文章编号：1000-6788(2005)03-0046-06

易腐商品最优订货批量与定价及其粒子群优化解

田志友，蒋录全，吴瑞明
（上海交通大学管理学院，上海 200030）

摘要：对易腐商品的订货批量与定价问题进行了研究．基于一种负二项分布的离散需求函数，推导了易腐品利润最大化模型．由于模型中涉及多个随机变量的概率分布，常规函数极值法对此具有极大局限性，故首次将粒子群优化算法引入该领域，并提出两种不同的求解思路：1)枚举法．利用粒子群算法依次计算不同订货批量下的最大化利润，然后根据边际分析法确定最优订货批量及相应定价；2)二维寻优法．将利润视为订货量与定价的二维函数，利用粒子群算法对其进行二维演化寻优．算例分析表明：两种方法均可有效获得问题的满意解，当订货量波动范围较小时，枚举法效果更优．

关键词：易腐商品；订货批量；定价；需求分布；粒子群优化算法
中图分类号：F830　　文献标识码：A

Optimal Order Quantity and Pricing for Perishable Commodities and Solutions with Particle Swarm Optimization

TIAN Zhi-you, JIANG Lu-quan, WU Rui-ming
(School of Management, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: The problem of ordering policies and optimal pricing for perishable commodities is mainly studied. According to a kind of demand distribution, which can be represented as a negative binomial distribution, the profit maximization model of those products is deduced. Since the model involves several different stochastic distributions, which are difficult for the normal function optimization methods to solve, the particle swarm optimization (PSO) algorithm is introduced for the first time to settle it, and two different solving processes are proposed, one can be called enumerative method, which will calculate the optimal price and maximum profit for each possible orders, and then find the ultimate optimal solution by marginal analysis. The other is two-dimensional search, which can determine the optimal order quantity and price simultaneously with PSO technique. At the end a numerical example is studied and the two methods are compared, the results indicate that: both can obtain satisfactory solutions effectively, and when the bounds for possible orders are relatively small, the first is preferred.

Key words: perishable commodities; order quantity; pricing; demand distribution; particle swarm optimization

1　引言

易腐商品是指那些必须在有限时间内售出，否则将发生质变，必须清仓处理的商品．狭义的易腐商品主要是指生鲜食品，广义来说，凡是超过正常销售期后市场价值有明显降低的商品均可归属易腐品的类别，如时装服饰，电子消费品，客房，机票等服务．由于这些商品保质期或市场需求周期比较短，或具

收稿日期：2004-04-26
资助项目：国家自然科学基金（70371075）
作者简介：田志友(1974—)，男，河北石家庄人，博士研究生，主要研究方向：指数化评价，系统复杂性，Email: totzy@sjtu.edu.cn

有较高的保存成本，持续时间越长则利润损失越大，因此，销售者需要在销售期初，综合考虑市场需求的波动、顾客的消费偏好，以及此类商品的销售期长短，制定合理的采购批量和售价，以确保实现其利润最大化目的．

关于随机需求条件下易腐商品的订货量与定价问题，文献[1-4]给出了较为详尽的评述和一些共性结论，如：不同时段内顾客的到达服从不同质的随机分布，一般设为泊松分布；在同一时段内，顾客的感知价值是相互独立的，并服从某种同质概率分布；这种感知价值将随时间延续而不断降低，并且不同时段内的需求分布有可能发生质变.在满足上述假设条件下，通过经验数据可以获得销售期内的期望需求，进而可以在利润最大化原则下制定出相应的最优定价和最优订货批量．

由于在订货与定价过程中，顾客的到达、对商品价值的感知等均具有不同形式的概率分布，往往导致有效需求的分布形式比较复杂，常规函数极值算法不易获得问题的解析解.本文将在文献[4]研究基础上，重点针对单一时段条件下最优订货批量与定价问题，推导易腐商品的利润最大化模型，并首次将粒子群优化算法引入该模型的求解过程，提出了两种不同的求解思路，以便互相印证，有效地获得单阶段最优订货批量与最优定价．

2　建模

2.1 变量定义

在对易腐商品最优订货批量与定价问题研究中，所涉及的若干变量及其含义如下：

s—易腐商品的订货量；

t—正常销售期；

ù—正常销售期内单位商品的定价；

ö—超过正常销售期后的单位商品处理价；

c—单位商品的综合成本(包括存储、运输、采购、处理等费用)；

ð$_s$(ù)—订货量为 s，定价为 ù 时销售者的期望收入；

R_s(ù)—订货量为 s，定价为 ù 时销售者的期望利润，R_s(ù)= ð$_s$(ù)-sc；

n—正常销售期内到访顾客的总人次，$n = 0,1,2,\cdots,\infty$ ；

m—正常销售期内，定价为 ù 时的商品需求；

$P_{ù}(m)$—正常销售期内，定价为 ù 时，商品需求为 m 的概率分布．

2.2 需求分布

与常见商品的需求分布相似，易腐商品的需求函数也应该满足如下两个条件.

1)　需求与价格呈反方向变动，即 $\sum_{m=0}^{k} P_{w+\Delta}(m) \le \sum_{m=0}^{k} P_{w}(m),\ k=0,1,\ldots,\infty;\ \Delta>0$ ．

2)　当价格趋向于无穷时，期望需求趋向于 0，即 $\lim_{w\to\infty} wE(m\,|\,w) = 0$，其中，$E(m\,|\,w)$ 表示定价为 ù 时的期望需求．

此外，影响易腐商品需求量的主要因素还包括：销售期 t 内的到访顾客人数 n，以及所有到访顾客中可能会发生购买行为的人数 m 等．关于顾客的到达，常见研究中均假设销售期 t 内到访顾客的总人次 n 属于系统外生变量，与定价无关，并服从参数为 λ 的泊松分布[3]，即：

$$P(n\,|\,l) = \frac{(l\,t)^n e^{-l\,t}}{n!},\ \ n = 0,1,2,\ldots,\infty \tag{1}$$

考虑到不同时段内顾客到达率 ë 具有较大波动性，可假设 ë 服从参数为(á, â)的 gamma 分布，即：

$$g(l) = \frac{1}{\Gamma(a)b^{a}}\, l^{(a-1)} e^{-l/b},\ \ 0 \le l < \infty \tag{2}$$

之所以选择 gamma 分布，是因为到达率 ë 是一个非负取值的随机变量，并且，当参数 á 或 â 取某固定值时，原来的 gamma 分布将相应地转化为 c^2 分布或指数分布．因此，选择 gamma 分布可以涵盖较多的 ë 的变动情况[4]．

在所有到访顾客中，只有那些对商品的感知价值超过定价的顾客才会发生购买行为.设第 i 位到访顾

客的感知价值为 $X_{\rm i}$，0 $X_{\rm i}$< ，根据 Gallego 等人的研究[3]，可以认为所有到访顾客的感知价值(X_1, X_2, …, $X_{\rm n}$)均为独立同分布的连续随机变量，概率密度设为 $f(x)$.当定价为 ù 时，顾客感知价值的累积分布函数为 F(ù)，并且满足：$0 \le F(w) \le 1$；$\lim\limits_{w\to\infty} F(w)=1$.我们可以把销售期 t 内的商品需求 m 定义为：到达并愿意以当前定价购买一单位商品的潜在人次，即所有感知价值 $X_{\rm i}$ ù 的顾客人数.则潜在需求 m 可以表示为一个服从二项分布的随机变量，分布概率为：

$$P_w(m\,|\,n) = C_m^n \times [1-F(w)]^m \times [F(w)]^{(n-m)}\ ,\ m=0,1,2,\ldots,n. \tag{3}$$

根据公式(1)-(3)，销售期 t 内潜在需求 m 的最终概率分布可以表示如下：

$$\begin{aligned} P_w(m) &= \int_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_w(m\,|\,n) P(n\,|\,l) g(l) d\,l \\ &= C_m^{m+a-1} \times \left[\frac{b\,t[1-F(w)]}{1+b\,t[1-F(w)]}\right]^m \times \left[\frac{1}{1+b\,t[1-F(w)]}\right]^a ,\ n=0,1,\ldots,\infty;\ m=0,1,\cdots,\infty; \end{aligned} \tag{4}$$

可以看出，最终所得销售期内的需求 m 服从一种负二项分布，其期望值为：$E(m)=abt(1-F(w))$.

2.3 利润最大化模型

当期初订货量为 s 时，如果销售期 t 内的潜在需求 m s，则销售收入 ð$_s$(ù)=sù；如果 $m<s$，意味着部分商品将在销售期过后按处理价 ö 进行低价清仓，则此时的销售收入为：ð$_s$(ù)=mù+(s-m)ö.综合两种情况，可得 s 单位易腐商品在定价为 ù 时的期望收入为：

$$\begin{aligned} p_s(w) &= \sum_{m=s}^{\infty} sw P_w(m) + \sum_{m=0}^{s-1} [mw + (s-m)j\,] P_w(m) \\ &= sw - sw\sum_{m=0}^{s-1} P_w(m) + \sum_{m=0}^{s-1} [mw P_w(m) + sj\, P_w(m) - mj\, P_w(m)] \\ &= sw - (w-j\,)\sum_{m=0}^{s-1} (s-m) P_w(m) \end{aligned} \tag{5}$$

对应的销售利润为：

$$R_s(w) = p_s(w) - sc = s(w-c) - (w-j\,)\sum_{m=0}^{s-1}\left\{(s-m)\times C_m^{(m+a-1)}\left[\frac{b\,t[1-F(w)]}{1+b\,t[1-F(w)]}\right]^m \left[\frac{1}{1+b\,t[1-F(w)]}\right]^a\right\} \tag{6}$$

则最优订货量 s^*和最优定价 ù*就是如下最大化模型的解：

$$\begin{aligned} &\max\quad R_s(w) = s(w-c) - (w-j\,)\sum_{m=0}^{s-1}(s-m)P_w(m) \\ &s.t.\quad w>j\,;\ s>0; \end{aligned} \tag{7}$$

由于潜在需求 m 和顾客达到人次 n 均为离散取值随机变量，顾客对商品的感知价值则为连续分布随机变量，如采用求偏导数等常规函数极值法，将很难获得问题的解析解.下面我们选用粒子群优化算法，对模型(7)进行演化求解.

3 粒子群优化求解

粒子群优化算法(Particle Swarm Optimization, PSO)是一种较新的全局优化方法，最早由 Eberhart 和 Kennedy 博士于 1995 年提出[5].与遗传算法相比，粒子群算法没有交叉、变异等遗传操作，可调参数少，具有结构简单、运行速度快等特点，尤其适用于实数编码问题的求解.将其引入易腐商品最优订货批量与定价的求解过程，有利于快速有效地获得满意解.

3.1 算法描述

在粒子群算法中，待优化问题的每个潜在解均称为搜索空间中的一个粒子，每个粒子都用位置向量和速度向量来表示.其中，位置代表参数取值，速度表示各参数改进的方向和步长.算法首先通过随机初

始化产生一群粒子，然后进行叠代寻优.在每一演化代中，粒子通过跟踪两个极值来不断更新自己：一个是粒子本身所找到的最优解，称为个体极值 *pBest*，另一个是整个种群目前为止所找到的最优解，称为全局极值 *gBest*.然后根据下列公式来不断更新速度与位置：

$$V = w\times V + c1\times rand()\times(pBest - \Pr esent) + c2\times rand()\times(gBest - \Pr esent) \quad (8)$$

$$\Pr esent = \Pr esent + V \quad (9)$$

其中，V 是粒子速度，*Present* 是粒子当前位置，*rand* ()表示是(0, 1) 之间的随机数，$c1$ 和 $c2$ 被称作学习因子，通常，$c1 = c2 = 2$. w 表示加权系数，一般取值在 0.1 到 0.9 之间.叠代过程中，算法将根据粒子的适应度值不断更新 *pBest* 与 *gBest* 的取值,粒子在不断向全局最优转移的同时也不断向个体最优靠拢.当满足既定的终止规则，如达到预定演化代数、出现满足要求的满意解，或全局极值的改进步长小于指定阈值时，搜索过程结束，最后得到的 *gBest* 就是最终的满意解[6].

3.2 求解

在利用粒子群算法求解模型(7)时，可以有两种不同的解题思路, 分别命名为枚举法和二维寻优法.

3.2.1 枚举法

根据边际分析法，当边际收益不小于边际成本时，即：$p_s(w_s^*) - p_{s-1}(w_{s-1}^*) \ge c$ 时，多订购一单位商品将增加销售商的净利润.因此，可以把利润视为价格 ù 的一元连续函数，利用粒子群算法依次计算不同订货量情况下所对应的最优定价与最大化利润，并将满足上述不等式的最大订货批量 s^* 及其对应的定价 w_s^* 作为最终解.

设订货量的波动范围是：$[s_l, s_u]$，求解流程描述如下.

1) 令 $s=s_l$;
2) 利用粒子群算法求解一元连续函数 $R_s(w) = sw - (w - j)\sum_{m=0}^{s-1}(s-m)P_w(m)$ 的最优订价 w_s^* 与最大化利润 $R_s(w_s^*)$;
3) 判断：如果 $s<s_u$，令 $s=s+1$，转入步骤 2)，否则继续;
4) 令 $p_s(w_s^*) = R_s(w_s^*) + sc$，$\Delta = p_s(w_s^*) - p_{s-1}(w_{s-1}^*)$，然后确定满足 $\Delta \ge c$ 的最大订货量 s^* 及对应的 w_s^*;
5) 输出最终结果：$[s^*,\ w_s^*,\ p_s(w_s^*),\ R_s(w_s^*)]$.

二维寻优法

将利润 R_s(ù)视为订货量 s 和定价 ù 的二元函数，利用粒子群算法在二维解空间进行演化寻优，从而同时确定最优订货量 s^* 及最优定价 ù*.求解过程如下：

1) 个体解编码.每个粒子编码方式如下：p=[s, ù, v_s, $v_{ù}$, f].其中，v_s 和 $v_{ù}$,分别为 s 和 ù 的运动速度，f 为该粒子的适应度值，即当订货量为 s、价格为 ù 时的销售利润;
2) 粒子群初始化.设种群规模为 *popsize*，在订货量 s 和价格 ù 的波动范围内随机取值 *popsize* 组，作为初始种群，并随机初始化粒子的速度;
3) 根据公式(6)，计算粒子的目标函数值;
4) 根据公式(8)和(9)，更新粒子运动速度和所在位置;
5) 更新当前演化代中的个体极值和全局极值;
6) 检验终止规则.当满足指定规则时输出最终结果.否则，转入步骤 3);
7) 输出最优结果.最后一代种群中的 *gBest* 即为满足利润最大化条件的最优解.

4 算例分析

设某种易腐商品的销售期 t=1，单位成本 c=6，超过正常销售期后的处理价 ö=5.根据以往销售数据，销售期内顾客的到达率 ë 服从 gamma 分布，参数为：á=3，â=2；顾客的感知价值 X_i 服从正态分布，分布参数为：ì =10，ó=1.则当订货量为 s、价格为 ù 时，利润函数为：

$$R_s(w) = s(w-6) - (w-5)\sum_{m=0}^{s-1}(s-m)P_w(m) \quad (10)$$

首先利用枚举法求解最优订货量与定价.算法参数设定如下：种群规模 *popsize*=100；学习因子 $c1=c2=2$；加权系数取固定值 w=0.2.根据销售经验，设订货量 *s* 取值范围为[1，20]，售价 *ù* 取值范围为[*c*, 2*c*]，即[6, 12]；*s* 和 *ù* 的速度取值范围分别为[0, 0.3]和[0，0.1]；算法终止规则为：当全局最优解改善程度小于 0.01 时终止运行.枚举法所得结果见表 1.

表 1 不同订货量情况下所对应的最优定价及最大化利润

订货量 *s*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
最优定价 *ù*	10.08	9.803	9.603	9.452	9.335	9.244	9.171	9.114	9.069	9.033
最大化利润 *R*	3.38	5.877	7.693	8.944	9.723	10.109	10.175	9.986	9.595	9.048
订货量 *s*	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
最优定价 *ù*	9.005	8.982	8.965	8.952	8.941	8.933	8.927	8.923	8.92	8.917
最大化利润 *R*	8.382	7.625	6.801	5.927	5.017	4.08	3.125	2.156	1.178	0.193

从表 1 可以看出，当需求分布已知时，最大化利润将随订货量 *s* 增加而呈现先增后减趋势，而边际收益则持续下降.当边际收益等于边际成本时，所对应的最优订货量为 7，最优定价为 9.171，最大化利润为 10.175.从图 1 中也可看出各变量的变动趋势.

利用二维寻优法求解.设种群规模分别为 10，50，100，150，200，其它参数保持不变.所得结果参见表 2.

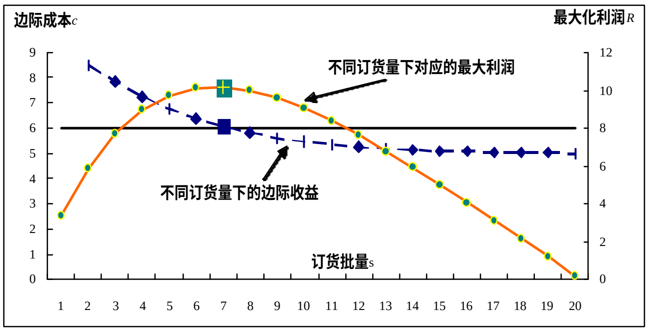

图 1 销售利润及边际收益、成本随订货量增加的变动趋势

表 2 不同种群规模下所得结果的对比

种群规模 / 最优解	10	50	100	150	200
最优订货量	3	7	6	7	7
最优定价	7.56	9.24	9.13	9.17	9.17
最大化利润	3.75	10.16	10.07	10.18	10.18

在二维寻优过程中，随着种群规模的增加，算法将逐渐收敛于全局最优，即订货批量为 7，定价为 9.17，这与枚举法所得结论是一致的.

通过对算例的求解可以看出：枚举法的实质是在订货量 *s* 既定情况下，将利润视为价格 *ù* 的一元连续函数，利用粒子群算法进行一维优化，从而得到不同订货量下的最大利润与最优定价，然后根据边际分析，确定最优订货批量与定价.其特点是：准确度高，但效率较低，主要适用于订货量 *s* 波动范围较小的情况.二维寻优法的实质是将利润视为订货量和定价的二维函数，利用粒子群算法同时在 *s* 和 *ù* 所构成的二维解空间内寻找全局最优解，这种方法的特点是运行速度快，但容易停留在局部最优.因此，在实际操作中，建议同时采用两种方法，分别计算最优解，并互相印证，以便帮助销售者制定更为合理的采购与定价决策.

5 结论

1)在易腐商品订货量与定价研究中，最为关键的是准确估计销售期内的需求分布，而影响需求的主要因素包括：商品定价，顾客的到达情况，以及顾客对商品的感知价值.

2)当其他参数不变时，对粒子群算法演化结果影响最大的参数就是种群规模.这是因为：粒子群算法是一种有导向的概率寻优方法，其探索未知空间的主要方式是通过跟踪全局极值和个体极值来实现的，增加种群规模有利于尽快发现全局最优.

3)本文将整个销售期 *t* 视为一个完整阶段，并重点解决了最优订货批量与最优定价问题.由于顾客对易腐商品的感知价值将随时间的延续而不断缩减，不同时段内的需求分布有可能发生质变，而销售者也可以根据需求的波动、剩余库存量的多少等动态调整定价，以实现利润最大化目的.因此，对不同时段内、不同质需求条件下的最优定价与最优订货批量等问题，都还需要进一步的详细研究.

参考文献：

[1] Weatherford L R, Bodily S E. A taxonomy and research overview of perishable-asset revenue management: Yield management, overbooking, and pricing [J]. Operations Research,1992,40(5):831-844.
[2] Wen Zhao, Yu-Sheng Zheng. Optimal dynamic pricing for perishable assets with nonhomogeneous demand [J]. Management Science,2000,46(3):375-389.
[3] Gallego G, Van Ryzin G. Optimal dynamic pricing of inventories with stochastic demand over finite horizons [J]. Management Science,1994,40(2):999-1020.
[4] Young H Chun. Optimal pricing and ordering policies for perishable commodities [J]. European Journal of Operational Research.2003,144(1):68-82.
[5] Kennedy, R C Eberhart. Particle swarm optimization [A]. Proceedings of the 1995 IEEE International Conference on Neural Networks [C].Perth,Australia, 1942-1948.
[6] 侯志荣，吕振肃．基于 MATLAB 的粒子群优化算法及其应用[J].计算机仿真,2003,20(10):68-70.
Hou Zhirong, Lv Zhensu. Particle swarm optimization with application based on matlab [J]. Computers Simulation, 2003, 20(10): 68-70. (In Chinese)

* *

(上接第 6 页)

[7] Engle R F, Manganelli S. CAViaR: Conditional autoregressive value at risk by regression quantiles[R]. NBER, Working Paper 7341, 1999.
[8] Hamilton J D. Time Series Analysis[M].Princeton University Press, New Jersey,1994.
[9] Hans F and Alexander S. Stochastic Finance, An Introduction in Discrete Time[M].Walter de Gruyter,2002.
[10]Hansen B E. Testing for parameter instability in linear models[J]. Journal of Policy Modeling,1992,14(4):517-533.
[11] Inclan C and Tiao G C. Use of cumulative sums of squares for retrospective detection of changes of variances[J]. J. Amer. Statist. Assoc,1994, 89(3):913-923.
[12] Jorion P. Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk[M].Chicago: Irwin Professional Publishing,1997.
[13] Morgan J P. Risk Metrics Monitor[M]. 2nd Quarter,1996.
[14] Koenker R, Bassett J. Regression quantiles[J]. Econometrica,1978,46(1):33-50.
[15] Manganelli S, Engle R F. Value at risk models in finance[R]. working paper(75), European Central Bank,2001.
[16] Schwert G W. Why does stock market volatility change over time?[J]. Journal of Finance, 1988,XLIV(5):1115-1153.
[17] Taylor S. Modeling Financial Time Series[M]. John Wiley and Sons, London, 1986.