Übungsblatt 06

Jiaming Yao, 416649
Xiaoting Wang, 406267
Wensheng Zhang, 405521

Aufgabe 6

b)

Zu zeigen: $K \in PKP \iff f(K) \in PKP_b$

Sei K die die Eingabe für PKP. $K = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{x_1}{y_1} \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} \frac{x_k}{y_k} \end{bmatrix} \right\}$

Fall 1 Wenn es in K keine Dominos gibt, wo das obere und das untere Wort gleich lang sind, so sei $f(K) = K$.

Fall 2 Ansonsten machen wir für die Dominos (oben und unten gleich lang) folgendes:

Wir bezeichnen solche Dominos als $K' = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{x_{l_1}}{y_{l_1}} \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} \frac{x_{l_n}}{y_{l_n}} \end{bmatrix} \right\}$. (die Reihenfolge spielt keine Rolle)
Dann kombinieren wir Dominos aus K' (oben und unten gleich lang) mit einem anderen Domino aus K/K' (oben und unten verschieden lang):
Zum Beispiel können wir $\begin{bmatrix} \frac{x_{l_1}}{y_{l_1}} \end{bmatrix}$ mit $\begin{bmatrix} \frac{x_i}{y_i} \end{bmatrix}$ (einer aus K/K') kombinieren. In dem Fall bekommen wir zwei neue Dominos $\begin{bmatrix} \frac{x_{l_1} x_i}{y_{l_1} y_i} \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} \frac{x_i x_{l_1}}{y_i y_{l_1}} \end{bmatrix}$ (einmal vorn, einmal hinter) .

Insgesamt können wir $2 \times n \times (k - n)$ mal neue Dominos konstruieren. Man kann klar sehen, in solchen Dominos stehen immer verschieden lang Wörter oben und unten. Wir bezeichnen solche konstruierte Dominos als K''. So sei $f(K) = \{K/K', K''\}$.

Korrektheit:

$K \in PKP \Longrightarrow f(K) \in PKP_b$
Sei $(i_1, \cdots, i_n)$ eine Lösung für K, d.h.

$$x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n} = y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_n}$$

Für Fall 1 ist es klar, $f(K) \in PKP_b$.
Im Fall 2 gibt es immer eine Lösung für $f(K)$, dessen entsprechende Wörter gleich wie oben ist.
Z.B. die Länge von x_{i_j} ist gleich wie y_{i_j} für ein $j \in \{1, \cdots, n\}$. So ein Domino steht nicht in $f(K)$. Aber können wir dieser durch $\begin{bmatrix} \frac{x_{i_{j-1}} x_{i_j}}{y_{i_{j-1}} y_{i_j}} \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} \frac{x_{i_j} x_{i_{j+1}}}{y_{i_j} y_{i_{j+1}}} \end{bmatrix}$ aus $f(K)$ ersetzen und löschen die entsprechende Domino:

$$\begin{bmatrix} \frac{x_{i_1}}{y_{i_1}} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \frac{x_{i_j}}{y_{i_j}} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \frac{x_{i_n}}{y_{i_n}} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{x_{i_1}}{y_{i_1}} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \frac{x_{i_j} x_{i_{j+1}}}{y_{i_j} y_{i_{j+1}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x_{i_{j+2}}}{y_{i_{j+2}}} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \frac{x_{i_n}}{y_{i_n}} \end{bmatrix}$$

$K \notin PKP \Longrightarrow f(K) \notin PKP_b$
Offensichtlich......

Wegen $K \in PKP \iff f(K) \in PKP_b$ und Unentscheidbarkeit von PKP ist PKP_b auch unentscheidbar.