莫比乌斯反演

莫比乌斯反演基本形式：

对于一个函数$f(x)$

设$g(x)=\sum_{x|d}f(d)$，那么

$f(x)=\sum_{x|d}\mu(\frac{d}{x})\cdot g(d)$

1：$f(x)=1$

e：$f(x)=[x=1]$

id：$f(x)=x$

推式子：

1. 1到n与n互质的数的个数：$\sum_{i=1}^{n}[gcd(i,n)=1]$
   令$f(x)=\sum_{i=1}^{n}[gcd(i,n)=x]$
   $g(x)=\sum_{x|d}f(d)=\sum_{x|d}\sum_{i=1}^{n}[gcd(i,n)=d]=\sum_{i=1}^{n}[x\mid gcd(i,n)]=\begin{cases}\lfloor\frac{n}{x}\rfloor, & x\mid n\\ 0, & x\nmid n\end{cases}$

   由莫比乌斯反演得：

   $f(x)=\sum_{x|d}\mu(\frac{d}{x})\cdot g(d)=\begin{cases}\sum_{x|d}\mu(\frac{d}{x})\cdot\lfloor\frac{n}{d}\rfloor, & d\mid n\\ 0, & d\nmid n\end{cases}=\sum_{d|n}\sum_{x|d}\mu(\frac{d}{x})\cdot\lfloor\frac{n}{d}\rfloor$

   所求式子即为$f(1)=\sum_{d|n}\mu(d)\cdot\lfloor\frac{n}{d}\rfloor$
   根据欧拉函数定义，所求即为$\varphi(n)$。
   因此$\varphi(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\cdot\frac{n}{d}=\sum_{d|n}\mu(\frac{n}{d})\cdot d$

2. 1D gcd sum：$\sum_{i=1}^{n}gcd(i,n)=\sum_{d|n}\varphi(d)\lfloor\frac{n}{d}\rfloor$
   $\sum_{i=1}^{n}gcd(i,n)=\sum_{d=1}^{n}d\sum_{i=1}^{n}[gcd(i,n)=d]$

   设$f(x)=\sum_{i=1}^{n}[gcd(i,n)=x]$
   $g(x)=\sum_{x|d}f(d)=\sum_{x|d}\sum_{i=1}^{n}[gcd(i,n)=d]=\sum_{i=1}^{n}[x\mid gcd(i,n)]=\begin{cases}\lfloor\frac{n}{x}\rfloor, & x\mid n\\ 0, & x\nmid n\end{cases}$

   由莫比乌斯反演得：

   $f(x)=\sum_{x|d}\mu(\frac{d}{x})\cdot g(d)=\begin{cases}\sum_{x|d}\mu(\frac{d}{x})\cdot\lfloor\frac{n}{d}\rfloor, & d\mid n\\ 0, & d\nmid n\end{cases}=\sum_{d|n}\sum_{x|d}\mu(\frac{d}{x})\cdot\lfloor\frac{n}{d}\rfloor$

代回得：

$\sum_{i=1}^{n} gcd(i,n) = \begin{cases} \sum_{d=1}^{n} d \sum_{d|x} \mu(\frac{x}{d}) \cdot \lfloor \frac{n}{x} \rfloor, & x \mid n \\ 0, & x \nmid n \end{cases} = \sum_{x|n} \sum_{d|x} d \cdot \mu(\frac{x}{d}) \cdot \lfloor \frac{n}{x} \rfloor = \sum_{x|n} \varphi(x) \cdot \lfloor \frac{n}{x} \rfloor$

(参考$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) \cdot d$)

即$\sum_{i=1}^{n} gcd(i,n) = \sum_{d|n} \varphi(d) \lfloor \frac{n}{d} \rfloor$

3. 2D gcd sum： $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} gcd(i,j)$

   $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} gcd(i,j) = \sum_{d=1}^{n} d \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} [gcd(i,j) = d]$

   设$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} [gcd(i,j) = x]$

   $g(x) = \sum_{x|d} f(d) = \sum_{x|d} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} [gcd(i,j) = d] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} [x \mid gcd(i,j)] = \lfloor \frac{n}{x} \rfloor \lfloor \frac{m}{x} \rfloor$

   由莫比乌斯反演得：

   $f(x) = \sum_{x|d} \mu(\frac{d}{x}) \cdot g(d) = \sum_{x|d} \mu(\frac{d}{x}) \cdot \lfloor \frac{n}{d} \rfloor \lfloor \frac{m}{d} \rfloor$

   代回得

   $\sum_{d=1}^{n} d \cdot f(d) = \sum_{d=1}^{n} d \sum_{d|x} \mu(\frac{x}{d}) \cdot \lfloor \frac{n}{x} \rfloor \lfloor \frac{m}{x} \rfloor = \sum_{x=1}^{n} \sum_{d|x} d \cdot \mu(\frac{x}{d}) \cdot \lfloor \frac{n}{x} \rfloor \lfloor \frac{m}{x} \rfloor = \sum_{x=1}^{n} \varphi(x) \cdot \lfloor \frac{n}{x} \rfloor \lfloor \frac{m}{x} \rfloor$

4. 1...n和1..m中互质的数的对数

   $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} [gcd(i,j) = 1]$

   设$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} [gcd(i,j) = x]$

   由莫比乌斯反演得：

   $f(x) = \sum_{x|d} \mu(\frac{d}{x}) \cdot g(d) = \sum_{x|d} \mu(\frac{d}{x}) \cdot \lfloor \frac{n}{d} \rfloor \lfloor \frac{m}{d} \rfloor$

   所求即$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} [gcd(i,j) = 1] = f(1) = \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \cdot \lfloor \frac{n}{d} \rfloor \lfloor \frac{m}{d} \rfloor$

杜教筛

求积性函数$f(i)$的前缀和$S(i)$

$S(n) = \sum_{i=1}^{n} f(i)$

杜教筛：

找一个积性函数$g(i)$，做g和f的狄利克雷卷积

$(g * f)(i) = \sum_{d|i} g(d) f(\frac{i}{d})$

再做一下卷积的前缀和

$\sum_{i=1}^{n}(g*f)(i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i}g(d)f(\frac{i}{d})$

把d提出：$\sum_{d=1}^{n}g(d)\sum_{d|i}f(\frac{i}{d})=\sum_{d=1}^{n}g(d)\sum_{i=1}^{\frac{n}{d}}f(i)=\sum_{d=1}^{n}g(d)S(\frac{n}{d})$

$g(1)S(n)=\sum_{i=1}^{n}g(i)S(\frac{n}{i})-\sum_{i=2}^{n}g(i)S(\frac{n}{i})=\sum_{i=1}^{n}(g*f)(i)-\sum_{i=2}^{n}g(i)S(\frac{n}{i})$

前半部分是狄利克雷卷积的前缀和。

如果狄利克雷卷积的前缀和非常好算，那么可以对后半部分进行数论分块，递归计算(记忆化)。

栗子：$\sum_{i=1}^{n}\mu(i)$

$g(1)S(n)=\sum_{i=1}^{n}(g*f)(i)-\sum_{i=2}^{n}g(i)S(\frac{n}{i})$

看到μ想到$(\mu*1)=e$即$\sum_{d|n}\mu(d)=[n=1]$

e的前缀和就是1，十分好计算

因此取$g(x)=1$

$S(n)=1-\sum_{i=2}^{n}S(\frac{n}{i})$

先筛出一部分μ的前缀和，然后记忆化递归计算。

栗子2：$\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)$

看到φ想到$(\varphi*1)=id$即$\sum_{d|n}\varphi(d)=n$

取$g(x)=1$

$S(n)=\frac{n(n+1)}{2}-\sum_{i=2}^{n}S(\frac{n}{i})$