Carathéodory定理与近似Carathéodory定理

邓文平

2025 年 2 月 16 日

1 Carathéodory定理

定理陈述： 在$\mathbb{R}^n$中，若点x属于集合S的凸包，则x可以表示为S中至多$n+1$个点的凸组合。

证明过程：

1.1 凸组合表示：

设$x \in \mathrm{conv}(S)$，则存在有限个点$x_1, x_2, \ldots, x_k \in S$和系数$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k > 0$，使得

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

若$k \le n+1$，结论已成立。假设$k > n+1$，需将k缩减至$n+1$。

1.2 线性相关性：

考虑向量$\{(x_i, 1)\}_{i=1}^{k} \subset \mathbb{R}^{n+1}$。由于$k > n+1$，这组向量线性相关，故存在不全为零的实数$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$，使得

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0 \quad 且 \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0.$$

1.3 系数调整：

定义新系数$\lambda_i' = \lambda_i + t\alpha_i$，其中$t \in \mathbb{R}$。此时，

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i' x_i = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + t\alpha_i) x_i = x + t \cdot 0 = x,$$

且

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i' = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + t\alpha_i) = 1 + t \cdot 0 = 1.$$

需选择t使得所有$\lambda_i' \geq 0$，且至少有一个$\lambda_i' = 0$。

1.4 确定参数t：

令t满足：

$$t = \min \left\{ -\frac{\lambda_i}{\alpha_i} \middle| \alpha_i < 0 \right\} \quad \text{或} \quad t = \max \left\{ \frac{-\lambda_i}{\alpha_i} \middle| \alpha_i > 0 \right\}.$$

由于$\sum \alpha_i = 0$且α_i不全为零，必存在正负α_i。选择上述t时，至少有一个$\lambda_i' = 0$，其余$\lambda_i' \geq 0$，从而减少一个非零系数。

1.5 递归缩减：

重复上述过程，每次将k减少1，直到$k = n + 1$。此时无法进一步缩减，因为$n + 1$个点在$\mathbb{R}^{n+1}$齐次坐标下可能线性无关。

2 近似Carathéodory定理

定理陈述： 设集合$K \subset \mathbb{R}^n$，且所有点满足$\|v\|_2 \leq R$。对于任意$x \in \text{conv}(K)$和$\epsilon > 0$，存在$x' \in \text{conv}(K)$，使得：

x'是K中至多$d = \left\lceil \frac{R^2}{\epsilon^2} \right\rceil$个点的凸组合；

$\|x - x'\|_2 \leq \epsilon$。

证明步骤：

2.1 凸组合表示：

由Carathéodory定理，x可表示为K中有限个点的凸组合。设存在点$v_1, v_2, \ldots, v_k \in K$及系数$\lambda_i \geq 0$，满足：

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

2.2 随机采样构造：

定义随机向量V，以概率λ_i取值为v_i。独立采样d次得到$V_1, V_2, \ldots, V_d$，构造经验均值：

$$x' = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d} V_j.$$

显然，x'是K中至多d个点的凸组合。

2.3 期望与方差分析：

期望： 由线性性，

$$\mathbb{E}[x'] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d} V_j\right] = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d} \mathbb{E}[V_j] = \mathbb{E}[V] = x.$$

方差： 计算二阶矩：

$$\mathbb{E}[\|x' - x\|_2^2] = \mathbb{E}\left[\left\|\frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d} (V_j - x)\right\|_2^2\right].$$

由于V_j独立，

$$\mathrm{Var}(x') = \frac{1}{d^2} \sum_{j=1}^{d} \mathrm{Var}(V_j) = \frac{1}{d} \mathrm{Var}(V).$$

因此，

$$\mathbb{E}[\|x' - x\|_2^2] = \frac{1}{d} \mathbb{E}[\|V - x\|_2^2].$$

因为

$$\mathbb{E}[\|V_1 - V_2\|_2^2] = \mathbb{E}[\|(V_1 - \mathbb{E}[V_1]) - (V_2 - \mathbb{E}[V_1])\|_2^2] = 2\mathbb{E}[\|V - x\|_2^2]$$

所以

$$\mathbb{E}[\|V - x\|_2^2] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[\|V_1 - V_2\|_2^2]$$

又由于 $\|V\|_2 \leq R$，

$$\mathbb{E}[\|V - x\|_2^2] \leq \frac{1}{2}(2R)^2 = 2R^2$$

所以，

$$\mathbb{E}[\|x' - x\|_2^2] \leq \frac{2R^2}{d}.$$

2.4 存在性论证：

由期望不等式，存在至少一个具体的x'满足：

$$\|x' - x\|_2^2 \leq \frac{2R^2}{d}.$$

取$d = \left\lceil \frac{2R^2}{\epsilon^2} \right\rceil$，则：

$$\|x' - x\|_2 \leq \sqrt{\frac{2R^2}{d}} \leq \epsilon.$$