

Übung 3

Mittwoch, 18. November 2020 17:13

Tutoriumsaufgabe 1 (Diagonalisierung)

Sei

$$L := \{1^i \mid i \in \mathbb{N}, M_i \text{ akzeptiert } 1^i \text{ nicht}\} \quad \text{wobei } 1^i := \underbrace{11 \dots 1}_{i \text{ mal}}$$

Zeigen Sie durch Diagonalisierung, dass L nicht entscheidbar ist.

Annahme: L ist entscheidbar

$\rightarrow \exists k \quad M_k$ entscheidet L

Fall 1: $1^k \in L \xRightarrow{\text{Def. } M_k} M_k \text{ akzeptiert } 1^k$
 $\xRightarrow{\text{Def. } L} 1^k \notin L$

Fall 2: $1^k \notin L \xRightarrow{\text{Def. } M_k} M_k \text{ verwirft } 1^k$
 $\Rightarrow M_k \text{ akzeptiert } 1^k \text{ nicht}$
 $\xRightarrow{\text{Def. } L} 1^k \in L$

\rightarrow In beiden Fällen Widerspruch:

Annahme war falsch & L nicht entscheidbar

Tutoriumsaufgabe 2 (Entscheidbarkeit)

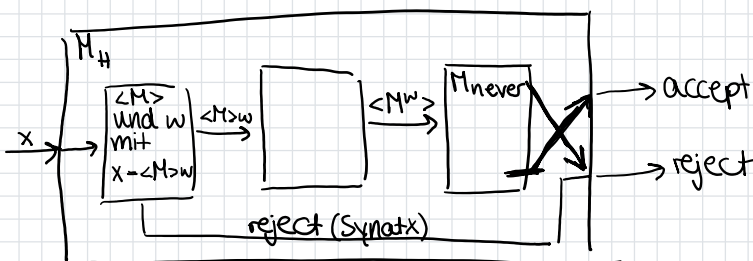
Formulieren Sie folgende Probleme als Sprache (z.B. $H := \{\langle M \rangle w \mid M \text{ terminiert bei Eingabe } w\}$ für das Halteproblem). Zeigen oder widerlegen Sie, welche der folgende Probleme entscheidbar sind. Zeigen Sie insbesondere die Korrektheit Ihrer Beweise.

a) Eingabe: Eine TM M .

Frage: Stoppt M auf keiner Eingabe?

$L = \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält auf keiner Eingabe}\}$

wenn L entscheidbar ist, gibt es TM M_{never} , die L entscheidet.



M^w : lösche Eingabe, schreibe w aufs Band, gehe an den Anfang von w , simuliere M
 \rightarrow gegeben $\langle M \rangle w$ ist $\langle M^w \rangle$ berechenbar

Korrektheit:

w' für $M_{\#}$.

$w' \neq \langle M \rangle w \rightarrow$ verworfen

$w' = \langle M \rangle w$ Eingabe für $M_{\#}$:

Fall 1: M hält auf w

$\Rightarrow M^w$ hält auf jeder Eingabe

$\Rightarrow M_{\text{never}}$ verwirft $\langle M^w \rangle$

$\Rightarrow M_{\#}$ akzeptiert $\langle M \rangle w$

Fall 2: M hält nicht auf w

$\Rightarrow M^w$ hält auf keiner Eingabe

$\Rightarrow M_{\text{never}}$ akzeptiert $\langle M^w \rangle$

$\Rightarrow M_{\#}$ verwirft $\langle M \rangle w$

\rightarrow Halteproblem unentscheidbar, also gibt es M_{never} nicht

→ Halteproblem unentscheidbar,
also gibt es M_{halt} nicht
⇒ L unentscheidbar

b) Eingabe: Eine TM M ; ein Wort w .

Frage: Benutzt M jemals die Richtung L auf dem Eingabewort w ?

$L = \{ \langle M \rangle w \mid M \text{ bewegt bei Eingabe } w \text{ mindestens einmal den Kopf nach links} \}$

Eingabe $w, TM M$

$| \Gamma | \cdot | Q | \cdot \max \{ |w|, 1 \}$

$q_0 w$ Startkonfiguration
 $q x w' \mid w' \leq w$

Um zu entscheiden, ob M auf w nie nach links geht, simuliere M auf w . Auf's zweite Band schreiben wir erreichte Konfigurationen.
Akzeptiere, sobald M nach links geht.
Verwerfe, sobald M terminiert oder eine Konfiguration doppelt besucht und damit in einer Endlosschleife ist (nach $\max \{ |Q| \cdot | \Gamma | \cdot \max \{ |w|, 1 \} \}$ vielen Schritten).

c) Eingabe: Eine TM M .

Frage: Hält M nicht auf der Eingabe 110.

$D = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ hält nicht auf } 110 \}$

$S = \{ f_M \mid f_M(110) = 1 \}$

$S \neq \emptyset$: $f_{M_1} \in S$, M_1 geht immer in Endlosschleife

$S \neq R$: $f_{M_{110}} \in R \setminus S$, M_{110} hält nur auf 110

$L(S) = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ berechnet eine Funktion aus } S \}$
 $= \{ \langle M \rangle \mid M \text{ hält nicht auf } 110 \} = D$

Nach Satz von Rice ist D unentscheidbar.

Tutoriumsaufgabe 3 (Spezielle Halteprobleme)

Zeigen oder widerlegen Sie, welche der folgenden Probleme entscheidbar sind. Zeigen Sie insbesondere die Korrektheit Ihrer Beweise.

a) $H_{\leq 97} := \{ \langle M \rangle w \mid M \text{ hält auf Eingabe } w \text{ und zwar nach höchstens 97 Schritten} \}$

Hinweis: Überlegen Sie, falls das Problem unentscheidbar ist, ob sich der Satz von Rice benutzen lässt. Falls nein, warum nicht?

$H_{\leq 97}$ entscheidbar. Nach 97 Schritten kann M höchstens 97 Speicherzellen gelesen haben.

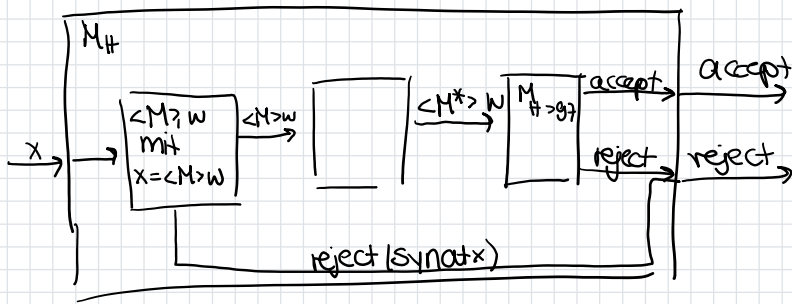
Bau eine TM $M_{H_{\leq 97}}$, die $H_{\leq 97}$ entscheidet

→ simuliere M auf w

→ prüfe ob M nach 97 Schritten gehalten hat

b) $H_{>97} := \{ \langle M \rangle w \mid M \text{ hält auf Eingabe } w \text{ und zwar nach mehr als 97 Schritten} \}$

$M_{H_{\leq 97}}$ entscheidet $H_{>97}$



M^* : macht 97 Schritte (Zustand wechseln),
 simuliere M auf w
 \rightarrow gegeben $\langle M \rangle w$ ist $\langle M^* \rangle w$ berechenbar

Korrektheit:

w' Eingabe, $w' \neq \langle M \rangle w$ M_H verwirft
 also $w' = \langle M \rangle w$

Fall 1: M hält auf w

$\Rightarrow M^*$ hält nach mind. 98 Schritten auf w
 $\Rightarrow M_{H>97}$ akzeptiert $\langle M^* \rangle w$
 $\Rightarrow M_H$ akzeptiert $\langle M \rangle w$

Fall 2: M hält nicht auf w

$\Rightarrow M^*$ hält nicht auf w
 $\Rightarrow M_{H>97}$ verwirft $\langle M^* \rangle w$
 $\Rightarrow M_H$ verwirft

\rightarrow Halteproblem wäre entscheidbar \nsubseteq
 TM $M_{H>97}$ gibt es nicht & $H_{>97}$ ist
 unentscheidbar