BuK WS 2020/21
Tutorium 08
21. Dezember 2020

Übungsblatt 1

Xiaoting Wang, 406267
Wensheng Zhang, 405521
Jiaming Yao, 416649

Aufgabe 4

K_1 ist eine Ja-Instanz. Die Lösung ist $3, 8$, also $\left[\frac{bb}{b}\right]$, $\left[\frac{aa}{baa}\right]$ ergeben oben und unten das gleich Wort $bbaa$.

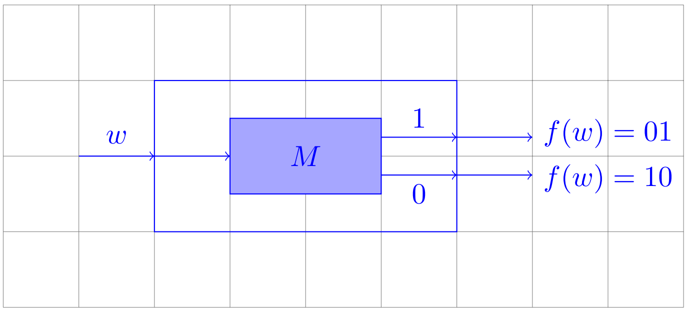
K_2 ist eine Nein-Instanz.
Begründung:
Bei Startdomino gibt es zwei Möglichkeiten: $\left[\frac{ab}{abb}\right]$ oder $\left[\frac{aa}{aab}\right]$
<u>1.Fall:</u> Startdomino=$\left[\frac{ab}{abb}\right]$, benötigt ein anderes Domino, das mit b anfängt und im oben liegt, aber es gibt kein solches Domino in K_2.
<u>2.Fall:</u> Startdomino=$\left[\frac{aa}{aab}\right]$, benötigt auch anderes Domino, das mit b anfängt und im oben liegt, aber es gibt kein solches Domino in K_2.

Aufgabe 5

Zu zeigen: eine Sprache L ist endscheidbar $\iff$ L auf die Sprache L_{01} reduzierbar ist
" $\Rightarrow$ " zu zeigen: L entscheidbar $\Rightarrow L \leq L_{01}$

$\exists f$: $w \in L \iff f(w) \in L_{01}$

Für rekursive Sprache L existiert ein **TM** M, die L entscheiden kann.



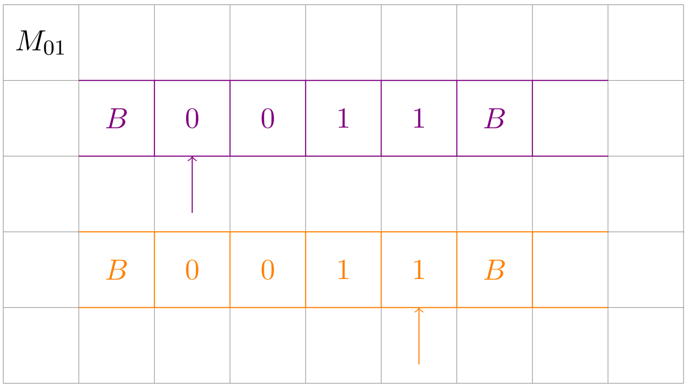
Korrektheit:

$w \in L \Rightarrow M$ akzeptiert w
$\Rightarrow f(w) = 01$
$\Rightarrow f(w) \in L_{01}$

$w \notin L \Rightarrow M$ verwirft w
$\Rightarrow f(w) = 10$
$\Rightarrow f(w) \notin L_{01}$

" $\Leftarrow$ " zu zeigen: $L \leq L_{01} \Rightarrow L$ entscheidbar

Lemma: Falls $L_1 \leq L_2$ und L_2 rekursiv ist, ist L_1 auch rekursiv.
zu zeigen: L_{01} ist rekursiv
Für L_{01} konstruieren wir eine **2-Band-TM** M_{01}



(i) Auf beide Bänder speichert M die Eingabewort w.

(ii) Leseköpfe stehen auf dem ersten Zeichen auf 1.Band und auf dem letzten Zeichen auf 2.Band.

(iii) Der 1.Kopf geht jeder Schritt nach **recht** und der 2.Kopf geht jeder Schritt nach **links**. Im jeden Schritt soll M ein 0 (vom 1.Band) und ein 1 (vom 2.Band) lesen, sonst wird w verwirft.

(iv) Dann läuft M_{01} wie 3.Schritt aber mit folgenden Übergänge:

1.Band	2.Band	Aktion
0	1	laufe weiter
1	0	akzeptiert
0	0	verwirft
1	1	verwirft

Mit obiger Konstruktion ist klar, dass L_{01} durch M_{01} entscheiden kann, d.h. L_{01} ist entscheidbar. Folglich ist L entscheidbar (wegen des Lemmas).

Aufgabe 6

Wir bezeichnen die Probleme von a) und b) als PKP_a und PKP_b.

b)

Zu zeigen: $K \in PKP \iff f(K) \in PKP_b$

Die Beschreibung von f:
Sei K die die Eingabe für PKP und $K = \left\{ \left[\frac{x_1}{y_1}\right], \cdots, \left[\frac{x_k}{y_k}\right] \right\}$.

Fall 1 Wenn es in K keine Dominos gibt, wo das obere und das untere Wort gleich lang sind, so sei $f(K) = K$.

Fall 2 Ansonsten machen wir für die Dominos (oben und unten gleich lang) folgendes: Wir bezeichnen solche Dominos als $K' = \left\{ \left[\frac{x_{l_1}}{y_{l_1}}\right], \cdots, \left[\frac{x_{l_n}}{y_{l_n}}\right] \right\}$ (die Reihenfolge spielt keine Rolle).
Dann kombinieren wir Dominos aus K' (oben und unten sind gleich lang) mit einem anderen Domino aus $K \backslash K'$ (oben und unten sind verschieden lang):
Zum Beispiel können wir $\left[\frac{x_{l_1}}{y_{l_1}}\right]$ mit $\left[\frac{x_i}{y_i}\right]$ (einer aus $K \backslash K'$) kombinieren. In dem Fall bekommen wir zwei neue Dominos $\left[\frac{x_{l_1} x_i}{y_{l_1} y_i}\right]$ und $\left[\frac{x_i x_{l_1}}{y_i y_{l_1}}\right]$ (einmal vorne, einmal hinter) .

Insgesamt können wir $2 \times n \times (k - n)$ mal neue Dominos konstruieren. Man kann klar sehen, in solchen Dominos stehen immer oben und unten verschieden lang Wörter. Wir bezeichnen solche konstruierte Dominos als K''. So sei $f(K) = \{K \backslash K', K''\}$.

Korrektheit:

$K \in PKP \Longrightarrow f(K) \in PKP_b$

Sei $(i_1, \cdots, i_n)$ eine Lösung für K, d.h.

$$x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n} = y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_n}$$

Für *Fall 1* ist es klar, $f(K) \in PKP_b$.

Im *Fall 2* gibt es immer eine Lösung für $f(K)$, dessen entsprechende Wörter gleich wie oben ist.

Z.B. die Länge von x_{i_j} ist gleich wie y_{i_j} für ein $j \in \{1, \cdots, n\}$. So ein Domino steht nicht in $f(K)$. Aber können wir dieser durch $\left[\frac{x_{i_{j-1}} x_{i_j}}{y_{i_{j-1}} y_{i_j}}\right]$ **oder** $\left[\frac{x_{i_j} x_{i_{j+1}}}{y_{i_j} y_{i_{j+1}}}\right]$ aus $f(K)$ ersetzen und löschen die entsprechende Dominos:

$$\left[\frac{x_{i_1}}{y_{i_1}}\right] \cdots \left[\frac{x_{i_j}}{y_{i_j}}\right] \cdots \left[\frac{x_{i_n}}{y_{i_n}}\right] \Longrightarrow \left[\frac{x_{i_1}}{y_{i_1}}\right] \cdots \left[\frac{x_{i_j} x_{i_{j+1}}}{y_{i_j} y_{i_{j+1}}}\right] \left[\frac{x_{i_{j+2}}}{y_{i_{j+2}}}\right] \cdots \left[\frac{x_{i_n}}{y_{i_n}}\right]$$

$K \notin PKP \Longrightarrow f(K) \notin PKP_b$

offensichtlich gilt wegen der Konstruktion

Wegen $K \in PKP \iff f(K) \in PKP_b$ und Unentscheidbarkeit von PKP ist PKP_b auch unentscheidbar.

Die Lösung für ein $K \in PKP_a$ ist das Überschnitt von Kategorie 1.X und Kategorie 2.X (erzählt im Folgendes.)

Wir ordnen die gegebene Dominos K in vier Kategorie an.

1.1. ein Domino, dessen oberes und unteres Wort gleich viel a hat.

1.2. Menge von Dominos, in denen das gesamte Wort gleich viel a enthält wie das gesamte untere Wort. (deren Reihenfolge spielt keine Rolle und das gleiche Domino kann mehrmals vorkommen.)

2.1. ein Domino, dessen oberes und unteres Wort gleich viel b hat.

2.2. Menge von Dominos, in denen das gesamte Wort gleich viel b enthält wie das gesamte untere Wort. (deren Reihenfolge spielt keine Rolle und das gleiche Domino kann mehrmals vorkommen.)

1.X steht die Mengen von Domino, die Ja-Instanz sind, wenn wir nur a zählen, d.h. oben und unten a gleich oft vorkommen.

2.X analog

Um solche Dominos zu suchen, die in 1.1 und 2.1. Kategorie stehen, kann man einfach jeder gegebene Dominos hintereinander zählen. Offensichtlich ist der Part berechenbar.

Für 1.2. und 2.2. ist ähnlich wie Tutoriumaufgabe 3.

1.2. Dominos D_f, was oben die Anzahl von a $x>0$ viel ist und Dominos D_e, was unten die Anzahl von a $y>0$ viel ist

Dann ist D_f y-mal, dann D_e x-mal, die Menge, die wir brauchen.

Aber es ist mehr kompliziet.

Z.B. Für Paar "$\frac{aa}{a}$" und "$\frac{}{aaa}$"

"$\frac{aa}{a}$": Es steht für die Dominos, in den es oben zwei a und unten ein a gibt.

$$\text{Z.B. } \underbrace{\frac{aa}{ab}, \frac{aab}{ba}, \cdots}_{n \text{ mal}} \in K$$

$$\text{"}\frac{}{aaa}\text{"}: \underbrace{\frac{b}{aaa}, \frac{b}{abaa}, \frac{bb}{bbaaa}, \cdots}_{m \text{ mal}} \in K$$

3 mal "$\frac{aa}{a}$" plus 1 mal "$\frac{}{aaa}$" ist dann die Mengen, die wir brauchen.

D.h. Alle Kombinationen von obigen Dominos.

$$\underset{n}{\underset{\uparrow}{\text{"}\frac{aa}{a}\text{"}}}\ \underset{n}{\underset{\uparrow}{\text{"}\frac{aa}{a}\text{"}}}\ \underset{n}{\underset{\uparrow}{\text{"}\frac{aa}{a}\text{"}}} + \underset{m}{\underset{\uparrow}{\text{"}\frac{}{aaa}\text{"}}} \quad \text{wie } \left\{\frac{aa}{ab}, \frac{aab}{ba}, \frac{aa}{ab}, \frac{b}{aaa}\right\}$$

Möglichkeiten

Und Mengen aus 1.2 und 2.2 sind auch endlich viel.
Somit ist der Part auch berechenbar.
Dann ist das Überschnitt von Kategorie 1.X und Kategorie 2.X die Lösung für ein $K \in PKP_a$