Tutorium 06

11.12.2020

Johannes Lehmann
(johannes.lehmann@rwth-aachen.de)

Tutoriumsaufgabe 1 (PKP-Instanz)

Entscheiden Sie die folgenden PKP-Instanzen:

$$K_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ \hline abb \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ab \\ \hline b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ab \\ \hline ba \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} aba \\ \hline ba \end{bmatrix} \right\}$$

Nein. Nur $\begin{bmatrix} a \\ \hline abb \end{bmatrix}$ kommt als Startdomino in Frage.

Damit das obere und untere Wort gleich sind, muss das nächste Domino oben mit b beginnen.

Einen solchen Domino gibt es aber nicht.

Tutoriumsaufgabe 1 (PKP-Instanz)

Entscheiden Sie die folgenden PKP-Instanzen:

$$K_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ \hline b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ \hline aa \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ \hline ba \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} bb \\ \hline ba \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} aab \\ \hline b \end{bmatrix} \right\}$$

Ja, 3, 1, 2, 5, also $\begin{bmatrix} b \\ \hline ba \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ \hline b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ \hline aa \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} aab \\ \hline b \end{bmatrix}$, ergeben

oben und und unten das Wort babaab.

Tutoriumsaufgabe 2 (Binäres PKP)

Beweisen oder widerlegen Sie: $\overbrace{\text{Das PKP über dem Alphabet } \{0,1\}}^{PKP_b}$ ist unentscheidbar.

Konstruktion: Sei $|\Sigma| = m$ und $\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}$. Für alle $a_i \in \Sigma$ ersetzen wir alle Vorkommen von a_i in den Dominos durch $1\,0^i\,1$.

Dies offensichtlich berechenbar.

Korrektheit: Für alle PKP-Instanzen x gilt: $\underline{x \in PKP \Leftrightarrow f(x) \in PKP_b}$

$x \in PKP \Rightarrow f(x) \in PKP_b$ ✓

$f(x) \in PKP_b \Rightarrow x \in PKP$

"$\Rightarrow$" Sei $D_1, \dots, D_n$ eine PKP-Instanz mit Lösung $i_1, \dots, i_s$ $(s \geq 1)$. Seien $D_1', \dots, D_n'$ die Dominos mit ersetzten Buchstaben. Dann sind die Dominos in gleichen Reihefolge $(i_1, \dots, i_s)$ auch eine Lösung von $D_1', \dots, D_n'$.

"$\Leftarrow$" Sei $D_1', \dots, D_n'$ eine PKP_b-Instanz mit Lösung $i_1, \dots, i_s$ $(s \geq 1)$. $D_1', \dots, D_n'$ in Reihenfolge $i_1, \dots, i_s$ ergeben ein Wort $b_1 \dots b_t$.

Seien $D_1, \dots, D_n$ die ursprünglichen Dominos. $D_1, \dots, D_n$ in Reihenfolge $i_1, \dots, i_s$ ergeben oben ein Wort $c_1 c_2 \dots$ und unten ein Wort $d_1 d_2 \dots$

Zu zeigen: $c_1 c_2 \dots = d_1 d_2 \dots$

Angenommen $c_1 c_2 \ldots \neq d_1 d_2 \ldots$ Dann ex. ein kleinstes $i \in \mathbb{N}$ mit $c_i \neq d_i$, also $c_i = a_k$ und $d_i = a_\ell$ mit $k \neq \ell$.

Dann ergeben $D_1', \ldots, D_n'$ in Reihenfolge $i_1, \ldots, i_s$ oben ein Wort mit Präfix $w' 1 0^k 1$ und unten eines mit Präfix $w' 1 0^\ell 1$ für ein $w' \in \{0,1\}^*$.

Das steht im Widerspruch dazu, dass $D_1', \ldots, D_n'$ in Reihenfolge $i_1, \ldots, i_s$ oben und unten das gleiche Wort $b_1 \ldots b_r$ ergeben.

Tutoriumsaufgabe 3 (Unäres PKP)

Beweisen oder widerlegen Sie: Das PKP über dem unären Alphabet $\{0\}$ ist entscheidbar.

Entscheidbar.

$$\left[\frac{0}{000}\right] \left[\frac{00}{0}\right]$$

Unten 2 länger

Oben 1 länger

1 mal $\left[\frac{0}{000}\right]$ und 2 mal $\left[\frac{00}{0}\right]$

Eine PKP_u-Instanz hat genau dann keine Lösung, wenn entweder alle Dominos oben ein längeres Wort haben oder alle Dominos unten ein längeres Wort haben.

Ansonsten gibt es entweder

1. ein Domino, was oben und unten gleich lang ist. In diesem Fall ist dieses Domino eine Lösung.
2. ein Domino D_1, was oben $x > 0$ länger ist und ein Domino D_2, was unten $y > 0$ länger ist. Dann ist D_1 y-mal, dann D_2 x-mal, eine Lösung.

Somit ist PKP_u entscheidbar, da man lediglich die Länge aller Dominos überprüfen muss.