Tutorium 4

27. November 2020

Johannes Lehmann

johannes.lehmann@rwth-aachen.de

Tutoriumsaufgabe 1 (Abschlusseigenschaften)

Seien X und Y Sprachen über dem Alphabet $\{0,1\}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Wenn $X \cap Y$ entscheidbar ist und X entscheidbar und unendlich ist, dann ist auch Y entscheidbar.

Falsch. Sei $X = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ endet auf $0\}$ und $Y = H_\varepsilon$.

Dann ist X entsch. und unendl. und $X \cap Y = \emptyset$ entsch.

Allerdings ist Y unentscheidbar.

Tutoriumsaufgabe 1 (Abschlusseigenschaften)

Seien X und Y Sprachen über dem Alphabet $\{0, 1\}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(b) Wenn X endlich ist und Y rekursiv aufzählbar ist, dann ist auch $X \setminus Y$ rekursiv aufzählbar.

Die Aussage gilt. $X \setminus Y$ ist endlich, also rek. aufzählbar.

Tutoriumsaufgabe 1 (Abschlusseigenschaften)

Seien X und Y Sprachen über dem Alphabet $\{0,1\}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(c) Wenn X entscheidbar ist und Y rekursiv aufzählbar ist, dann ist $X \setminus Y$ rekursiv aufzählbar.

Falsch. Sei $X = \{0,1\}^*$, Y das Haltepoblem.

entsch. rek. aufzählbar

Dann ist $X \setminus Y$ das Komplement von Halteproblem.

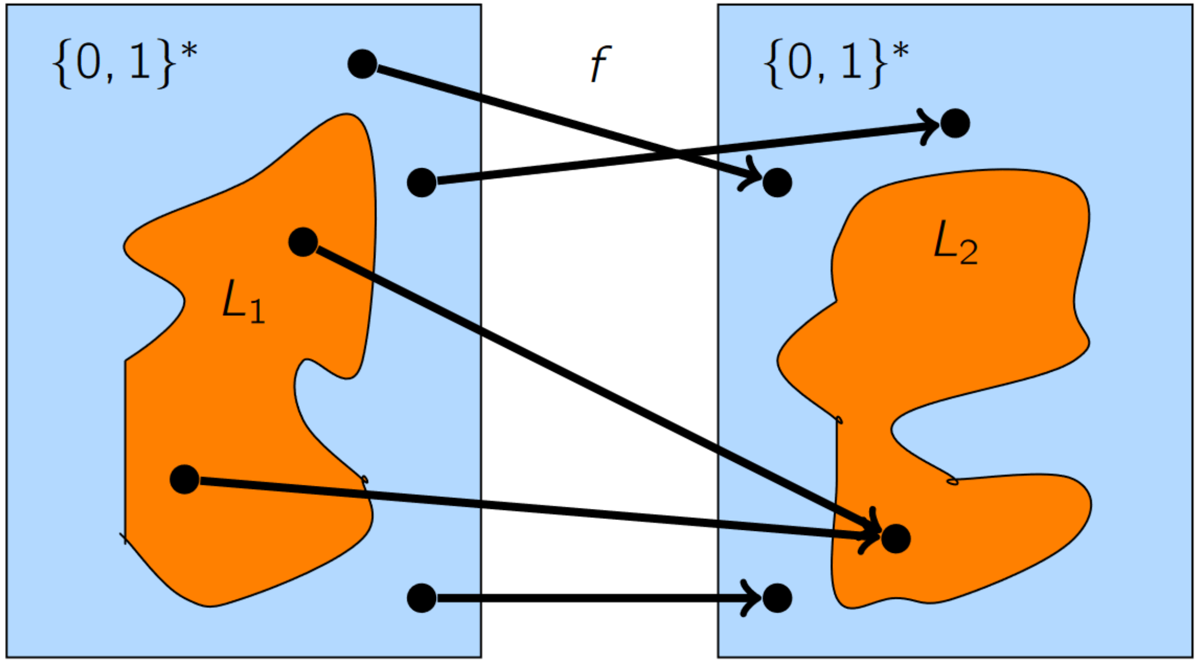
$X \setminus Y$ ist nicht rek. aufzählbar, da sonst das Halteproblem entsch. wäre.

Reduktionen

Definition

Es seien L_1 und L_2 Sprachen über einem Alphabet Σ. Dann heißt L_1 auf L_2 reduzierbar, Notation $L_1 \leq L_2$, wenn es eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ gibt, so dass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt

$$\boxed{x \in L_1 \iff f(x) \in L_2.}$$



Tutoriumsaufgabe 2 (Transitivität)

Seien L_1, L_2, L_3 drei Sprachen über dem Alphabet $\{0, 1\}$.

a) Zeigen Sie, dass das Reduktionskonzept "$\leq$" transitiv ist. Zeigen Sie also: Aus $L_1 \leq L_2$ und $L_2 \leq L_3$ folgt $L_1 \leq L_3$.

Da $L_1 \leq L_2$ ex. berechab. g mit $x \in L_1 \Leftrightarrow g(x) \in L_2$.

" $L_2 \leq L_3$ —— " —— f " $y \in L_2 \Leftrightarrow f(y) \in L_3$.

Es gilt $x \in L_1 \Leftrightarrow f(g(x)) \in L_3$, also ist L_1 auf L_3 reduzierbar, da $f \circ g$ berechenbar ist.

Tutoriumsaufgabe 2 (Transitivität)

Seien L_1, L_2, L_3 drei Sprachen über dem Alphabet $\{0, 1\}$.

b) Zeigen Sie die Aussage: $(L_1 \leq L_2 \Rightarrow \overline{L_1} \leq \overline{L_2})$.

Da $L_1 \leq L_2$ ex. ber. f mit $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$.

Dann gilt $x \in \overline{L_1} \Leftrightarrow x \notin L_1 \Leftrightarrow f(x) \notin L_2 \Leftrightarrow f(x) \in \overline{L_2}$.

Da $x \in \overline{L_1} \Leftrightarrow f(x) \in \overline{L_2}$, gilt $\overline{L_1} \leq \overline{L_2}$.

nicht entscheidbar

Tutoriumsaufgabe 3 (Selbstreduktion H)

rek. aufzählbar

Zeigen Sie, dass weder $\overline{H} \leq H$ noch $H \leq \overline{H}$ gilt.

nicht rek. aufzählbar

($H = \{ \langle M \rangle w \mid M$ hält auf $w \}$)

$L_1 \leq L_2$ und L_2 entscheidbar, dann auch L_1 entscheidbar.
—— " —— rek. aufzählbar, —— " — L_1 rek. afz.

Falls $\overline{H} \leq H$ gelten würde, dann wäre $\overline{H}$ rek. aufzählbar und somit H entscheidbar. Also gilt $\overline{H} \leq H$ nicht.

Falls $H \leq \overline{H}$ gelte, dann würde auch $\overline{H} \leq \overline{\overline{H}}$ gelten (nach Tutoraufgabe 2b) und $\overline{\overline{H}} = H$, also würde dann auch $\overline{H} \leq H$ gelten. Dies widerspricht der Aussage aus dem 1. Teil.