

# Übung 5

Donnerstag, 3. Dezember 2020

18:06

## Tutoriumsaufgabe 1 (Reduktion zwischen Varianten des Halteproblems)

Zeigen Sie  $H_\varepsilon \leq H$  und  $H \leq H_\varepsilon$ .

$$H_\varepsilon \leq H :$$

$$f(\langle M \rangle) = \langle M \rangle$$

falls Eingabe für  $H_\varepsilon$  keine Gödelnummer,  
bilde auf syntaktisch falsche Eingabe  
für  $H$  ab, zB immer auf 0

$f$  ist offensichtlich berechenbar

$f$  ist offensichtlich auch korrekt.

$$H \leq H_\varepsilon : \langle M \rangle w \text{ Eingabe für } H$$

$M'$  ignoriert Eingabe (lösche Eingabe)  
schreibe  $w$  aufs Band, simuliere  
 $M$  auf  $w$

Konstruktion von  $M'$  für alle  $M$  und  $w$  berechenbar  
syntaktisch falsche Eingaben auf syntaktisch falsche abbilden

Korrektheit:

$$(\langle M \rangle, w) \in H \Rightarrow M \text{ hält auf } w$$

$$\Rightarrow M' \text{ hält auf } \varepsilon$$

$$\Rightarrow \langle M' \rangle \in H_\varepsilon$$

$$(\langle M \rangle, w) \notin H \Rightarrow M \text{ hält nicht auf } w$$

$$\Rightarrow M' \text{ hält nicht auf } \varepsilon$$

$$\Rightarrow \langle M' \rangle \notin H_\varepsilon$$

## Tutoriumsaufgabe 2 (Reduktion)

Sei  $H_{\text{never}} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält auf keiner Eingabe}\}$ . Zeigen Sie mittels **Reduktion**, dass  $H_{\text{never}}$  nicht rekursiv aufzählbar ist.

$$\overline{H}_\varepsilon \leq H_{\text{never}}$$

$w \neq \langle M \rangle \rightarrow \langle M' \rangle \in H_{\text{never}}$ ,  $M'$  geht immer in Endlosschleife

$$w = \langle M \rangle \in \overline{H}_\varepsilon \Leftrightarrow \langle M^* \rangle \in H_{\text{never}}$$

$M^*$  auf Eingabe  $\varepsilon$ : simuliere  $M$

sonst : gehe in Endlosschleife

Konstruktion von  $\langle M^* \rangle$  gegeben  $\langle M \rangle$  ist berechenbar

Korrektheit:

$$w \in \overline{H}_\varepsilon : w \neq \langle M \rangle$$

$$\langle M' \rangle \in H_{\text{never}} \quad \checkmark$$

$w = \langle M \rangle$ ,  $M$  hält nicht auf  $\varepsilon$

$\Rightarrow M^*$  hält auf keiner Eingabe  $\Rightarrow \langle M^* \rangle \in H_{\text{never}}$

$$w \notin \overline{H}_\varepsilon : w = \langle M \rangle$$

$\Rightarrow M$  hält auf  $\varepsilon$

$\Rightarrow M^*$  hält auf  $\varepsilon$

$\Rightarrow \langle M^* \rangle \notin H_{\text{never}}$

### Tutoriumsaufgabe 3 (Nicht aufzählbar)

Geben Sie eine von  $H_{\text{all}}$  verschiedene Sprache an, die (genau wie  $H_{\text{all}}$ ) nicht rekursiv aufzählbar ist und deren Komplement ebenfalls nicht rekursiv aufzählbar ist.

$$L_{\text{uni}} = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ akzeptiert alle Eingaben} \}$$

$$L_{\text{leer}} = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ verwirft alle Eingaben} \}$$

$$L_{\text{ungerade}} = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ hält auf allen Eingaben ungerader Länge} \}$$

$$L_{\text{prim}} = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ hält auf allen Primzahlen} \}$$

$L_{\text{prim}}$  nicht rekursiv aufzählbar

$$H_{\text{all}} \leq L_{\text{prim}} \Rightarrow \overline{H_{\text{all}}} \leq \overline{L_{\text{prim}}} \quad f(\langle M \rangle) = \langle M' \rangle$$

M<sub>index</sub> : Eingabe n-te Primzahl  
berechne n-te Wort (kanonische  
Reihenfolge)

M' : zuerst führe M<sub>index</sub> aus, danach M

$w \neq \langle M \rangle \rightarrow w$

$w = \langle M \rangle \rightarrow$  berechne M'.

↳ lasse M<sub>index</sub> auf Eingabe  
laufen, sodass danach für  
 $p_n$  (n-te Primzahl) das  
n-te Wort auf dem Band  
steht.

check, ob Eingabe  
Primzahl ist,  
ist berechenbar

Man kann n  
bestimmen,  
M<sub>index</sub> berechenbar

↳ M auf dem n-ten Wort } berechenbar

$\Rightarrow$  M' berechenbar

Korrektheit:

$w \neq \langle M \rangle$

$w \notin H_{M'} \Leftrightarrow f(w) = w \Leftrightarrow f(w) \notin L_{prim}$

$w = \langle M \rangle$

$\langle M \rangle \in H_{M'} \Rightarrow$  M hält auf allen Eingaben

$\Rightarrow$  M' hält auf allen Primzahlen

$\Rightarrow \langle M' \rangle \in L_{prim}$

$\langle M \rangle \notin H_{M'} \Rightarrow$  es gibt ein Wort w auf  
dem M nicht hält

$\Rightarrow$  es gibt eine Primzahl auf  
der M' nicht hält

$\Rightarrow \langle M' \rangle \notin L_{prim}$

---

Reduktionen:

$A \leq B$ , A nicht rek. aufzählbar

$\Rightarrow B$  "

$$A \leq B : f(w) = w'$$

$$\left. \begin{array}{l} w \in A \Rightarrow w' \in B \\ w \notin A \Rightarrow w' \notin B \end{array} \right\} \text{ Korrektheit}$$

Syntaktisch falsche Eingaben  
berücksichtigen.

$f$  ist berechenbar

Meistens konstruieren wir neue

TM für Funktion  $f$

$$(f(\langle M \rangle) = \langle M' \rangle)$$

$$A = \{ \langle M \rangle \mid \dots \}$$

$$B = \{ \langle M \rangle \mid \dots \}$$

$$B' = \{ \langle M \rangle w \mid \dots \} \rightarrow A \leq B' : f(\langle M \rangle) = \langle M' \rangle w$$