Übungsblatt 02

Jiaming Yao, 416649
Xiaoting Wang, 406267
Wensheng Zhang, 405521

Aufgabe 7

a)

Wir nehmen eine Aussage an, dass R abzählbar ist.

Aus der Vorlesung haben wir gelernt, dass $\sum^*$, die Menge der Wörter über einem endlichen Alphabet $\sum$, abzählbar ist.

D.h. die Menge von aller Wörter, die aus $\{a,\ b,\ c\}$ besteht, ist auch abzählbar.

Sei W die Menge von allen Wörter von R und $w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4,\dots$ eine Aufzählung von W.

Wir definieren eine 2-dimensionale unendliche Matrix $(A_{i,j})_{i\in\mathbb{N},j\in\mathbb{N}}$ mit

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & falls\ w_j \in L(r_i) \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Wir definieren die Menge

$$W_{diag} = \{w_i \mid i \in \mathbb{N},\ A_{i,i} = 1\}$$

$\Longrightarrow$ das Komplement von W_{diag}:

$$\bar{W}_{diag} = W \backslash W_{diag} = \{w_i \mid i \in \mathbb{N},\ A_{i,i} = 0\}$$

$\Longrightarrow \bar{W}_{diag} \in W$

Sei $w_{l_1},\ w_{l_2},\ w_{l_3},\dots$ eine Abzählung von $\bar{W}_{diag}$ mit einem regulären Ausdruck $r_k = (r_{m_1} + r_{m_2} + r_{m_3} + \dots)$ für $k \in \mathbb{N}$, $w_{L_1} \in L(r_{m_1})$, $w_{l_2} \in L(r_{m_2})$, usw., denn R und W beide sind abzählbar.

Somit $\bar{W}_{diag} = \{w_{l_1},\ w_{l_2},\ w_{l_3},\dots\} = L(r_{m_1}) \cup L(r_{m_2}) \cup L(r_{m_3}) \cup \dots = (r_{m_1} + r_{m_2} + r_{m_3} + \dots) = L(r_k)$. Dazu gibt es auch ein entsprechendes Wort w_k.

Jetzt betrachten wir zwei Fälle:

- Fall 1

$$A_{k,k} = 0 \overset{Def\ \bar{W}_{diag}}{\Longrightarrow} w_k \notin \bar{W}_{diag} \Longrightarrow w_k \notin L(r_k) \overset{Def\ A}{\Longrightarrow} A_{k,k} = 1$$

- Fall 2

$$A_{k,k} = 1 \overset{Def\ \bar{W}_{diag}}{\Longrightarrow} w_k \in \bar{W}_{diag} \Longrightarrow w_k \in L(r_k) \overset{Def\ A}{\Longrightarrow} A_{k,k} = 0$$

Beide Fälle zeigen den Widerspruch. Somit ist R überzählbar.