

Aufgabe 7

a)

Wir nehmen eine Aussage an, dass R abzählbar ist.

Aus der Vorlesung haben wir gelernt, dass Σ^* , die Menge der Wörter über einem endlichen Alphabet Σ , abzählbar ist.

D.h. die Menge von allen Wörtern, die aus $\{a, b, c\}$ besteht, ist auch abzählbar.

Sei W die Menge von allen Wörtern von R und $w_1, w_2, w_3, w_4, \dots$ eine Aufzählung von W .

Wir definieren eine 2-dimensionale unendliche Matrix $(A_{i,j})_{i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}}$ mit

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } w_j \in L(r_i) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir definieren die Menge

$$W_{diag} = \{w_i \mid i \in \mathbb{N}, A_{i,i} = 1\}$$

\implies das Komplement von W_{diag} :

$$\bar{W}_{diag} = W \setminus W_{diag} = \{w_i \mid i \in \mathbb{N}, A_{i,i} = 0\}$$

$\implies \bar{W}_{diag} \in W$

Sei $w_{l_1}, w_{l_2}, w_{l_3}, \dots$ eine Abzählung von \bar{W}_{diag} mit einem regulären Ausdruck $r_k = (r_{m_1} + r_{m_2} + r_{m_3} + \dots)$ für $k \in \mathbb{N}$, $w_{l_1} \in L(r_{m_1})$, $w_{l_2} \in L(r_{m_2})$, usw.

Somit $\bar{W}_{diag} = \{w_{l_1}, w_{l_2}, w_{l_3}\} = L(r_{m_1}) \cup L(r_{m_2}) \cup L(r_{m_3}) \cup \dots = (r_{m_1} + r_{m_2} + r_{m_3} + \dots) = L(r_k)$. Dazu gibt es auch ein entsprechendes Wort w_k .

Jetzt betrachten wir zwei Fälle:

- Fall 1

$$A_{k,k} = 0 \xRightarrow{\text{Def } \bar{W}_{diag}} w_k \notin \bar{W}_{diag} \implies w_k \notin L(r_k) \xRightarrow{\text{Def } A} A_{k,k} = 1$$

- Fall 2

$$A_{k,k} = 1 \xRightarrow{\text{Def } \bar{W}_{diag}} w_k \in \bar{W}_{diag} \implies w_k \in L(r_k) \xRightarrow{\text{Def } A} A_{k,k} = 0$$

Beide Fälle zeigen den Widerspruch. Somit ist R überzählbar.