

作业 1：隐式欧拉程序

谢文进

2021 年 3 月 19 日

1 隐式欧拉方法

求解如下常微分方程：

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{u}{t}, 1 \leq t \leq 2 \\ u(1) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

1.1 精确解

将原方程化为 $tdu + udt = 0$ ，则有 $d(ut) = 0$ ，解得 $ut = C$ (C 为常数)，代入初始条件得 $C = 1$ ，从而该方程的精确解为：

$$u = \frac{1}{t}, (1 \leq t \leq 2).$$

1.2 欧拉方法

代入欧拉格式得：

$$u_{i+1} = u_i + hf(t_i, u_i) = u_i + h\left(-\frac{u_i}{t_i}\right)$$

1.3 隐式欧拉方法

由隐式欧拉格式得：

$$u_{i+1} = u_i + hf(t_{i+1}, u_{i+1}) = u_i + h\left(-\frac{u_{i+1}}{t_{i+1}}\right)$$

移项化简可得：

$$u_{i+1} = \frac{t_{i+1}u_i}{t_{i+1} + h}$$

1.4 程序

根据上述推导，用 python 编写程序，代码如下：

```
1  # implicit euler method
2  import numpy as np
3  import matplotlib.pyplot as plt
4
5  # the right term of the ODE
6  def f(t, u):
7      f = -u/t
8      return f
9
10 # the exact solution of ODE
11 def fexact(t):
12     fexact = 1/t
13     return fexact
14
15 N = 100
16 t_n = 2.0
17 dt = (t_n - 1.0) / N
18 t = np.arange(1.0, t_n + dt, dt)
19 u_euler = np.arange(1.0, t_n + dt, dt)
20 u = np.arange(1.0, t_n + dt, dt)
21 u_true = np.arange(1.0, t_n + dt, dt)
22
23 i = 0
24 while i < N:
25     t[i+1] = t[i] + dt
26     u_euler[i+1] = u_euler[i] + dt * f(t[i], u_euler[i])
27     u[i+1] = (u[i] * t[i+1]) / (t[i+1] + dt)
28     u_true[i+1] = fexact(t[i+1])
29     i = i + 1
30
31 err_euler = max(abs(u_euler - u_true))
32 err_implicit_euler = max(abs(u - u_true))
33 print("The error of euler method: ", err_euler)
34 print("The error of implicit euler method: ", err_implicit_euler)
35
36 # begin drawing
```

```

37 plt.title('Result')
38 plt.plot(t, u_euler, color='green', label='euler')
39 plt.plot(t, u, color='blue', label='implicit euler')
40 plt.plot(t, u_true, color='red', label='exact')
41 plt.legend() # show the legend
42
43 plt.xlabel('t')
44 plt.ylabel('u')
45 plt.show()

```

1.5 结果分析

当取 $h = 0.01$ 时，此时欧拉方法的误差为 0.02631578947368396，隐式欧拉方法的误差为 0.023809523809523836，结果如下图所示：

当取不同 h ，得到的误差如下表所示：

表 1: 不同 h 的误差表

h	欧拉方法	隐式欧拉方法
$\frac{1}{2}$	0.16666666666666663	0.09999999999999998
$\frac{1}{4}$	0.0714285714285714	0.05555555555555558
$\frac{1}{8}$	0.033333333333333215	0.02941176470588236
$\frac{1}{16}$	0.01612903225806467	0.015151515151515138
$\frac{1}{32}$	0.00793650793650813	0.007692307692307665
$\frac{1}{64}$	0.003937007874015519	0.003875968992248069
10^{-1}	0.02631578947368396	0.023809523809523836
10^{-2}	0.0025125628140699185	0.0024875621890547706
10^{-3}	0.0002501250625697726	0.0002498750624687629