Übungsblatt 05

Jiaming Yao, 416649
Xiaoting Wang, 406267
Wensheng Zhang, 405521

Aufgabe 4

Zu zeigen: A ist entscheidbar
$A \leq B$ und B rekursiv aufzählbar $\Longrightarrow$ A ist auch rekursiv aufzählbar (Lemma von Reduktionen) - - - - ①
$A \leq B$ und $B \leq \overline{A} \Longrightarrow A \leq \overline{A}$ (nach Tutoraufgabe 2a von 4.Tutuorium, also Transitivität von Reduktionen)
$A \leq \overline{A} \Longrightarrow \overline{A} \leq A$ (nach Tutoraufgabe 2b von 4.Tutuorium) - - - - ②
① und ② $\Longrightarrow$ $\overline{A}$ ist auch rekursiv aufzählbar - - - - ③
① und ③ $\Longrightarrow$ A ist entscheidbar

Aufgabe 5

Zu zeigen: $\mathbf{H}_\varepsilon \leq \mathbf{L}_{111}$
Sei ω die Eingabe für $\mathbf{H}_\varepsilon$

- Wenn ω keine gültige Gödelnummer ist, so sei $f(\omega) = \omega$
- Falls $\omega = \langle M \rangle$ für eine **TM** M, so sei $f(\omega)$ die Gödelnummer einer TM M^* mit der folgenden Eigenschaften:
  M^* überprüft, ob die Eingabe mit 111 endet.
  Falls ja, löscht M^* die Eingabe und simuliert M mit der Eingabe ε. Ansonsten geht M^* in eine Endlosschleife.

Korrektheit:

- Falls ω keine Gödelnummer ist, ist die Korrektheit klar
- Sei nun $\omega = \langle M \rangle$ für eine **TM** und sei $f(\omega) = \langle M^* \rangle$
  Es gilt: $\omega \in \mathbf{H}_\varepsilon$
  $\Longrightarrow$ M hält auf der Eingabe ε
  $\Longrightarrow$ M^* hält auf der Eingabe, die mit 111 endet.
  $\Longrightarrow \langle M^* \rangle \in \mathbf{L}_{111}$
  $\Longrightarrow f(\omega) \in \mathbf{L}_{111}$

  $\omega \notin \mathbf{H}_\varepsilon$
  $\Longrightarrow$ M hält nicht auf der Eingabe ε
  $\Longrightarrow$ M^* hält nicht auf der Eingabe, die mit 111 enden
  $\Longrightarrow \langle M^* \rangle \notin \mathbf{L}_{111}$
  $\Longrightarrow f(\omega) \notin \mathbf{L}_{111}$

Aufgabe 6

a)

$L_{\mathbb{P}}$ ist unentscheidbar.
Wir beweisen es durch *Satz von Rice*.
$S = \{f_M \mid f_M(\mathbb{P}) = 1,\ f_M(\Sigma^* \backslash \mathbb{P}) = 0\}$

$$
\begin{aligned}
L_{\mathbb{P}} &= L(S) \\
&= \{\langle M \rangle \mid M \textit{ berechnet eine Funktion aus } S\} \\
&= \{\langle M \rangle \mid M \textit{ entscheidet die Menge der Binärdarstellugungen der Primzahlen.}\}
\end{aligned}
$$

- $S \neq \emptyset$:
  Es existiert eine TM M_{10} mit:
  M_{10} kann 2 (deren Binärdarstellung ist (10) entscheiden. D.h. M_{10} akzeptiert 10. Ansonsten verwirft M_{10}.
  $f_{M_{10}} \in S \Longrightarrow S \neq \emptyset$

- $S \neq R$
  Es existiert so eine TM $M_{\neg(10)}$ mit:
  $M_{\neg(10)}$ kann auch 2 (deren Binärdarstellung ist 10) entscheiden. Aber im Fall verwirft $M_{\neg(10)}$ 10. Ansonsten akzeptiert $M_{\neg(10)}$ immer.
  $f_{M_{\neg(10)}} \in R \backslash S \Longrightarrow S \neq R$

  Nach *Satz von Rice* ist $L_{\mathbb{P}}$ unentscheidbar.

b)

Wir definieren $L_{comp} = \{\langle M_1 \rangle \ \langle M_2 \rangle \mid L(M_1) = \overline{L(M_2)}\}$

Zu Zeigen: $H_\epsilon \leq L_{comp}$
Beschreibung der Funktion f:
Sei w die Eingabe für H_ϵ.

- Wenn w keine Gödelnummer ist, so sei $f(w) = w$.
- Falls $w = \langle M \rangle$ für ein TM M, so sei $f(w)$ die Gödelnummer von TM M_1^* und M_2^*, die die folgenden Eigenschaft haben:
  M_1^* lösche die Eingabe und simuliert M auf ϵ. Falls M in den Endzustand läuft(M hält), **schreibt M_1^* ein 1 auf dem Band**.
  M_2^* lösche die Eingabe und simuliert M auf ϵ. Falls M in den Endzustand läuft(M hält), dann **geht M_2^* in eine Endlosschleife**.

Korrektheit:

$$
\begin{aligned}
w \in H_\epsilon &\Longrightarrow M \ hält \ auf \ \epsilon \\
&\Longrightarrow M_1^* \ akzeptiert \ die \ Einegabe. \ M_2^* \ akzeptiert \ dieselbe \ Eingabe \ nicht. \\
&\Longrightarrow \langle M_1^* \rangle \ \langle M_2^* \rangle \in L_{comp} \\
&\Longrightarrow f(w) \in L_{comp} \\
w \notin H_\epsilon &\Longrightarrow M \ hält \ nicht \ auf \ \epsilon \\
&\Longrightarrow M_1^* \ akzeptiert \ alle \ Einegabenicht. \ M_2^* \ akzeptiert \ alle \ Eingabe \ nicht. \\
&\Longrightarrow \langle M_1^* \rangle \ \langle M_2^* \rangle \notin L_{comp} \\
&\Longrightarrow f(w) \notin L_{comp}
\end{aligned}
$$

Daher wird $H_\epsilon \leq L_{comp}$ zeigt. Da H_ϵ nicht rekursiv ist, ist L_{comp} nicht rekursiv.

Aufgabe 7

a)

Zu zeigen:
L ist rekursiv aufzählbar $\iff$ $L = \text{Def}(f)=\{x \mid f(x) \neq \perp \}$

" $\Rightarrow$ " Sei A ein Aufzähler für L. Wir konstruieren eine TM M, die L erkennt.
Bei Eingabe w arbeitet M wir folgt:
M simuliert A mit Hilfe einer Spur, welche die Rolle des Druckers übernimmt. Immer wenn ein neues Wort gedruckt worden ist, vergleicht M dieses Wort mit w und hält bei Übereinstimmung auf.
Daher berechnet TM M die Funktion f_M mit der Form: $\forall\ x \in L,\ f_M(x) \neq \perp$

" $\Leftarrow$ " Sei f eine berechenbare Funktion für $S = \{f \mid \forall x \in L,\ f(x) \neq \perp\}$
Für die Funktion f existiert eine TM M', die f berechnet.
Dann konstruieren wir ein Aufzähler A' durch M':
Für $i = 1, 2, 3 \cdots$
A' simuliere je i Schritte von M' auf jedem Wort aus $\{w_1,\ w_2, \cdots, w_i\}$.
Wann M' immer dabei auf eines der Wörter hält, so drucke es aus.
Somit ist A' ein Aufzähler von L.

b)

Zu zeigen:
L ist rekursiv aufzählbar $\iff$ L = Bild(f)=$\{f(x) \mid x \in \{0,1\}^*\ \}$ oder L=$\{\}$

" $\Rightarrow$ " Sei L rekursiv aufzählbar. Damit gibt es Für L ein Aufzähler A.
Für $\{0,1\}^*$ steht eine kanonische Reihenfolge. Sei $x \in \{0,1\}^*$ in i-Position

Konstruiere ein TM M mit folgenden Eigenschaft:

1. Suche, welche Stelle die Eingabe in der kanonischen Reihenfolge steht, z.B. i-te Stelle.
2. Simuliere A und druck das i-te Wort von L aus. Falls A hält(D.h. A hat alle Wörter von L ausgegeben), dann simuliere A nochmal, aber zähle weiter. (Z.B. Das letzte Wort aus A ist n-te Wort. Wenn wir nochmal A simulieren, zählen wir von n+1.)
3. Wiederhole 2-te Schritte, bis das i-te Wort von L ausgibt.

Im Fall kann M für jeder $x \in \{0,1\}^*$ ein Wort von L finden und dann es ausgeben.
Für so eine TM M existiert ein Funktion, die total berechenbar ist.