Aufgabe 5

Sei w die Eingabe für H_ϵ.
Falls w kein

Aufgabe 6

a)

$L_\mathbb{P}$ ist unentscheidbar.
Wir beweisen es durch *Satz von Rice.*
$S = \{f_M \mid f_M(\mathbb{P}) = 1,\ f_M(\Sigma^*\backslash\mathbb{P}) = 0\}$

$$\begin{aligned} L_\mathbb{P} &= L(S) \\ &= \{\langle M\rangle \mid M \textit{ berechnet eine Funktion aus } S\} \\ &= \{\langle M\rangle \mid M \textit{ entscheidet die Menge der Binärdarstellugungen der Primzahlen.}\} \end{aligned}$$

- $S \neq \emptyset$:
  Es existiert eine TM M_{10} mit:
  M_{10} kann 2 (deren Binärdarstellung ist (10) entscheiden. D.h. M_{10} akzeptiert 10. Ansonsten verwirft M_{10}.
  $f_{M_{10}} \in S \Longrightarrow S \neq \emptyset$

- $S \neq R$
  Es existiert so eine TM $M_{\neg(10)}$ mit:
  $M_{\neg(10)}$ kann auch 2 (deren Binärdarstellung ist 10) entscheiden. Aber im Fall verwirft $M_{\neg(10)}$ 10. Ansonsten akzeptiert $M_{\neg(10)}$ immer.
  $f_{M_{\neg(10)}} \in R\backslash S \Longrightarrow S \neq R$

  Nach *Satz von Rice* ist $L_\mathbb{P}$ unentscheidbar.

b)

Wir definieren $L_{comp} = \{\langle M_1\rangle\ \langle M_2\rangle \mid L(M_1) = \overline{L(M_2)}\}$

Zu Zeigen: $H_\epsilon \leq L_{comp}$
Beschreibung der Funktion f:
Sei w die Eingabe für H_ϵ.

- Wenn w keine Gödelnummer ist, so sei $f(w) = w$.

- Falls $w = \langle M\rangle$ für ein TM M, so sei $f(w)$ die Gödelnummer von TM M_1^* und M_2^*, die die folgenden Eigenschaft haben:
  M_1^* lösche die Eingabe und simuliert M auf ϵ. Falls M in den Endzustand läuft(M hält), **schreibt M_1^* ein 1 auf dem Band**.
  M_2^* lösche die Eingabe und simuliert M auf ϵ. Falls M in den Endzustand läuft(M hält), dann **geht M_2^* in eine Endlosschleife**.

Korrektheit:

$$
\begin{aligned}
w \in H_\epsilon &\longrightarrow M \textit{ hält auf } \epsilon \\
&\longrightarrow M_1^* \textit{ akzeptiert die Einegabe. } M_2^* \textit{ akzeptiert dieselbe Eingabe nicht.} \\
&\longrightarrow \langle M_1^* \rangle \ \langle M_2^* \rangle \in L_{comp} \\
&\longrightarrow f(w) \in L_{comp} \\
w \notin H_\epsilon &\longrightarrow M \textit{ hält nicht auf } \epsilon \\
&\longrightarrow M_1^* \textit{ akzeptiert alle Einegabenicht. } M_2^* \textit{ akzeptiert alle Eingabe nicht.} \\
&\longrightarrow \langle M_1^* \rangle \ \langle M_2^* \rangle \notin L_{comp} \\
&\longrightarrow f(w) \notin L_{comp}
\end{aligned}
$$

Daher wird $H_\epsilon \leq L_{comp}$ zeigt. Da H_ϵ nicht rekursiv ist, ist L_{comp} nicht rekursiv.

Aufgabe 7

a)

Zu zeigen:
L ist rekursiv aufzählbar $\iff$ $L = \text{Def}(f)=\{x \mid f(x) \neq \perp \}$
"$\Rightarrow$": Sei A ein Aufzähler für L. Wir konstruieren eine TM M, die L erkennt.
Bei Eingabe w arbeitet M wir folgt:
M simuliert A mit Hilfe einer Spur, welche die Rolle des Druckers übernimmt.
Immer wenn ein neues Wort gedruckt worden ist, vergleicht M dieses Wort mit w und hält bei Übereinstimmung auf.
Daher berechnet TM M die Funktion f_M mit der Form: $\forall\ x \in L,\ f_M(x) \neq \perp$
"$\Leftarrow$": Sei $L = \text{Def}(f)=\{\ x \mid f(x) \neq \perp \}$, dann konstruieren wir einen Aufzähler A' für L.