2. BuK-Tutorium

13. 11. 2020

Johannes Lehmann
johannes.lehmann@rwth-aachen.de

(Christina Gehnen
christina.gehnen@rwth-aachen.de)

Tutoriumsaufgabe 1 (Gödelnummer)

$X_1 \; X_2 \; X_3$

Gegeben sei die Turingmaschine $M = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, B, q_1, q_2, \delta)$ mit δ wie folgt:

	0	1	B
q_1	$(q_3, 1, N)$ 1	$(q_1, 0, R)$ 2	(q_2, B, L) 3
q_3	$(q_1, 0, L)$ 4	$(q_3, 1, L)$ 5	(q_1, B, R) 6

$D_1 = L$

$D_2 = N$

$D_3 = R$

Berechnen Sie die Gödelnummer $\langle M \rangle$ von M wie in der Vorlesung definiert.

$Q = \{q_1, \dots, q_t\} \qquad t \geq 2$

q_1 Startzustand, q_2 Endzustand

$\Gamma = \{0, 1, B\}$

t-te Übergang $\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_l, D_m)$

$\text{code}(t) = 0^i 1 0^j 1 0^k 1 0^l 1 0^m$

Tutoriumsaufgabe 1 (Gödelnummer)

Gegeben sei die Turingmaschine $M = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, B, q_1, q_2, \delta)$ mit δ wie folgt:

	0	1	B
q_1	$(q_3, 1, N)$	$(q_1, 0, R)$	(q_2, B, L)
q_3	$(q_1, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	(q_1, B, R)

Berechnen Sie die Gödelnummer $\langle M \rangle$ von M wie in der Vorlesung definiert.

Tutoriumsaufgabe 1 (Gödelnummer)

Gegeben sei die Turingmaschine $M = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{\overset{X_1}{0}, \overset{X_2}{1}, \overset{X_3}{B}\}, B, q_1, q_2, \delta)$ mit δ wie folgt:

	0	1	B
q_1	$\underline{(q_3, 1, N)}$	$(q_1, 0, R)$	(q_2, B, L)
q_3	$(q_1, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	(q_1, B, R)

$D_1 = L$

$D_2 = N$

$D_3 = R$

Berechnen Sie die Gödelnummer $\langle M \rangle$ von M wie in der Vorlesung definiert.

(Erinnerung: $\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_l, D_m) \rightarrow 0^i 1 0^j 1 0^k 1 0^l 1 0^m$)

$\text{code}(1) = 0^1 1 0^1 1 0^3 1 0^2 1 0^2$

$\text{code}(2) = 0^1 1 0^2 1 0^1 1 0^1 1 0^3$

$\text{code}(3) = 0 1 0 1 0 1 0 1 0$

$\text{code}(4) = 0 1 0 1 0 1 0 1 0$

$\text{code}(5) = 0 1 0 1 0 1 0 1 0$

$\text{code}(6) = 0 1 0 1 0 1 0 1 0$

Tutoriumsaufgabe 1 (Gödelnummer)

$X_1 \; X_2 \; X_3$

Gegeben sei die Turingmaschine $M = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, B, q_1, q_2, \delta)$ mit δ wie folgt:

$D_1 = L$

$D_2 = N$

$D_3 = R$

	0	1	B
q_1	$(q_3, 1, N)$	$(q_1, 0, R)$	(q_2, B, L)
q_3	$(q_1, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	(q_1, B, R)

Berechnen Sie die Gödelnummer $\langle M \rangle$ von M wie in der Vorlesung definiert.

(Erinnerung: $\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_l, D_m)$ $\rightarrow$ $0^i 1 0^j 1 0^k 1 0^l 1 0^m$)

$\text{code}(1) = 0^1 1\, 0^1 1\, 0^3 1\, 0^2 1\, 0^2$

$\text{code}(2) = 0^1 1\, 0^2 1\, 0^1 1\, 0^1 1\, 0^3$

$\text{code}(3) = 0^1 1\, 0^3 1\, 0^2 1\, 0^3 1\, 0^1$

$\text{code}(4) = 0^3 1\, 0^1 1\, 0^1 1\, 0^1 1\, 0^1$

$\text{code}(5) = 0^3 1\, 0^2 1\, 0^3 1\, 0^2 1\, 0^1$

$\text{code}(6) = 0^3 1\, 0^3 1\, 0^1 1\, 0^3 1\, 0^3$

$\langle M \rangle = 111 \; \text{code}(1) \; 11 \; \text{code}(2) \; 11 \; \dots \; 11 \; \text{code}(6) \; 111$

Tutoriumsaufgabe 1 (Gödelnummer)

$X_1 \; X_2 \; X_3$

Gegeben sei die Turingmaschine $M = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, B, q_1, q_2, \delta)$ mit δ wie folgt:

	0	1	B
q_1	$(q_3, 1, N)$	$(q_1, 0, R)$	(q_2, B, L)
q_3	$(q_1, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	(q_1, B, R)

$D_1 = L$
$D_2 = N$
$D_3 = R$

Berechnen Sie die Gödelnummer $\langle M \rangle$ von M wie in der Vorlesung definiert.

(Erinnerung: $\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_l, D_m) \rightarrow 0^i 1 0^j 1 0^k 1 0^l 1 0^m$)

$$\begin{aligned}
code(1) &= 0^1 1 0^1 1 0^3 1 0^2 1 0^2 \\
code(2) &= 0^1 1 0^2 1 0^1 1 0^1 1 0^3 \\
code(3) &= 0^1 1 0^3 1 0^2 1 0^3 1 0^1 \\
code(4) &= 0^3 1 0^1 1 0^1 1 0^1 1 0^1 \\
code(5) &= 0^3 1 0^2 1 0^3 1 0^2 1 0^1 \\
code(6) &= 0^3 1 0^3 1 0^1 1 0^3 1 0^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle M \rangle &= 111\, code(1)\, 11\, code(2)\, 11 \ldots 11\, code(6)\, 111 \\
&= 1110^1 10^1 10^3 10^2 10^2 110^1 10^2 10^1 10^1 10^3 110^1 10^3 10^2 10^3 10^1 110^3 10^1 10^1 10^1 10^1 11\, 0^3 10^2 10^3 10^2 10^1 110^3 10^3 10^1 10^3 10^3 111
\end{aligned}$$

Tutoriumsaufgabe 2 (Palindrome mit 1-Band TM)

Für ein Wort $w = w_1 w_2 \ldots w_n$ mit $w_i \in \Sigma$ bezeichnet $w^{-1} = w_n w_{n-1} \ldots w_1$ das Wort w rückwärts gelesen. Sei $L = \{ww^{-1} \mid w \in \Sigma^*\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ die Sprache der Palindrome gerader Länge.

Beschreiben Sie eine möglichst effiziente 1-Band-TM, die L entscheidet. Analysieren Sie den Zeit- und den Speicherplatzbedarf der von Ihnen entworfenen Maschine.

Gilt

$00111100 \in L$ ✓ $(w = 0011)$ $\qquad 01 \in L$ ✗

$010\,10 \in L$ ✗ $(w = 010 \to ww^{-1} = 010010$; $w = 01 \to ww^{-1} = 0110$ $\qquad \varepsilon \in L$ ✓ $(w = \varepsilon)$?

1. Eingabe leer → Terminiere mit JA

2. Merke aktuelles Symbol im Zustand, ersetze es durch ein B.

3. Laufe bis zum rechten Rand

4. Vergleiche aktuelles mit gemerktem Zeichen oder Blank
   - Ungleich: Terminiere mit NEIN
   - Gleich: Ersetze Zeichen durch B und laufe zum linken Rand

5. Gehe zu Schritt 1

Laufzeit: $\Theta(n^2)$ Speicher $\Theta(n)$

Tutoriumsaufgabe 3 (RAM für den Zweierlogarithmus)

Geben Sie ein RAM-Programm zur Berechnung des Zweierlogarithmus $\lfloor \log_2 n \rfloor$ für eine Eingabe $n \in \mathbb{N}_{>0}$ an.

n steht in c(1)

```
CLOAD 0      } i=0
STORE 2

CLOAD 1      } j=1
STORE 3
$while
 LOAD 3      } c(0)=c(3)-c(1) = j-n
 SUB 1
 IF c(0) > 0 GOTO end

 LOAD 2      } i=i+1
 CADD 1
 STORE 2

 CLOAD 2     } j=2*j
 MULT 3
 STORE 3

GOTO while
$end
LOAD 2       } i-1
CSUB 1
STORE 1      } return
END
```

```
i=0; c(2)
j=1; c(3)
while(j <= n) {
    i=i+1;
    j=2*j;
}

return i-1;
```

Tutoriumsaufgabe 4 (Wiederholung reguläre Sprachen)

Reguläre Ausdrücke sind eine einfache Möglichkeit eine Sprache über einem Alphabet Σ zu beschreiben. Sie sind wie folgt definiert.

- Der Ausdruck $r = a \in \Sigma$ beschreibt die Sprache $L(r) = \{a\}$ und der Ausdruck $r = \emptyset$ beschreibt die leere Sprache $L(r) = \emptyset$.
- Sind r_1 und r_2 reguläre Ausdrücke, dann beschreibt der Ausdruck
  - $(r_1 + r_2)$, die Vereinigung $L((r_1 + r_2)) := L(r_1) \cup L(r_2)$
  - $r_1 r_2$ die Verkettung $L(r_1 r_2) := L(r_1)L(r_2) = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L(r_1), w_2 \in L(r_2)\}$
  - $(r_1)*$ die kleenesche Hülle $L((r_1)*) := L(r_1)^* = \{w_1 w_2 \dots w_n \mid n \geq 0, w_i \in L(r_1)\}$

$(L(\varepsilon) = L(\emptyset^*))$

Eine Sprache A heißt regulär, wenn sie durch einen reguären Ausdruck beschrieben werden kann, d.h. es gibt einen regulären Ausdruck r mit $L(r) = A$.
Im Folgenden betrachten wir einige Sprachen und reguläre Ausdrücke:

a) Die Sprache, die nur aus den Wörtern aa und bac besteht $\quad aa + bac$

b) Die Sprache, die aus Wörtern der Form $ba^ib^{2j}c$ besteht $\quad ba^*(bb)^*c$

c) Die Sprache (über {a,b}) aus allen Wörtern gerader Länge $\quad ((a+b)(a+b))^*$

d) Die Sprache (über {a,b}) aus allen Wörtern ungerader Länge $\quad (a+b)((a+b)(a+b))^*$

e) Die Sprache (über {a,b,c}) aller Wörter der Länge 4 $\quad (a+b+c)(a+b+c)$
$(a+b+c)(a+b+c)$

f) $ab(c^*) + ba(aa^*) + c$

Die Sprache bestehend aus Wörtern der Form abc^i, allen Wörtern, die mit baa beginnen und danach beliebig viele a's haben, und c.