作业 3：数值求解热传导方程

谢文进

2021 年 5 月 23 日

1　数值求解热传导方程

1.1　最简显格式

对于如下热传导方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t} \quad 0 < t < 0.03, 0 < x < 1 \\ u(x,0) = \sin(4\pi x) \quad 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = 0 \quad 0 \le t \le 0.03 \\ u(1,t) = 0 \quad 0 \le t \le 0.03 \end{cases} \tag{1}$$

该方程的精确解为 $u(t,x) = e^{-(4\pi)^2 t}\sin(4\pi x), 0 \le t \le 0.03, 0 \le x \le 1.$

首先对时间及空间进行划分，将时间划分为 $m-1$ 份，将空间划分为 $n-1$ 份，则 $\tau = \frac{0.03}{m-1}, h = \frac{1}{n-1}$。根据最简显格式可以得到：

$$u_j^{i+1} = \frac{\tau}{h^2}(u_{j+1}^i - 2u_j^i + u_{j-1}^i) + u_j^i, \tag{2}$$

其中 $i = 0, 1, \cdots, m-1$，$j = 0, 1, \cdots, n-1$。

1.2　编程实现

根据理论推导，用 python 编写程序如下：

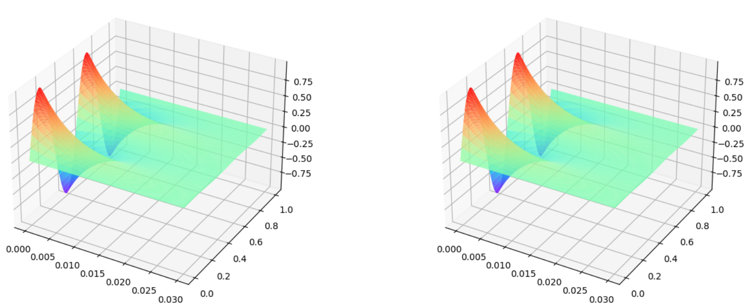
```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Sun May 23 11:16:13 2021

```

```python
@author: XieWenjin
"""

import math
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

t = 0.03    # 时间范围
x = 1.0     # 空间范围
m = input("请输入m: ")
m = int(m)
n = input("请输入n: ")
n = int(n)
# m = 320      # 时间方向分为320个格子
# n = 64      # 空间方向的格子数
dt = t / (m - 1) # 时间步长
dx = x / (n - 1) # 空间步长

def generate_u(m,n):
    u = np.zeros([m,n])
    # 边界条件
    for j in range(n):
        u[0,j] = math.sin(4 * math.pi * j * dx)
    for i in range(m):
        u[i,0] = 0
        u[i,-1] = 0

    # 差分法
    for i in range(m - 1):
        for j in range(1,n - 1):
            u[i+1, j] = dt * (u[i, j + 1] + u[i, j - 1] - 2 * u[i, j])
                / dx ** 2 + u[i, j]
    return u

def drawing(X,Y,Z):
    fig = plt.figure()
    ax = Axes3D(fig)
    ax.plot_surface(X, Y, Z, rstride=1, cstride=1, cmap='rainbow')
```

```python
    plt.show()

def error(u,u_exact):
    err = abs(u - u_exact)
    return max(map(max, err))

X = np.arange(0, t + dt, dt) # remark:t+dt,not t
Y = np.arange(0, x + dx, dx)
X, Y = np.meshgrid(X, Y)
u_exact = np.exp(- (4*np.pi)**2*X)*np.sin(4*np.pi*Y)

u = generate_u(m,n)
u = np.transpose(u) # 注意这里是转置，而不是np.reshape(u,(n,m))

# print(m,n)
print(error(u,u_exact))

drawing(X,Y,u) # 数值解
# drawing(X,Y,u_exact) # 精确解
# drawing(X,Y,abs(u-u_exact)) # 数值解与精确解之差的绝对值
```

1.3 结果分析

当取 $m = 320, n = 64$ 时，得到数值解 $[u]$ 如图 1(a)，精确解 u 如图 1(b)。



(a) 数值解　　(b) 精确解

图 1: $m = 320, n = 64$ 结果图

精确解与数值解之差的绝对值 $||u-[u]||$ 如图 2，计算得到误差为 $||u-[u]||_c = 0.0015189395174771136$。

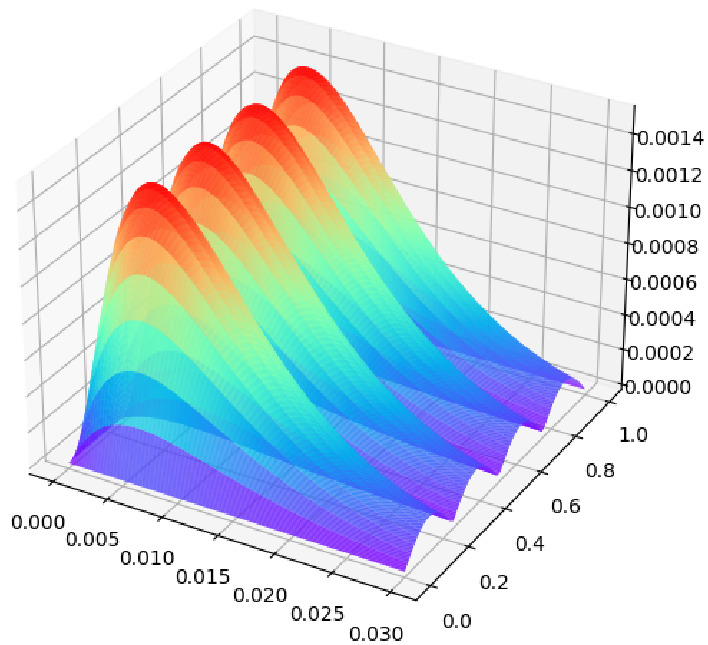


图 2: $||u-[u]||$ 结果图

当取不同的 τ, h 时，计算得到的误差如表所示。

表 1: 不同 τ, h 的误差表

τ	h	误差 e	e_i/e_{i+1}
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0.0428079643162558	
$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{20}$	0.00951825176096948	4.4975
$\frac{1}{160}$	$\frac{1}{40}$	0.00244056613219328	3.9000
$\frac{1}{640}$	$\frac{1}{80}$	0.000606385251482932	4.0248
$\frac{1}{2560}$	$\frac{1}{160}$	0.000151362159712509	4.0062

我们知道最简显格式的误差为 $||[u]^k - u^k|| = O(\tau + h^2)$，设 $e_i = C \times$

$(\tau_i + h_i^2)$，取 $\tau_{i+1} = \frac{1}{4}\tau_i, h_{i+1} = \frac{1}{2}h_i$，可以得到 $\frac{e_i}{e_{i+1}} = 4$，与表 1 结果相符，从而也验证了最简显格式的误差阶数为 $O(\tau + h^2)$.