深度之眼
deepshare.net

法律声明

课程详情请咨询

- 微信公众号：深度之眼
- 客服微信号：deepshare0920

公众号

微 信

deepshare.net
深度之眼

西瓜书公式推导

导师：Sm1les（Datawhale南瓜书项目负责人）

deepshare.net
深度之眼

EM算法公式推导

Derivation of Expectation-maximization algorithm

本节大纲

Outline

先修内容：西瓜书7.6、统计学习方法9.1

1.EM算法的引入

- 为什么需要EM算法

2.EM算法的例子

- 三硬币模型

3.EM算法的导出

- Jensen（琴生）不等式
- EM算法的推导

4.EM算法求解例子

- 用EM算法求解三硬币模型

EM算法的导出

Derivation of EM algorithm

Jensen（琴生）不等式：

若f是凸函数，则：

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

其中，$t \in [0,1]$同理，若f是凹函数，则只需将上式中的 $\leq$ 换成 $\geq$ 即可

将上式中的t推广到n个同样成立，也即：

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \ldots + t_nf(x_n)$$

其中，$t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0,1], t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 1$ 概率论中常以以下形式出现：

$$\varphi(E[X]) \leq E[\varphi(X)]$$

其中，X是随机变量，φ 是凸函数，$E[X]$ 表示X的期望。

EM算法的导出

Derivation of EM algorithm

我们面对一个含有隐变量的概率模型，目标是极大化观测数据Y关于参数θ的对数似然函数，即极大化：

$$L(\theta)=\ln P(Y|\theta)=\ln\sum_Z P(Y,Z|\theta)=\ln\left(\sum_Z P(Y|Z,\theta)P(Z|\theta)\right)$$

注意到这一极大化的主要困难是上式中有未观测数据Z并有包含和（Z为离散型时）或者积分（Z为连续型时）的对数。EM算法采用的是通过迭代逐步近似极大化 $L(\theta)$ 假设在第i次迭代后 θ 的估计值是 $\theta^{(i)}$ ，我们希望新的估计值 θ 能使 $L(\theta)$ 增加，即 $L(\theta)>L(\theta^{(i)})$ 并逐步达到极大值。为此，我们考虑两者的差：

EM算法的导出

Derivation of EM algorithm

deepshare.net
深度之眼

$$L(\theta) - L(\theta^{(i)}) = \ln\left(\sum_Z P(Y|Z,\theta)P(Z|\theta)\right) - \ln P(Y|\theta^{(i)})$$

$$= \ln\left(\sum_Z P(Z|Y,\theta^{(i)})\frac{P(Y|Z,\theta)P(Z|\theta)}{P(Z|Y,\theta^{(i)})}\right) - \ln P(Y|\theta^{(i)})$$

套用琴生不等式可得:

$$\geq \sum_Z P(Z|Y,\theta^{(i)}) \ln \frac{P(Y|Z,\theta)P(Z|\theta)}{P(Z|Y,\theta^{(i)})} - \ln P(Y|\theta^{(i)})$$

$$= \sum_Z P(Z|Y,\theta^{(i)}) \ln \frac{P(Y|Z,\theta)P(Z|\theta)}{P(Z|Y,\theta^{(i)})} - 1 \cdot \ln P(Y|\theta^{(i)})$$

EM算法的导出

Derivation of EM algorithm

deepshare.net 深度之眼

$$L(\theta) - L(\theta^{(i)}) \geq \sum_Z P(Z|Y,\theta^{(i)}) \ln \frac{P(Y|Z,\theta)P(Z|\theta)}{P(Z|Y,\theta^{(i)})} - \sum_Z P(Z|Y,\theta^{(i)}) \cdot \ln P(Y|\theta^{(i)})$$

$$= \sum_Z P(Z|Y,\theta^{(i)}) \left(\ln \frac{P(Y|Z,\theta)P(Z|\theta)}{P(Z|Y,\theta^{(i)})} - \ln P(Y|\theta^{(i)}) \right)$$

$$= \sum_Z P(Z|Y,\theta^{(i)}) \ln \frac{P(Y|Z,\theta)P(Z|\theta)}{P(Z|Y,\theta^{(i)})P(Y|\theta^{(i)})}$$

$$L(\theta) \geq L(\theta^{(i)}) + \sum_Z P(Z|Y,\theta^{(i)}) \ln \frac{P(Y|Z,\theta)P(Z|\theta)}{P(Z|Y,\theta^{(i)})P(Y|\theta^{(i)})}$$

EM算法的导出

Derivation of EM algorithm

令 $$B(\theta,\theta^{(i)})=L(\theta^{(i)})+\sum_Z P(Z|Y,\theta^{(i)})\ln\frac{P(Y|Z,\theta)P(Z|\theta)}{P(Z|Y,\theta^{(i)})P(Y|\theta^{(i)})}$$

则 $$L(\theta)\geq B(\theta,\theta^{(i)})$$

即函数$B(\theta,\theta^{(i)})$ 是 $L(\theta)$ 的一个下界，此时若设 $\theta^{(i+1)}$ 使得$B(\theta,\theta^{(i)})$ 达到极大，也即

$$B(\theta^{(i+1)},\theta^{(i)})\geq B(\theta^{(i)},\theta^{(i)})$$

由于 $B(\theta^{(i)},\theta^{(i)})=L(\theta^{(i)})$,所以可以进一步推得：

$$L(\theta^{(i+1)})\geq B(\theta^{(i+1)},\theta^{(i)})\geq B(\theta^{(i)},\theta^{(i)})=L(\theta^{(i)})$$

$$L(\theta^{(i+1)})\geq L(\theta^{(i)})$$

EM算法的导出

deepshare.net
深度之眼

Derivation of EM algorithm

因此，任何可以使 $B(\theta,\theta^{(i)})$ 增大的 θ，也可以使 $L(\theta)$ 增大，于是问题就转化为了求解能使得 $B(\theta,\theta^{(i)})$ 达到极大的 $\theta^{(i+1)}$，即

$$
\begin{aligned}
\theta^{(i+1)} &= \arg\max_{\theta} B(\theta,\theta^{(i)}) \\
&= \arg\max_{\theta}\left(L(\theta^{(i)})+\sum_{Z}P(Z|Y,\theta^{(i)})\ln\frac{P(Y|Z,\theta)P(Z|\theta)}{P(Z|Y,\theta^{(i)})P(Y|\theta^{(i)})}\right) \\
&= \arg\max_{\theta}\left(\sum_{Z}P(Z|Y,\theta^{(i)})\ln\left(P(Y|Z,\theta)P(Z|\theta)\right)\right) \\
&= \arg\max_{\theta}\left(\sum_{Z}P(Z|Y,\theta^{(i)})\ln P(Y,Z|\theta)\right) \\
&= \arg\max_{\theta} Q(\theta,\theta^{(i)})
\end{aligned}
$$

EM算法的导出

Derivation of EM algorithm

到此即完成了EM算法的一次迭代，求出的 $\theta^{(i+1)}$ 作为下一次迭代的初始$\theta^{(i)}$ 。综上可以总结出EM算法的“E步”和“M步”分别为：

E步：计算完全数据的对数似然函数 $\ln P(Y, Z|\theta)$ 关于在给定观测数据Y和当前参数θ下对未观测数据Z的条件概率分布 $P(Z|Y, \theta^{(i)})$ 的期望，也即Q函数：

$$Q(\theta, \theta^{(i)}) = E_Z[\ln P(Y, Z|\theta)|Y, \theta^{(i)}] = \sum_Z P(Z|Y, \theta^{(i)}) \ln P(Y, Z|\theta)$$

M步：求使得Q函数到达极大的 $\theta^{(i+1)}$。

结 语

在这次课程中，我们学习了

EM算法的导出

那么在下次课程中，我们将会学习

EM算法求解例子

deepshare.net
深 度 之 眼

联系我们:
电话：18001992849
邮箱：service@deepshare.net
Q Q： 2677693114

公众号

客服微信