Übung 7

Donnerstag, 17. Dezember 2020 14:04

Tutoriumsaufgabe 1 (LOOP Program)

Zeigen Sie, dass folgende arithmetische Befehle durch ein LOOP-Programm simuliert werden können:

a) $x_i := x_j \ominus x_k$ (modifizierte Subtraktion mit Ergebnis 0 falls $x_j < x_k$)

b) $x_i := \min\{x_j, x_k\}$

1a)

```
x_i := x_j + 0;
LOOP x_k DO
    x_i := x_i - 1     } x_k nicht nutzen
END
```

b) $\min\{x_j, x_k\} = x_j \Leftrightarrow x_j - x_k \leq 0$

IF $x_1 = 0$ THEN P_1 ELSE P_2 nach VL LOOP-berechenbar

x_1

IF $x_1 = 0$ THEN P_1 ELSE P_2

```
x_2 := x_2 + 1;
LOOP x_1 DO x_2 := x_4 ; x_3 := x_4 + 1 END;
LOOP x_2 DO P_1 END;
LOOP x_3 DO P_2 END
```

$\underbrace{x_2 := x_4}_{x_2 = 0}$; $\underbrace{x_3 := x_4 + 1}_{x_3 = 1}$

$y = x_j \ominus x_k;$

IF $y = 0$ THEN $x_i := x_j$ ELSE $x_i := x_k$

Tutoriumsaufgabe 2 (Wachstumsfunktion)

Beweisen oder widerlegen Sie: Wenn ein LOOP Programm P die Hintereinanderausführung von genau vier Zuweisungsbefehlen vom Typ "$x_i := x_j + c$" mit $c \in \{-1, 0, 1\}$ ist, dann erfüllt seine Wachstumsfunktion F_P für alle $n \geq 0$ die Ungleichung

$$F_P(n) \leq 5n + 8.$$

$(a_0, \dots, a_k)$ initiale Variablenbelegung

$f_P(a) = (x_0, \dots, x_k)$ „Ausgabe"

$F_P(n) = \max\{ |f_P(a)| \mid a \in \mathbb{N}^{k+1} \text{ mit } \sum_{i=0}^{k} a_i \leq n \}$

$x_2 := x_1 + 1;$
$x_3 := x_2 + 1;$
$x_4 := x_3 + 1;$
$x_5 := x_4 + 1$

$$\vec{a} = (n, 0, 0, 0, 0) \xrightarrow{P} f_P(\vec{a}) = (n, n+1, n+2, n+3, n+4)$$

$$F_P(n) = n + n+1 + n+2 + n+3 + n+4$$
$$= 5n+10 > 5n+8$$

Die Aussage stimmt also nicht.

Tutoriumsaufgabe 3 (k-VARIABLE-WHILE)

Wenn ein WHILE Programm P nur k Variablen ($k \geq 1$) verwendet, so gehört P zur Familie der k-VARIABLE-WHILE Programme.

Beweisen Sie: 1-VARIABLE-WHILE Programme sind nicht Turing-mächtig.

Hinweis: Zeigen Sie, dass kein 1-VARIABLE-WHILE Programm die Funktion $f(x) = 2x$ berechnen kann.

$|P|$ = Anzahl der Befehlszeilen von P

strukturelle Induktion:

$$x_1 = x \xrightarrow{P} x_1 \leq x + |P|$$

* $P = x_1 := x_1 + c$, $c \in \{-1, 0, 1\}$

$$x_1 = x_1 + c \leq x_1 + 1 = x_1 + |P|$$

* $P = P_1; P_2$ (P_1, P_2 1-VARIABLE-WHILE)

Nach IV: $x_1 \leq x + |P_1|$ und
$x_1 \leq x + |P_2|$

nach P1: $x_1 \leq \underbrace{x + |P_1|}$
nach P2: $x_1 \leq (x + |P_1|) + |P_2| = x + |P|$

* $P =$ WHILE $x_1 \neq 0$ DO P' END (P' 1-VARIABLE-WHILE)

$\rightarrow$ nach Ausführung gilt $x_1 = 0 \leq x + |P|$

$\Rightarrow$ P berechnet bei Eingabe $|P|+1$ eine Ausgabe $\leq |P|+1+|P| = 2\cdot|P|+1 < 2(|P|+1)$