单位代码：10359　　　　　　　　　　　　　　　　　　分 类 号：O227

学　　号：201011271618　　　　　　　　　　　　　　　　密　　级：

合肥工業大學
Hefei University of Technology

硕士学位论文

MASTER DEGREE THESIS

论文题目：一类商品销售的 newsboy 模型

学位类别：学 历 硕 士

学科专业：(工程领域) 应 用 数 学

作者姓名：吴 艳

导师姓名：杨志林　教授

完成时间：2013 年 04 月

一类商品销售的 newsboy 模型

The newsboy model of commodity sales

作　者　姓　名　　吴　　艳

学　位　类　型　　学 历 硕 士

学　科、专　业　　应 用 数 学

研　究　方　向　　运筹与优化

导 师 及 职 称　　杨志林 教授

2013 年 4 月

合 肥 工 业 大 学

本论文经答辩委员会全体委员审查，确认符合合肥工业大学硕士学位论文质量要求。

答辩委员会签名：（工作单位、职称）

主　席：

安徽大学　　　　教授

委　员：

合肥工业大学　　　　教授

合肥工业大学　　　　教授

导　师：

合肥工业大学　　　　教授

独 创 性 声 明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得 合肥工业大学 或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签名：吴艳　　　　签字日期：2013年4月24日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解 合肥工业大学 有关保留、使用学位论文的规定，有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权 合肥工业大学 可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

（保密的学位论文在解密后适用本授权书）

学位论文作者签名：吴艳　　　　导师签名：杨志林

签字日期：2013年4月24日　　　　签字日期：2013年4月24日

学位论文作者毕业后去向：

工作单位：　　　　电话：

通讯地址：　　　　邮编：

一类商品销售的 newsboy 模型

摘要

报童模型主要是解决需求随机下寻求使得期望利润最大化的产品最优订购量问题。在现实生活中，单周期库存问题应用比较广泛，主要是与日常生活有关的消费品的存货与销售决策问题。随着科学技术的快速发展和消费者需求的多样化，产品的更新换代加速，产品的生命周期变得越来越短。越来越多的产品销售问题都可以归结为报童模型的库存控制问题，即在面对需求的不确定性，零售商将如何决策短生命周期产品的最优订购量，从而获得期望收益最大化。

本文主要考虑了两大类产品销售的报童问题，研究的主要内容如下：

（1）第一类研究了供应商提供量折扣下的季节性产品销售的报童问题。主要考虑了季节性商品二次订购和二次销售的问题并假设第一阶段的商品需求是依赖其价格的随机变量，且其订购成本采用全单位批量折扣；第二阶段假设需求是同时依赖销售价格和广告费用的随机变量。通过对此模型的分析，给出了模型的最优解。

（2）第二类研究了家电产品在以旧换新模式下的报童问题。本文以销售商利润最大化为目标，通过模型的推导和分析，得到了销售商在以旧换新模式下的最优抵用价格和最优订购量。

关键词：报童问题；最优解；订购量；季节性；

The newsboy model of commodity sales

ABSTRACT

Newsboy model mainly aims to solve the problem of product's optimal order quantity,which helps to seek for the maximal expected profit under stochastic demand. What is widely used in real life is the single-period inventory problem, such as the stock of goods and sales decisions related to daily life. With the rapid development of science and technology and the diversity of consumer's demands, the update of product is accelerating and the life cycle is becoming increasingly shorter. More and more problems of product sales can be classified as inventory control problem in terms of newsboy model——how should retailers decide the optimal order quantity of short life cycle products in face of demand uncertainty in order to achieve the maximal expected profit.

This paper mainly takes into account two types of newsboy problem in product sales. The following are the major contents of the research:

(1)The first type studies the newsboy problem of seasonal product sales under bulk discounts provided by suppliers. It mainly concerns about the reorder and resale of seasonal products. It is presumed that commodity demand in the first stage relies on the random variable of price， and the ordering cost applies all-unit quantity discount; in the second stage, demand is a random variable relying on sales price as well as advertising costs. An optimal solution to the model is offered through an analysis of the model.

(2)The second type studies the newsboy problem of household appliances under the trade-in model. Through deducing and analyzing the model with the goal of maximizing the profit of distributors, the paper finds out the optimal compensating price and order quantity under the trade-in model.

Keys words: Newsboy model, optimal solution, order quantity, seasonal;

致谢

光阴荏苒，日月如梭，三年紧张而又忙碌的硕士生涯即将结束了，回味过去的三年，有汗水亦有收获。

明师之恩，诚为过于天地。感谢我敬爱的导师杨志林教授。杨老师严谨的治学态度和一丝不苟的工作作风是我学习的楷模。杨老师不仅在学业上给予我细心地指导，同时还在思想和生活上给予我无微不至的关怀。在此谨向杨老师表示诚挚的感谢和崇高的敬意！

感谢吴化章老师、王圣东老师以及其它给我关心和帮助的老师们。同时感谢学校和学院为我提供了良好的学习环境和优越的学习条件！

感谢师兄宋辉、师姐陶胜及其他师兄弟姐妹对我的大量问题的耐心解答，他们是我学习的榜样；感谢杨森、石兵兵等同学在生活上和学习上给我的帮助、鼓励和支持。我会永远铭记在心！

感谢我的家人，他们给予我物质上以及精神上的极大支持，使得我能够安心的完成学业。在此祝愿他们永远健康，永远幸福！

最后，感谢审阅硕士论文和出席硕士论文答辩会的各位专家学者。敬请各位专家学者和同行批评指正！

作者：吴艳

2013 年 4 月

目录

第一章绪论

1.1 Newsboy 模型的重要

什么是 Newsboy 模型呢？Newsboy 模型也被称作单周期库存模型。主要是解决在随机需求下寻求使得期望利润最大化的产品最优订购量问题[1]。在随机型库存问题中，常见的随机性因素是需求以及时间。报童问题就是典型的单阶段随机型需求模型。主旨是寻找产品最优订购量，使得模型达到最大化期望收益或最小化期望损失。在现实中，与日常生活有关的消费产品的销售和库存都与报童模型有关，比如时装、报纸、容易腐烂的商品、电子产品等等。报童模型已被应用于很多领域，比如制造及零售业的辅助决策、时尚健身行业、航空和旅馆的管理容量和评估预订等。随着科学技术的进步以及消费者需求更加突出的多样化和个性化，产品更新换代的速度不断加快，导致商品的生命周期越来越短，因此，越来越多的商品订购问题都可以归结为报童模型。

1.2 Newsboy 模型的研究现状

几十年以来，研究者们对 Newsboy 型产品的库存问题的兴趣一直未减，自 Whitin 在 1956 年首次推广了报童模型，假定价格是一个决策变量，引起学术界的广泛关注，Mills (1959,1962) , Karlin 和 Car(1962) , Young(1978) , Lau 和 Lau(1988) , Polatoglu(1991) , Petruzzi 和 Dada(1999) 研究了单周期联合定价与库存控制问题. Thomas(1974) ,Thowson(1975) , Fedegruen 和 Heching(1999) , Chen 和 Simchi-Levi(2004) 等研究多周期联合定价与库存控制问题. Chan, Shen, Simch-i Levi 和 Swan(2003) , Yano 和 Gilbert(2005) 以及 Petruzzi 和 Dada(1999) 给出了全面的综述.在很多方面，许多的研究者都对传统的报童问题进行了延伸。有着大量的研究文献及综述。

有的研究者是对模型决策的变量以及参数的扩展，主要是增加决策变量和模型中确定常数的方法。Khouj 等[2]考虑了受广告影响的报童模型，在构建模型时加入了广告费这个决策变量。汪俊萍等[3]则研究了需求率同时依赖销售价格和广告费用的报童模型，给出了寻求最优广告费用、订购量以及销售价格的求解方法，并且分析了需求的不确定性对最优销售价格和广告策略的影响。

有的研究者扩展了可追加订货的报童模型。刘丽华等[4][5]研究了在模糊环境下的可追加订购的报童模型，假设追加订购的价格、缺货损失费以及商品的残值均为模糊变量，建立了一个随机和模糊混合的报童模型，通过混合智能算法求得了最优订购量和最优的追加订购量。王圣东等[6]考虑了需求形式为一般随机变量情形下零售商的两次订购决策模型，并且从理论上分别证明了两个阶段需求相关下,零售商最优订购策略的存在唯一性,从而弥补了现有模型在寻求

最优订购策略时采用数值方法所存在的缺憾;

有的研究者则从二次销售着手对经典的报童模型进行了扩展。宋海涛[7][8]分析了带有两次订购、两次销售的报童模型。马福珍[9]则考虑了从追加订购和季节性销售两个方面，得到最佳的订购量，使新模型的期望利润达到最大，通过研究我们可以发现新模型比传统的报童模型或一次订购二次降价销售的报童模型或可追加订购的报童模型的利润均有较大的提高，还分析了模型的灵敏度及服务水平。

有的研究者则从对目标函数进行了扩展，近年来的研究主要集中在系统动态性、投资回报及决策者风险偏好。Konstantin[10]研究了在连续时间里生产是多阶段的单周期报童模型，决策者在每个阶段都可以进行决策，使整个系统是处于一个动态的变化过程当中。张桂清等[11]分析了概率预期下风险补偿模型用于解决部分信息的报童问题。在确定性预期和基本概率预期下，分别为具有风险偏好的报童设计了最优订购策略，使报童可以根据不同的风险偏好性和未来预期选择订购策略。

有的研究者把时间因素扩展到报童模型中去。蔡清波等[12]研究了满足均匀分布的需求函数，销售商对需求的预测准确度是随时间而变化的，根据传统的报童模型，建立了一个带有时间决策的扩展报童模型。李明坤等[37]从进货价格是有关时间函数、订购量也是时间函数、订购成功的概率也是时间的函数这三方面考虑了基于时间因素下的报童模型问题。这种考虑时间因素的有关扩展，给以后的研究者们带来了很大的启发性。

有的研究者则从约束条件的变化扩展了报童模型，比如苏欣等[13][14]研究了带有预算约束的报童模型，从一般费用约束，缺货预算费用约束，商品处理预算费用约束三方面构建了 3 种模型，不仅求出了最优解，而且还进行了灵敏度分析。

有的研究者则对求解报童问题的方法上进行了突破。文献[15]-[23]分别采用了不同的方法对报童模型进行了相关研究。Abdel-Malek[16]不仅提出了近似的、严格的以及迭代的模型来求解受约束的多产品报童模型，还得到了一种用二次规划的方法求解了多产品单边约束的报童模型。黄有亮[21]则构建了状态变量递增量比较大情况下的离散变量的报童模型，并采用了解析方法来求解模型。

有的研究者则扩展到了两级或多级供应商，文献[24]、[25]、[26]分别从各级供应商之间的不同关系和一定的约束条件下进行了相关方面的研究。侯阔林[26]等研究了供应商为领导层而零售商为从属层的合约决策下报童问题的二层规划模型。考虑了有些商品易腐烂甚至不可储存,而顾客需求和市场价格具有不确定性,供应商和零售商为了回避风险而达到最大的期望效益,双方通常可以采用签订合约的方式来进行交易。因此,我们建立了一个具有合约的二层规划

模型,供应商和零售商分别通过确定合约决策变量获取各自的最大期望效益。

有的研究者还从采用电子商务模式、产品回收以及多个零售商等方面对传统的报童模型进行了扩展。吴鹏[27]等从传统的报童模型出发,研究了存在回收再制造活动情形下的最优生产量的决策问题,得到了生产量的最优决策,并将其与传统的报童模型做了比较。结果表明回收再制造带来的成本降低将有可能增加总产量和提高利润。

有的研究者通过对市场的调查发现,消费者在面对某个商品缺货时会选择其他的差不多种类的替代产品。研究表明需求的替代行为具有普遍性和现实性。文献[28]-[31]则从不同的方面研究了单周期库存模型中的可替代问题。例如翟阳阳[28]根据需求信息未知的情况，构建了在线订货下具有单向可替代性的两产品的报童模型，考虑了有效的在线订货策略并进行竞争分析，给出了该问题的最优竞争比以及对应的最优订货量。最后通过对实例的求解，说明了本文研究的在线策略具有有效性以及合理性。

有的研究者从不同的需求分布函数进行了关于报童模型的研究。文献[32-36]从需求函数为均匀分布或正态分布或三角分布或模糊需求模式各种不同角度考虑了各种报童模型。

1.3 章节安排

本文的内容分为五章。

第一章对 Newsboy 模型进行了全面的阐述，包括 Newsboy 模型的基本概念、重要性、近几年来的研究现状以及进一步可研究的方向等。

第二章的内容分为三节。第一节主要是介绍了之后几章即将用到一些基本概念以及定理，比如数量折扣的概念，凹函数，海森举证等。第二节主要是介绍了库存系统的一些费用结构。第三节主要阐述了一个基本的 Newsboy 模型。

第三章从实际角度出发，对经典的报童模型进行扩展，研究了量折扣下季节性商品销售的 newsboy 模型。文章主要分析了二次订购，二次销售的季节性需求商品的销售问题。假设第一阶段的商品需求是依赖其价格的随机变量，且其订购成本采用全单位批量折扣；第二阶段供应商给销售商提供临时性价格折扣，销售商也进行降价销售，并通过广告活动来增加需求，且假设此时的需求是同时依赖销售价格和广告费用的随机变量。最后通过对此模型的分析，给出了模型的最优解。

第四章考虑了以旧换新的销售方式可以促进废旧物资的回收，实现资源的再利用，响应了可持续发展的号召。在对经典的报童模型进行研究和总结的基础上，结合家电销售商的特点以及目前国内以旧换新活动的推广，研究了以旧换新模式下家电产品销售的 newsboy 模型。

第五章则是对全文进行了总结以及对未来的展望。

第二章 预备知识

2.1 基本概念

2.1.1 数量折扣的概念

数量折扣又称批量作价，是指制造商给经销商、零售商或大客户因购买数量大而给予的一种折扣。一般购买量越多，折扣也越大，以鼓励顾客增加购买量，或集中向一家企业购买，或提前购买。尽管数量折扣使产品价格下降，单位产品利润减少，但销量的增加、销售速度的加快，使企业的资金周转次数增加了，流通费用下降了，产品成本降低了，导致企业总盈利水平上升，对企业来说利大于弊。在这种情况下，进货价格一般将会影响零售商的订货策略。

批量折扣主要有全单位量折扣（all-unit discount）和增量折扣（incremental discount）。全单位量折扣是指订购量超过某个基准量后所订购的每单位物品均享有相同的折扣价。而增量折扣是指订购量每超过一个基准其超过的部分按一个新的折扣价计算。

2.1.2 需求量

需求是指在其他条件不变的情况下，消费者在一定的时期范围内在各种可能的价格下愿意而且能够购买某商品的数量，该数量叫需求量。只有既有购买欲望又有购买能力的需求才是有效需求。

需求反映了消费者对商品的需求量与该商品价格之间的对应关系。两者之间遵循一个特定的规律，即商品价格上涨，消费者对商品的需求量就会下降；商品价格下降，消费者对商品的需求量就会增加，这一规律是需求规律。

一种商品的需求量不只取决于商品的价格，还主要取决于一下因素：①消费者的偏好；②替代商品的价格和数量；③互补品的数量和价格；④消费者的收入；⑤消费者对未来价格的预测。

对消费者需求量影响最大的是价格因素。衡量商品价格对需求量究竟会产生多大幅度的影响，可以用需求的价格弹性这一指标来衡量。

需求的价格弹性：需求的价格弹性又称需求弹性，它表示在一定时期内，一种商品的需求量的相对变化对于该商品价格的相对运动的反应程度。用需求量变动百分比的比值来表示。如果一种物品的需求量对价格变动反应大，那么这种物品的需求就是富有弹性的，或者说需求弹性大于 1.反之，就是缺乏弹性的，即需求弹性小于 1。

2.1.3 凹凸函数

定义：（1）如果 f(x)二次可导且 $f''(x) > 0$，则 f(x)为凸函数。

（2）如果 f(x)二次可导且 $f''(x) < 0$，则 f(x)为凹函数。

定理：设 f(x,y)是在开区域 D 内具有连续偏导数的凸（或凹）函数，若

（x_0, y_0）$\in$ D 且 $\begin{cases} f_x^{'}(x_0,y_0)=0 \\ f_y^{'}(x_0,y_0)=0 \end{cases}$。

则 $f(x_0,y_0)$ 必为 $f(x,y)$ 在 D 内的最小值（或最大值）。

2.1.4 Hessian 矩阵

定义：对于 n 元实值函数 f: $D\to R^n$,D 为 R^n 的开集，$\forall x=(x_1,x_2,\cdots x_n)\in D,\ f(x)=f(x_1,x_2,\cdots x_n)$。如果 f 在 D 上可微，则 f(x) 的导函数为 $f^{'}(x)=(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots\frac{\partial f}{\partial x_n})$。若 $f^{'}$ 还在 D 上可微，称 f 在 D 上二阶可微。则 f 的二阶导函数为

$$f^{''}(x)=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_n} \end{bmatrix}$$

其中等式右端 $n\times n$ 矩阵又称为函数 $f(x)$ 的 Hessian 矩阵。

2.2 库存系统的费用结构

2.2.1 订货费用和装备费用

订货费（ordering cost）是指销售商每次订购货物过程中所必须的费用，它是从发出订单到货物进入库存系统后所包括的全部活动的费用，其中含有咨询费、通信费用、派出订货人的差旅费用、所进的物品检查、验收物品费用、交通物品费用、进库搬运等费用，也包括财务人员的会计、出纳费用，且每次的订货费用是与订购物品的数量无关。

装配费（setup cost）是指制造商要生产一次所必须的准备、安排和调整等需要的费用，如原材料的安排、机器的调制与安装、修理、生产线的调整以及机器磨损的消耗费用等。该项费用只与生产物品的次数有关，而与所生产的数量无关。

2.2.2 库存保管费用

库存保管费用（holding cost）是指物品从买回来进入仓库到离开仓库的这段时间所用的一切费用，主要有以下几方面：（1）占用资金的利息；（2）物资的储存损耗，陈旧以及跌价所带来的损失；（3）物资的税费、保险金等费用；（4）仓库本身的折旧费、保洁、照明、维修、房租等等费用；（5）仓库内部物品的搬运费；（6）其他管理费，如工人工资、仓库设备折旧费等。

2.2.3 单位物品的成本费用

单位物品的成本费用（purchasing cost）是制造商制造这批物品供应给销售商时的每个平均价格(这里包括变质的物品费用、生产成本)，当单位成本费用和数量无关即为常数时，由于它不影响库存控制策略，这时可忽略不计。本文中考虑了有量折扣，这时就必须考虑了。

2.2.4 缺货损失费

缺货损失费（shortage cost）是用来衡量缺货所造成的损失。它包括生产受影响（停工待料，停工后重新开始生产的准备费用或使用代用品等）而造成的损失费，利润的损失费以及信誉降低而造成的损失费等。在允许缺货的情形下还可包括延期交货费等。缺货损失费可以与缺货数量有关，也可以与缺货的时间有关。

2.2.5 广告费用

广告费用（advertising expenses）是指商家通过各种媒体宣传或发放赠品、赠券等方式，激励消费者对其产品购买欲望，来达到促销的目的所需要支付的费用。广告费用是指宣传活动所支出的总费用，一般情况下，广告费用由两部分组成：一是直接广告费用，如：广告策划费用、广告制作费用，媒体发布费等。基本构成：（1）广告前期调查费用；（2）广告策划制作费；（3）广告媒体发布费用；（4）广告活动的机动费用。二是间接广告费用，包括广告策划人员工资、场地费、办公费、管理费、明星代言费用等等。

2.3 古典的报童模型

古典的单周期问题（SPP）就是当商品的需求是随机时，零售商通过寻找最优订购量来达到最大的期望利润. 同时在模型中假设在销售期末的剩余产品可以通过折扣形式就是销售，或用优惠的价格进行处理. 如果所订购的商品数量小实际的需求量，销售商不仅失去部分利润，还有商誉损失费. SPP 是反射性的许多真实生活情况并且是常用于对季节性产品制定政策和体育产业，在制造业和零售水平. SPP 问题可能也用于处理的容量和评估的预订在服务行业，例如航空公司和旅馆. 下面，我们来建立古典的 Newsboy 模型。

为了简化库存系统，我们作如下假设：

（1）制造商供货是瞬时的。

（2）零售商在销售期开始时订货。

（3）在一个销售期内，需求量 x 是非负的随机变量。其密度函数和分布函数分别为 $f(x)$和 $F(x)$, μ为随机需求量的期望。

（4）商品的进价为 c，零售商的销售价格为 p，订购量为 Q。

（5）如果在销售期内发生缺货，则每单位商品的缺货损失费为 s。

（6）如果销售期结束，商品还有剩余，则商品的残值为 v.

则零售商在销售期内的期望销售量为：

$$S(Q)=\int_0^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{Q}xf(x)dx+\int_Q^{+\infty}Qf(x)dx$$

$$=xF\left(x\right)\Big|_0^Q-\int_0^Q F(x)dx+QF(x)\Big|_Q^{+\infty}$$

$$=Q-\int_0^Q F(x)dx \qquad (2.1)$$

ⅰ 当 x<Q 时，则商品有剩余，故可得到零售商的期望剩余库存量为：

$$I(Q)=\int_0^Q (Q-x)f(x)dx$$

$$=QF(x)\Big|_0^Q-\mathrm{x}F(\mathrm{x})\Big|_0^Q+\int_0^Q F(x)dx$$

$$=\int_0^Q F(\,x)\;d\,x= \quad Q- \quad (S \qquad (2.2)$$

ⅱ 当 x>Q 时，则商品缺货，故可得到零售商的期望缺货量为：

$$L(Q)=\int_Q^{+\infty}(x\text{-}Q)\mathrm{f}(x)dx$$

$$=\int_Q^{+\infty}xf(x)dx-\int_Q^{+\infty}Qf(x)dx$$

$$=\int_0^{+\infty}xf(x)dx-\int_0^{Q}xf(x)dx-\int_Q^{+\infty}Qf(x)dx$$

$$=\mu-S(Q) \qquad (2.3)$$

故可以得到零售商的期望利润为：

$$\pi(Q)=\mathrm{p}S(Q)+vI(Q)-sL(Q)-cQ$$

$$=\mathrm{p}S(Q)+v[Q-S(Q)]-s[\mu-S(Q)]-cQ$$

$$=(p-v+s)S(Q)+(v-c)Q-s\mu \qquad (2.4)$$

所以，零售商的期望利润是订购量 Q 的函数，对 $\pi(Q)$ 求导，可得

$$\pi^{'}(Q)=(p-v+s)S^{'}(Q)+(v-c)\text{。} \qquad (2.5)$$

又我们有 $S^{'}(Q)=1-F(Q)$,于是可得:

$$\pi^{'}(Q)=(p-v+s)[1-F(Q)]+(v-c) \qquad (2.6)$$

对 $\pi(Q)$ 求二阶导可得：

$$\frac{d^2\pi(Q)}{dQ^2}=-(p-v+s)f(Q)<0 \qquad (2.7)$$

即 $\pi(Q)$ 是关于 Q 的凹函数，故存在最大值。

则由极值的必要性可知最优解 Q^* 应该要满足的条件为 $\pi^{'}(Q^*)=0$,即

$$(p-v+s)[1-F(Q)]+(v-c)=0 \tag{2.8}$$

可以解得：

$$F(Q^*)=\frac{p+s-c}{p+s-v}，\ 即\ Q^*=F^{-1}(\frac{p+s-c}{p+s-v})。$$

例 2.3.1 某商场要销售某种衣服。该商品的每件成本为 c=150 元，销售价格为 p=200 元；该衣服的销售期限为 3 个月。若三个月后没有售出的衣服将降价 v=110 元进行清仓处理；若缺货，则每件衣服引起缺货损失费用为 s=70 元。已知该商场该商品的销售量 x 服从指数分布，即

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & \mathrm{x}\geq 0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

根据以往的销售经验可知 λ=0.02。则该商场订购多少件衣服使得利润最大？

解：利用（9.2.3）可得：

$$F(Q^*)=1-e^{-0.02Q^*}=\frac{200+70-150}{200+70-110}=\frac{3}{4}$$

求解上式可得：$Q^*=2\ln 2/0.02\approx 69\,(件)$。故该商场应采购 69 件。

第三章 量折扣下季节性商品销售的 newsboy 模型

3.1 引言

随着科技的快速发展，消费者需求的个性化和多样化，导致市场竞争日趋激烈，企业在面临竞争的压力，为了生存和发展，不断开发新的产品。产品的生命周期逐渐趋短，越来越多的产品呈现季节性的特点。比如：电脑产品的更新换代，新的产品不断出现，老的产品很快被淘汰。再就服装行业而言，市场的潮流变化迅速，大多数服装企业一年分 4 季推出新品。从一定意义上来说，我们可采用 newsboy 模型来管理这些产品。

本章考虑到只有一次销售机会的报童模型中未销售的产品以远低于成本的残值被处理掉，这将导致零售商不敢多订购货物，但是缺货是有损失的，而且，在实际生活中，有些季节性产品相对周期较长，厂家为了减少产品积压，加速资金周转，而提供临时性的短期价格折扣，对这种情形，零售商便可有第二次订购机会，且第二次订购的成本远低于第一次，此时的零售商便可降低商品的销售价格来刺激产品的需求。根据实际生活，在第一阶段的销售过程中我们假定需求是依赖价格的随即变量，且供应商提供批量折扣。第二阶段，由于降价，我们便可以通告广告宣传来让更多的顾客了解此活动，因此，我们假设第二阶段的需求时依赖广告费用和销售价格的随即变量。然后通过此模型的分析，给出模型的最优解。

3.2 模型的记号与假设

为了简化库存系统，我们首先作如下记号与假定：

（1）假设在某个时刻，供货方提供临时价格折扣，此时，零售商也进行降价销售，则整个销售期被分成两个阶段，在每个阶段开始时分别有一次订购机会。零售商在销售初期的订购量为Q_1，在临时性价格折扣下的订购量为Q_2.

（2）第一次的订购成本为c_1，第二次的订购成本为c_2，且$c_1 > c_2$，若销售季节结束时尚未售出的产品厂家以回收价 v 全部收回（或全部以折扣价 v 降价处理），若在销售季节内有缺货发生，则每单位产品引起的缺货损失费为 s.

（3）第一阶段的零售商的销售价格为p_1，第二阶段的销售价格为p_2 且 $p_1 > p_2 > c_1 > c_2 > v$ 。假设在商品的第二个销售期的期望需求 $D_2(u, p_2) = D_m \varphi(p_2) h(u)$，其中，

$$D_m = D_2(+\infty, 0)，\quad \frac{\partial^2 D_2(u, p_2)}{\partial u^2} \le 0 \ \frac{\partial D_2(u, p_2)}{\partial u} \ge 0, \ \frac{\partial D_2(u, p_2)}{\partial p_2} < 0 。$$

又因为需求的不确定性，该商品在整个销售期的实际需求量被假定是

$D_2\left(\mathrm{p}_2,u\right)$与均值 1 的正随即变量的乘积，这样需求的概率密度函数可表示成

$$g\left(y,u,p_2\right)=\frac{1}{D_2\left(u,p_2\right)}f\left(\frac{y}{D_2\left(u,p_2\right)}\right)。$$

式中： $f(x)$是均值为 1 的正随机变量的概率密度函数。

（4）假设在第一个销售期，零售商面临的需求为D_1，其分布函数和概率密度函数分别为$F(\cdot)$和$\mathrm{f}(\cdot)$，并令μ_1和σ_1分别表示均值和标准差。

（5）第一个阶段末若产品过剩可以在第二个阶段继续销售，若产品短缺则为满足的需求将损失掉，从而产生缺货损失成本 s。

3.3 模型的建立

3.3.1 $E\prod_2\left(Q_2,\mathrm{p}_2,u\right)$的建立

根据模型的假设，我们用逆推法来建立模型并求解：

如果第一次的订购量已经给定的前提下，我们来推出临时性价格折扣下的最优订购量Q_2^*和此时应该投入的最优广告费用u^*,最优价格p_2^*以及此销售期的期望总利润。然后再确定使得整个销售期利润最大的Q_1^*和p_1^*。

假设第二阶段是一段独立的销售周期（即不考虑第一阶段对其的影响）。$E\prod_2\left(Q_2,\mathrm{p}_2,u\right)$表示零售商在第二阶段的销售利润，则有：

$$E\prod_2\left(Q_2,\mathrm{p}_2,u\right)=p_2\left[\int_0^{Q_2}yg\left(y,u\right)dy+\int_{Q_2}^{+\infty}Q_2g\left(y,u\right)dy\right]+V\int_0^{Q_2}\left(Q_2-y\right)g\left(y,u\right)dy$$

$$-s\int_{Q_2}^{+\infty}\left(y-Q_2\right)g\left(y,u\right)dy-u-c_2Q_2 \tag{3.1}$$

因为， $g\left(y,u,p_2\right)=\frac{1}{D_2\left(u,p_2\right)}f\left(\frac{y}{D_2\left(u,p_2\right)}\right)$

所以有

$$E\prod_2\left(Q_2,\mathrm{p}_2,u\right)=p_2\left[\int_0^{\frac{Q_2}{D_2(u,p_2)}}D_2\left(u,p_2\right)yf\left(y\right)dy+\int_{\frac{Q_2}{D_2(u,p_2)}}^{+\infty}Q_2f\left(y\right)dy\right]$$

$$+V\int_0^{\frac{Q_2}{D_2(u,p_2)}}\left[Q_2-D_2\left(u,p_2\right)y\right]f\left(y\right)dy$$

$$-s\int_{\frac{Q_2}{D_2(u,p_2)}}^{+\infty}\left[yD_2\left(u,p_2\right)-Q_2\right]f\left(y\right)dy-u-c_2Q_2 \tag{3.2}$$

为了求的使$E\prod_2\left(Q_2,\mathrm{p}_2,u\right)$达到最大值的最优解$Q_2^*$和$u^*$， p_2^*，我们可由极

值的必要性知，

$$\frac{\partial E\prod_2\left(Q_2,\mathrm{p}_2,u\right)}{\partial Q_2}=p_2\int_{\frac{Q_2}{D_2(u,p_2)}}^{+\infty}f\left(y\right)dy+v\int_0^{\frac{Q_2}{D_2(u,p_2)}}f\left(y\right)dy+s\int_{\frac{Q_2}{D_2(u,p_2)}}^{+\infty}f\left(y\right)dy-c_2$$

$$=(p_2+s-c_2)-(p_2+s-v)\int_0^{\frac{Q_2}{D_2(u,p_2)}}f\left(y\right)dy \qquad (3.3)$$

又因为

$$\frac{\partial^2 E\prod_2\left(Q_2,\mathrm{p}_2,u\right)}{\partial {Q_2}^2}=-(p_2+s-v)\frac{1}{D_2\left(u,p_2\right)}f\left(\frac{Q_2}{D_2\left(u,p_2\right)}\right)$$

$$=-(p_2+s-v)g\left(y,u,p_2\right)<0 \qquad (3.4)$$

故 $E\prod_2\left(Q_2,\mathrm{p}_2,u\right)$ 是关于变量 Q_2 的凹函数，最优订货量 Q_2^* 应该满足：

$$\frac{\partial E\prod_2\left(Q_2^*,\mathrm{p}_2,u\right)}{\partial Q_2^*}=(p_2+s-c_2)-(p_2+s-v)\int_0^{\frac{Q_2^*}{D_2(u,p_2)}}f\left(y\right)dy=0 \qquad (3.5)$$

所以可得 $\int_0^{\frac{Q_2^*}{D_2(u,p_2)}}f\left(y\right)dy=\frac{p_2+s-c_2}{p_2+s-v}$，即 $F\left(\frac{Q_2^*}{D_2\left(u,\ p_2\right)}\right)=\frac{p_2+\ s-\ c_2}{p_2+\ s-\ v}$。

则 $Q_2^*=D_2\left(u,p_2\right)F^{-1}\left(\alpha\right)$（$\alpha=\frac{p_2+s-c_2}{p_2+s-v}$） (3.6)

其中，$F^{-1}\left(\alpha\right)$ 表示均值为 1 的正随机变量分布函数的反函数 $y=\alpha$ 处的一个值。

$$E\prod_2\left(Q_2^*,\mathrm{p}_2,u\right)=E\prod_2\left(\mathrm{p}_2,u\right)=p_2\left[\int_0^{F^{-1}(\alpha)}D_2\left(u,p_2\right)yf\left(y\right)dy+\int_{F^{-1}(\alpha)}^{+\infty}D_2\left(u,p_2\right)F^{-1}\left(\alpha\right)f\left(y\right)dy\right]$$

$$+V\int_0^{F^{-1}(\alpha)}\left[D_2\left(u,p_2\right)F^{-1}\left(\alpha\right)-D_2\left(u,p_2\right)y\right]f\left(y\right)dy$$

$$-s\int_{F^{-1}(\alpha)}^{+\infty}\left[yD_2\left(u,p_2\right)-D_2\left(u,p_2\right)F^{-1}\left(\alpha\right)\right]f\left(y\right)dy-u-c_2D_2\left(u,p_2\right)F^{-1}\left(\alpha\right)$$

$$==\left(p_2+s-v\right)D_2\left(u,p_2\right)\int_0^{F^{-1}(\alpha)}yf\left(y\right)dy-sD_2\left(u,p_2\right)-u$$

因为 $D_2\left(u,p_2\right)=D_m\varphi\left(p\right)h\left(u\right)$

则 $E\prod_2\left(\mathrm{p}_2,u\right)=\left(p_2+s-v\right)D_m\varphi\left(p\right)h\left(u\right)\int_0^{F^{-1}(\alpha)}yf\left(y\right)dy-sD_m\varphi\left(p\right)h\left(u\right)-u$ (3.7)

下面我们对 p_2 和 u 分别求一阶和二阶导：

$$\frac{\partial E\prod_2(p_2,u)}{\partial p_2}=D_m\varphi(p)h(u)\int_0^{F^{-1}(\alpha)}yf(y)dy+(p_2+s-v)D_m\varphi^{'}(p)h(u)\int_0^{F^{-1}(\alpha)}yf(y)dy-sD_m\varphi^{'}(p)h(u)$$

$$\frac{\partial E\prod_2(p_2,u)}{\partial u}=(p_2+s-v)D_m\varphi(p_2)h^{'}(u)\int_0^{F^{-1}(\alpha)}yf(y)dy-sD_m\varphi(p_2)h^{'}(u)-1$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E\prod_2(p_2,u)}{\partial p_2^2}&=2D_m\varphi^{'}(p_2)h(u)\int_0^{F^{-1}(\alpha)}yf(y)dy+(p_2+s-v)D_m\varphi^{''}(p_2)h(u)\int_0^{F^{-1}(\alpha)}yf(y)dy-sD_m\varphi^{''}(p_2)h(u)\\&=\left[2\varphi^{'}(p_2)+(p_2-v)\varphi^{''}(p_2)\right]D_mh(u)\int_0^{F^{-1}(\alpha)}yf(y)dy-s\varphi^{''}(p_2)D_mh(u)\int_{F^{-1}(\alpha)}^{\infty}yf(y)dy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E\prod_2(p_2,u)}{\partial u^2}&=(p_2+s-v)D_m\varphi(p_2)h''(u)\int_0^{F^{-1}(\alpha)}yf(y)dy-sD_m\varphi(p_2)h''(u)\\&=D_m\varphi(p_2)h''(u)\left[(p_2+s-v)\int_0^{F^{-1}(\alpha)}yf(y)dy-s\right]\end{aligned}$$

又因为 $p\varphi(p)$ 为凹函数，即 $2\varphi^{'}(p_2)+p_2\varphi^{''}(p_2)<0$，又 $\varphi^{''}(p_2)>0$

所以，$\frac{\partial^2 E\prod_2(p_2,u)}{\partial p_2^2}<0$，即 $E\prod_2(p_2,u)$ 是关于 p_2 的凹函数。

则令 $\frac{\partial E\prod_2(p_2,u)}{\partial p_2}=0$，可求的最优的价格 p_2^* 应满足：

$$\varphi(p_2^*)\int_0^{F^{-1}(\alpha)}yf(y)dy+(p_2+s-v)\varphi^{'}(p_2^*)\int_0^{F^{-1}(\alpha)}yf(y)dy-s\varphi^{'}(p_2^*)=0 \tag{3.8}$$

由此得

$$\left[s-(p_2+s-v)\int_0^{F^{-1}(\alpha)}yf(y)dy\right]\varphi^{'}(p_2)=\varphi(p_2)\int_0^{F^{-1}(\alpha)}yf(y)dy \tag{3.9}$$

因为，$\varphi^{'}(p_2)<0$ 以及 $\varphi(p_2)>0$，可知 $(p_2+s-v)\int_0^{F^{-1}(\alpha)}yf(y)dy-s>0$

再加上 $h''(u)<0$，既得 $\frac{\partial^2 E\prod_2(p_2,u)}{\partial u^2}<0$，

因此，$E\prod_2(p_2,u)$ 也是关于 u 的凹函数，则可知使期望利润函数达到最大值的最优广告费用 u^* 应满足：

$$\left(p_2+s-v\right)D_m\varphi\left(p_2\right)h^{'}\left(u^*\right)\int_0^{F^{-1}(\alpha)}yf\left(y\right)dy-sD_m\varphi\left(p_2\right)h^{'}\left(u^*\right)-1=0 \quad （3.10）$$

综合式子(3.5)(3.9)(3.10)，我们就得到第二阶段使得期望利润函数带到最大值的最优订购量 Q_2^* 和此时应该投入的最优广告费用 u^*,最优价格 p_2^*。并令 q^* 表示第二阶段的最优持有量。通过上述分析可得：

$$\mathrm{q}^*=D_2\left(u,p_2\right)F^{-1}\left(\alpha\right)\text{，（式中 }\alpha=\frac{p_2+s-c_2}{p_2+s-v}\text{）。} \quad (3.11)$$

3.3.2 $E\prod$ 的建立

假设第一阶段末，过剩的商品数量为 $m=\max\left\{0,Q_1-D_1\right\}$,则显然可以得到第二阶段的最优订购量为：

$$Q_2^*=\begin{cases}0 & D_1<Q_1-\mathrm{q}^*\\ \mathrm{q}^*-Q_1-D_1 & Q_1-\mathrm{q}^*<D_1<Q_1\\ \mathrm{q}^* & D_1>Q_1\end{cases} \quad （3.12）$$

由基本的 newsboy 模型可知：

$$E\prod\nolimits_2=(\mathrm{p}_2+s-v)S_2(q^*)-(c_2-v)q^*-sD_2-\mathrm{u}$$

其中， $S_2(q^*)=q^*-\int_0^{\frac{q^*}{D_2}}F(x)\,dx$

对第二个阶段分析完之后，我们便可以得到零售商在整个销售期内的总利润为：

$$\begin{aligned}E\prod=&\int_0^{Q_1-\mathrm{q}^*}[p_1D_1-c_1Q_1+(\mathrm{p}_2+s-v)S_2(Q_1-D_1)+v(Q_1-D_1)-sD_2-\mathrm{u}]f_1(D_1)dD_1\\&+\int_{Q_1-\mathrm{q}^*}^{Q_1}[p_1D_1-c_1Q_1+(\mathrm{p}_2+s-v)S_2(q^*)-(c_2-v)q^*+c_2(Q_1-D_1)-sD_2-\mathrm{u}]f_1(D_1)dD_1\\&+\int_{Q_1}^{+\infty}[p_1Q_1-c_1Q_1-s(D_1-Q_1)+(\mathrm{p}_2+s-v)S_2(q^*)-(c_2-v)q^*-sD_2-\mathrm{u}]f_1(D_1)dD_1\end{aligned}$$

$$D_1=\beta(p_1)+\varepsilon,\beta(p_1)=a-bp_1(a>0,b>0),Q_1=\beta(p_1)+z,q^*=\beta(p_1)+t$$

则零售商的期望销售利润化简得，

$$
\begin{aligned}
E\prod = {} & p_1\int_A^z(\beta(p_1)+x)\,f_1(x)dx+\int_{z\text{-t}}^B\left[(\mathrm{p}_2+s-v)S_2(q^*)-(c_2-v)q^*\right]f_1(x)dx \\
& -\int_z^B s(x-z)f_1(x)dx+p_1\int_z^B(\beta(p_1)+z)\,f_1(x)dx+\int_{z-t}^z c_2(z-x)f_1(x)dx \\
& +\int_A^z[(\mathrm{p}_2+s-v)S_2(z-x)+v(z-x)]\,f_1(x)dx-c_1[\beta(p_1)+z)]-sD_2-\mathrm{u}
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

为了确定 Q_1 和 p_1 的最优值使 $E\prod$ 达到最大值，我们不妨假设先给定 Q_1，由极值的必要条件知，最优的价格 p_1^* 应满足：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E\prod}{\partial p_1} &= \beta(p_1)+p_1\beta^{'}(p_1)-c_1\beta^{'}(p_1)+\mu_1+\int_z^B(z-x)\,f_1(x)dx \\
&= a-2bp_1+c_1p_1\mu_1+\int_z^B(z-x)\,f_1(x)dx=0
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

即 $$p_1^*=p_0+\frac{\int_z^B(z-x)\,f_1(x)dx}{2b}\left(p_0=\frac{a-bc_1-\mu_1}{2b}\right) \tag{3.15}$$

由于 $\dfrac{\partial^2E\prod}{\partial p_1^2}=-2b<0$，因此期望利润函数是关于变量 p_1 的凹函数，从而(3.15)就为销售的最优的价格。

假定供应商提供的全单位量折扣模式如下：

$$
c_1=\begin{cases} c_1^1, & 0\le Q_1<q_1 \\ c_1^2, & q_1\le Q_1<q_2 \\ c_1^3, & q_2\le Q_1<q_3 \\ \vdots & \\ c_1^n, & \mathrm{q}_{n-1}\le Q_1 \end{cases}
$$
，式中 $c_1^1>c_1^2>c_1^3>\ldots>c_1^n$

零售商的总利润为：

$$
\begin{aligned}
E\prod = {} & p_1^*\int_0^{Q_1}f_1(D_1)dD_1+\int_{\mathrm{Q_1-q^*}}^{+\infty}\left[(\mathrm{p}_2+s-v)S_2(q^*)-(c_2-v)q^*\right]f_1(D_1)dD_1 \\
& -\int_{Q_1}^{+\infty}s(D_1-Q_1)f_1(D_1)dD_1+p_1\int_{Q_1}^{+\infty}Q_1f_1(D_1)dD_1+\int_{\mathrm{Q_1-q^*}}^{Q_1}c_2(z-D_1)f_1(D_1)dD_1 \\
& +\int_0^{Q_1}[(\mathrm{p}_2+s-v)S_2(Q_1-D_1)+v(Q_1-D_1)]\,f_1(D_1)dD_1-c_1Q_1-sD_2-\mathrm{u}
\end{aligned}
$$

为了确定 Q_1 的最优值使 $E\prod$ 达到最大值,由极值的必要条件知，

因为，购买单价是关于 Q_1 的分段函数，则期望利润也是 Q_1 的分段函数，对于每个 c_1^i，我们可以求得 Q_1^i 使得：

$$\frac{\partial E\prod(c_1^i,Q_1)}{\partial Q_1}=0\text{。}$$

$$\frac{\partial E\prod}{\partial Q_1}=(p_1+s)\left[1-F_1(Q_1)\right]-(p_2+s-v)\int_0^{Q_1-q^*}F_2(\frac{Q_1-D_1}{D_2})f_1(D_1)dD_1+(p_2+s)F_1\left(Q_1-q^*\right)$$
$$c_2\left[F_1(Q_1)-F_1\left(Q_1-q^*\right)\right]-c_1$$

$$\frac{\partial^2 E\prod}{\partial Q_1^2}=\left[(p_2+s-c_2)-(p_2+s-v)F_2(\frac{q^*}{D_2})\right]f_1\left(Q_1-q^*\right)-(p_2+s-v)\int_0^{Q_1-q^*}f_2(\frac{Q_1-D_1}{D_2})f_1(D_1)dD_1$$
$$-\frac{1}{2b}\left[1-F_1(Q_1)\right]^2-(p_1+s-c_2)f_1(Q_1)$$
$$=-(p_2+s-v)\int_0^{Q_1-q^*}f_2(\frac{Q_1-D_1}{D_2})f_1(D_1)dD_1-\frac{1}{2b}\left[1-F_1(Q_1)\right]^2-(p_1+s-c_2)f_1(Q_1)<0$$

则 Q_1^i 表示当单价为 c_1^i 时的最优定购批量。

定理 3.1： 将满足条件 $q_{i-1}\le Q_1^{i^*}<q_i$ 的所有中 $Q_1^{i^*}$ 的最大的上标 i 标记为 i_0，那么，对所有的 $j<i_0$，策略 $(c_1^{i_0},Q_1^{i_0^*})$ 优于所有其他的可行或不可行策略 (c_1^j,Q_1^j)。
证明：因为 $j<i_0$，则 $c_1^j>c_1^{i_0}$，对于给定的 Q_1，$E\prod(Q_1)$ 随着 C 的增加而减少。所以可得：

$$E\prod\left(c_1^j,Q_1^{j^*}\right)<E\prod\left(c_1^{i_0},Q_1^{j^*}\right)<E\prod\left(c_1^{i_0},Q_1^{i_0^*}\right)$$

显然下面的定理成立：

定理 3.2： 假定存在上标 l 满足 $Q_1^{l^*}<q_{l-1}$，则策略 (c_1^l,q_{l-1}) 是可能的最优策略。

由定理 1 和定理 2，我们便可以得到如下求解的最优订购批量 Q_1 的过程：
算法：

步骤 1：对于每个价格 c_1^i，计算相应 $Q_1^{i^*}$，将满足条件 $q_{i-1}\le Q_1^{i^*}<q_i$ 的所有 $Q_1^{i^*}$ 的最大上标记为 i_0，忽略所有上标小于 i_0 的策略，同时计算 $E\prod\left(c_1^{i_0},Q_1^{i_0^*}\right)$ 的值。

步骤 2：对每个 $i>i_0$，计算 $E\prod\left(c_1^i,q_{i-1}\right)$

步骤 3：最优订购

$$Q_1^*=\arg\max\left\{E\prod\left(c_1^{i_0},Q_1^{i_0^*}\right),E\prod\left(c_1^{i_0+1},q_{i_0}\right),E\prod\left(c_1^{i_0+2},q_{i_0+1}\right)\cdots E\prod\left(c_1^n,q_{n-1}\right)\right\} \quad (3.16)$$

3.4 数值仿真分析

下面，我们用个实例来说明模型的求解过程。

某零售商经销一种女装春季新款，假定在开始时，供应商提供的全单位批量折扣如下：

$$c_1=\begin{cases}60 & 0\le Q<1000\\ 55 & 1000\le Q<2000\\ 50 & Q\ge 2000\end{cases}$$

临时性价格折扣下的批发价格 $c_2=40$,衣服残值 $v=20$, $s=40$, $D_m=10,000$, 第二阶段销售价格和广告费用的影响因子函数分别假定为：$\varphi(p_2)=1-\theta p_2$, $h(u)=1-\rho e^{-\lambda u}$, 其中 $\theta=$ 0. , $\rho=0.75$, $\lambda=0.001$. 并且假设, $b=10$, $a=6,000$,第一个阶段正随机变量 ε 在区间[100,200]内服从均匀分布。第二阶段正随机变量 η 服从均值为 1 的指数分布.那么该零售商在销售季节初期应如何确定其价格策略,广告策略和相应的订货策略,使其期望收益达到最大值?

解:利用本文式（3.10）（3.8）（3.11），可得该零售商的最优广告投入费用为 $u^*=2,523.9$，最优的临时价格为 $p_2^*=81.43$ 元，相应的最优持有量为 $q^*=7,479.6$。

再由式（3.15）（3.16）可得，第一次销售的最优价格为 $p_1^*=124.07$，相应的第一次最优订购量为 $Q_1^*=8,496.6$。最后，可知零售商在整个销售期的期望总利润为 $E\prod=285,39$。

3.5 本章小结

随着全球化进程，科技进步，对报童模型从更加贴近实际的角度进行研究是基本的研究方向。本文主要考虑了供应商提供临时性价格折扣下，零售商面对两次订购机会将如何确定两次的订购量，两次的销售价格以及投入多少广告费使得预期利润达到最大值。本文无论从理论上还是实践上均有一定的意义，但是本文建立的库存模型还可以进一步的扩展，比如可以将零售商和供应商的利益结合起来，从供应链的角度进行探讨。在未来的研究中，报童模型将继续旨在实现理论更好地指导实践。

第四章 以旧换新模式下家电产品销售的 Newsboy 模型

4.1 引言

自 2008 年以来，为了扩大内需，促进我过循环经济的发展，继家电下乡活动之后，国家又提出了以旧换新的政策。这样的措施不仅可以淘汰高耗能的家电，而且旧的家电中含有可回收利用的钢铁等有效资源。在低碳经济的影响下，以旧换新销售模式，必将在国民经济生活占有更大的比重。以旧换新大大的促进了家电市场的发展，渐渐成为顾客在购买家电产品的选择方式之一。但是，国家终有一天会取消此优惠政策，销售商为了稳定和开拓新的市场，将承担起家电产品以旧换新的角色。

随着科学技术的进步以及消费者对家电产品需求愈加突出多样化和个性化，导致产品加快了更新换代的速度，产品的销售期逐渐缩短，因此，家电产品的销售问题就可以归结为报童问题。本文考虑了家电"以旧换新"有利于家电能效水平，减少环境污染，使家电中可回收利用资源得到充分有效利用、促进循环经济发展，在基本的 Newsboy 模型中添加了以旧换新的因素。然后通过对模型的分析，得到模型的最优解。

4.2 模型的几号与假设

为了简化库存系统，我们首先作如下记号与假设：

（1）家电产品的销售价格为 p,成本为 c。若销售期结束后未销售的产品的残值为 v,若在销售期内发生缺货，则单位产品的缺货损失费为 s.

（2）销售商在销售期开始时的订购量为 Q。

（3）在以旧换新的模式下，假设全额购买家电和采用以旧换新方式购买家电的两种需求是相互独立的。

（4）在一个销售期内，需求量 x 是非负的随机变量。其密度函数和分布函数分别为 $f(x)$ 和 $F(x)$，μ 为随机需求量的期望。

（5）若顾客购买家电时选择以旧换新，则替换价格为 ω。每单位旧家电的利用价值为 g。

（6）全额购买家电的需求量为 D_1，选择以旧换新购买家电的需求量为 D_2

（7）$q=p-w+g$ 为以旧换新商品所带来的单位收益。则当 p=q 时，以旧换新的需求量 D_2 占全额购买家电需求量 D_1 的百分比为 λ，当 p,q 不相等时，以旧换新的需求量受 $\omega-g$ 影响的变化系数 η。则可得 $D_2=\lambda D_1+\eta(\mathrm{w}-g)$。

4.3 模型的建立

根据基本的 Newsboy 模型与假设（7），我们可以得到在整个销售期内，家电产品的总需求量为 $D=(1+\lambda)D_1+\eta(\omega-g)$ 。则销售商在整个销售期的期望利润为：

$$\begin{aligned}\pi(Q,\omega)=&p[\int_0^Q Df(D)dD+\int_Q^{+\infty}Qf(\mathrm{D})dD]-(\omega-g)\int_0^{+\infty}D_2 f(D_2)dD_2\\&+v\int_0^Q(Q-x)f(D)dD-s\int_Q^{+\infty}(x-Q)f(\mathrm{D})dD-cQ\end{aligned}\tag{4.1}$$

将 $D_2=\lambda D_1+\eta(\mathrm{w}-g)$ 以及 $D=(1+\lambda)D_1+\eta(\omega-g)$ 代入上式，可得：

$$\begin{aligned}\pi(Q,\omega)=&p\{\int_0^{\frac{Q-\eta(\omega-g)}{1+\lambda}}[(1+\lambda)x+\eta(\omega-g)]f(x)dx+\int_{\frac{Q-\eta(\omega-g)}{1+\lambda}}^{+\infty}Qf(x)dx\}-cQ\\&-(\omega-g)\int_0^{+\infty}[\lambda x+\eta(\omega-g)]f(x)dx+v\int_0^{\frac{Q-\eta(\omega-g)}{1+\lambda}}[Q-(1+\lambda)x-\eta(\omega-g)]f(x)dx\\&+s\int_{\frac{Q-\eta(\omega-g)}{1+\lambda}}^{+\infty}[(1+\lambda)x+\eta(\omega-g)-Q]f(x)dx\end{aligned}$$

令 $B=\dfrac{Q-\eta(\omega-g)}{1+\lambda}$，则式(4.1)化为：

$$\begin{aligned}\pi(Q,\omega)=&p\{\int_0^B[(1+\lambda)x+\eta(\omega-g)]f(x)dx+\int_B^{+\infty}Qf(x)dx\}-cQ\\&-(\omega-g)\int_0^{+\infty}[\lambda x+\eta(\omega-g)]f(x)dx+v\int_0^B[Q-(1+\lambda)x-\eta(\omega-g)]f(x)dx\\&+s\int_B^{+\infty}[(1+\lambda)x+\eta(\omega-g)-Q]f(x)dx\end{aligned}\tag{4.2}$$

将式(4.2)化简可得：

$$\begin{aligned}\pi(Q,\omega)=&(p-v)(1+\lambda)\int_0^{+\infty}xf(x)dx+\lambda(g-\omega)\int_0^{+\infty}xf(x)dx+p\int_0^{+\infty}\eta(\omega-g)f(x)dx\\&-\eta(\omega-g)^2\int_0^{+\infty}f(x)dx+v\int_0^{+\infty}Qf(x)dx-v\int_0^{+\infty}\eta(\omega-g)f(x)dx-cQ\\&-(p+s-v)\int_B^{+\infty}[(1+\lambda)x+\eta(\omega-g)-Q]f(x)dx\\=&[(p-v)(1+\lambda)+\lambda(g-\omega)]-\eta(\omega-g)^2+(v-c)Q+\eta(p-v)(\omega-g)\\&-(p+s-v)\int_B^{+\infty}[(1+\lambda)x+\eta(\omega-g)-Q]f(x)dx\end{aligned}\tag{4.3}$$

接下来的问题就是确定两个决策变量 Q 和 ω的最优解以使得销售商的期望利润达到最大值。即求解如下的最优化问题：

$$\min_{Q,\omega}\pi(Q,\omega)$$

将 $\pi(Q,\omega)$ 分别关于 Q 和ω求偏导：

$$\frac{\partial\pi(Q,\omega)}{\partial\omega} = -\lambda\mu - 2\eta(\omega - g) + \eta(p - v) - (p + s - v)\eta\int_B^{+\infty} f(x)dxa \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial\pi(Q,\omega)}{\partial Q} = v - c + (p + s - v)\int_B^{+\infty} f(x)dx \tag{4.5}$$

由 $\pi(Q,\omega)$ 取得极值的必要条件可知，Q 和ω的最优解应该满足

$$\text{即}\begin{cases}\dfrac{\partial\pi(Q,\omega)}{\partial\omega} = 0\\[2mm] \dfrac{\partial\pi(Q,\omega)}{\partial Q} = 0\end{cases} \tag{4.6}$$

定理 4.1 满足式(4.6)的 Q^* 和 ω^* 也满足使得达到 $\pi(Q,\omega)$ 最大值的二阶充分条件，因此达到整体最优。

证明：

$$\mathrm{H}_{11} = \frac{\partial\pi^2(Q,\omega)}{\partial\omega^2} = -2\eta - (p + s - v)\frac{\eta^2}{1+\lambda} f[\frac{Q - \eta(\omega - g)}{1+\lambda}]$$

$$H_{22} = \frac{\partial\pi^2(Q,\omega)}{\partial Q^2} = -(p + s - v)\frac{1}{1+\lambda} f[\frac{Q - \eta(\omega - g)}{1+\lambda}]$$

$$H_{12} = \frac{\partial\pi^2(Q,\omega)}{\partial\omega\partial Q} = (p + s - v)\frac{\eta}{1+\lambda} f[\frac{Q - \eta(\omega - g)}{1+\lambda}]$$

则 $\pi(Q,\omega)$ 的海森（Hessian）矩阵为

$$H = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial\pi^2(Q,\omega)}{\partial\omega^2} & \dfrac{\partial\pi^2(Q,\omega)}{\partial\omega\partial Q}\\[2mm] \dfrac{\partial\pi^2(Q,\omega)}{\partial\omega\partial Q} & \dfrac{\partial\pi^2(Q,\omega)}{\partial Q^2}\end{bmatrix}。$$

如果用 Δ_1 和 Δ_2 分别表示 1、2 阶主子式，则我们有

$$\Delta_1 = -2\eta - (p + s - v)\frac{\eta^2}{1+\lambda} f[\frac{Q - \eta(\omega - g)}{1+\lambda}] < 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix}\dfrac{\partial\pi^2(Q,\omega)}{\partial\omega^2} & \dfrac{\partial\pi^2(Q,\omega)}{\partial\omega\partial Q}\\[2mm] \dfrac{\partial\pi^2(Q,\omega)}{\partial\omega\partial Q} & \dfrac{\partial\pi^2(Q,\omega)}{\partial Q^2}\end{vmatrix} = 2(p + s - v)\frac{\eta}{1+\lambda} f[\frac{Q - \eta(\omega - g)}{1+\lambda}] > 0$$

故销售商的期望利润可以达到最大值。

再对方程组进行求解，由 $v-c+(p+s-v)\int_{B}^{+\infty} f(x)dx=0$ 可得

$$(p+s-v)\int_{B}^{+\infty} f(x)dx=c-v \tag{4.7}$$

将代入 $-\lambda\mu-2\eta(\omega-g)+\eta(p-v)-(p+s-v)\eta\int_{B}^{+\infty} f(x)dx$

可得：

$$-\lambda\mu-2\eta(\omega-g)+\eta(p-v)-\eta(c-v)=0$$

解得：

$$\omega^{*}=\frac{\eta(p-c)-\lambda\mu}{2\eta}+g \tag{4.8}$$

再代回（4.7）得到：

$$Q^{*}=(1+\lambda)F^{-1}[1-\frac{c-v}{p+s-v}]+\frac{\eta(p-c)-\lambda\mu}{2\eta} \quad (4.8)$$

所以，得到模型的最优解为

$$\begin{cases} \omega^{*}=\dfrac{\eta(p-c)-\lambda\mu}{2\eta}+g \\ Q^{*}=(1+\lambda)F^{-1}[1-\dfrac{c-v}{p+s-v}]+\dfrac{\eta(p-c)-\lambda\mu}{2\eta} \end{cases} \tag{4.9}$$

4.4 模型的仿真分析

我们假定某商场销售某种电视机，此电视机的需求服从均匀分布，令 $f(x)=\frac{1}{b-a}$.电视机的销售价格 $p=3,298$,成本 $c=1,750$,残值 $v=1,280$,短缺费 $s=1,300$,旧电视机可利用价值 $g=100$. $a=400-50\sqrt{3}$, $b=400+50\sqrt{3}$, $\lambda=0.175$, $\eta=0.12$。试求销售商的订购量以及以旧换新的价格。

解：由式子（4.9）及 matlab 可得：

$$\begin{cases} w^{*}=582.33 \\ Q^{*}=174.83 \end{cases}$$

4.5 本章小结

本文以销售商利润最大化为目标，构建了家电产品以旧换新模式下的报童模型。通过模型的推导和分析，得到了销售商在以旧换新模式下的最优价格和

最优订购量，并通过实例对模型进行了验证。在当今的市场经济下，越来越多的企业采用以旧换新的销售方式，这将成为企业一种极其重要的促销手段，应用范围将会越来越广，有关这方面的研究也将会越来越深入。

第五章总结

5.1 本文总结

经典的报童模型解决在单周期、只订购一次货时,面临不确定型需求的情况下,如何确定最优订货量使得期望受益最大化的问题,是一个单周(Single-Period Problem)订货问题。报童模型是库存理论中除了 EOQ 模型以外最基本的模型之一,模型反映出决策者在库存成本和缺货损失之间的权衡。报童模型也是供应链管理研究的基础之一,很多供应链模型都是搭建在报童模型上的更加复杂的模型。因此,对报童模型做更深一步的细致研究,从多个方向加以扩展,对于供应链领域的研究具有重要的意义。并且随着产品生命周期呈现出不断下降的趋势,对 SPP 问题的研究的重要性也日益显得突出。

本文主要是考虑了两类产品的 newsboy 模型。

（1）第一类研究了季节性商品销售的 newsboy 模型。零售商面对两次订购机会且供应商在销售季节前提供批发价批量折扣，零售商将如何确定两次的最优订购量使得期望利润达到最大值。其中，产品的销售也分为两个阶段，第一个阶段的需求与销售价格有关；第二个阶段的需求不仅和销售价格有关，还和投入的广告费用有很打的关系。并通过实例对模型进行了验证。

（2）第二类研究了家电产品在以旧换新模式下的 newsboy 模型。在当今的市场经济下，为了响应可持续发展，促进循环经济的实现，越来越多的企业采用以旧换新的销售方式，本文以销售商利润最大化为目标，通过模型的推导和分析，得到了销售商在以旧换新模式下的最优价格和最优订购量。

5.2 进一步研究工作

经济学理论告诉我们价格是影响需求的一个非常重要的因素。随着科技的不断进步，我们可以明显地看到随着产品生命周期的缩短，产品对时间因素变得越来越敏感，时间也因此成为了企业提高竞争力的主要考虑因素之一。对传统的报童模型关于时间因素的扩展已经成为研究的热点之一。但是，很多考虑时间因素的报童模型并没有脱离需求对具体分布函数的依赖，而且对怎样缩短时间的研究尚且不足。如果报童模型将需求、价格、时间结合起来研究，并了解三者之间的关系，将会非常有利于进行更科学的决策。

如今，供应链理论的快速发展,报童模型已经被大量应用于供应链管理的框架中,从供应链协调的角度出发，结合服务要求以及带时变参数的报童模型将成为进一步的研究方向。随着日益激烈的竞争，单个企业之间的竞争将逐渐变成整条供应链的竞争,对整条供应链的研究也将孕育而生。而在这个强大的信息时代背景下，研究多级或网络式的报童模型，对于理论或是实践来说，意义都重大，也必将成为一个引人注意的研究热点。

当今社会面临着环境污染严重、资源危机等问题，可持续发展成为全世界的号召。随着全球化的进一步发展以及企业竞争的加剧，产品的生命周期更加缩短,以及退货条款变得越来越宽松致使逆向供应链变得越来越重要，甚至影响到整个供应链系统。因此对闭环供应链的研究将具有重大的价值，它不仅可能带来环保和节约的好处，还有可能给企业带来更多的经济利益。考虑回收的报童模型，将会成为研究该类问题重要手段。

随着全球化进程、科技进步，对报童模型从更加贴近实际的角度进行研究是基本研究方向。相关研究进程也见证了报童模型研究随时代变化而发展的过程。未来的研究中，报童模型将继续旨在实现理论更好地指导实践。

参考文献

[1] 周永务,王圣东.库存控制理论与方法[M]. 北京科学出版社, 2009:311-348.

[2] Khouja M, Robbins S. Linking Advertising and Quantity Decisions in the Single-Period Inventory Model [J]. International Journal of Production Economics, 2003,86(2):93-105.

[3] 汪峻萍,周永务.需求依赖广告费用和销售价格的 newsboy 型产品库存模型[J].控制与决策,2010,25(1):89-92.

[4] 刘丽华,曾玲.含随机-模糊参数的可追加订购的报童问题[J].安徽大学学报, 2007,31(1):17-22.

[5] 刘丽华,曾玲.可追加订购报童问题的模糊机会约束规划模型[J]. 汕头大学学报(自然科学版),2007,22(1):1-6.

[6] 王圣东,周永务. 带有两次订购机会且两阶段需求相关的 Newsboy 模型 [J]. 控制与决策,2009,24(5):706-711.

[7] 宋海涛，林正华等.带有二次订购和二次销售的报童问题[J].经济数学学报：2003,20(1):73-79.

[8] 宋海涛,林正华. 二次降价销售的报童问题[J]. 吉林大学学报:理学版, 2004,(4).

[9] 马福珍, 余东.带有可追加订购和季节性销售的报童问题[J]. 湖北师范学院学报(自然科学版),2009,29(3):89-94.

[10] Konstantin K, Sheldon L. Multi- stage newsboy problem: A dynamickmodel [J] European Journal of Operational Research, 2003,149.

[11] 张桂清,徐演峰. 报童问题的最优竞争比策略及其风险补偿模型[J].管理学报， 2011,8(1)：97-102.

[12] 蔡清波,鲁其辉,朱道立. 预测精度随时间变化的报童问题模型分析[J].预测, 2003,22(05) :42-47.

[13] 苏欣,林正华,杨丽. 带有预算费用约束的报童模型[J]. 吉林大学学报(理学版) , 2004,42(03):371-373.

[14] 苏欣,刘光杰. 带有预算费用约束的多地点报童模型[J]. 长春工程学院学报(自然科学版) , 2003,4(02):5-7.

[15] Erlebacher, S. Optimal and Heuristic Solutions for the Multi- Itemnewsvendor Problem with a Single Constraint[J]. Production andOperations Maagement, 2000, 9.

[16] Abdel -Malek.L, Montanari. R, Morales.L.C. Exact, Approimate,and Generic Iterative Models for the Multi-Product Newsboy with Budget Constraint [J]. International Journal of ProductionEconomics, 2003,91.

[17] LayekL.Abdel-Malek, Nathapol Areeratchakul, A Quadratic: Programming Approach to the Multi- Product Newsvendor Problem with Side Constraints [J].European Journal of OperationalResearch 176, 2007,176.

[18] Niederh off .Julie A, Using Separable Programming to Solve the Multi-Product Multiple Ex- Ante Constraint Newsvendor Problem and Extensions [J].European Journal of Operational Research, 2007,176(2).

[19] Shao Zhen, JiXiaoyu.Fuzzy Multi- Product Constraint NewsboyProblem [J]. Applied Mathematics and Computation, 2006,180(1).

[20] Moon. I, Silver E. A. The Multi- Item Newsvendor Problem witha Budget Constraint and Fixed Ordering Costs [J].The Journal ofthe Operational Research Society, 2000,51(5).

[21] 黄有亮,陈森发. 传统离散型报童决策模型的一个问题及其改进方案[J]. 数学的实践与认识, 2005,(3).

[22] 任永昌，马雨时，赵颖. 报童问题计算机模拟的研究[J]. 渤海大学学报(自然科学版) , 2005,(1).

[23] 李灏,丁晓东. 用基于计算机随机模拟的下降法求解报童问题[J]. 微计算机信息, 2006,(9).

[24] Barun Das, ManoranjanMaiti. An Application of Bi-LevelNewsboy Problem in Two Substitutable Items under Capital Cost[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007,190(1).

[25] J Li .ianli, Liu Liwen. Supply Chain Coordination with Manufacturer's Lim-ited Reserve Capacity: An Extended NewsboyProblem [J]. International Journal of Production EconomicsAvailable Online, 2007,17(8).

[26] 侯阔林，程露，万仲平. 不确定市场下具有合约决策的二层报童问题模型[A]. 第五届中国不确定系统年会论文集, 2007.

[27] 吴鹏.考虑回收再制造的报童模型扩展[J].清华大学学报（哲学社会科学版），2006,21(1)：71-76.

[28] 翟阳阳,徐演峰. 单向可替代报童问题的最优在线订货策略[J].系统工程学报,2011,29(3):15-20.

[29] 蔡连侨,陈剑,严厚民. 可替代产品的库存模型研究(Ⅰ):最优订货量[J]. 系统工程理论与实践,2003,(06):63-68 .

[30] 蔡连侨,陈剑,严厚民. 可替代产品的库存模型研究(Ⅱ):基本性质[J]. 系统工程理论与实践,2003,(08):59-68.

[31] 周江涛，李华冰. 单周期问题中可替代产品最优订货策略[J]. 计算机与数字工程 , 2007,(11):180-185.

[32] 张菊亮，章祥荪，王耀球. 一般需求函数下报童模型的定价与库存控制

[J]. 系统工程理论与实践 , 2008,(09):20-28.
[33] Guo.P,Chen.Y.NewsboyProblem with possibilistic Information[J].Proceeding of the IEEE International Conference on Fuzzy, Systems,2003.
[34] Lau A H, Lau H.The newsboy problem with price dependent demand distrbu-tion[J] . IIE Transactions, 1988, 20: 168- 175.
[35] Polatoglu L H. Optimal order quantity and pricing decisions in singleperiod inventory systems [J] .International Journal ofProduction Economics, 1991, 23: 175- 185.
[36] 王志江. 三种不同需求分布条件下报童问题期望费用的计算[J]. 数学的实践与认识 , 2009,39(18):1-4.
[37] 李明琨, 汪凯仁, 方芳. 基于时间因素的报童问题理论方法研究[J]. 系统工程理论方法应用 , 2003,12(02):146-152.
[38] 王奇,马丽.以旧换新模式下报纸零售商报童问题的研究[J].湖南农机, 2011, 38(11):187-188.
[39] 费威.家电产品以旧换新补贴政策的数理模型分析[J].北华大学学报,2009, 10(6):14-19.
[40] 田甜.基于制造商的家电产品以旧换新定价策略研究[J]. 经济师, 2011(3): 74-75.

攻读硕士期间发表的论文

1. 吴艳,杨志林.量折扣下季节性商品销售的 newsboy 模型[J].合肥工业大学报,2013(5).

特别声明

本学位论文是在我的导师指导下独立完成的。在研究生学习期间，我的导师要求我坚决抵制学术不端行为。在此，我郑重声明，本论文无任何学术不端行为，如果被发现有任何学术不端行为，一切责任完全由本人承担。

学位论文作者签名：吴艳

签字日期：2013年4月24日