费马定理：不存在边长为有理数且面积为1的直角三角形

邓文平

2025 年 2 月 16 日

1 背景知识

在数论中，费马（Pierre de Fermat）提出的无穷递降法是其重要的数学工具之一，常用于证明某些丢番图方程无解。本文探讨的定理涉及是否存在边长为有理数且面积为1的直角三角形，这一问题可以通过转化为整数解问题，并应用无穷递降法证明其不存在性。

1.1 本原勾股三元组

形如 (a,b,c) 的正整数解满足 $a^2+b^2=c^2$ 称为勾股三元组。若$gcd(a,b,c)=1$, 则称为本原勾股三元组，其一般形式可参数化为：

$$
\begin{aligned}
a &= m^2-n^2, \\
b &= 2mn, \\
c &= m^2+n^2,
\end{aligned}
$$

其中 $m>n>0$ 为互质且一奇一偶的整数。

推导： a, b必定一奇一偶， c必定是奇数，不妨设a为奇数， b为偶数；

$$(\frac{b}{2})^2 = \frac{c-a}{2}\frac{c+a}{2}$$

左边为平方数，右边必须为平方数，因为$\frac{c-a}{2}$与$\frac{c+a}{2}$互质，故分别都是平方数。设$\frac{c-a}{2}=n^2$, $\frac{c+a}{2}=m^2$

求解方程组，得到

$$
\begin{aligned}
a &= m^2 - n^2, \\
b &= 2mn, \\
c &= m^2 + n^2,
\end{aligned}
$$

其中 $m > n > 0$ 为互质且一奇一偶的整数。

2 问题转化

考虑边长为有理数且面积为1的直角三角形。设其直角边为 $\frac{A}{D}$ 和 $\frac{B}{D}$，斜边为 $\frac{C}{D}$，其中 $A, B, C, D \in \mathbb{Z}$。则有：

$$
\left(\frac{A}{D}\right)^2 + \left(\frac{B}{D}\right)^2 = \left(\frac{C}{D}\right)^2, \tag{1}
$$

$$
\frac{1}{2} \cdot \frac{A}{D} \cdot \frac{B}{D} = 1, \tag{2}
$$

由式(1)得 $A^2 + B^2 = C^2$，由式(2)得 $AB = 2D^2$。问题转化为寻找满足这两个方程的整数解。

3 定理与证明

定理 1 (Fermat). *不存在边长为有理数且面积为1的直角三角形。*

证明. 假设存在这样的整数解 (A, B, C, D)，其中 A 和 B 互质。根据勾股三元组性质，不妨设 A 为偶数，B 为奇数。令 $A = 2k$，则方程 (2)变为：

$$
2k \cdot B = 2D^2 \implies k \cdot B = D^2.
$$

因为 A 与 B 互质，所以 k 与 B 也互质。因此，k 和 B 必须都是平方数，设 $k = m^2$，$B = n^2$，其中 $m, n \in \mathbb{Z}$。代入式 (1)得：

$$
(2m^2)^2 + (n^2)^2 = C^2 \implies 4m^4 + n^4 = C^2.
$$

将此式视为关于 C 的方程，可重写为：

$$
n^4 = C^2 - 4m^4 = (C - 2m^2)(C + 2m^2).
$$

由于 $C-2m^2$ 和 $C+2m^2$ 均为平方数且互质，因此它们各自都是平方数，设：

$$C-2m^2=p^4,\quad C+2m^2=q^4,$$

其中 p 和 q 是互质的正整数。解得：

$$C=\frac{p^4+q^4}{2},\quad 2m^2=\frac{q^4-p^4}{2},$$

即：

$$4m^2=q^4-p^4=(q^2)^2-(p^2)^2=(q^2-p^2)(q^2+p^2).$$

注意到 q^2-p^2 和 q^2+p^2 均为偶数且互质，因此它们的乘积必须是平方数。因此，存在整数 r 和 s，使得：

$$q^2-p^2=2r^2,\quad q^2+p^2=2s^2,$$

解得：

$$q^2=r^2+s^2,\quad p^2=s^2-r^2.$$

这样，$p^2+r^2=s^2$ 构成一个更小的勾股三元组，从而形成无穷递降，导致矛盾。因此原假设不成立。 $\square$

4 结论

通过无穷递降法，我们证明了不存在边长为有理数且面积为1的直角三角形。这一结论体现了费马在处理数论问题时独特的方法论，也展示了数论中深刻的矛盾构造技巧。