形用户界面可分析简单有限元,复杂场计算须用脚本程序编程^[7].本文基于 MATLAB 软件,对电磁场有限差分法数值进行分析.

1 有限差分法理论

在空间和时间上,时域有限差分法对电场 E 、磁场 H 分量采取互相抽样的离散式方式,在每一个电场 E 或磁场 H 分量附近环绕四个磁场 H 或电场 E 分量,利用此离散化方式可对含时间变量的麦克斯韦旋率方程组进行变换,从而得到了一个差分方程,在时间轴上逐渐演进,以便于统计电磁场分布.求解麦克斯韦微分方程组中直接时域法是时域有限差分法,在运算时,就可把样本点磁场或电场直接联系于附近所划

收稿日期:2022-12-12

基金项目:安徽省高校自然科学基金项目“几类泛函微分方程稳定性的研究”(KJ2021A1175);安徽三联学院校级科研项目“关于一类 SEIQR 传染病模型的研究”(KJZD2022011).

作者简介:朱永芳,安徽三联学院基础部讲师,主要从事应用数学研究.

分格点的电场或磁场,从而为空间的每一个单元进行介质参数赋值,因此可求非均匀介质物体、解复杂目标的电磁场问题^[8]. 在计算机上,时域有限差分法可给出可视化图像,对物理过程清晰显示,方便分析问题. 在电磁场数值分析中,可用差分运算^[9]. 对于差分运算来说,基本概念是设定函数 $f(x)$, 如果其独立变量 x 存在很小增量 $\Delta x = h$, 则此函数 $f(x)$ 的增量可用公式(1)表示:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \quad (1)$$

公式(1)为 $f(x)$ 一阶差分,与微分不同,因存在有限量差也被称为有限差分. 将一阶差分 $\Delta f(x)$ 除以增量 h 的商,就可获得一阶差商,具体由公式(2)所示:

$$\Delta f(x)/\Delta x = [f(x+h) - f(x)]/h \quad (2)$$

在增量 h 非常小时,差分 $\Delta f(x)$ 和微分间差异会非常小,具体见公式(3):

$$df(x)/dx \approx \Delta f(x)/\Delta x = [f(x+h) - f(x)]/h \quad (3)$$

通过函数 $f(x)$ 不同形式增量的选取,差分包括中心差分、向后差分. 中心差分具有最小截断误差. 根据上述理论,偏导数可用差商表示,在这一点上的偏导数近似地被每个离散点上的函数的差商所代替,使得所需解的边值问题可以转化为一组相应的差分方程,并且可以根据差分方程来求解每个离散点上将要找到的函数的值. 可用有限差分法近似计算二维拉普拉斯方程,先划分求解区域为网格,再用网格节点上的离散数值代替求解区域内连续场分布. 在网格划分得充分细时可获得很高的精度. 图1为简单迭代法划分的网格.

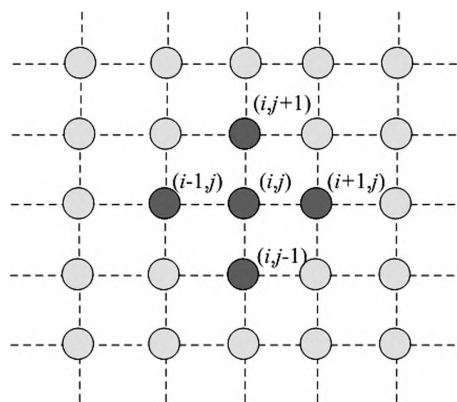


图1 简单迭代法划分的网格

简单迭代法步骤通常是先设定某一网格点

初值,即初值电位,选取恰当初值可将计算步骤大幅简化;在给定初值电位后,根据一个固定顺序对每点的电位依次计算,用围绕其四个点电位平均值是其新值,在计算完全部点后,旧值用新值代替,从而一次迭代运算完成. 在网格中, (i,j) 点在 $n+1$ 次迭代时可用公式(4)表示:

$$\varphi_{i,j}^{n+1} = (1/4)(\varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i,j-1}^n + \varphi_{i-1,j}^n + \varphi_{i+1,j}^n) \quad (4)$$

在简单迭代法基础上改进的计算方法是超松弛法,超松弛法见公式(5):

$$\varphi_{i,j}^{n+1} = \varphi_{i,j}^n + (1/4)(\varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i,j-1}^n + \varphi_{i-1,j}^n + \varphi_{i+1,j}^n - 4\varphi_{i,j}^n) \quad (5)$$

为加快收敛速度,引进一个松弛因子 ω , $\omega = 2/[1 + \sqrt{1 - ((\cos(\pi/m) + \cos(\pi/n))/2)^2}]$, 则可得到公式(6):

$$\varphi_{i,j}^{n+1} = \varphi_{i,j}^n + (\omega/4)(\varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i,j-1}^n + \varphi_{i-1,j}^n + \varphi_{i+1,j}^n - 4\varphi_{i,j}^n) \quad (6)$$

上述公式中, m 为 x 方向网格数, n 为 y 方向网格数.

2 MATLAB 中的基本编程方式

MATLAB 是一种以矩阵为基本单位的编程语言,有自己的数据运算符、数据类型、操作符、丰富函数库、结构化流程控制语句、强大图形处理功能^[10]. 采用 MATLAB 计算矩阵的特点是: MATLAB 中有简明的算术形式、丰富的函数进行矩阵运算,包括矩阵间的加、减、乘、除、乘方、矩阵求逆、自身转置、逻辑运算等十分方便. MATLAB 对矩阵操作便利在对线性方程组求解上可得到体现. 例如在求解一个正定方程组时,设 A 为矩阵, B 表示列向量, $X = A \setminus B$ 可计算获得方程组 $A \times X = B$ 的解. 图2为 MATLAB 进行有限元分析求解框图.

3 MATLAB 对 FDTD 算法的实现

时域有限差分法(Finite-Difference Time-Domain Method, FDTD)是一种求解电磁场问题的数值方法. FDTD 方法直接代替麦克斯韦旋度方程中的微分式,得到场分量的有限差分公式. 使用相同的电参量空间网格来模拟所研究的物体,并选择适当的边界条件和初始场值来求解.

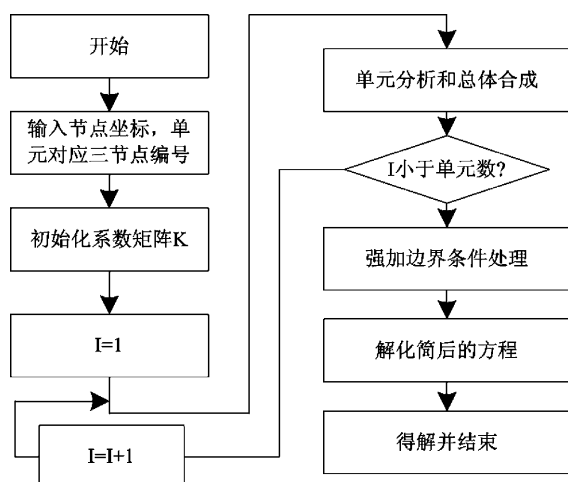


图2 MATLAB 进行有限元分析求解框图

MATLAB 属于一种效果较好的可视化软件,在 FDTD 计算中具有较高的可视化程度,能对动态场效果进行显示。

3.1 边界条件 PML

在 FDTD 法中,边界条件也是非常重要的一部分^[11]。在计算电磁场时,通常都是先假设问题空间为无穷大,即开放系统,而计算中的数据存储容量限制,需在一个有限问题空间植入研究模型^[12]。须设计特殊的有限空间边界,使有限空间和无穷空间面积相等,在边界上,对向边界行进的光波具有外向行进特性,但反射特征并不明显,在内部的空间中不能发生畸变。

3.2 平面波

在二维 FDTD 中,最基本的激励类型为点源,但电磁场问题研究大多为物体、平面波相互作用,具体为目标吸收、散射、透入特性等^[13]。在此问题中,以具有强极化倾向、固定频率的平面波为场源激励。若水平波源位置与点源有所不同,应特别注意。物体、入射平面波中会有发散信号的出现,在媒质不连续面上,入射波、发散信号之和为切向分量的边界条件下,在问题空域中将入射波与发散信号之和总场进行的运算更简便^[14],从总场中将入射波减去即得散射场。一般情况下,将问题空域分为散射场区、总场区、吸收范围(PML)区。问题空域的内部为总场位,当中包括辐射体,场区内还包括了辐射波、入射波;散射场在总场以外,不产生发散信号,也没有入射波,吸收边界状态为散射场外界,而吸收边界状态则只对散射场影响。因总场只产生了入射波,在总场与辐射场连接边加入了入

射波,而进入波的主要来源就是连接边界。入射波长既可单独计量,且入射方向、形状、极化方向等都可独立设置。对平面波产生方法而言,左侧是一个一维序列,在某个格点上添加类似点源的激励,把这个一维激励源逐个地在 j_a 边的格点上添加,就形成了平面波。因总在该场网格点上只进行总场值的储存,而散射场网格点上只进行散射场值的储存,当进行总场和散射场之间边界处或附近网格点数的运算时,需要使用在各自场中并不存在的场值。因此需要特别对待总场和散射场交界处网格点场计算,需重新设定三个区域点场值,具体如下:

第一,在 $j=j_a, j=j_b$ 处设置 E_z :

$$E_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j_a) = E_z^{n-\frac{1}{2}}(i, j_a) + \frac{1}{2} \times H_{x_inc}^n \left(j_a - \frac{1}{2} \right)$$

$$E_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j_b) = E_z^{n-\frac{1}{2}}(i, j_b) + \frac{1}{2} \times H_{x_inc}^n \left(j_b - \frac{1}{2} \right)$$

第二, H_x 在 $j=j_a, j=j_b$ 的外部 scattered field 进行设置:

$$H_x^{n+1} \left(i, j_a + \frac{1}{2} \right) = H_x^n \left(i, j_a + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \times E_{z_inc}^n(j_a),$$

$$H_x^{n+1} \left(i, j_b + \frac{1}{2} \right) = H_x^n \left(i, j_b + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \times E_{z_inc}^n(j_b).$$

第三, H_y 在 $i=i_a, i=i_b$ 的外部 scattered field 进行设置:

$$H_y^{n+1} \left(i_a + \frac{1}{2}, j \right) = H_y^n \left(i_a + \frac{1}{2}, j \right) - \frac{1}{2} \times E_{z_inc}^n(j),$$

$$H_y^{n+1} \left(i_b + \frac{1}{2}, j \right) = H_y^n \left(i_b + \frac{1}{2}, j \right) - \frac{1}{2} \times E_{z_inc}^n(j).$$

当问题空间没有内散射体时,散射场在总场中也不出现,而在总场区内的总场都是平面波,可以用平面波质量对连接的物体质量加以判断。如散射体不存在,那么就不能有散射信号的出现,而此时由于散射场区平面波不能流入,散射施工的中场值也将为零,就可以完成对平面信号源、结构和质量的检测^[15]。总场区不是散射体,但此时则有平面波,平面波形成在总场一边,并平行前进到另一面,未进到散射场区。最后,在总场中加进一圆柱散射体,在传播中观察平面波遇到散射体后散射现象。

3.3 网格尺寸及时间步长的确定

在电磁场学中,FDTD方法在设置网格尺寸时必须选择足够数量的采样点来模拟场分布.在单位波长中,包括采样点的数量涉及许多因素,一般情况下每单位波长选取为10个点,因此网格大小为 0.1λ .在模拟中,激励通常是具有显著带宽的脉冲,因此网格大小应设置为频带的最高频率,即最小波长的0.1倍.由于FDTD方法中的数值色散误差,电磁波与由离散麦克斯韦方程确定的相速度以及离散格式差分离散化后中心的实际相速度之间会出现误差,这会影响到计算结果的准确性.随着射体的尺寸增大,网格尺寸减小,从而可以减小色散误差.时间步长可在确定网格尺寸后得出.为确保算法稳定性,选取时间步长满足Courant条件:

$$v \cdot \Delta t \leq (1/\sqrt{(1/\Delta x^2) + (1/\Delta y^2) + (1/\Delta z^2)}) \quad (7)$$

公式(7)中,电磁波在介质中传播速度为 v .若 $\Delta x = \Delta y = \Delta z$,则各方向网格尺寸相同,在真空中则公式(7)变为公式(8):

$$\Delta t \leq \Delta x / (\sqrt{3} C_0) \quad (8)$$

在通常情况下,为将色散误差减小,取 $\Delta t = \Delta x / (2C_0)$,系数0.5由 $\Delta t \cdot C_0 / \Delta x = 0.5$ 获得.

4 简单模型求解

4.1 矩形无限长槽模型

图3为矩形的无限长槽模型,由图3知,该

模型三块接地导体板构成横截面,属于矩形无限长槽,槽盖板与直流电压100V相接,简单迭代法通过MATLAB软件实现,从而将矩形槽电位分布求解出来.矩形槽的电位函数 φ 在直角坐标系中满足拉普拉斯方程,即: $\partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2 = 0$,其边界条件达到第一类边界条件,见公式(9)所示:

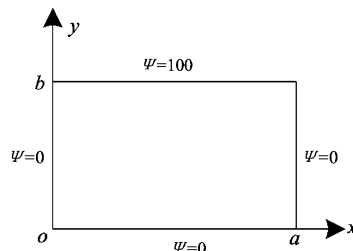


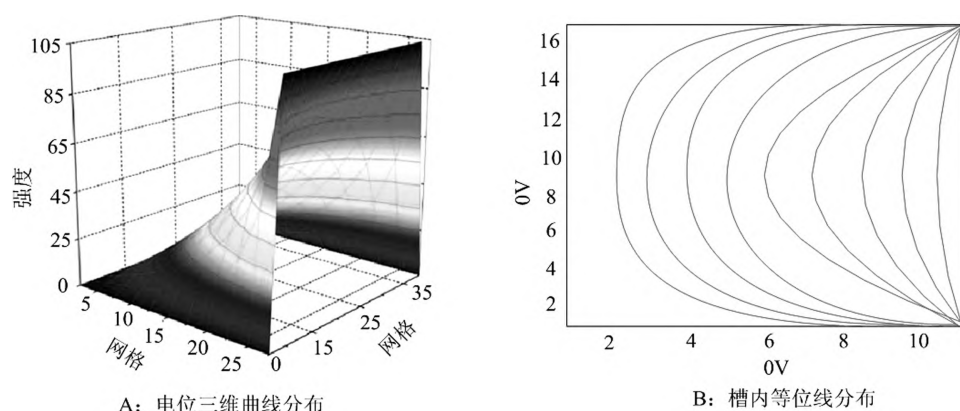
图3 矩形无限长槽

$$\begin{aligned} \varphi(x, y)|_{x=0} &= 0; \varphi(x, y)|_{y=0} = 0; \\ \varphi(x, y)|_{x=a} &= 0; \varphi(x, y)|_{y=b} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

根据模型边界条件,可将已知电位赋给边界节点,再将已知电位初始值给场域内划分的节点赋值,设定步长 $h=1$, x 方向的网格数为 m , y 方向网格数为 n ,共有网孔 $m \times n$ 个,节点数 $hx \times hy$ 个, $(m-1) \times (n-1)$ 为槽内节点数, $(m \times n - (m-1) \times (n-1))$ 为边界节点数,迭代精度设定为 10^{-6} ,进行MATLAB编程.表1为 $m=16, n=12$ 时场域内部分网格精确计算值,图4为网格数 $m=16, n=12$ 的结果.

表1 部分网格精确结果

0	0	0	0	0	0	0	0
0	1.6118	2.9236	3.2744	4.3172	5.1291	5.7046	5.9466
0	2.1055	4.9973	7.6457	9.7541	11.3838	14.5316	13.1109
0	3.9858	8.5183	12.4571	15.6698	18.1201	18.8273	20.8298
0	6.1124	12.5330	17.9946	22.3480	25.5996	26.8277	29.1212
0	8.8199	17.5066	24.6404	30.1279	33.9836	35.7625	38.2826
0	12.4383	23.9331	32.9325	39.4205	43.9203	45.8374	48.4704
0	18.1225	33.1440	43.6360	50.7013	55.3207	57.1962	59.7660
0	28.0187	46.6734	57.7662	64.4280	68.4652	69.8609	72.1327
0	48.3902	67.6533	76.3275	80.7794	83.2511	83.6488	85.3724
0	100	100	100	100	100	100	100

图4 网格数为 16×12 结果图

4.2 二维正方形静电场模型

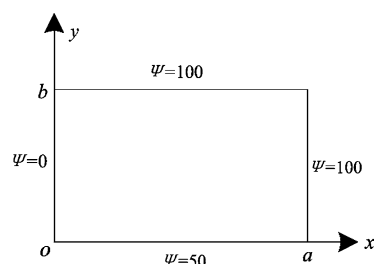


图5 二维静电场模型

图5为二维正方形静电场域, $f(x, y)$ 为其电位函数, 超松弛法通过 MATLAB 软件实现, 可将二维正方形静电场域电位分布求解出来. 已知电位根据模型边界条件给边界节点赋值, 已知电位初始值根据场域内划分的节点赋值, 网格数、步长、边界节点数、节点个数、迭代精度设置类同于简单迭代法.

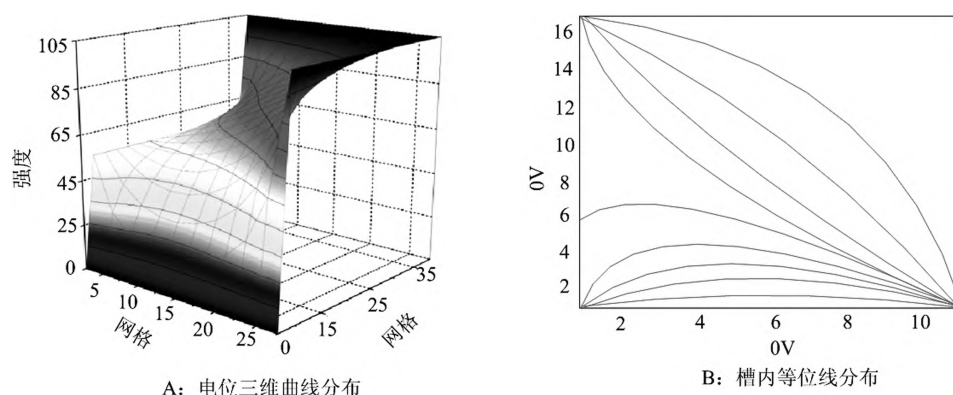
表2为 $m=16, n=12$ 时场域内部分网格精确计算值, 图6为网格数 $m=16, n=12$ 的结果.

表2 部分网格精确结果

0	50	50	50	50	50	50	50
0	25.4759	35.6493	42.4575	45.9031	48.4118	50.1672	51.5213
0	16.9323	29.5527	37.9666	43.9322	48.3659	51.6245	54.1717
0	13.9894	26.4627	36.2239	43.6931	49.3952	53.7931	57.2677
0	13.3515	25.9846	36.6734	45.1210	51.7287	56.8850	60.9706
0	14.2206	27.8510	39.2639	48.3669	55.5135	60.9475	65.4017
0	16.5690	31.8347	44.1423	53.6573	60.8890	66.3898	70.6452
0	21.1332	38.7755	51.8134	61.2088	67.9955	72.9775	76.7358
0	29.9964	50.3407	63.1268	71.3691	76.9066	80.7890	83.6326
0	49.4207	69.4641	78.9841	84.2343	87.4728	89.6393	91.1842
0	100	100	100	100	100	100	100

从等位线图像可知, 电场强度大小从图中线密集程度可反映出来, 超松弛法、简单迭代法求解结果和设置的网格数有关. 三维曲线分布表明, 结果在设置的网格越多越精确. 迭代次数在矩形无限长槽模型为 213, 在二维正方形静电场模型为 62. 超松弛法、单迭代法结果同样可将网格上各取样点间关系反应出来. 当网格区

域值不均匀时, 差分格式无法反映场的变化. 采用麦克斯韦方程组的积分形式, 由于整个网格区域的内部场是积分的, 因此可以直观反映出内部网格场变化的信息, 并且获得一组误差相对较小的差分方程. 对于曲面、槽缝和细线结构的微分处理, 可以从完整形式的麦克斯韦方程组中获得更精确的差分格式.

图6 网格数为 16×12 结果图

5 结 论

本文采用FDTD方法,通过MATLAB软件对二维电磁场进行仿真,对电磁场有限差分法的数值进行了分析,得出如下结论:

(1)对边界条件PML设置、选取时间步长、网格尺寸、有关平面波特性进行理论分析,提高可视化程度,实现动态场效果显示。

(2)FDTD法适合用于计算复杂电磁场数值,MATLAB由于其强大的数组运算、矩阵存储、绘图等功能,在观察整个空域中电磁场值求解过程中具有直观、简便、实时等优点。

(3)矩形无限长槽模型和二维正方形静电场模型都可进行简单电磁场域计算,矩形无限长槽模型迭代次数为213,二维正方形静电场模型迭代次数为62。

参考文献:

- [1] 郭智勇,刘得军.一种圆环电流空间磁场数值计算方法[J].科学与技术工程,2013(29):8715-8720.
- [2] 张通,孙晶.时域有限差分法的MATLAB仿真[J],科技视界,2017(3):18-20.
- [3] 余家敏,吴建民,严昊,等.基于Matlab的电磁振动系统建模与仿真分析[J].机电工程,2019,36(10):1055-1059+1064.
- [4] 李李志,王静.基于MATLAB GUI的电流环磁场分布模拟[J],电子世界,2015(24):150-151.

- [5] CAUDILLO - MATA L A, HABER E, SCHWARZBACH C. An oversampling technique for the multiscale finite volume method to simulate electromagnetic responses in the frequency domain [J]. Computational Geosciences, 2017, 21(5):963-980.
- [6] 万文武,李长伟,熊彬,等.基于谱元法的低频平面波电磁场数值模拟[J].桂林理工大学学报,2020,40(4):703-712.
- [7] 周远国.电磁勘探的谱元法研究[D].厦门:厦门大学,2017.
- [8] 卢忠,胡睿,赵英鹏,等.电磁场能量传输特性实验装置研究[J].浙江工业大学学报,2020,48(1):63-67.
- [9] 周建美,刘文韬,李琳,等.双轴各向异性介质中回线源瞬变电磁三维拟态有限体积正演算法[J].地球物理学报,2018,61(1):368-378.
- [10] 李保来.基于二维电磁场仿真电机轴向力的计算方法[J].微电机,2019,52(8):28-33.
- [11] 万文武.基于有限元—谱元法的电磁场数值模拟[D].桂林:桂林理工大学,2021.
- [12] 曹晓月,殷长春,张博,等.面向目标自适应有限元法的带地形三维大地电磁各向异性正演模拟[J].地球物理学报,2018,61(6):2618-2628.
- [13] 余家敏,吴建民.基于MATLAB的电磁振动仿真分析[J].软件导刊,2020,19(10):116-121.
- [14] 方小姣.基于谱元法的大地电磁二维数值模拟[D].桂林:桂林理工大学,2019.
- [15] 刘颖,李予国,韩波.可控源电磁场三维自适应矢量有限元正演模拟[J].地球物理学报,2017,60(12):4874-4886.

(下转 128 页)

Research on Current Situation and Countermeasures of Youth Campus Football Development in Yunnan

ZHANG Minghao, MA Zhendong

(School of Physical Education, Qujing Normal University, Qujing Yunnan 655011, China)

Abstract: The distribution of campus football characteristic schools and the construction of campus football teams in Yunnan Province are investigated and analyzed by using the methods of literature, questionnaire and mathematical statistics. The result shows that the construction investment of campus football characteristic schools in Yunnan Province should be transferred to southwest Yunnan and rural areas in Yunnan Province; the overall situation of campus football characteristic school construction is positive, but there is a lack of innovation in team construction, and the effect of learning, training and competition is not satisfactory; the design of "four horizontal and four vertical" event system is over idealized, which is divorced from the promotion purpose of promoting practice through competition; and the development of young athletes, school teachers and social coaches is lack of policy and treatment guarantee. The skill growth and academic promotion of excellent campus football players have an increasingly urgent demand for the construction of professional development system. Sports safety guarantee is based on insurance coverage. We should pay more attention to the prevention of sports injury and the intervention of rehabilitation technology, so as to truly solve the worries of athletes and their parents.

Key words: Youth campus football; characteristic school; status survey

[责任编辑:崔 萍]

(上接14页)

Numerical Analysis of Finite Difference Method of Electromagnetic Fields Based on MATLAB

ZHU Yongfang

(Department of Elementary Courses, Anhui Sanlian University, Hefei Anhui 230601, China)

Abstract: The FDTD method is used to simulate the two-dimensional electromagnetic field through MATLAB software, and the numerical value of the electromagnetic field finite difference method is analyzed. The results show that the FDTD method is suitable for calculating the complex electromagnetic field values. Both the rectangular infinite slot model and the two-dimensional square electrostatic field model can be used for simple electromagnetic field calculation. The numerical analysis shows that the number of iterations of the rectangular infinite slot model is 213. The iteration number of two-dimensional square electrostatic field model is 62. The intensity of the electric field can be reflected from the density of the lines in the figure. The solution results of the over-relaxation method and the simple iteration method are related to the number of grids set. When the grid area values are uneven, the field changes cannot be reflected by the difference scheme. The integral form of Maxwell equations can reflect the change information of the field in the grid, and the difference equation obtained is more accurate.

Key words: MATLAB software; finite difference method; electromagnetic field; numerical analysis

[责任编辑:崔 萍]