

Universidad de Barcelona.

Facultad de Física.

Departamento de Estructura y Constituyentes de la Materia.

Inestabilidades Hidrodinámicas en Interfaces
Fluidas: Estructuras Espacio-temporales y
Transición al Caos.

Memoria de la tesis presentada
para optar al grado de Doctor
en Ciencias Físicas por

Wenceslao González i Viñas

Barcelona, Octubre de 1996.

Universidad de Barcelona.

Facultad de Física.

Departamento de Estructura y Constituyentes de la Materia.

Inestabilidades Hidrodinámicas en Interfaces
Fluidas: Estructuras Espacio-temporales y
Transición al Caos.

Memoria de la tesis presentada
para optar al grado de Doctor
en Ciencias Físicas por

Wenceslao González i Viñas

Barcelona, Octubre de 1996.

Fe de erratas.

pg. iii En la linea 10 donde dice Hector debe decir: Héctor.

pg. 8 Antes del primer • debe decir:

-Análoga a éstas se tiene la continuidad de las componentes tangenciales del campo de velocidades en la interfaz [50'] (como consecuencia de la (ec. 0.18) también de la componente normal):

$$(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot \begin{bmatrix} \hat{N} \\ \hat{\tau} \end{bmatrix} = 0 \quad (0,20')$$

pg. 28 Después de la (ec. 1.20) debe decir:

La ecuación (ec. 1.19) se puede simplificar a:

$$\Phi_{n_1, n_2} = \delta_{n_2 0} \frac{4\gamma' \tanh(k_{n_1, n_2})}{k_{n_1, n_2}} \frac{\frac{1 - (-1)^{n_1}}{2}}{1 + \gamma \frac{\tanh(k_{n_1, n_2})}{\tanh(k_{n_1, n_2} h_0)}}$$

pg. 33 En la linea 17 donde dice $10\mu\text{m}$ debe decir: $100\mu\text{m}$.

pg. 34 En la linea 17 donde dice 10cm debe decir: 10cm , a veces de 5cm .

pg. 81 En la linea 13 donde dice aproximación debe decir: aproximación, de hecho hasta orden $\frac{1}{Re}$.

pg. 82 Después de la (ec. 3.19) debe decir:

Si $G(m, 2\pi\iota) \equiv g_m e^{\iota\varphi_m}$ entonces $G(m, -2\pi\iota) = g_m e^{-\iota\varphi_m}$ y

$$\xi_p = 4\pi \sum_{\substack{m=1 \\ m \notin (2)}}^{\infty} \frac{1}{g_m} \cos(\pi m x) \cos(2\pi t + \varphi_m)$$

pg. 83 En la linea 30 donde dice fluidos debe decir: fluidos en la zona capilar profunda

$$k^3 \approx (1 + \gamma) h^4 Bo (\omega^2 + \chi^2) \approx k_1^3 \text{ fluido} (1 + \gamma)$$

- pg. 88** Al final del pie de figura debe decir: La curva sólida no está bien calculada. Es una constante multiplicada por $(1 + \gamma)$ debiendo ser una constante multiplicada por $(1 + \gamma)^3$. Si la calculásemos bien saldría más abajo debido a que los parámetros del fluido no son los reales. Si se hace un ajuste a esos parámetros se puede conseguir un acuerdo muy bueno [5] (aunque allí está hecho heurísticamente)..
- pg. 115** En la línea 7 donde dice **(ec. 4.7)** debe decir: **(ec. 4.7)** y las expresiones de las constantes físicas en función de $T - T_c$ [21'].
- pg. 127** En la referencia [5] donde dice En preparación debe decir: No publicado.
- pg. 127** En la referencia [6] donde dice [1996] debe decir: [1998].
- pg. 127** En la referencia [6] donde dice En preparación debe decir: *Europhys. Lett.* **41 (2)**, 159.
- pg. 128** Se debe añadir la referencia:
[21'] MOLDOVER, M.R. [1985] Interfacial tension of fluids near critical points and two-scale-factor universality. *Phys. Rev. A* **31 (2)**, 1022.
- pg. 131** Se debe añadir la referencia:
[50'] SARPKAYA, T. [1996] Vorticity, free surface, and surfactants. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **28**, 83.

Índice

Agradecimientos.	iii
Prefacio.	vii
Introducción general.	1
Ecuaciones de balance.	1
Relaciones constitutivas.	4
Condiciones de contorno e iniciales.	6
Modelo simple de ondas de agua.	8
Fenomenología de ondas de agua.	14
1 Introducción al problema de interfaces excitadas perpendicularmente a la gravedad.	17
1.1 Descripción preliminar del sistema.	17
1.2 Modelo lineal irrotacional.	22
1.3 Discusión.	29
2 Interfaces excitadas perpendicularmente a la gravedad. Experimentos.	31
2.1 Montaje y técnicas experimentales.	31
2.2 Resultados experimentales.	37
2.3 Discusión.	68
3 Interfaces excitadas perpendicularmente a la gravedad. Modelos teóricos.	73
3.1 Modelo lineal rotacional.	73
3.2 Resultados y discusión.	82

4 Interfaces excitadas paralelamente a la gravedad.	95
4.1 Introducción al problema de Faraday.	95
4.1.1 Descripción preliminar del sistema.	95
4.1.2 Modelo lineal irrotacional.	100
4.2 Resultados experimentales.	106
4.2.1 Montajes experimentales y experimentos.	106
4.2.2 Resultados experimentales y discusión.	111
4.3 Teoría.	116
Conclusiones y perspectivas.	121
Conclusiones.	121
Perspectivas.	123

Agradecimientos.

Quiero agradecer en primer lugar a mi director de tesis, Dr. Jesús Salán Santos, por haberme introducido en el mundo de la Física de Fluidos guiándome en todo momento por sus entresijos experimentales y teóricos, así como por haber dirigido esta tesis doctoral y por transmitirme su entusiasmo por la física.

También quiero agradecer a Ferran Mazzanti las gratificantes discusiones que hemos compartido a lo largo de todos estos años.

A todos los miembros del Departamento de Estructura y Constituyentes de la Materia que han creado un clima de amistad y de trabajo, en especial a Ferran, Carlos, Assum, Jordi y a los compañeros del laboratorio.

Agradezco a los profesores D. Miguel Rubí, D. David Jou, D. Hector Mancini, D. Jordi Ortín y D. Juan P. Sierra haber aceptado ser miembros del Tribunal que juzga esta tesis, lo cual es un honor para mí.

Al Comissionat per a Universitats i Recerca de la Generalitat de Catalunya (beca F.I. 93/1039) y al Ministerio de Educación y Ciencia (proyecto DGICYT PB93-0777) por su soporte económico.

Al Prof. John Bechhoefer por su hospitalidad en el Dept. of Physics de la Simon Fraser University (Burnaby, Canada).

A Anand Yethiraj y a todos los demás compañeros de la SFU por su hospitalidad, discusiones y ayuda.

A mis padres, que me han apoyado en todo momento para que llegara este evento tan esperado, dándome consejos, ánimos y todo lo que se puede esperar de unos buenos padres de verdad.

Y finalmente a Montse, de quien he recibido Amor, ayuda y comprensión, además de interesantes discusiones, la realización de alguna de las figuras y la primera lectura de esta memoria y a quién dedico esta tesis con todo mi corazón.

'And Tuor stood upon the shore, and the sun was like a smoky fire behind the menace of the sky; and it seemed to him that a great wave rose far off and rolled towards the land, but wonder held him, and he remained there unmoved. And the wave came towards him, and upon it lay a mist of shadow. Then suddenly as it drew near it curled, and broke, and rushed forward in long arms of foam; but where it had broken there stood dark against the rising storm a living shape of great height and majesty.'

UNFINISHED TALES, J.R.R. Tolkien

Prefacio.

El objetivo de esta tesis doctoral es el estudio experimental y teórico de las ondas superficiales que se excitan en una interfaz fluido-fluido debido a condiciones de contorno móviles.

Se estudiarán las ondas superficiales que aparecen en un recipiente cuando éste se mueve tanto perpendicular como paralelamente a la gravedad \vec{g} . Ambos casos ilustran bien dos situaciones: el hecho de tener una gravedad efectiva cambiante en módulo, que induce una inestabilidad paramétrica (llamada inestabilidad de Faraday [7, 17, 20]) y el de tener una gravedad efectiva cambiante en dirección y módulo, que excita externamente las ondas [1, 2, 3, 4]. El efecto de trabajar con recipientes finitos y con paredes rígidas es la causa de que aparezcan espectros discretos (aunque en el caso del movimiento perpendicular a la gravedad éstos sean casi continuos) y de que haya interferencia entre ondas, además de la resonancia externa o paramétrica. En el caso de excitación perpendicular a \vec{g} las paredes son las responsables directas de la aparición de las ondas superficiales.

Otros tipos de excitaciones, que también nos llevarían al estudio de ondas superficiales en interfaces fluidas son: Las creadas por un *wavemaker* [33] (como se verá más adelante es un caso distinto de los que se tratan en esta tesis), un obstáculo moviéndose dentro del fluido o/y en la interfaz [48]; también podemos excitar ondas superficiales imponiendo esfuerzos en la interfaz (por ejemplo el caso de ondas de viento “*Wind waves*” [49] o el de ondas de densidad [46]). También es posible excitarlas inyectando cargas en la interfaz o haciendo los experimentos con fluidos excitables hidroelectromagnéticamente como ferrofluidos, cristales líquidos y fluidos conductores de la electricidad [41], o bien en fluidos donde tenemos gradientes de temperatura o/y concentración aplicados (efecto Marangoni) [53].

La respuesta no lineal de una interfaz fluido-fluido frente a excitaciones externas es un fenómeno complejo de la Física matemática ya que en su estudio aparecen sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

que llevan a fenómenos no lineales y caóticos. En el estudio del caos nuestros sistemas son relativamente simples (pues tienen pocos grados de libertad comparados con sistemas biológicos, biomédicos, sociológicos o económicos, por ejemplo comparados con problemas cardíacos [38]) pero pueden modelizar cualitativamente los fenómenos de transición al caos en general [45].

En esta tesis nos hemos planteado la utilización de fluidos muy viscosos en el caso de la inestabilidad de Faraday o fluidos muy poco viscosos en el caso de excitación perpendicular a la gravedad. Los muy viscosos tienen la ventaja de tener unas longitudes de correlación muy pequeñas en comparación con las escalas de longitud características del sistema de tal forma que la influencia de las paredes se reduce a un entorno muy pequeño de las mismas. Ésto hace que el sistema pueda ser excitado globalmente (inestabilidad de Faraday) y muy difícilmente que lo sea de forma local. En el segundo caso, los fluidos muy poco viscosos tienen longitudes de penetración de las perturbaciones viscosas muy pequeñas, con lo que las excitaciones son realmente muy locales, sin embargo se propagan a distancias muy grandes consiguiendo tener efectos globales (interferencia, ...). Si para el caso poco viscoso la teoría lineal da buenos resultados con los cálculos irrotacionales, en el caso muy viscoso será necesario considerar este efecto sin aproximación alguna. Sin embargo, en el caso de fluidos poco viscosos en regímenes no lineales la vorticidad creada en las paredes y en la interfaz se trasladará al resto del fluido por difusión y advección, siendo no despreciable. En este sentido, es necesario considerar la existencia de la vorticidad para que haya una transferencia de energía a través de las distintas escalas de longitud y no aparezcan singularidades a distancias pequeñas de las paredes.

El sistema experimental correspondiente a la excitación perpendicular a la gravedad está basado fundamentalmente en el estudio de las ondas en un tubo de Natterer. Un tubo de Natterer es un tubo donde hay un fluido a la presión de vapor cerca del punto crítico. En nuestro caso el fluido es CO_2 de forma que a temperatura ambiente el líquido ocupa la mitad del volumen del tubo. Este tubo clásicamente tiene la utilidad de la observación académica de la opalescencia crítica en transiciones de fase de segundo orden en sistemas fluidos.

El experimento correspondiente a la excitación paralela a la gravedad está basado fundamentalmente en el estudio de las ondas en un recipiente de forma arbitraria (normalmente cuadrada o circular) cuando éste se mueve paralelamente a la gravedad. Los fluidos utilizados serán de viscosidad alta por los motivos

citados antes.

El estudio de ondas superficiales en fluidos es un tema estudiado ya desde hace mucho tiempo. Así fué Faraday (1831) [7] y Rayleigh (1883) [8] quienes primero se plantearon el problema de las ondas excitadas paralelamente a la gravedad, más tarde Benjamin y Ursell [9] se replantearon el problema haciendo un primer modelo teórico lineal. Desde entonces el problema de Faraday ha sido estudiado extensamente en [17] y sus referencias, así como [18, 19, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31]. En el caso de excitación perpendicular a la gravedad, si el problema de medios semiinfinitos es un problema clásico en la literatura, el caso de recintos finitos sólo ha sido escasamente tratado de forma rigurosa mucho más recientemente [1, 2, 3, 4, 5, 6].

La fenomenología que cabe esperar en estos problemas es compleja y se debería tener en cuenta una diferencia fundamental en los dos modos de excitar las ondas superficiales. Un estado de un sistema es una solución de las ecuaciones que rigen la evolución del sistema o, desde el punto de vista físico, es la configuración (que puede ser dependiente o no del tiempo) del sistema. Entre los estados posibles de un sistema cabe distinguir los estables y los inestables. Consideremos algunas definiciones simples. De acuerdo con los criterios de estabilidad asintótica [40] un estado estable sería aquel que si lo perturbamos, volverá a estar suficientemente cercano al estado inicial no perturbado si lo dejamos evolucionar suficiente tiempo. En caso contrario el estado será inestable. Desde el punto de vista de las perturbaciones se puede considerar que un estado crítico (punto de transición de un estado estable a uno inestable considerando perturbaciones infinitesimales) puede bifurcar de forma directa o inversa.

Así pues, para tener una inestabilidad tenemos que tener un estado. En el problema de Faraday tenemos que la interfaz plana (considerando fluidos incompresibles) es un estado del sistema para cualquier función que consideremos que rige el movimiento de nuestro recipiente. Es posible que para algunas de estas funciones este estado sea inestable (y de hecho así es surgiendo la inestabilidad de Faraday o inestabilidad paramétrica que será descrita en el (**cap. 4**)). Sin embargo en el problema de ondas excitadas perpendicularmente a la gravedad la interfaz plana no es solución de las ecuaciones de evolución del sistema y por tanto no es un estado del sistema y en consecuencia los criterios de estabilidad anteriores no son aplicables.

En ambos casos se pasa de estados estables con unas simetrías a estados, en

principio, con menos simetrías hasta que podemos llegar a estados caóticos. La diferencia es el estado de inicio: en el problema de Faraday la interfaz plana, en el problema del tubo (como a partir de ahora llamaremos) un estado mucho más complejo. Muchas veces el tránsito a estados caóticos no es a través de estructuras con menos simetrías, sino a través de la aparición de defectos [39] en las estructuras estables que mantienen unas simetrías promedio, en el sentido que si promediamos nuestras estructuras en un tiempo determinado recuperamos la simetría original. También es posible la transición de estados iniciales a estados con simetrías de ordenes inferiores, es decir la transición de un estado con una simetría continua a su equivalente discreta, o de una simetría discreta de un cierto paso a otra de paso mayor. Cuando aparece un defecto, nuestra simetría inicial se verifica localmente en todo nuestro sistema excepto en las zonas geométricas que nos definen los defectos. Estas roturas locales de la simetría con parámetros de control más elevados pueden provocar la inestabilidad de la estructura y en consecuencia la aparición de caos. La topología de estos defectos tiene gran relación con las simetrías que el sistema verifica y con la relación entre los invariantes topológicos y el número de defectos, etc.

También será objeto de nuestro estudio la interacción entre varios fenómenos que podemos tener. En nuestro sistema también pueden aparecer ondas de densidad (a altas frecuencias de excitación) que interactuarán con las ondas interfaciales provocando estructuras no propagativas, localizadas en el espacio. Otro tipo de estructuras localizadas van a ser gotas expulsadas del volumen hacia la interfaz, las cuales se sostienen sobre la misma durante tiempos relativamente largos. Estas gotas aparecen por encima de un umbral e interactúan con las ondas superficiales. La desaparición de estas gotas tiene un umbral distinto que para la aparición, así pues hay histéresis.

Ya hemos visto que los dos problemas, el de excitación externa y el de excitación paramétrica son cualitativamente distintos. Matemáticamente lo podríamos resumir diciendo que estudiar una aproximación lineal de unas ecuaciones no es lo mismo que estudiar la estabilidad lineal de un sistema. Por tanto, si consideramos el caso del tubo podemos considerar un régimen lineal (aunque estrictamente siempre tendremos efectos no lineales). Sin embargo, considerando el caso paramétrico de Faraday podemos definir un estado crítico lineal y si la bifurcación es directa aseguramos un régimen lineal sin histéresis. Conviene añadir que en el caso de tener excitación paramétrica se observan resonancias paramétricas

(la respuesta es subarmónica, es decir que la frecuencia fundamental de respuesta es de magnitud mitad que la frecuencia excitadora), según se varía la magnitud de $\|\vec{g}\|$. Por tanto, el sistema linealizado es invariante bajo transformaciones de escala de la deformación de la interfaz, entonces las amplitudes de las ondas excitadas en la superficie sólo serán obtenibles considerando los efectos no lineales. Por el contrario, en el caso de excitación externa (tubo), las resonancias son externas (presentan la misma frecuencia que la excitación). Así, la interfaz queda definida por las fuerzas externas en las ecuaciones linealizadas. Otras diferencias entre los dos sistemas vienen dadas por las simetrías que se rompen o se mantienen, como se explica en esta tesis.

Para estudiar matemáticamente el sistema es importante que las adimensionalizaciones que se hacen en las ecuaciones que lo describen tengan en cuenta los hechos expuestos anteriormente de forma que permitan hacer desarrollos perturbativos correctos. En relación con esto hay longitudes características que juegan un papel importante. Por ejemplo, la longitud de penetración de los efectos viscosos determina el ancho de la capa límite existirá obviamente. Por otro lado la longitud de correlación espacial de la estructura va a describir cuan bien formada está la misma.

Desde el punto de vista experimental es importante tener en cuenta las distintas escalas de tiempo involucradas en los fenómenos estudiados, principalmente una escala rápida debida a la excitación externa o paramétrica y una escala lenta de evolución de las estructuras. Así pues, todas las medidas no lineales y gran parte de las lineales deberán ser hechas bajo una fase constante en la escala rápida con tal de anular el efecto estroboscópico. También desde el punto de vista experimental debemos fijarnos en que hay dos puntos de vista con los que podemos mirar el sistema: como estructuras (o “patterns”) o como ondas, con todo lo que ello implica (cambio de lenguaje, distintos métodos matemáticos, etc), pero siendo siempre la misma física la representada por ese lenguaje o esos métodos.

Para finalizar con este prólogo cabe considerar que en la introducción general se verá como se formula matemáticamente un modelo muy simple de ondas de agua de forma esquemática haciendo énfasis en la fenomenología (clásica en la literatura) que debe ser interpretada correctamente para avanzar en esta tesis. Le seguirán un capítulo introductorio donde se expondrá la física, la fenomenología y una introducción teórica del problema del tubo, un capítulo donde se expondrán los montajes experimentales y todos los resultados correspondientes a ondas excitadas

perpendicularmente a la gravedad, un capítulo con la discusión teórica del mismo problema y un capítulo donde se expondrán los resultados tanto teóricos como experimentales correspondientes al problema de ondas excitadas paralelamente a la gravedad. Finalmente habrá unas conclusiones generales de la tesis presentada.

Introducción general.

Las ecuaciones generales para uno o más fluidos [47, 50, 51, 52] (en general para un medio continuo) en forma euleriana, es decir que las coordenadas que describen nuestro sistema son las coordenadas fijas en el laboratorio, se presentan a continuación. Aunque en la tesis sólo nos interesarán las ecuaciones de balance de la masa y de momentos lineales, así como las relaciones constitutivas y condiciones de contorno asociadas, por completitud se hace una breve presentación de las ecuaciones generales de la hidrodinámica.

Ecuaciones de balance.

Estas ecuaciones son las que provienen de las leyes de conservación respectivas. En principio, las leyes de conservación son reflejo directo de las simetrías generales que deberían verificar los sistemas, por ejemplo la ley de conservación del momento lineal refleja la invariancia de las leyes físicas frente a translaciones espaciales. La forma de estas leyes incluye un término de variación de una magnitud y un término que compensa esa variación con un flujo. Las ecuaciones de balance nos dirán que si no se conserva una magnitud es por que hay una característica del sistema o una causa externa que rompe la simetría asociada (por ejemplo una estratificación en el fluido debido a causas internas o una fuerza externa que depende del punto).

- **Ecuación de balance de la masa o ecuación de continuidad.**

En un fluido monocomponente donde no hay ni fuentes ni sumideros de masa (es decir que es un sistema cerrado), tenemos que en el volumen se verifica la ecuación:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (0.1)$$

donde:

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$$

es la derivada material y representa el cambio de la magnitud considerada en la trayectoria de un elemento de fluido. Si tuviéramos fuentes o sumideros en el sistema, tendríamos un término de producción o destrucción en el segundo miembro de **(ec. 0.1)**. Si el fluido fuese multicomponente tendríamos n ecuaciones, habiendo en cada una de ellas las densidades y velocidades del componente considerado. Si los fluidos son incompresibles o el flujo es estacionario obtenemos que la densidad no varía en las trayectorias de los elementos de fluido y por tanto de **(ec. 0.1)** obtenemos que el flujo (campo de velocidades) es solenoidal:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (0.2)$$

- **Ecuación de balance del momento lineal o ecuación de Cauchy.**

Para un fluido monocomponente donde las fuerzas externas sean únicamente másicas o volumétricas, la ley de balance del momento lineal daría en el volumen:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t) + \nabla \cdot \overline{\overline{T}} \quad (0.3)$$

donde \vec{f} son las fuerzas por unidad de volumen y $\overline{\overline{T}}$ es el tensor de esfuerzos, que las relaciones constitutivas deben determinar. Si el fluido fuese multicomponente tendríamos una ecuación para el balance del momento total, por tanto el primer miembro de la ecuación contendría una suma de momentos para cada componente. En el segundo miembro también habríamos de considerar un efecto sobre todos los componentes. De esta ecuación, al sustituir el tensor de esfuerzos por su valor obtendríamos para los fluidos newtonianos, de los cuales más adelante damos su definición, la ecuación de Navier-Stokes.

- **Ecuación de balance del momento angular.**

En general tendríamos que la ecuación sería (aquí ya no hacemos referencia a que el fluido no sea monocomponente por ser análogo a los casos anteriores):

$$\rho \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{g}(\vec{x}, t) + \nabla \cdot \overline{\overline{C}} + \overline{\overline{T}}_a \quad (0.4)$$

Aquí \vec{l} es el momento angular interno por unidad de masa y \vec{g} el torque externo por unidad de volumen, $\overline{\overline{C}}$ el tensor momento de los esfuerzos internos y el subíndice a en el tensor de esfuerzos indica la parte antisimétrica del mismo.

Si el fluido es no polar (es decir no es ni un cristal líquido ni un ferrofluido, por ejemplo) los tiempos de relajación de la velocidad angular interna respecto de la del campo de velocidades macroscópico son muy cortos comparados con todos los demás tiempos de relevancia en el sistema y por tanto las velocidades angulares internas no producen torques en el fluido y puede considerarse que se compensan los momentos angulares internos con los torques externos y con el momento de los esfuerzos internos. Por consiguiente la ecuación resultante es:

$$\overline{\overline{T}}_a = 0 \quad (0.5)$$

A partir de ahora consideremos que el fluido es no polar, pues es el caso que nos compete.

- **Ecuación de balance de energía interna.**

Esta ecuación originalmente se deduce para la energía total pero se puede llegar a la de energía interna a partir de la ecuación de Cauchy:

$$\rho \frac{du}{dt} = \overline{\overline{T}} : \overline{\overline{D}} - \nabla \vec{q} + Q_{r,q} \quad (0.6)$$

Tenemos que u es la energía interna, $:$ significa doble producto interno, \vec{q} es el flujo de calor por conducción y $Q_{r,q}$ es la creación de energía interna por procesos de radiación y químicos. Y $\overline{\overline{D}}$ es el tensor de deformaciones infinitesimales:

$$\overline{\overline{D}} \equiv (\nabla \vec{v})_s \quad (0.7)$$

significando el subíndice s que se toma únicamente la parte simétrica del tensor.

- **Ecuación de balance de la entropía.**

Resulta de aplicar la conocida relación de Gibbs para un fluido y usar la ecuación de balance para la energía interna:

$$T\rho\frac{ds}{dt} = \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{D}} - \nabla \vec{q} + Q_{r,q} \quad (0.8)$$

aquí T es la temperatura absoluta y $\bar{\bar{\sigma}}$ es el tensor de esfuerzos viscosos (que se define para fluidos de la forma siguiente):

$$\bar{\bar{T}} = -p\bar{\bar{1}} + \bar{\bar{\sigma}} \quad (0.9)$$

siendo p la presión en el fluido.

- **Desigualdad de Clausius-Duhem o segunda ley de la termodinámica.**

Esta desigualdad es consecuencia directa de la versión de la segunda ley de la termodinámica aplicando el principio de equilibrio local y la hipótesis del continuo, sustituyendo luego la ecuación de balance de la entropía se llega a la siguiente expresión:

$$\bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{D}} \geq \frac{1}{T} \vec{q} \cdot \nabla T \quad (0.10)$$

con la que finalmente tenemos todas las ecuaciones de balance que nos van a ser útiles.

Relaciones constitutivas.

Son las relaciones que describirán nuestros materiales, pero que ya no son fruto de leyes de conservación. Nos dirán si nuestro fluido es viscoso, si es compresible, etc. Para hallar estas relaciones constitutivas se deben seguir una serie de reglas:

- # Consistencia con las ecuaciones de balance.
- # Covarianza inercial.
- # Isotropía (sólo en fluidos isotrópicos).

Invarianza dimensional.

Teoría cinética, mecánica estadística de no equilibrio, relaciones de Onsager.

Equipresencia (si las relaciones constitutivas hidrodinámicas son modificadas por alguna causa, esta causa también se ve modificada por la hidrodinámica).

Las ecuaciones fundamentales serán las siguientes:

- **Ecuación de estado.**

Es la ecuación que relaciona tres variables termodinámicas, por ejemplo la presión, la densidad y la temperatura. En este caso:

$$u = u(\rho, T) \quad (0.11)$$

Para el caso de fluidos incompresibles la ecuación pasa a decir que la densidad es constante si nos movemos con el fluido.

- **Ley de Fourier.**

Para un fluido isótropo:

$$\vec{q} = -\kappa \nabla T \quad (0.12)$$

donde κ es la conductividad térmica que dependerá de la densidad y la temperatura.

- **Relación de Navier-Poisson.**

Para fluidos no polares tenemos que el tensor de esfuerzos viscosos es:

$$\overline{\overline{\sigma}} = \mu_v Tr[\overline{\overline{D}}] \overline{\overline{1}} + 2\mu(\overline{\overline{D}} - \frac{1}{3} Tr[\overline{\overline{D}}] \overline{\overline{1}}) \quad (0.13)$$

Para los fluidos newtonianos tenemos que los coeficientes μ_v (viscosidad volumétrica) y μ (viscosidad de cizalla) dependen de la densidad y de la temperatura (o de otras dos variables termodinámicas). Para los fluidos no newtonianos también podrán depender de los invariantes del tensor de

esfuerzos viscosos. En los fluidos incompresibles la relación se simplifica mucho:

$$\bar{\bar{\sigma}} = 2\mu\bar{\bar{D}} \quad (0.14)$$

Condiciones de contorno e iniciales.

Éstas son ecuaciones que se cumplen en subespacios de dimensión uno o dos (en pocos casos de dimensión 0), es decir en curvas o superficies, tanto si son frontera de los fluidos (paredes) o fronteras entre ellos (interfaces). En general se pueden deducir de las expresiones integrales de las ecuaciones de balance considerando que puede haber una discontinuidad (así, este formalismo también sirve para estudiar por ejemplo ondas de choque).

- **Condiciones de contorno en una pared rígida.**

$$\vec{v} = \vec{v}_p \quad (0.15)$$

Es decir, la velocidad \vec{v} del fluido en la pared es la misma que la velocidad \vec{v}_p de la pared. Para el caso de un flujo irrotacional ($\nabla \times \vec{v} = 0$) la condición es:

$$\hat{n} \cdot (\vec{v} - \vec{v}_p) = 0 \quad (0.16)$$

donde \hat{n} es el vector unitario normal a la pared. Como vemos el número de condiciones de contorno o la dimensionalidad de las mismas es menor en el caso de tener un fluido irrotacional que en el de tener uno rotacional. El motivo es que el carácter de la ecuación de Cauchy cambia drásticamente al suponer el flujo irrotacional (ecuación de Euler).

Tenemos similares condiciones de contorno para otras magnitudes. Por ejemplo, la temperatura de la pared será la misma que la del fluido y las componentes normales de los flujos de calor también serán iguales.

- **Condiciones de contorno en una interfaz.**

- Condición de contorno cinemática.

La condición cinemática proviene de considerar que la interfaz se mueve con los elementos de fluido. Por tanto si la ecuación de la interfaz es:

$$F(\vec{x}, t) = 0 \quad (0.17)$$

la condición cinemática será:

$$\frac{dF}{dt} = 0 \quad \text{en} \quad F(\vec{x}, t) = 0 \quad (0.18)$$

- Condición de contorno dinámica normal.

Consideraremos los dos fluidos como numerados 1 y 2, y el vector unitario normal está dirigido de 1 a 2. Esta es la condición que sale de una de las componentes del balance del momento lineal para fluidos isótropos:

$$\hat{n} \cdot (\overline{\overline{T}}_2 - \overline{\overline{T}}_1) \cdot \hat{n} = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \sigma \nabla \cdot \hat{n} \quad (0.19)$$

siendo σ la tensión interfacial (que depende de variables termodinámicas) y R_1 y R_2 los radios de curvatura principales. La ecuación expresa que los esfuerzos normales en la interfaz tienen una discontinuidad proporcional a la curvatura media.

- Condiciones de contorno dinámicas tangenciales.

Son las equivalentes a la anterior pero con componentes tangenciales. Llamando \hat{N} y $\hat{\tau}$ los vectores unitarios en la interfaz binormal y tangencial respectivamente. El gradiente de tensión superficial es no nulo cuando hay gradientes de temperatura o concentración (por ejemplo con un tensioactivo) en la interfaz. Si no es este el caso la ecuación expresa que los esfuerzos tangenciales en la interfaz son continuos.

$$\hat{n} \cdot (\overline{\overline{T}}_2 - \overline{\overline{T}}_1) \cdot \begin{bmatrix} \hat{N} \\ \hat{\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{N} \\ \hat{\tau} \end{bmatrix} \cdot \nabla \sigma \quad (0.20)$$

Podemos obtener estas ecuaciones integrales de balance del momento lineal y aplicando el principio del equilibrio local sobre las direcciones

tangenciales a la interfaz. Estas condiciones de contorno no son aplicables en el caso de flujos irrotacionales por los mismos motivos que en las paredes rígidas hay condiciones menos restrictivas en el caso irrotacional.

- **Condiciones iniciales.**

Es necesario para resolver completamente el problema planteado especificar el valor de los campos de velocidades, de los campos de temperatura, etc en el instante inicial, de forma que las soluciones a los sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales a resolver no queden desde el principio indeterminados.

- **Otras condiciones de contorno.**

Es necesario especificar ecuaciones sobre el comportamiento del sistema en lugares de intersección de otras condiciones de contorno. Por ejemplo en la línea de contacto (que es la intersección de la interfaz con la pared rígida).

Modelo simple de ondas de agua.

A continuación se presenta un modelo simple de ondas superficiales a partir de las ecuaciones generales presentadas en las secciones anteriores. Para obtener estas ondas deberemos hacer una serie de aproximaciones, que se mantendrán en lo que queda de la tesis salvo que se especifique lo contrario. Éstas aproximaciones son:

- * Fluidos newtonianos, isótropos, inmiscibles e incompresibles.
- * Flujos isentrópicos, sin flujos de calor ni gradientes de temperatura.
- * No hay gradientes de concentración, ni fuentes ni sumideros de masa o calor.

Con estas aproximaciones obtendremos las siguientes ecuaciones:

- Ecuación de continuidad y incompresibilidad.

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{0.2}$$

- Ecuación de balance del momento lineal para un fluido newtoniano isótropo.

Es la que se llama comúnmente *Ecuación de Navier-Stokes*:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} + \vec{f}(\vec{x}, t) \quad (0.21)$$

La ecuación de momentos angulares (**ec. 0.4**) para un fluido newtoniano isótropo se reduce a que el tensor de esfuerzos es simétrico.

- Condiciones de contorno e iniciales.

Las condiciones de contorno solamente presentan una simplificación importante de forma explícita cuando se introducen la relación de Navier-Poisson correspondiente, así como las condiciones de isotropía e incompresibilidad.

Por tanto, tendremos:

En las paredes,

$$\vec{v} = \vec{v}_p \quad (0.15)$$

La condición cinemática en la interfaz es,

$$\frac{dF}{dt} = 0 \quad (0.18)$$

La condición dinámica normal en la interfaz utilizando las (**ecs. 0.9, 0.14, 0.19**) es:

$$p_1 - p_2 + 2\hat{n} \cdot (\mu_2 \overline{\overline{D}}_2 - \mu_1 \overline{\overline{D}}_1) \cdot \hat{n} = \sigma \nabla \cdot \hat{n} \quad (0.22)$$

Esta es la ley de Laplace generalizada. Aquí los subíndices 1 y 2 representan a los dos fluidos a ambos lados de la interfaz.

Y las condiciones dinámicas tangenciales en la interfaz utilizando las (**ecs. 0.9, 0.14, 0.20**) son:

$$\hat{n} \cdot (\mu_2 \overline{\overline{D}}_2 - \mu_1 \overline{\overline{D}}_1) \cdot \begin{bmatrix} \hat{N} \\ \hat{\tau} \end{bmatrix} = 0 \quad (0.23)$$

Estas condiciones se complementan con las condiciones iniciales para cada problema específico en cuestión. Como se verá más adelante, algunas de las ecuaciones se verán modificadas por las condiciones físicas del problema considerado, haciendo el énfasis necesario en su momento.

A continuación resolveremos el caso más simple y clásico de ondas de agua, basado en considerar las ecuaciones anteriores (**ecs. 0.2, 0.21, 0.15, 0.18, 0.22, 0.23**) más simplificadas. El interés de presentar aquí este problema reside en que es una primera introducción a los problemas que nos interesarán a lo largo de esta tesis. En particular, la introducción de conceptos tales como relación de dispersión, tiempos característicos, ondas capilares, ondas gravitatorias, entre otros.

Se considerará un sistema lateralmente infinito, de profundidad h e inmerso en un sistema cartesiano de coordenadas. Considerando un flujo irrotacional estudiaremos el régimen lineal. Además las fuerzas externas únicamente son una fuerza gravitatoria constante. Por debajo hay una pared rígida y por encima un gas sin ningún efecto hidrostático, es decir, que somete al fluido inferior a una presión constante. A partir de estas consideraciones, llegamos a las siguientes ecuaciones:

- Del hecho de tener un flujo irrotacional, sigue que existe un potencial para el campo de velocidades:

$$\vec{v} = \nabla \phi \quad (0.24)$$

Esto permite, juntamente con la condición de incompresibilidad, obtener que el potencial es una función armónica en el volumen:

$$\Delta \phi = 0 \quad (0.25)$$

- La ecuación de Navier-Stokes, usando (**ec. 0.24**) y hallando una primera integral de forma que la función arbitraria de integración sea nula, pasa a ser (para el volumen):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = 0 \quad (0.26)$$

- Las condiciones de contorno en la pared inferior es la de deslizamiento y en el infinito la de regularidad (campo de velocidades acotado).

En la pared inferior ($z = -h$):

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (0.27)$$

En el infinito:

$$\exists R, M \in \mathbb{R}^+ \quad x^2 + y^2 \geq R \Rightarrow \|\nabla \phi\| \leq M \quad (0.28)$$

- Y finalmente en la interfaz (teniendo en cuenta que en el régimen lineal se puede substituir la deformación de la interfaz por el nivel medio $z = 0$ de la interfaz) tenemos que la ecuación de la interfaz (**ec. 0.17**) se puede poner de forma explícita:

$$F(x, y, z, t) \equiv z - \xi(x, y, t) = 0 \quad (0.29)$$

Entonces, la condición de contorno cinemática será (en $z = 0$):

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0 \quad (0.30)$$

Y la dinámica (también en $z = 0$):

$$g\xi + \frac{\partial \phi}{\partial t} + 2\nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\sigma}{\rho} \Delta_{\perp} \xi = 0 \quad (0.31)$$

donde $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ y $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ es la llamada viscosidad cinemática. La (**ec. 0.31**) se ha obtenido del hecho que en el régimen lineal $\nabla \cdot \hat{n} \approx -\Delta_{\perp} \xi$ y substituyendo la (**ec. 0.26**) en la (**ec. 0.22**).

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (**ecs. 0.25, 0.26, 0.27, 0.28, 0.30, 0.31**) se puede usar el método de separación de variables que da lugar a un problema algebraico en el espacio de Fourier-Laplace [51, 55]. Esta simplicidad es debida a la existencia de un grupo continuo de transformaciones puntuales con infinitos parámetros bajo el cual el sistema es

invariante [57], justificando el uso del principio de superposición de soluciones. Así pues, consideremos que estamos ya en el espacio de Fourier-Laplace que resulta de tener en cuenta la condición de contorno en el infinito y la de la pared rígida inferior. Obtenemos la siguiente forma de la solución:

$$\phi = \sum_{\vec{k}, \omega} \tilde{\phi}(\vec{k}, \omega) \cosh[k_z(z + h)] e^{i(k_x x + k_y y + \omega t)} \quad (0.32)$$

$$\xi = \sum_{\vec{k}, \omega} \tilde{\xi}(\vec{k}, \omega) e^{i(k_x x + k_y y + \omega t)} \quad (0.33)$$

Aquí \vec{k} y ω representarán los vectores de onda y frecuencias de cada modo permitido, siendo de momento la única restricción que $k_x, k_y \in \mathbb{R}$. Ahora al introducir las expresiones (**ecs. 0.32, 0.33**) en (**ec. 0.25**) obtendremos que

$$k \equiv k_z = (k_x^2 + k_y^2)^{\frac{1}{2}} \quad (0.34)$$

Aquí cabe señalar que el sistema puede ser descrito por una sola componente del vector de onda debido a la invarianza del sistema respecto rotaciones con ejes perpendiculares al plano $z = 0$. Al introducir las expresiones (**ecs. 0.32, 0.33**) en las restantes ecuaciones obtendremos que tenemos una solución no nula para el potencial y por tanto para el campo de velocidades sólo para los valores de los números de onda k y frecuencias ω que anulan la relación de dispersión $G(\vec{k}, \omega)$

$$0 = G(\vec{k}, \omega) \equiv \omega^2 - 2\nu k^2 \omega - \tanh(kh) \cdot \left[gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3 \right] \quad (0.35)$$

Obsérvese que, que en esta relación de dispersión falta un factor *dos* en el segundo sumando, respecto del resultado típico [50]. Esta discrepancia es debida a que se ha considerado el flujo viscoso pero irrotacional.

Vemos, por lo tanto, que las frecuencias permitidas son complejas. Su parte real será lo que comunmente llamamos pulsación y su parte imaginaria lo que llamamos amortiguamiento. Si la viscosidad cinemática ν es suficientemente pequeña la pulsación será muy cercana al caso de no tener viscosidad ($\nu = 0$) y el amortiguamiento será exponencial con un coeficiente $2\nu k^2$ (nótese que el *dos* lo hemos añadido *a posteriori*) que dará tiempos característicos mucho menores que los tiempos de oscilación ($\frac{1}{\omega}$) y de propagación ($\frac{1}{k \frac{d\omega}{dk}}$) de los modos. La velocidad de fase se define como el cociente entre la pulsación y el número de onda. En

la (fig. 0.1) se representa la velocidad de fase frente al número de onda para distintas profundidades con viscosidad nula. En esta figura se observa que existe una velocidad de fase mínima para las ondas superficiales, esto implicaría que cualquier perturbación externa de la interfaz de velocidad inferior a la mínima no puede presentar ningún patrón estacionario. También se observa que la velocidad se hace mínima en un mínimo relativo para profundidades superiores a un valor crítico fácilmente calculable $h_0 = \sqrt{\frac{3\sigma}{\rho g}}$ y que deja de existir para profundidades menores.

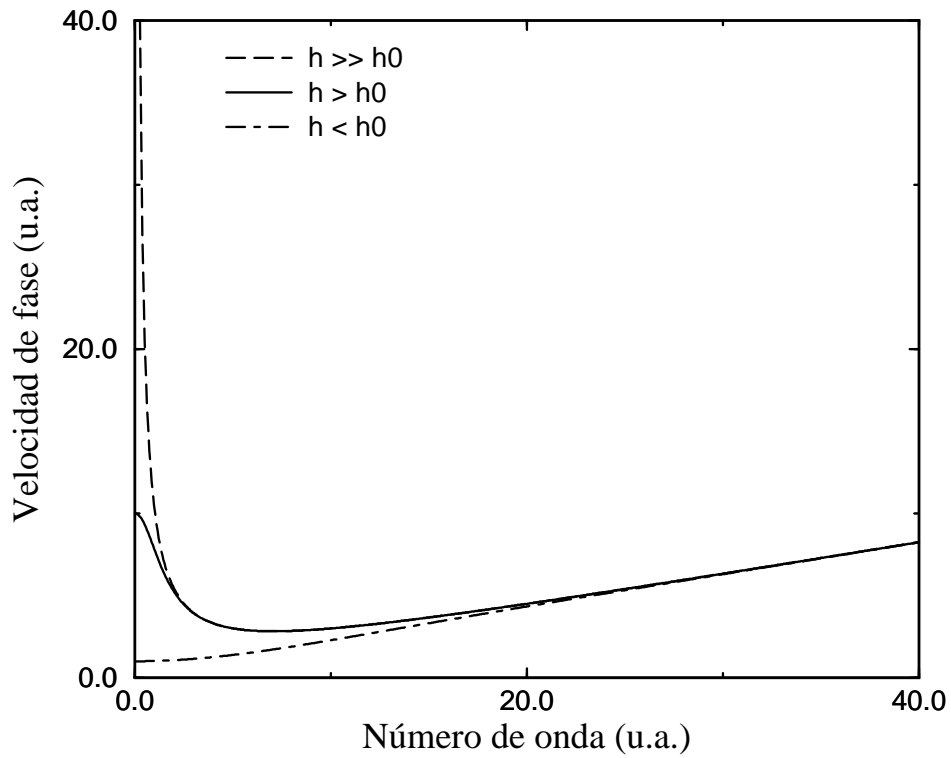


Figura 0.1: Relaciones de dispersión en aguas profundas, intermedias y superficiales.

Por otra parte la velocidad de grupo (que es la derivada de la pulsación respecto del número de onda) coincidirá con la de fase para los números de onda en que ésta tiene pendiente nula. En estos casos un tren de ondas con componentes cerca de estos puntos se dispersará poco. Esto hará posible la aparición de solitones cuando los efectos débilmente no lineales compensan la dispersión.

Cabe hacer una distinción entre ondas capilares y ondas gravitatorias. Tendremos ondas capilares cuando los efectos gravitatorios son despreciables y gravitatorias cuando lo son los capilares. Estos casos ocurren cuando $\left(\frac{k}{k_c}\right)^2$ es mucho menor o mayor que *uno* teniendo ondas gravitatorias o capilares respectivamente siendo $k_c = \left(\frac{g\rho}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}$ el número de onda capilaro-gravitacional.

En el caso que hubiéramos considerado viscosidad, tendríamos que la velocidad de fase mínima para las ondas es nula, pero eso pasaría para números de onda suficientemente altos como para que no fueran válidas las aproximaciones usadas en este apartado, como por ejemplo la de flujo irrotacional.

Lo expuesto en este apartado es generalizable cuando se añaden efectos débilmente no lineales y hay interacciones resonantes entre ondas [55].

Fenomenología de ondas de agua.

Veamos pues, antes de entrar en materia, cuales son los principales efectos de tener fluidos viscosos. El número de Reynolds que da cuenta de forma adimensional de la relación entre los efectos viscosos y los advectivos es el parámetro importante. En las paredes, el amortiguamiento o coeficiente de arrastre es proporcional a la raíz de la viscosidad cinemática y se puede obtener teniendo en cuenta que en un fluido viscoso hemos de imponer la condición (**ec. 0.15**) y que para que se pueda verificar ésta para viscosidades pequeñas se debe realizar un tratamiento perturbativo singular en el que el coeficiente de arrastre cumplirá esa proporcionalidad (modelo de capa límite). En la interfaz fluido-fluido, el amortiguamiento es proporcional a la viscosidad cinemática.

En resumen, si la viscosidad es pequeña podemos considerar el flujo irrotacional en el volumen. También podemos considerarlo irrotacional cerca de las paredes y de la interfaz fluida excepto en regímenes fuertemente no lineales, donde la creación de vorticidad en las paredes y en la interfaz fluida es suficientemente grande y existe advección y difusión de esa vorticidad hacia el volumen. Por tanto, el flujo puede ser considerado irrotacional en el régimen lineal. En el caso

de flujos altamente viscosos, las paredes crean más vorticidad que se difunde al volumen ya en el régimen lineal.

Es importante ver que en sistemas no excitados externamente la viscosidad no nula hace que el sistema considerado sea disipativo, en consecuencia para tiempos suficientemente largos se llegará al régimen lineal. Entonces los efectos no lineales en sistemas disipativos son, o bien efectos transitorios, o bien consecuencia de fuerzas externas. Sin embargo podríamos decir que esta aproximación no es uniforme, en el sentido que si bien un sistema en el que hemos dejado que pasase suficiente tiempo y lo dejamos evolucionar, éste lo hará en un principio como si estuviera en el régimen lineal, pero que las pocas no linealidades que pudieran quedar podrían hacer que para tiempos largos el sistema lineal y el exacto diferieran asintóticamente.

Tengamos en cuenta una excitación externa como las comentadas en el prólogo, es decir del tipo Faraday o del tipo del tubo, que son equivalentes a imponer un cierto campo de presiones en la interfaz, como se verá en los capítulos siguientes. En el caso del tubo no tenemos estrictamente un problema de inestabilidades y tomaremos como parámetro de control el de no linealidad. En el caso de Faraday tenemos una inestabilidad y no podemos tomar como parámetro de control el de no linealidad pues son independientes, como está claro si se considera el estado justo antes de hacerse inestable la interfaz plana, y debe tomarse la aceleración adimensional como parámetro de control.

En el problema de Faraday no sólo puede aparecer la inestabilidad que hemos presentado, sino que una vez que ya tenemos ondas en la interfaz al aumentar aún más el parámetro de control aparecen nuevos patrones correspondientes a una nueva inestabilidad (por ejemplo TAM, *Transverse Amplitude Modulation* [19, 29, 30, 31] entre otros) que por aparecer después de la primera la llamamos secundaria (la definición rigurosa de este término es: una inestabilidad que proviene de un estado estable no homogéneo). En el problema del tubo aparecen inestabilidades secundarias (por ejemplo, de modos transversales), y también podrían aparecer dependiendo de la fuerza excitadora y de los parámetros del fluido inestabilidades seculares de longitudes de onda largas debido a la fricción con la pared inferior [48].

En los problemas de Faraday y del tubo aparecen fenómenos resonantes que no aparecen en el problema del *wavemaker*, entonces el problema del tubo es equivalente a dos *wavemaker* oscilando en oposición de fase excepto en el hecho

de la existencia de las paredes laterales, inferior y superior que también se mueven.

Las interacciones no lineales en sistemas cerrados, a diferencia de los sistemas no confinados, no necesariamente deben cumplir la condición cinemática de resonancia ya que la región de interacción está acotada.

Son también interesantes los solitones y ondas solitarias, por compensar los efectos dispersivos con los de interacción no lineal de manera que viajan sin cambiar ni su forma ni su velocidad. Éstos están relacionados con la rotura de ondas en aguas poco profundas que ocurre cuando la dispersividad es aún mucho menor que la no linealidad. Podemos tener solitones [31] en el problema de Faraday, así como en el del tubo.

Para finalizar con la introducción general falta decir que los objetivos de la presente tesis son la comprensión y estudio de inestabilidades, estructuras espacio-temporales y transición al caos. Estos objetivos se conseguirán a través del estudio teórico y experimental de interfaces fluidas sometidas a excitaciones mecánicas paralelas y perpendiculares a la gravedad.

Capítulo 1

Introducción al problema de interfaces excitadas perpendicularmente a la gravedad.

1.1 Descripción preliminar del sistema.

En este capítulo se hace una descripción esquemática experimental presentando algunos resultados que nos permiten desarrollar un modelo teórico lineal e irrotacional.

El sistema experimental consiste en un tubo cilíndrico llamado tubo de Natterer situado perpendicularmente a la gravedad (**fig. 1.1**) y que excitamos moviéndolo también de forma perpendicular a la gravedad. Las características físicas del sistema vienen dadas en la (**sec. 2.1**).

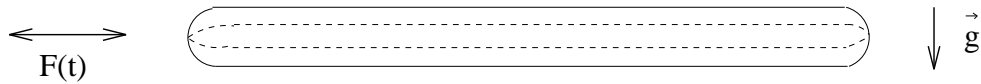


Figura 1.1: Tubo.

La excitación será periódica con amplitudes crecientes y frecuencias controlables. El rango de frecuencias utilizadas fué entre 10Hz. y 110Hz. Cualquier excitación con aceleración no nula producirá ondas superficiales (**fig. 1.2**) ya que

la interfaz plana no es un estado del sistema aunque el fluido sea viscoso, como ya se refirió antes.

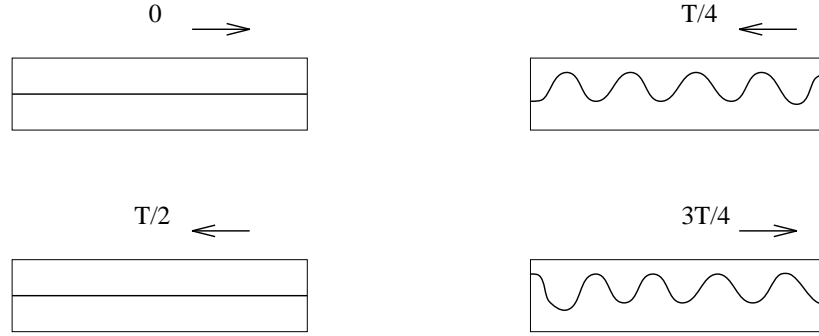


Figura 1.2: La interfaz plana no es estado del sistema.

Para cualquier excitación sinusoidal, incluso de amplitud infinitesimal siempre habrá más de un modo excitado. De hecho todos los modos que cumplen las condiciones de contorno en las paredes se excitarán. Esto es debido a que el gradiente de presiones que imponemos en la interfaz no verifica las simetrías de nuestro sistema (ni las del régimen lineal del mismo). Es decir, al estar en un sistema de referencia acelerado homogéneamente se genera un gradiente de presiones constante en el espacio. La existencia de este gradiente hace que, de acuerdo con la ley de Laplace generalizada, las derivadas espaciales de la deformación de la interfaz deban tomar valores distintos en los extremos del tubo y que por tanto no sean representables por un solo modo de Fourier. Este hecho está directamente relacionado con que el sistema del tubo en movimiento no es invariante bajo ningún grupo continuo de transformaciones que deje invariante una deformación sinusoidal pura de la interfaz [57].

Representando las amplitudes de cada componente de Fourier de la deformación de la interfaz fijada la excitación externa obtenemos unas curvas de resonancia espacial (**fig. 3.4**). El número de onda que haga máxima la curva de resonancia espacial, si este máximo es alto y estrecho, será el número de onda medido experimentalmente. La curva de resonancia tendrá un máximo alto y estrecho cuando, como en el caso del oscilador armónico amortiguado y forzado, tenga un factor de calidad asociado mucho mayor que uno. En este sentido, cuanto más elevado sea el número de Reynolds del flujo, el amortiguamiento será menor

y por tanto será mayor el factor de calidad y a su vez la curva de resonancia tendrá un entorno pequeño de números de onda que predominarán sobre el resto.

Además la curva de resonancia espacial está discretizada. Esto ocurre porque cualquier descripción en el espacio de Fourier de las funciones definidas en una región interior del tubo, al ser un sistema finito, será a través de una serie de Fourier. Es más, si definimos cada modo (que ahora ya no será de Fourier) mediante las funciones propias de un operador lineal autoadjunto asociado al problema para definir cada modo, definido en una región finita, también tendremos un espectro discreto de valores propios. Una conclusión es que, en flujos poco viscosos, unos pocos (generalmente uno) números de onda predominarán sobre el resto en la curva de resonancia espacial.

La relación de dispersión sería la función que relaciona el vector de onda con la pulsación del componente de la deformación de la interfaz con ese vector de onda $G(\vec{k}, \omega) = 0$. En nuestro sistema, forzado, en el estado estacionario para una frecuencia externa aplicada tendremos un número de onda predominante junto con su pulsación asociada, que obviamente en el régimen lineal va a coincidir con la de excitación (Ω). La relación funcional entre esas dos magnitudes (\vec{k} y Ω) en nuestro caso puede aproximarse a la relación de dispersión en flujos poco viscosos y para la discusión que sigue la denominaremos relación de dispersión forzada (**figs. 2.6, 3.5**). Así, esta relación de dispersión forzada se dará para los vectores de onda que hagan $\| G(\vec{k}, \Omega) \|$ mínima para cada pulsación de excitación fijada. Desde un punto de vista formal, se debe tener en cuenta que la pulsación de excitación, a diferencia de la pulsación de un modo de Fourier de la onda superficial, debe estar en el cuerpo de los reales y que por tanto si la viscosidad es no nula el mínimo no será cero.

Antes de continuar, conviene definir el *umbral de observación de la estructura*, desde un punto de vista experimental.

Aunque los extremos del tubo produzcan ondas superficiales para cualquier amplitud excitadora, ésta puede ser suficientemente pequeña para que no sea posible que esas ondas sean detectables por algún aparato de medida. Como cualquier aparato de medida tiene su propia resolución, esto obliga a definir un umbral de amplitudes de excitación para el que podamos detectar la deformación de la interfaz (**figs. 2.3, 3.6**). En nuestro sistema experimental llamaremos *umbral de observación de la estructura* a la amplitud de excitación mínima para que la amplitud de la onda superficial en la zona central del tubo supere el umbral

de medida del aparato usado. Esta definición nos será útil ya que el *umbral de observación de la estructura* es único salvo una constante multiplicativa que sólo depende del aparato de medida. El hecho de definir los *umbrales de observación de la estructura* en la zona central del tubo nos lleva a tener que considerar el tiempo de aparición de una onda en dicha zona (**figs. 2.10, 3.7**), que estará relacionado a: el tiempo asociado al decaimiento de los transitorios (tiempo disipativo) y el tiempo asociado al hecho que la onda tarda un cierto tiempo de propagarse desde el lugar de creación hasta la zona central del tubo. Todos estos aspectos se verán más en detalle en el capítulo siguiente.

Antes continuar la descripción de nuestro sistema debemos considerar otros fenómenos colaterales asociados al sistema experimental del problema del tubo. Para empezar, la existencia de un menisco en la interfaz podría representar alguna dificultad en la medida correcta de las magnitudes relevantes. Sin embargo, la tensión interfacial σ para el CO_2 nos da una longitud característica del menisco $l \sim \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} = 0.5mm$ que es mucho menor que las otras longitudes características del tubo. Además de ser pequeña la longitud característica del menisco, la altura del mismo se observa que es muy pequeña. Todo ello nos permite considerar los efectos del menisco como despreciables en todos los contornos. En particular, en los extremos del tubo las amplitudes de excitación generarán deformaciones de la interfaz de al menos un orden de magnitud superior al tamaño del menisco. Por ejemplo, una amplitud de excitación del orden de 1mm, como la profundidad de la fase líquida es 5mm, generará una deformación local de la interfaz en los extremos del tubo del orden de varios milímetros.

Otro fenómeno a considerar sería la posible existencia de una inestabilidad secular asociada al movimiento de las paredes laterales del tubo. De acuerdo con [52], las inestabilidades seculares son inestabilidades que producen estructuras de cambio lento (espacial o temporal), en escalas de longitud o de tiempo relativamente grandes. Así, si consideramos el flujo de una capa infinita de líquido debido al movimiento oscilatorio de la pared inferior que la limita, después de adimensionalizar convenientemente las variables hidrodinámicas se obtiene fácilmente una solución lineal, que corresponde a una interfaz plana, que se tendrá que perturbar. Debido a que la solución lineal depende del tiempo, la perturbación tiene una dependencia temporal no exponencial. Teniendo ésto en cuenta y unas condiciones de contorno adecuadas, además de saber que las ecuaciones resultantes tienen coeficientes periódicos, se puede aplicar la teoría de Floquet [56, 58] a la

que más adelante nos referiremos (**sec. 4.3, 4.1.2**). Si se considera que el fluido está instantáneamente acelerado de forma homogénea en una dirección cercana a la de la gravedad se puede esperar que esta inestabilidad sea de longitudes de onda largas. Si se realiza un cálculo estandar, pero extenso y tedioso [48] se obtiene que sólo es posible que tengamos el sistema inestable si $\Delta x_0 \cdot f > 0.4191 \frac{m}{s}$ donde f es la frecuencia de la excitación armónica. Por tanto para frecuencias menores de 150Hz. el sistema siempre será estable frente a este tipo de inestabilidad en el régimen lineal (en el no lineal tendríamos otros tipos de inestabilidades) e incluso para frecuencias mayores habría inestabilidad sólo para ciertos valores de los otros parámetros involucrados.

Finalmente, y para completar esta descripción preliminar de nuestro sistema daremos una visión esquemática de los resultados experimentales que serán presentados en detalle en el (**cap. 2**).

En el rango de frecuencias de excitación de 10Hz a 110Hz si se van aumentando las amplitudes de excitación desde 0 hasta el *umbral de observación de la estructura*, van apareciendo deformaciones de la interfaz que, son detectables en la zona central del tubo cuando se llega a dicho *umbral de observación de la estructura*. Estas deformaciones de la interfaz, de acuerdo con lo discutido previamente, son la superposición de modos de Fourier observándose experimentalmente un número de onda bien definido fuertemente predominante sobre el resto. Recordando la definición de número de onda capilaro-gravitacional dada en la introducción general se obtendrán ondas gravitatorias para frecuencias netamente por debajo de la frecuencia que tiene como número de onda predominante k_c y ondas capilares para frecuencias por encima de ésta. De acuerdo con la (**ec. 0.35**) $k_c = \left(\frac{g\rho}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} = 2.2mm^{-1}$ y $\omega_c = \left(\frac{4\rho g^3}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} \sim 2\pi \cdot 30Hz$. Los modelos desarrollados *ad hoc* para nuestro sistema (**sec. 1.2**), (**cap. 3**) introducirán correcciones a los valores dados de k_c y ω_c . En la zona en donde los efectos gravitatorios y capilares coexisten además se observa histéresis, en el sentido de que el *umbral de observación de la estructura* es distinto si se mide aumentando las amplitudes de excitación o si se mide disminuyéndolas desde valores en que se observa la estructura. Esto se puede explicar considerando interacciones resonantes muy débilmente no lineales [54]. De hecho en esta región se ven favorecidas interacciones resonantes y *Wilton ripples* habiendo sido éstos observados. Adicionalmente, hemos observado que, para ciertos rangos de frecuencias, la estructura es propagativa (**fig. 2.7**).

Para amplitudes por encima del *umbral de observación de la estructura* las no linealidades generarán deformaciones de las ondas respecto su forma lineal, por ejemplo haciendo que las crestas o los valles de las ondas se hacen más agudos [51]. Para amplitudes de excitación aún mayores aparecen nuevos modos en la estructura espacial con generación de defectos y gotas.

Las gotas se crean inicialmente en los extremos del tubo sosteniéndose sobre la interfaz tiempos relativamente largos y su destrucción se produce o bien por coalescencia o por aniquilación con otras gotas, o por choque contra las paredes. Estas gotas están sometidas a rápidos movimientos de la interfaz como se discutirá en la (sec. 2.2) Aunque la amplitud de excitación crítica para la aparición de gotas es generalmente algo superior al *umbral de observación de la estructura*, por encima de una frecuencia de excitación es posible que aparezcan antes y por lo tanto vemos gotas sin ver la estructura subyacente.

Tanto los defectos como las gotas son elementos que perturban las estructuras espaciotemporales, y consecuentemente, modifican sus simetrías, su velocidad en el caso que la estructura se propague, y otras características como el empalme de las ondas en los extremos, pudiendo coexistir de forma metaestable dos números de onda predominantes.

Cuando estos defectos y gotas son muy importantes el sistema se vuelve turbulento. Los efectos no lineales en la zona de histéresis se notan mucho antes llevando rápidamente a estados puramente caóticos y turbulentos.

Hay otra fenomenología importante que aparece para frecuencias de excitación del orden de 300Hz. Todo hace pensar que aparece un solitón no propagativo debido a la interacción entre ondas superficiales y ondas de densidad, que modulan la presión en la interfaz. Esta resonancia es tal que si una vez conseguida, se disminuye la frecuencia, hay desdoblamiento de este solitón en otros hasta que en el tubo hay una pared de presión que impide que haya una interfaz. Disminuyendo un poco más la amplitud de excitación el estado se hace inestable y desaparece por completo.

1.2 Modelo lineal irrotacional.

La primera aproximación, que mantendremos a lo largo de los cálculos teóricos presentados en esta tesis, será que el tubo cilíndrico lo tomaremos como un canal de sección cuadrada. Esta hipótesis está justificada puesto que las variaciones que

se producirán en la relación de dispersión en el modelo lineal son muy pequeñas [35] e incluso es una buena aproximación en algunos regímenes no lineales [34] excepto un factor de forma cercano a uno. Esto hace pensar que en cualquier caso, teniendo flujos poco viscosos, esta es una muy buena aproximación.

Entonces, consideramos un fluido poco viscoso (CO_2) en una caja rectangular (**fig. 1.3**) a presión de vapor de forma que la fase líquida llene la mitad de la caja a temperatura ambiente ($20^\circ C$). Las características físicas principales pueden verse en el (**cap. 2**).

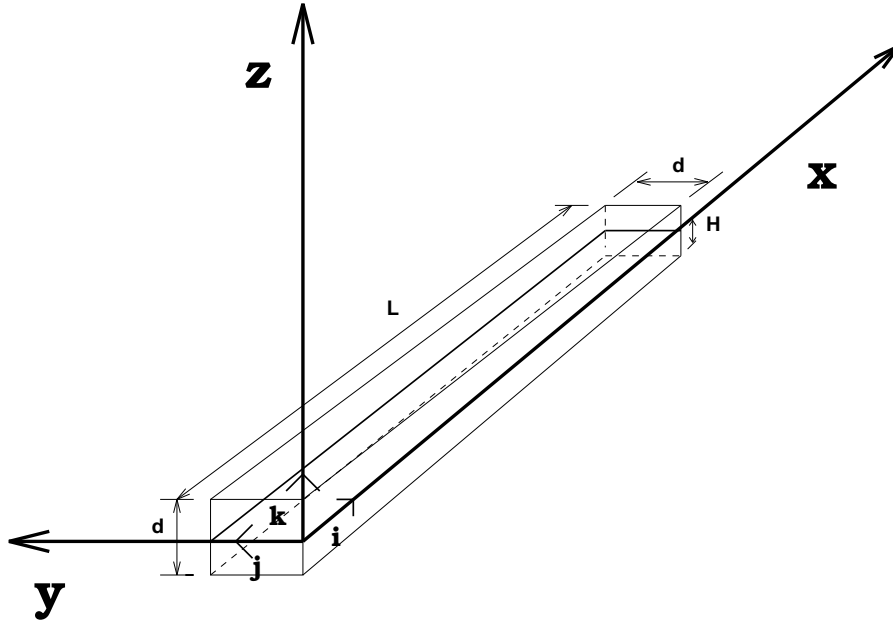


Figura 1.3: Sistema físico y ejes coordenados.

De acuerdo con los experimentos (**cap. 2**) consideraremos que la caja está colocada horizontalmente y se mueve periódicamente en la dirección del eje x en un rango de frecuencias (f) y amplitudes en el que son válidas las aproximaciones del modelo. La posición de la caja se puede definir:

$$x_0(t) = \int_0^t v_0(\tau) d\tau \quad (1.1)$$

donde $v_0(t)$ es la velocidad instantánea de la caja y t es el tiempo.

Las ecuaciones del movimiento son, para cada una de las fases, las **(ecs. 0.2, 0.21)** siendo $\vec{f}(\vec{x}, t) = -\rho g \hat{k}$. Las condiciones de contorno en las paredes serán para las dos fases las condiciones **(ec. 0.15)** siendo $\vec{v}_p = \vec{v}_0(t) = v_o(t)\hat{i}$. La ecuación de la interfaz es la **(ec. 0.29)** y en ella se verifican las condiciones de contorno **(ec. 0.18)** para las dos fases y **(ecs. 0.22, 0.23)** siendo el fluido 1 la fase líquida y el fluido 2 la fase gas.

Llamando a Δx la amplitud del desplazamiento de la caja y $\Omega = 2\pi f$ la pulsación de excitación, se definen los siguientes parámetros adimensionales que usaremos más tarde:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{d}{L} & \gamma &= \frac{\rho_G}{\rho_L} & \tilde{\gamma} &= \frac{\mu_G}{\mu_L} \\ \gamma' &= 1 - \gamma & \epsilon &= \frac{\Delta x}{L} & h_0 &= \frac{d}{H} - 1 \\ h &= \frac{H}{L} \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} Fr &= \frac{H f^2}{g} & Bo &= \frac{\rho_L L^4 f^2}{\sigma H} \\ Re_L &= \frac{L^2 f}{\nu_L} & Re_G &= \frac{L^2 f}{\nu_G} \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde d , L , H , Δx son las longitudes características con las que se adimensionalizan las longitudes, siendo ϵH la longitud que adimensionaliza la interfaz, y el periodo de excitación el tiempo con el que se adimensionalizan los tiempos y Fr , Bo y Re son los números de Froude, Bond y Reynolds respectivamente.

Para cada frecuencia aplicada, ϵ definida anteriormente es proporcional a los desplazamientos de la caja. La deformación de la interfaz se produce por los desplazamientos de las extremidades de la caja. Por consiguiente, podemos expresar ξ como serie de potencias de ϵ , siendo a la vez el parámetro de control y el de no linealidad. Una vez realizada la adimensionalización hacemos un cambio de variable:

$$\begin{aligned} \eta &= x - \epsilon x_0(t) \\ y &= y \end{aligned}$$

$$z = z$$

$$t = t$$

expresando los campos de velocidades y las presiones como:

$$\begin{aligned}\vec{v}_L(\vec{r}, t) &= \epsilon \vec{v}_0(t) + \epsilon \vec{b}_L(\vec{r} - \epsilon \vec{x}_0(t), t) \\ \vec{v}_G(\vec{r}, t) &= \epsilon \vec{v}_0(t) + \epsilon \vec{b}_G(\vec{r} - \epsilon \vec{x}_0(t), t) \\ p_L(\vec{r}, t) &= -\frac{h^2}{Fr} z + \left(\frac{1}{2} - \eta\right) \epsilon \dot{v}_0(t) + \epsilon \Pi_L \\ p_G(\vec{r}, t) &= -\frac{h^2}{Fr} z + \left(\frac{1}{2} - \eta\right) \epsilon \dot{v}_0(t) + \epsilon \Pi_G\end{aligned}\tag{1.4}$$

siendo \vec{r} el vector posición, \vec{b} y Π las contribuciones a las velocidades y a la presión dinámica con condiciones de contorno homogéneas en el sistema de referencia móvil.

Las ecuaciones resultantes las desarrollamos al orden más bajo en ϵ y se obtiene para la ecuación de Navier-Stokes para la fase líquida:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} b_{L\eta} \\ b_{Ly} \\ b_{Lz} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \delta^{-2} \frac{\partial}{\partial y} \\ h^{-2} \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \Pi_L + \frac{1}{Re_L} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \delta^{-2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + h^{-2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \begin{pmatrix} b_{L\eta} \\ b_{Ly} \\ b_{Lz} \end{pmatrix}\tag{1.5}$$

donde los subíndices representan la componente del vector en esa dirección. Para la fase gaseosa se obtienen unas ecuaciones similares.

Las condiciones de contorno pasarán a ser:

$$\vec{b}_L = \vec{b}_G = 0 \quad \text{en} \quad \eta = 0, 1 \quad y = 0, 1 \quad z = -1, h_0$$

Para $z=0$ (sobre la interfaz):

$$b_{Lz} = \frac{\partial \xi}{\partial t} = b_{Gz}$$

$$\begin{aligned}\Pi_L - \gamma \Pi_G &= \frac{h^2 \gamma'}{Fr} \xi + \gamma' \left(\eta - \frac{1}{2} \right) \dot{v}_0(t) - \frac{1}{Bo} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial \eta^2} + \delta^{-2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) \\ &+ \frac{2}{Re_L} \frac{\partial b_{Lz}}{\partial z} - \frac{2\gamma}{Re_G} \frac{\partial b_{Gz}}{\partial z}\end{aligned}\tag{1.6}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 d\eta dy \xi(\eta, y, t) = 0$$

Ahora es el momento de hacer la simplificación debida a que el flujo es considerado irrotacional. Esto está justificado porque el flujo es muy poco viscoso y por tanto los efectos viscosos se van a notar muy cerca de las paredes rígidas (con una longitud de penetración muy pequeña) y en la interfaz, con lo que, al menos a números de onda no muy altos podemos considerar que el flujo es irrotacional y que los únicos efectos viscosos se dan en la interfaz. Esto implica matemáticamente que el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales cambia de carácter y no puede admitir todas las condiciones de contorno iniciales, como ya se comentó en la introducción general.

Entonces el campo de velocidades de las dos fases se puede describir por funciones armónicas definidas para cada fase ψ de la siguiente manera:

$$\vec{b} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \hat{i} + \delta^{-2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \hat{j} + h^{-2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{k}$$

y las ecuaciones (**ecs. 0.2, 0.21**) se expresarán:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_L}{\partial \eta^2} + \delta^{-2} \frac{\partial^2 \psi_L}{\partial y^2} + h^{-2} \frac{\partial^2 \psi_L}{\partial z^2} &= 0 \\ \Pi_L + \frac{\partial \psi_L}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi_G}{\partial \eta^2} + \delta^{-2} \frac{\partial^2 \psi_G}{\partial y^2} + h^{-2} \frac{\partial^2 \psi_G}{\partial z^2} &= 0 \\ \Pi_G + \frac{\partial \psi_G}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

junto con las condiciones de contorno (**ec. 1.6**) que ahora son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_L}{\partial \eta} &= \frac{\partial \psi_G}{\partial \eta} = 0 \quad \text{en } \eta = 0, 1 \\ \frac{\partial \psi_L}{\partial y} &= \frac{\partial \psi_G}{\partial y} = 0 \quad \text{en } y = 0, 1 \\ \frac{\partial \psi_L}{\partial z} &= 0 \quad \text{en } z = -1 \\ \frac{\partial \psi_G}{\partial z} &= 0 \quad \text{en } z = h_0 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Para $z = 0$,

$$h^{-2} \frac{\partial \psi_L}{\partial z} = h^{-2} \frac{\partial \psi_G}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \Pi_L - \gamma \Pi_G = & \frac{h^2 \gamma'}{Fr} \xi + \gamma' \left(\eta - \frac{1}{2} \right) \dot{v}_0(t) - \frac{1}{Bo} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \delta^{-2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \xi \\ & + \frac{2h^{-2}}{Re_L} \frac{\partial^2 \psi_L}{\partial z^2} - \frac{2h^{-2} \gamma}{Re_G} \frac{\partial^2 \psi_G}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno **(ec. 1.8)** podemos resolver las ecuaciones **(ec. 1.7)** obteniendo soluciones de la siguiente forma:

$$\psi_L = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} T_L^{n_1, n_2}(t) \cos(\pi n_1 \eta) \cos(\pi n_2 y) \cosh(k_{n_1, n_2}(1 + z)) \quad (1.11)$$

$$\psi_G = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} T_G^{n_1, n_2}(t) \cos(\pi n_1 \eta) \cos(\pi n_2 y) \cosh(k_{n_1, n_2}(z - h_0)) \quad (1.12)$$

donde:

$$k_{n_1, n_2} = \pi h \left[n_1^2 + \frac{n_2^2}{\delta^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.13)$$

Sustituyendo las expresiones para ψ_L y ψ_G en la **(ec. 1.9)** obtendremos:

$$T_G^{n_1, n_2}(t) = -\frac{\sinh(k_{n_1, n_2})}{\sinh(h_0 k_{n_1, n_2})} T_L^{n_1, n_2}(t) \quad (1.14)$$

Y también:

$$\xi = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \Upsilon_{n_1, n_2}(t) \cos(\pi n_1 \eta) \cos(\pi n_2 y) \quad (1.15)$$

siendo:

$$\Upsilon_{n_1, n_2} = h^{-2} k_{n_1, n_2} \sinh(k_{n_1, n_2}) \int_0^t T_L^{n_1, n_2}(t') dt' \quad (1.16)$$

Finalmente, sustituyendo (**ecs. 1.11, 1.12, 1.14, 1.15**) en (**ec. 1.10**) y usando (**ec. 1.7**) para el campo de presiones obtendremos:

$$\frac{d^2 \Upsilon_{n_1, n_2}}{dt^2} + 2\chi_{n_1, n_2} \frac{d\Upsilon_{n_1, n_2}}{dt} + \left(\omega_{n_1, n_2}^2 + \chi_{n_1, n_2}^2 \right) \Upsilon_{n_1, n_2} = \Phi_{n_1, n_2} \dot{v}_0(t) \quad (1.17)$$

Es obvio que esta ecuación es la de un oscilador armónico amortiguado y forzado, sujeto a una fuerza externa por unidad de masa $\Phi_{n_1, n_2} \cdot \dot{v}_0(t)$.

Aquí los parámetros χ_{n_1, n_2} , Φ_{n_1, n_2} y ω_{n_1, n_2}^2 vienen dados por las siguientes expresiones:

$$\chi_{n_1, n_2} = \frac{k_{n_1, n_2}^2}{h^2 Re_L} \frac{1 + \tilde{\gamma} \frac{\tanh(k_{n_1, n_2})}{\tanh(k_{n_1, n_2} h_0)}}{1 + \gamma \frac{\tanh(k_{n_1, n_2})}{\tanh(k_{n_1, n_2} h_0)}} \quad (1.18)$$

$$\Phi_{n_1, n_2} = \delta_{n_2, 0} \frac{4\gamma' k_{n_1, n_2} \tanh(k_{n_1, n_2})}{h^2 \pi^2 n_1^2} \frac{\frac{1 - (-1)^{n_1}}{2}}{1 + \gamma \frac{\tanh(k_{n_1, n_2})}{\tanh(k_{n_1, n_2} h_0)}} \quad (1.19)$$

$$\omega_{n_1, n_2}^2 = k_{n_1, n_2} \tanh(k_{n_1, n_2}) \frac{\frac{\gamma'}{Fr} + \frac{k_{n_1, n_2}^2}{h^4 Bo}}{1 + \gamma \frac{\tanh(k_{n_1, n_2})}{\tanh(k_{n_1, n_2} h_0)}} - \chi_{n_1, n_2}^2 \quad (1.20)$$

Nótese, que al igual que el segundo sumando de la expresión que da $G(\vec{k}, \omega)$ en la (**ec. 0.35**), la expresión que da χ_{n_1, n_2} en la (**ec. 1.18**), carece de un factor *dos* debido a efectos viscosos que no se tienen en cuenta en el modelo irrotacional, pero que haciendo una estimación simple [50] o una aproximación en el modelo rotacional a orden de k^2 se puede obtener fácilmente.

Estos resultados se simplifican considerablemente si se usa el hecho experimental que $h_0 = 1$.

La solución de (**ec. 1.17**) con condiciones iniciales homogéneas para cada modo es:

$$\Upsilon_{n_1, n_2} = \frac{\Phi_{n_1, n_2}}{\omega_{n_1, n_2}} \int_0^t d\tau \dot{v}_0(\tau) e^{-\chi_{n_1, n_2}(t-\tau)} \sin[\omega_{n_1, n_2}(t-\tau)] \quad (1.21)$$

Si la excitación externa es sinusoidal pura, adimensionalizada $v_0(t) = \sin(2\pi t)$, la integral anterior se puede hacer exactamente, dándonos una parte transitoria y una estacionaria que es:

$$\Upsilon_{n_1, n_2}^{estac.} = \frac{2\pi\Phi_{n_1, n_2}}{\left[16\pi^2\chi_{n_1, n_2}^2 + (\omega_{n_1, n_2}^2 + \chi_{n_1, n_2}^2 - 4\pi^2)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \cdot \sin\left[2\pi t + \arctan\left(\frac{\omega_{n_1, n_2}^2 + \chi_{n_1, n_2}^2 - 4\pi^2}{4\pi\chi_{n_1, n_2}}\right)\right] \quad (1.22)$$

1.3 Discusión.

La amplitud de la función (**ec. 1.22**) representa la amplitud de cada modo de Fourier de la deformación de la interfaz y se pueden reproducir magnitudes como curvas de resonancia espaciales, curva de umbrales de amplitud de excitación, la relación de dispersión forzada, etc. Por la similitud de éstas curvas con las que resultan del modelo rotacional no vamos a exponerlas aquí. Cabe decir que el modelo rotacional, teniendo flujos muy poco viscosos, sólo va a mejorar ligeramente las magnitudes arriba expuestas, a la vez que es la base de un desarrollo no lineal donde los efectos rotacionales son importantes. Además, los efectos de flujo rotacional, contrariamente a lo que se podía pensar, no influyen considerablemente en las oscilaciones de máximos y mínimos relativos en la curva del *umbral de observación de la estructura* que explicaremos seguidamente:

El *umbral de observación de la estructura* es inversamente proporcional a las amplitudes adimensionales de las ondas superficiales que aparecerán en el régimen lineal para una amplitud de excitación dada. Esta curva de umbral tendrá un mínimo absoluto que corresponde a una frecuencia de resonancia, para la cual las combinaciones lineales en la zona central de todas las amplitudes de la curva de resonancia espacial correspondiente a esa frecuencia es máxima respecto de otras frecuencias. También esta curva umbral tiene otros mínimos relativos, que se deben a la discretización de las curvas de resonancia espacial. El hecho es que si el sistema fuera infinito tendríamos unas curvas de resonancia espacial continuas que tendrían un máximo relativo correspondiente al modo predominante. Este máximo iba a depender de todos los parámetros del sistema, pero a flujos poco viscosos depende muy poco de las condiciones de contorno salvo en la selección de la fase. La cuestión a responder es si el modo correspondiente al máximo encaja

en las condiciones de contorno que impone el sistema finito. Si encaja, tendremos una resonancia espacial en donde hay claramente un modo predominante y la curva umbral tendrá un mínimo. Si no encaja, la curva umbral tendrá un valor mayor y por tanto no será mínima.

La separación, en frecuencia de excitación, entre estos mínimos relativos del umbral es la misma que la necesaria para que el número de onda adimensional predominante varíe de un número de onda permitido al siguiente. Del hecho que los números de onda adimensionales que predominan en el rango de frecuencias aplicadas son elevados, sigue que esta separación es muy pequeña. Esto hace que en la zona en donde los tiempos de aparición viscosos son muy largos (esto ocurre para números de onda adimensionales pequeños y por tanto coincide con la zona en que los mínimos relativos son muy estrechos y más separados entre si) la más pequeña de las fluctuaciones en la fuerza excitadora o en la temperatura (ya que la tensión superficial es muy sensible a variaciones de la misma) durante ese tiempo hará que no midamos ese mínimo. Deducimos, pues, que en la curva del *umbral de observación de la estructura*, si el número de Reynolds es muy grande (oscilaciones rápidas del *umbral de amplitudes de excitación*) y los tiempos viscosos son elevados (con lo cual en la zona en cuestión habrá un compromiso entre estos dos efectos contrapuestos), mediremos un promedio de la curva del umbral y no exactamente los máximos y mínimos relativos de la misma. Este promedio se acercará más a los máximos, ya que éstos se alcanzan mucho más rápidamente que los mínimos y además los máximos son suaves y los mínimos puntiagudos.

En el (**cap. 3**) se ampliarán los modelos teóricos, en particular se desarrollará un modelo lineal rotacional y se expondrán los resultados teóricos y numéricos en detalle.

Capítulo 2

Interfaces excitadas perpendicularmente a la gravedad. Experimentos.

2.1 Montaje y técnicas experimentales.

El tubo de Natterer con el que se hacen los experimentos es un tubo lleno de CO_2 a presión de vapor de forma que llena la mitad del tubo a temperatura ambiente ($20^\circ C$). Recordemos que, en estas condiciones, las características físicas de los fluidos son [59] $\rho_L = 773 Kg/m^3$, $\rho_G = 189 Kg/m^3$, $\nu_L = 9.2 \cdot 10^{-8} m^2/s$, $\nu_G = 7.8 \cdot 10^{-8} m^2/s$, $\sigma = 1.16 \cdot 10^{-3} Kg/s^2$ donde los subíndices L y G significarán de ahora en adelante fase líquida y gaseosa respectivamente y ρ , ν y σ son la densidad, la viscosidad cinemática y la tensión superficial respectivamente..

En el montaje principal (**fig. 2.1**) situamos el tubo de Natterer con el que se harán los experimentos en un soporte metálico que dispone de piezas rotatorias, las cuales permiten un deslizamiento del tubo, minimizando el rozamiento. Además, el soporte puede ajustarse de forma que el eje principal del tubo sea perpendicular a la gravedad y alineado con el altavoz. Este elemento se utiliza para producir la fuerza externa de excitación. El altavoz utilizado fue de potencia media (15W) y con una buena respuesta en bajas frecuencias, al cual se envía una señal eléctrica sinusoidal (o de otra forma arbitraria). La señal se crea en un generador de funciones acoplado a un amplificador de muy bajo nivel de ruido conectado directamente al altavoz, el cual, como se ha dicho, está unido

mecánicamente al tubo de Natterer. Se ha verificado experimentalmente que los desplazamientos mecánicos del tubo son proporcionales, en los regímenes utilizados (que corresponderían a desplazamientos del orden de 1mm. y frecuencias en el rango de 10Hz.-110Hz.), a los voltajes aplicados. En consecuencia, se usó un microvoltímetro para medir las excitaciones del tubo. La resolución efectiva en frecuencias del generador de funciones es de 10mHz.

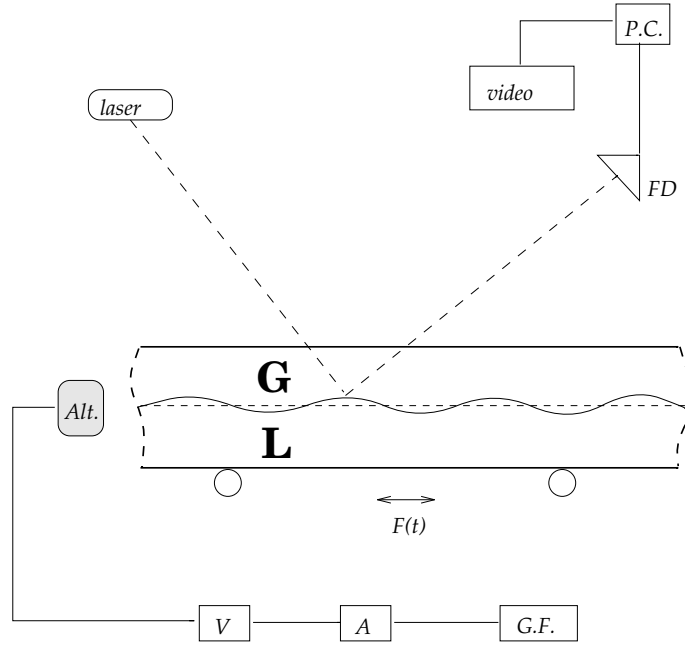


Figura 2.1: Figura esquemática del montaje experimental. Alt, A, V, FD, GF, G, L significan respectivamente altavoz, amplificador, voltímetro, fotodetector, generador de funciones, fase gas y fase líquido.

El proceso de calibración mecánica, posicionamiento horizontal del tubo y alineación del mismo con el altavoz es muy importante por varias razones. En primer lugar, porque es necesario tener un canal con una capa líquida de profundidad constante, por ser éste un parámetro importante dependiendo de las frecuencias aplicadas (véase la introducción general). También es necesario obviamente evitar las vibraciones laterales, es decir la excitación debe ser paralela al eje principal del tubo. Por último, el montaje y calibrado debe evitar el problema de inestabilidades seculares discutidas anteriormente. Por este motivo, siempre se controlaba

la calibración al iniciar cada serie experimental.

Las deformaciones de la interfaz eran observables por visualización directa. Para medir los *umbrales de observación de la estructura* se utilizaron técnicas ópticas del tipo shadowgraph y schlieren. Las imágenes fueron registradas en una cámara C.C.D. conectada a una tarjeta digitalizadora (en nuestro caso una Matrox IP-8) y seguidamente a un ordenador personal para el tratamiento y procesamiento de imágenes. Ciertos tratamientos de imágenes se hicieron en ordenadores paralelos y vectoriales (por ejemplo en un Alliant de 8 procesadores o en un Convex C3480). Además, mediante estas técnicas de visualización se pudieron medir otros umbrales, como el de aparición de gotas, defectos, inestabilidades secundarias, etc.

Alternativamente y para, por un lado, controlar las amplitudes de excitación, y por el otro el *umbral de observación de la estructura*, se utilizó otra técnica óptica consistente en hacer incidir un haz láser con un cierto ángulo sobre un cierto punto de la interfaz haciendo incidir el haz reflejado sobre un fotodetector de 1cm^2 de área eficaz. Un montaje adecuado nos permitía detectar deformaciones de la interfaz del orden de las $10\mu\text{m}$. Estas técnicas de reflexión de un haz láser sobre la interfaz se utilizaron en una primera aproximación para detectar regímenes caóticos haciendo la transformada de Fourier y hallando la función de autocorrelación. Un ejemplo puede verse en las (**figs. 2.30, 2.31**).

El control de la horizontalidad del tubo en el estado de reposo se hizo mediante un sistema óptico observando la reflexión de un haz láser sobre el tubo (montaje previamente calibrado mediante una cubeta de mercurio).

Una cuestión de especial importancia en el análisis y proceso de resultados es la eliminación del efecto estroboscópico. Este efecto proviene de tener una frecuencia principal de las ondas distinta de la frecuencia a la que se toman las imágenes en la C.C.D. . En consecuencia, si se considera una primera imagen de una onda en su máximo y se toma otra imagen de esta onda varios periodos después, la onda observada parecerá desfasada de la primera, creando una impresión de una falsa modulación de la onda. Este sería el llamado efecto estroboscópico (**fig. 2.8**). Se puede hacer desaparecer el efecto estroboscópico de distintas formas, las más sencillas son mediante software de la tarjeta digitalizadora. Una de estas formas es tomar sólo imágenes en intervalos de tiempo múltiplos del periodo principal de la onda, aunque este método se reveló muy delicado ya que no es difícil que se desfase el sistema. Otro método utilizado para evitar el efecto estroboscópico

consiste en hacer una señal en el tubo que se detectará con la tarjeta digitalizadora cada vez que este en una posición de máximo. En cuanto se detecta la señal la tarjeta toma una imagen y por tanto las imágenes serán tomadas en fase con la frecuencia principal de la onda. Evidentemente es necesario medir los instantes de adquisición de las imágenes, pues podría ser que se tomaran sincرونamente pero a intervalos desiguales. Con esta información ya se puede estudiar la serie de imágenes, pues sabemos en que tiempos han sido tomadas y estamos seguros que hemos eliminado el efecto estroboscópico.

Los tipos de medidas realizadas fueron las siguientes:

- Medida del **umbral de observación de la estructura**. Esta medida es simple, con el sólo cuidado de no modificar las condiciones experimentales en cada serie de medidas. Así, la iluminación debe mantenerse sin variaciones, así como todas las condiciones mecánicas y se debe hacer la observación desde el mismo lugar. Las medidas de los umbrales se hicieron incrementando el voltaje 0.01V cada 15 minutos observando, por las técnicas ópticas ya citadas, la aparición de deformaciones periódicas en la zona central del tubo (la región de observación fué de aproximadamente 10 cm). Como ya se dijo antes, se combinaron las técnicas de observación (shadowgraph y schlieren) con la técnica de detección local mediante un haz láser. Esto nos permitió en cada serie contrastar los resultados para el *umbral de observación de la estructura*. Una vez obtenida una estructura espacial bien desarrollada se disminuyeron las amplitudes de excitación, siguiendo el mismo protocolo anterior, hasta la desaparición de dicha estructura. Esto permite, eventualmente, detectar la existencia de histéresis.
- Medida de los **números de onda predominantes**. Similarmente al caso anterior, el registro digital de imágenes permite medir de forma simple los números de onda cerca del *umbral de observación de la estructura* promediando sobre un amplio campo de la estructura. Un estudio detallado de las imágenes permitió ver la regularidad de la estructura (**fig. 2.2**). En regímenes no lineales se utilizaron transformadas de Fourier de imágenes en movimiento.
- Medidas de **efectos espacio-temporales de la estructura**. Se ha hecho otra serie de experimentos en el régimen lineal para medir si las estructuras son estáticas o propagativas y, eventualmente, las **velocidades de**

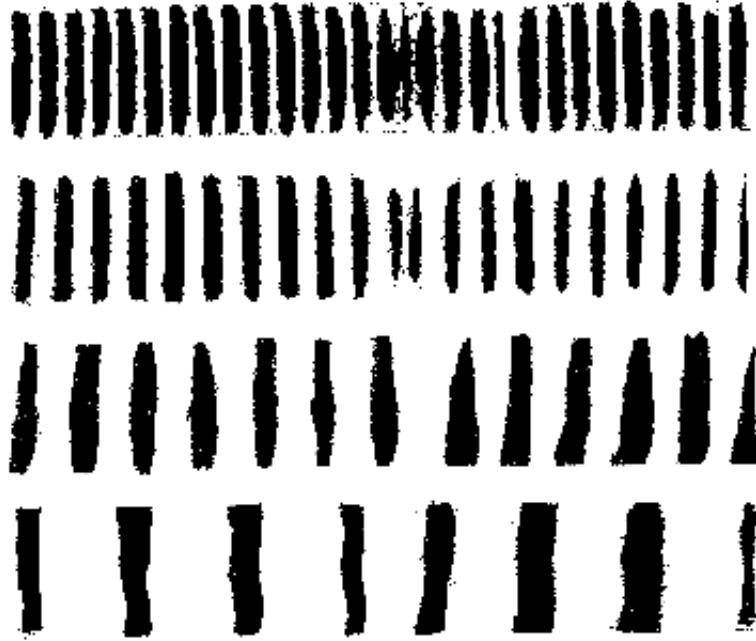


Figura 2.2: Estructuras cerca del *umbral de observación de la estructura*. De arriba a abajo, imágenes disminuyendo las frecuencias de excitación (80, 50, 30, 15 Hz).

propagación de las estructuras. En esta serie de experimentos se debe tener en cuenta el efecto estroboscópico ya referido anteriormente. Generalmente lo que se hace es tomar una línea de pixels correspondiente al eje de revolución del tubo a lo largo del tiempo para formar una imagen bidimensional espacio-temporal. Además de las técnicas para eliminar el efecto estroboscópico antes citadas, hay otro método de tipo software, útil para frecuencias elevadas, que consiste en tomar estas líneas de pixels para todo tiempo y luego se toman las líneas síncronas con la frecuencia excitadora. Para este experimento usualmente en el régimen lineal basta medir la pendiente de las franjas en las estructuras espaciotemporales. Sin embargo en regímenes no lineales conviene hacer la transformada bidimensional de Fourier para ver el espectro asociado de números de onda, frecuencias y velocidades. Además de este tipo de sincronización, también se puede sin-

cronizar a través de un circuito y una C.C.D. de alta velocidad la toma de imágenes con la frecuencia excitadora. Nótese que esto último es muy interesante en las medidas que se hacen en el régimen no lineal donde aparecen otras frecuencias características, distinta de la excitadora y que los experimentos correspondientes a la medida del número de onda predominante y de del *umbral de observación de la estructura* no necesitan la supresión del efecto estroboscópico pero en general es un efecto que debe suprimirse. Esta última técnica está actualmente en desarrollo y en consecuencia no se pueden presentar resultados definitivos.

- Medida de los **tiempos de aparición de la estructura**. Como se dijo en el (**cap. 1**), al hacer las medidas de los *umbrales de observación de la estructura* en la zona central del tubo es necesario considerar el tiempo asociado al decaimiento de los transitorios y el asociado a la propagación de la onda de los extremos a la zona central. De hecho, el modelo irrotacional (**sec. 1.2**) nos muestra que nuestro sistema se comporta como un conjunto de infinitos osciladores armónicos amortiguados y forzados (**ec. 1.17**), entonces se midieron los tiempos que tarda en aparecer la estructura para amplitudes de excitación proximas por encima al *umbral de observación de la estructura* y distintas frecuencias aplicadas. Para evitar una aceleración muy grande en el tubo en el instante de inicio de la excitación se debe hacer empalmar la posición y la aceleración del tubo con sus valores de reposo.

Finalmente quedan los experimentos que deben hacerse en regímenes no lineales, como pueden ser, los umbrales de aparición de inestabilidades secundarias, o de aparición y desaparición de gotas, la aparición de defectos y su evolución. En los regímenes no lineales debe vigilarse nuevamente el efecto estroboscópico, para evitar obtener frecuencias fantasmas.

Las medidas de los umbrales se hacen mediante las técnicas ya descritas. La evolución de las estructuras y de los defectos es conveniente estudiarlas a través de tratamientos en el espacio de Fourier (modos involucrados, defectos topológicos, roturas de simetrías, etc) y tratamientos específicos para ver si hay transición al caos. Gran parte de estas medidas actualmente está en curso de realización.

2.2 Resultados experimentales.

- Se ha medido el **umbral de observación de la estructura** para distintas frecuencias de excitación (fig. 2.3).

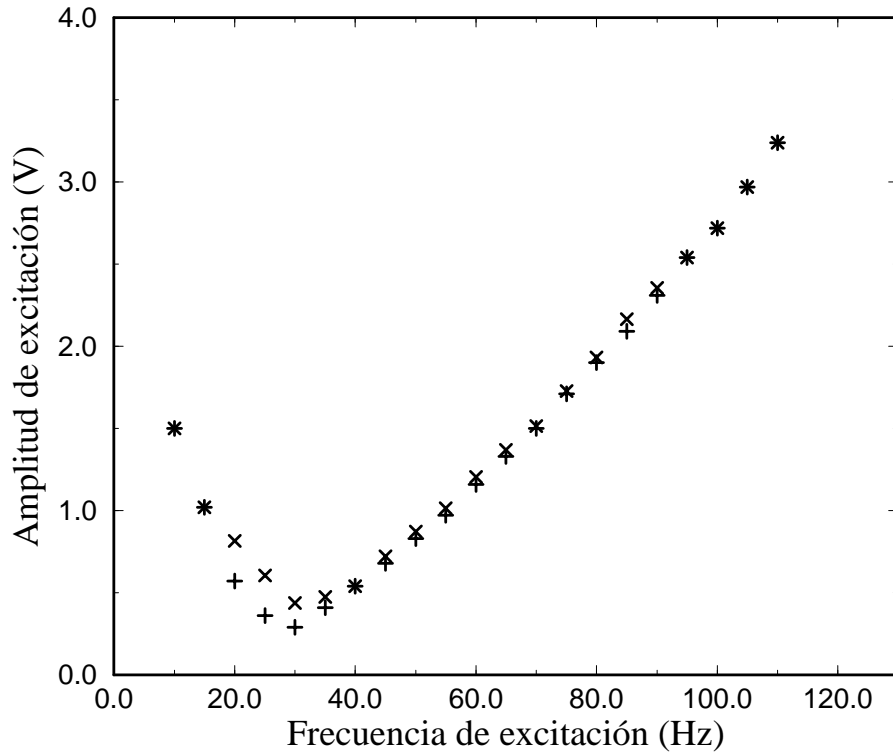


Figura 2.3: *Umbral de observación de la estructura*. x representan los umbrales al aumentar las amplitudes y + los umbrales al disminuirlas.

En esta figura se representan las amplitudes de excitación frente a frecuencias de excitación de tal manera que para cada frecuencia de excitación se aumentan las amplitudes hasta que es observable una deformación de la interfaz como ya se dijo previamente. Obsérvese que los *umbrales de observación de la estructura* disminuyen para bajas frecuencias hasta alcanzar un

mínimo (en 28Hz) y luego crecen monótonamente. Se observan en la región próxima al mínimo relativo efectos de histéresis en el sentido comentado anteriormente. Cerca de la frecuencia capilaro-gravitacional (20Hz) es donde aparecen más fuertemente los efectos de histéresis que son debidos a las interacciones no lineales entre trenes de onda superficiales, concretamente *Wilton ripples* (**fig. 2.4**) observandose el modo armónico del predominante.

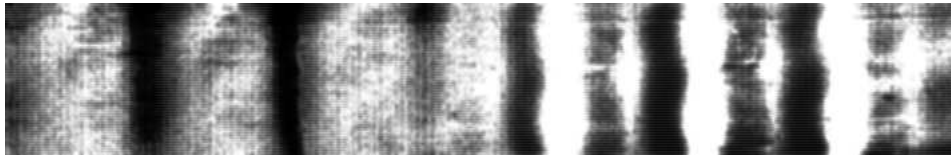


Figura 2.4: Estructura donde aparece resonancia interna (resonancia de segundo armónico) (Frecuencia de excitación: 15 Hz).

También es posible que aparezcan otro tipo de interacciones resonantes favorecidas por vectores de onda no paralelos (**fig. 2.5**).



Figura 2.5: Estructura donde aparecen interacciones resonantes con vectores de onda oblicuos (Frecuencia de excitación: 30 Hz).

A la derecha de la zona de histéresis tenemos ondas capilares y a su izquierda gravitatorias. Coincide la zona gravitatorio-capilar con la zona de histéresis por ser ésta la zona en donde ocurren las resonancias internas que son las más favorecidas por tener el tubo unas curvas de resonancia espacial muy estrechas y altas. En la zona capilar el *umbral de observación de la estructura* es monótono creciente porque los tiempos de aparición son cortos y además en esta zona fijada una amplitud de la onda se necesita más energía (y en la zona capilar esto implica una mayor amplitud de excitación)

para excitar un modo de mayor número de onda (y curvatura) debido a los efectos de la tensión superficial. Este argumento no permitiría explicar la variación de los *umbrales de observación de la estructura* en bajas frecuencias (zona gravitatoria). La explicación de este comportamiento habría que encontrarlo en los argumentos discutidos en la (sec. 1.3). Así, en la zona de bajas frecuencias no se miden los mínimos de la curva de *umbral de observación de la estructura* y fuera de los mínimos esta curva es monótona decreciente pues a menor número de onda los modos están más separados de forma relativa y cuesta más energía adicional el crear una onda de una amplitud dada. Además en esta zona los efectos de la tensión superficial son despreciables y por tanto la energía necesaria para crear un modo permitido por las condiciones de contorno es independiente de su número de onda asociado.

- También se han medido los números de onda predominantes en el *umbral de observación de la estructura* para distintas frecuencias (fig. 2.6). Aquí se observa el comportamiento esperado de crecimiento monótono del número de onda frente a la frecuencia de excitación típico de las relaciones de dispersión en ondas interfaciales. La **relación de dispersión forzada** que nos ocupa es muy similar a la relación de dispersión de ondas superficiales libres ampliamente conocida, lo cual es lógico teniendo en cuenta la baja viscosidad, y que en el régimen lineal la pulsación de las ondas interfaciales es la misma que la frecuencia excitadora.
- En la (fig. 2.7) se observa una **estructura propagativa** en el *umbral de observación de la estructura*. En la dirección vertical se representa el tiempo creciente hacia abajo y en la horizontal se representa la línea de pixels central como ya se comentó en la (sec. 2.1). La línea vertical que se observa en el tercio izquierdo de la imagen corresponde a la señal que se hace en el tubo para evitar el efecto estroboscópico. En esta medida la iluminación no es homogénea (en ésta no hace falta) y provoca la poca definición de la imagen en la zona más central. En el régimen lineal se observan franjas paralelas que denotan una velocidad constante durante toda la medida, que duró alrededor de 25s.

Para ilustrar el **efecto estroboscópico**, del que ya hemos hablado anteriormente (sec. 2.1) consideremos la (fig. 2.8), que presenta sus carac-

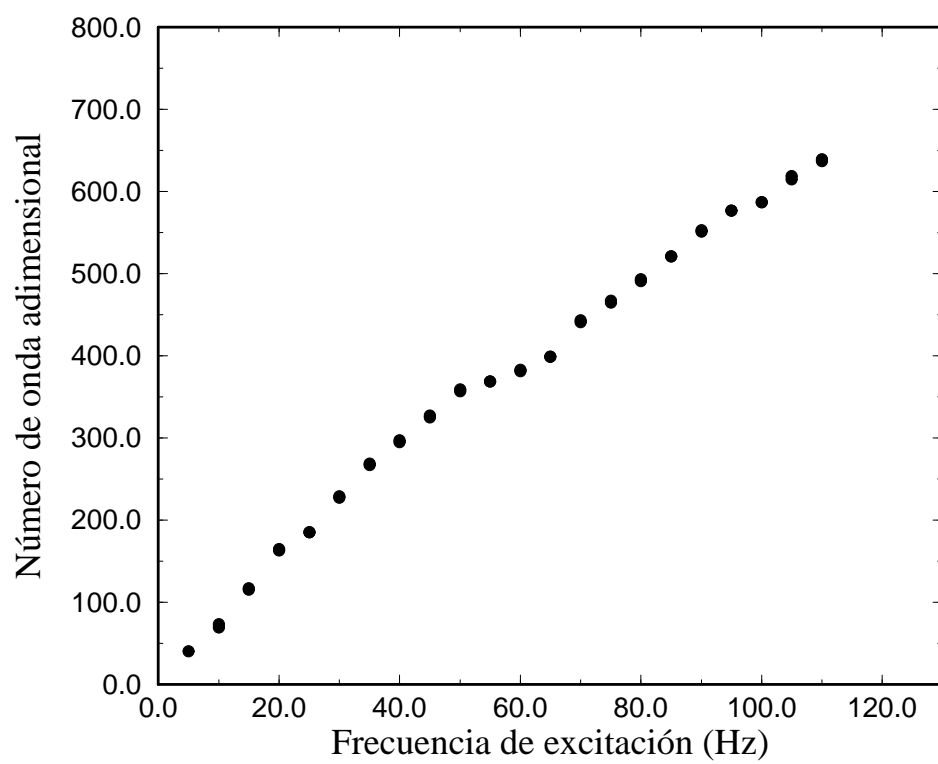


Figura 2.6: Relación de dispersión forzada.

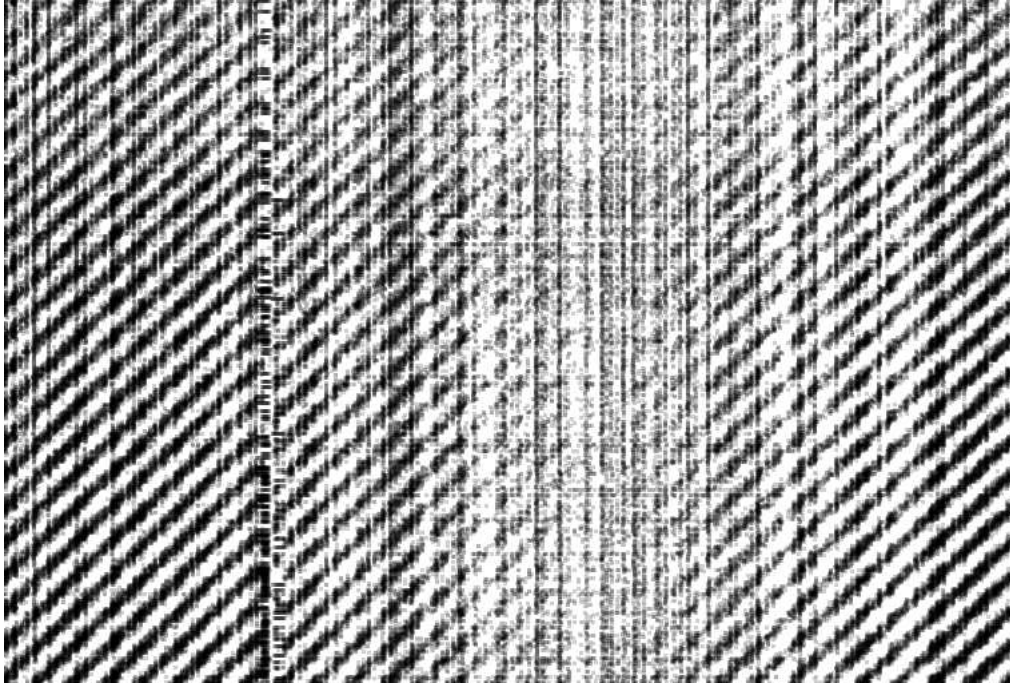


Figura 2.7: Estructura propagativa (Frecuencia de excitación: 75Hz).

terísticas principales. La curva sinusoidal vertical representa la señal que se hace en el tubo. Ésta está en consonancia con las franjas diagonales curvadas debido al movimiento del tubo. Además estas franjas presentan modulaciones de amplitud temporales ficticias también en consonancia con la curva sinusoidal. Sin embargo, las modulaciones de amplitud espaciales se corresponden con la interferencia lineal de dos modos consecutivos de la frecuencia considerada. Todo lo dicho hace ver la necesidad de anular el efecto estroboscópico.

Se hicieron medidas para distintas frecuencias excitadoras y se halló una curva de **velocidades de propagación de las estructuras**. En las medidas se observaba propagación de la estructura tanto hacia un lado como al otro, por tanto en la (fig. 2.9) se toma el valor absoluto de la velocidad de propagación.

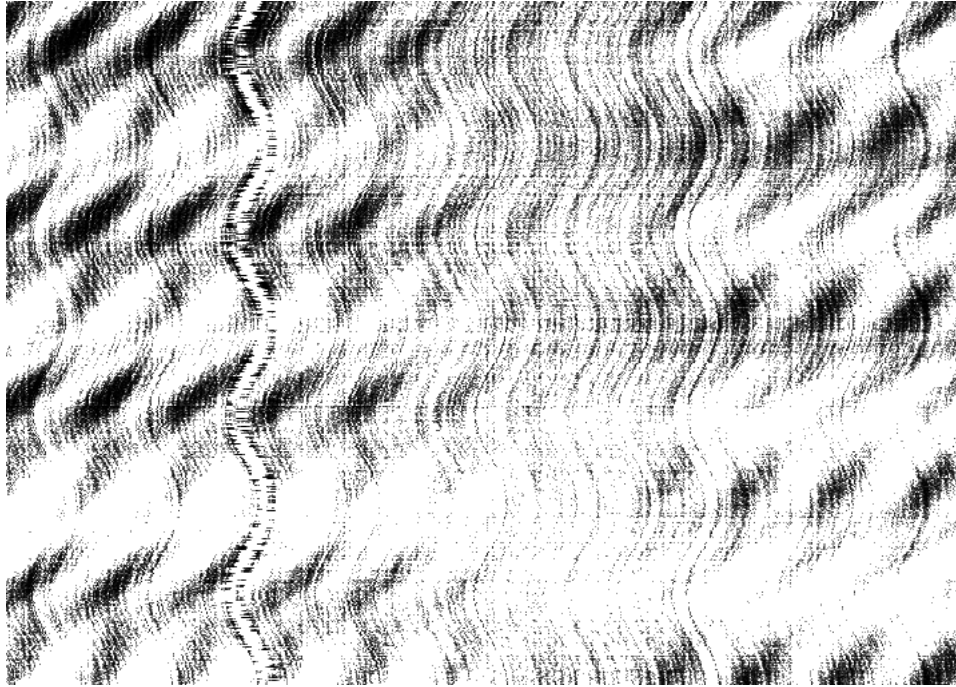


Figura 2.8: Efecto estroboscópico (Frecuencia de excitación: 25Hz).

Se observa que las estructuras son estacionarias por debajo de la frecuencia capilaro-gravitacional y que por encima son propagativas. La gran dispersión de esta curva de velocidades de propagación es debido a la gran sensibilidad de la velocidad respecto de las condiciones experimentales. El hecho que siempre se haya medido una velocidad no nula del mismo orden de magnitud y de distintos sentidos, hace pensar que hay una inestabilidad y que probablemente es sólo importante en la zona capilar. Se comentará más sobre este hecho en el (**cap. 3**). Medidas similares en el régimen no lineal se han hecho y se expondrán más adelante por verse involucrados nuevos fenómenos.

- Se han medido los **tiempos de aparición de las ondas interfaciales** cuando se incrementa bruscamente la amplitud de excitación de un valor nulo hasta el *umbral de observación de la estructura* para distintas frecuencias de excitación (**fig. 2.10**)

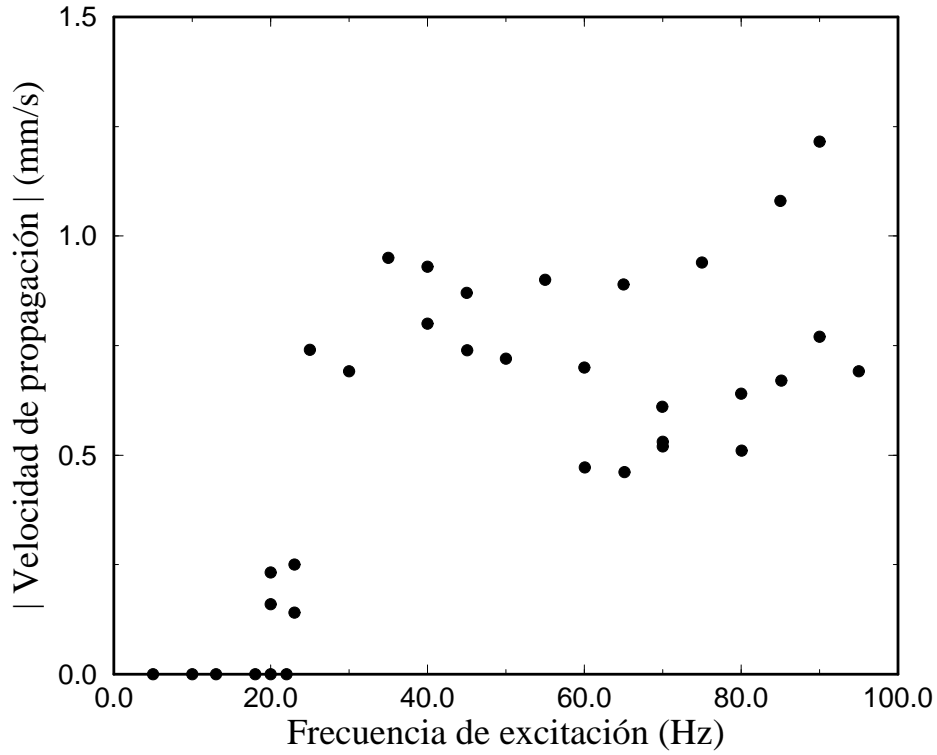


Figura 2.9: Velocidad de propagación de las estructuras.

En la (fig. 2.10) se observa que hay una disminución de los tiempos de aparición frente a la frecuencia de excitación. En principio puede suponerse que el tiempo de aparición es el tiempo característico de los transitorios, relacionado directamente con cuán viscoso es el flujo y en este sentido este tiempo característico es inversamente proporcional al número de onda al cuadrado. Este comportamiento decae demasiado rápidamente para explicar el comportamiento de los tiempos de aparición. Eso es debido a que debe considerarse el tiempo en que la onda tarda en establecerse en la zona central del tubo correspondiente a la zona de medida. Éste es nulo a frecuencia de excitación nula y crece hasta un máximo, y después de éste decrece

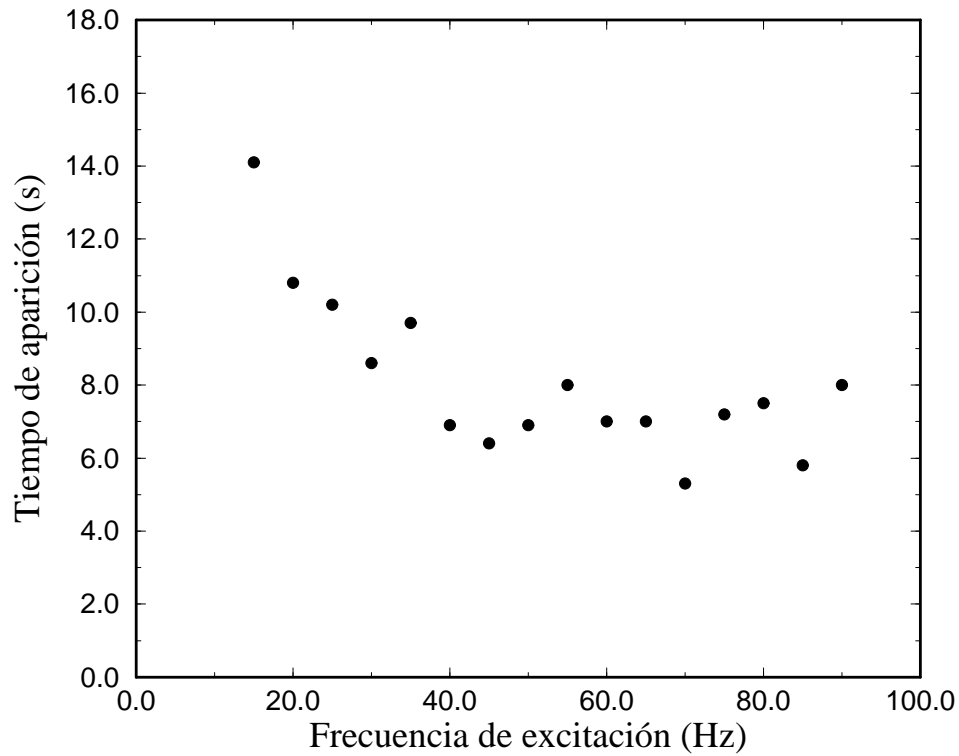


Figura 2.10: Tiempos de aparición de las estructuras.

suavemente. Con esta consideración el comportamiento de los tiempos de aparición se puede interpretar satisfactoriamente.

- Se han hecho medidas de las **modulaciones temporales de las amplitudes** en el *umbral de observación de la estructura* y aunque existen las mismas no se ha podido conocer la ley que seguían (**fig. 2.11**) por la elevada dispersión que presentan. En principio podrían ser debidas a alguna inestabilidad secundaria que ya se ha alcanzado en el umbral o directamente a efectos no lineales de modulación de las amplitudes en el *umbral de observación de la estructura*.

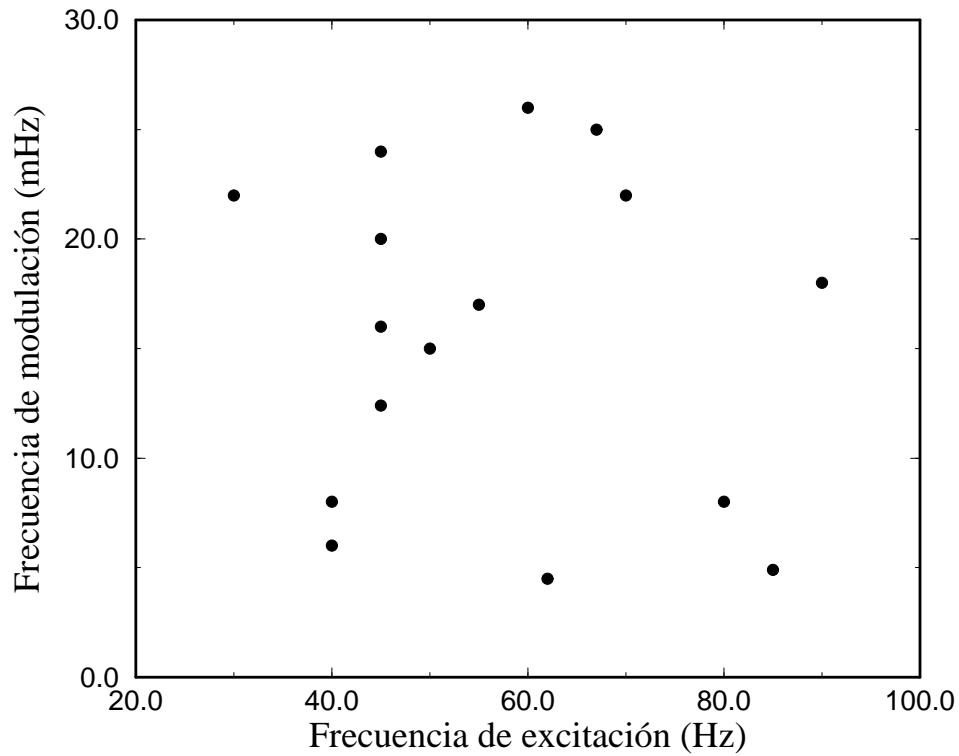


Figura 2.11: Modulación de amplitudes.

- Por encima del *umbral de observación de la estructura* se han tomado medidas de las velocidades de las estructuras, de la aparición de gotas, defectos, etc. Para empezar con todo esto, sabiendo que las gotas pueden aparecer en amplitudes de excitación menores que el *umbral de observación de la estructura* es interesante medir primeramente cual es el umbral de la inestabilidad que produce las gotas. Primero cabe ver como se **reabsorbe una gota** cuando se disminuye la amplitud de excitación por debajo del umbral de desaparición de las gotas (**fig. 2.12**)

En la primera de las imagenes se ve la gota bien formada, en la segunda la gota se va reabsorbiendo y finalmente en la tercera se ha reabsorbido com-

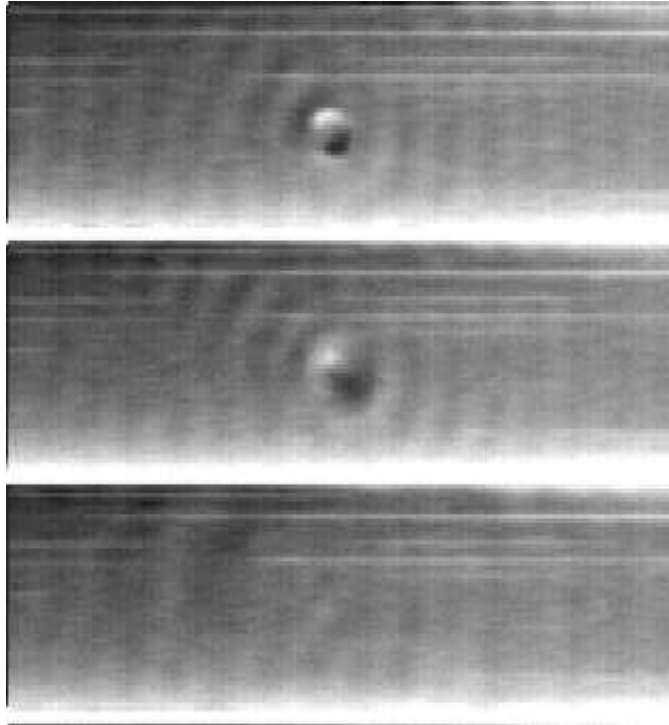


Figura 2.12: Reabsorción de gota.

pletamente. Como se ve en la tercera de las imágenes éstas están tomadas muy cerca del *umbral de observación de la estructura* donde no hay casi estructura formada.

Se han medido los **umbrales de creación y aniquilación de gotas** (fig. 2.13). Si esta figura se superpone a la curva del *umbral de observación de la estructura* (fig. 2.3) se observa que en general los umbrales de aparición y destrucción de gotas son mayores que el *umbral de observación de la estructura*. Pero a partir de 100Hz aparecen gotas al mismo tiempo que detectamos las estructuras y que ya en 110Hz las gotas aparecen antes. Sin embargo, a partir de 70Hz el umbral de desaparición de gotas es menor o igual al de detección de la estructura y por encima de 85Hz el umbral de desaparición de gotas es estrictamente menor que el de detección de estructuras.

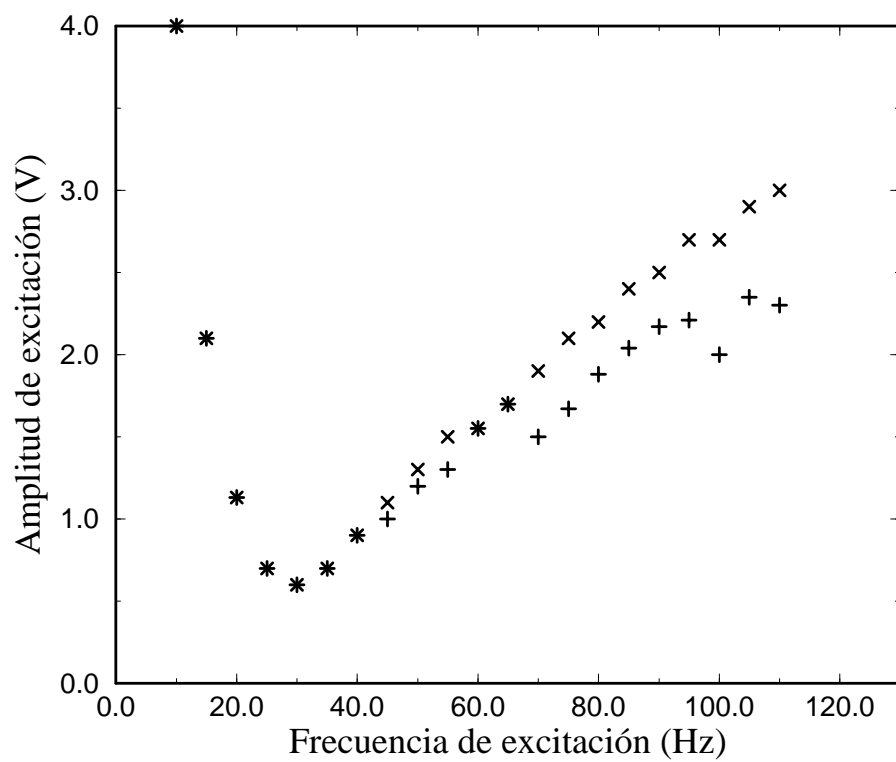


Figura 2.13: Umbrales de creación y aniquilación de gotas. x representa el umbral de creación al aumentar la amplitud de excitación y + al disminuirla.

En la (fig. 2.13) se observa que hay histéresis a partir de 65Hz siendo el umbral de desaparición de gotas inferior al umbral de creación de las mismas. El gradiente de presiones en la interfaz debido a las ondas interfaciales hace que aunque éstas aún no sean visibles las gotas sean estables por debajo de su umbral de creación de las mismas. Esto además constituye una comprobación de la existencia de ondas por debajo del *umbral de observación de la estructura*. Las gotas se crean en las extremidades del tubo, excepto en el régimen de turbulencia desarrollada, debido a los gradientes de deformación de la interfaz elevados que hay en esas zonas.

Las gotas, en general se mueven mucho más rápidamente que las estructuras (fig. 2.14) y se observa que lo hacen en línea recta, chocando principalmente de forma elástica con las paredes y otras gotas.

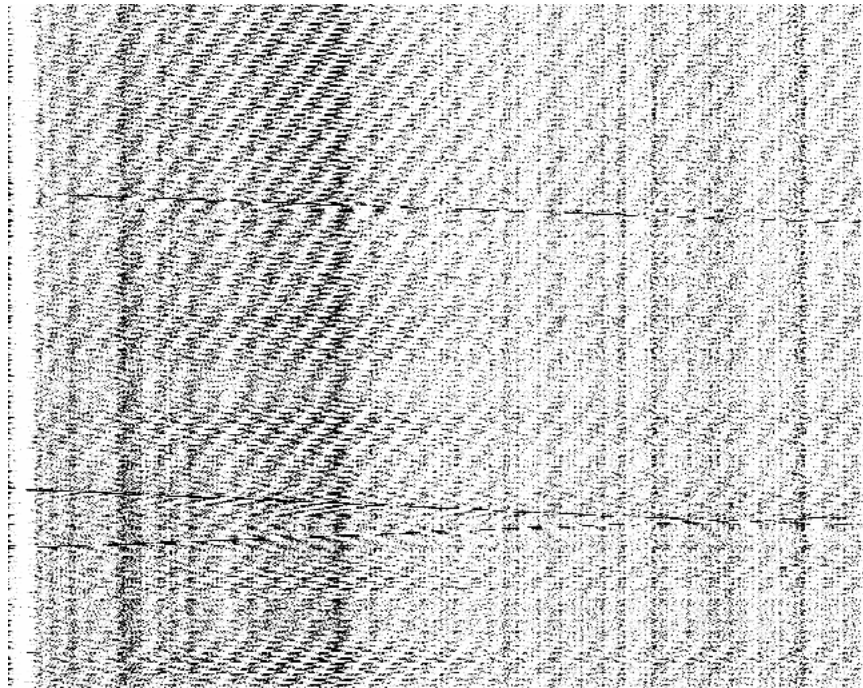


Figura 2.14: Propagación de las gotas (Frecuencia de excitación: 95Hz).

En la (fig. 2.14) se observa que la estructura espacio-temporal es prácticamente perfecta excepto por la presencia de las gotas, que se mueven hacia

ambos lados de forma rectilínea y a velocidades muy similares. Tanto las gotas que se mueven en el sentido de la estructura como en sentido contrario en estas condiciones tienen una velocidad de unos $2 \cdot 10^1 \text{ mm/s}$. La diferencia de las velocidades en un sentido y en el otro es del orden de la velocidad de la estructura 0.7 mm/s , todo esto indica que el movimiento de las gotas está ligado a la frecuencia principal de las ondas y no a la velocidad de la estructura que hace únicamente de sistema de referencia. La cantidad de gotas crece monótonamente con la amplitud de la excitación y su tamaño decrece de forma muy similar a la longitud de onda de las ondas superficiales.

Como ya hemos dicho las gotas chocan prácticamente de forma elástica (**fig. 2.15**). En esta figura se ven 6 imágenes consecutivas en el tiempo de un **choque entre gotas** del mismo tamaño.

El motivo de que el choque no sea perfectamente elástico es que en primer lugar no hay conservación del momento lineal localmente debido a la interacción con las paredes, es decir, que si el choque no se produce exactamente en una misma línea paralela al eje del tubo, en seguida las gotas están demasiado cerca de las paredes para notar interacción que enmascararía la conservación del momento lineal, y aún más, si éste se conservara, el choque no sería completamente elástico si se excitaran modos de vibración y/o rotación propios de las gotas debidos al choque, esto último pasa a menudo cuando las gotas son grandes, es decir a frecuencias de excitación bajas. Alguna vez el choque es completamente inelástico fundiéndose las dos gotas en una, o destruyéndose una de ellas. Más a menudo ocurre que después del choque las dos gotas viajan unidas en un estado ligado muy estable, este último caso no se ha observado en experimentos con gotas de agua y diferentes hidrocarburos en caída libre [36, 42]. El hecho de tener un estado ligado está relacionado con estar las gotas en una interfaz, éstas provocan una deformación de la interfaz debida a su propio peso donde queda confinada la fase gas a más alta presión. En el caso del estado ligado, la interfaz en la zona de choque de las dos gotas tiende a hacerse más plana cuanto más cerca están y el gas en la zona limitada por las dos gotas y la interfaz está a alta presión evitando que ellas se acerquen por debajo del orden de 100 \AA y se produzca coalescencia entre las dos gotas. El proceso está sustentado debido al movimiento vibratorio de las ondas que reponen gas a presión en cada periodo.

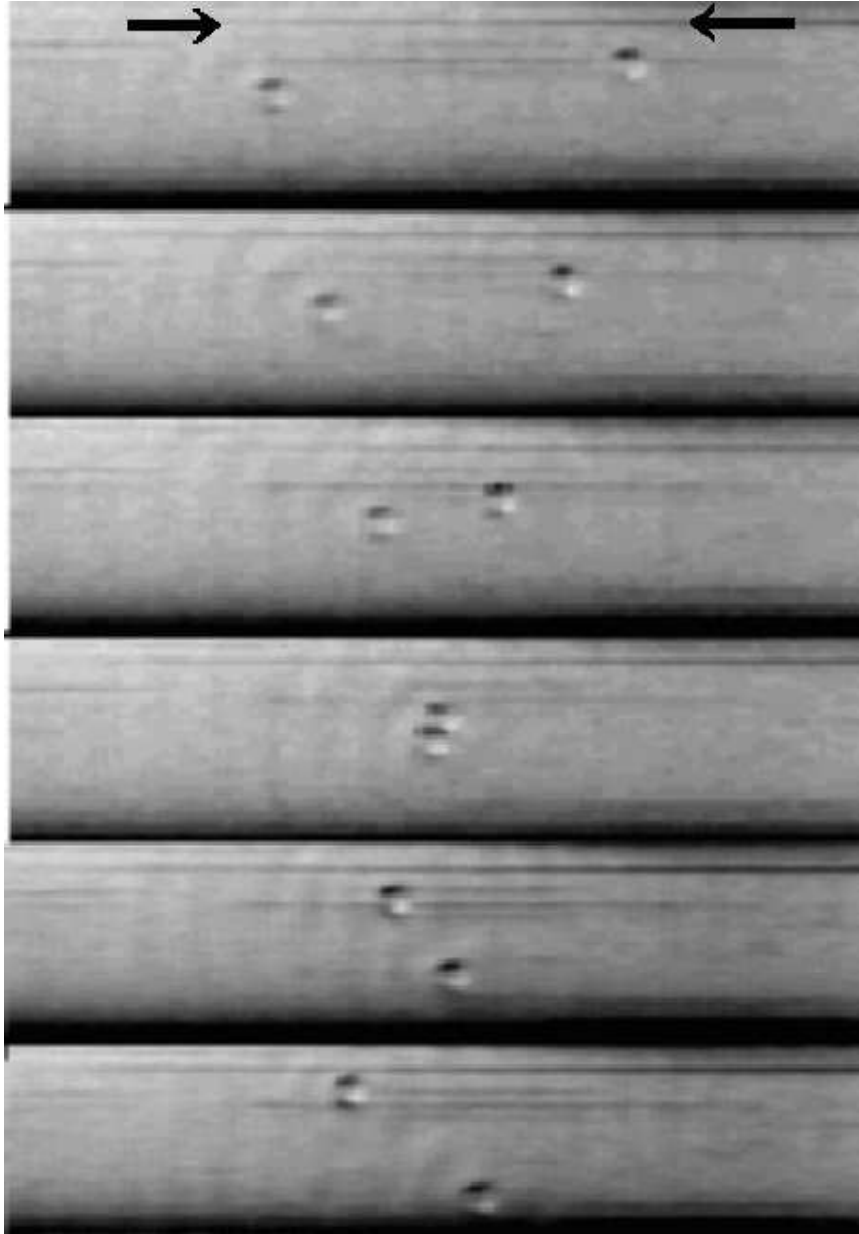


Figura 2.15: Choque casi elástico de gotas.

El módulo de las **velocidades de las gotas** en función de la frecuencia de excitación se ha representado en la (**fig. 2.16**). En esta figura se han representado los valores del módulo de la velocidad de las gotas que se mueven por el eje del tubo y en regímenes no fuertemente caóticos, cosa que hace que para frecuencias de excitación bajas no las hayamos medido.

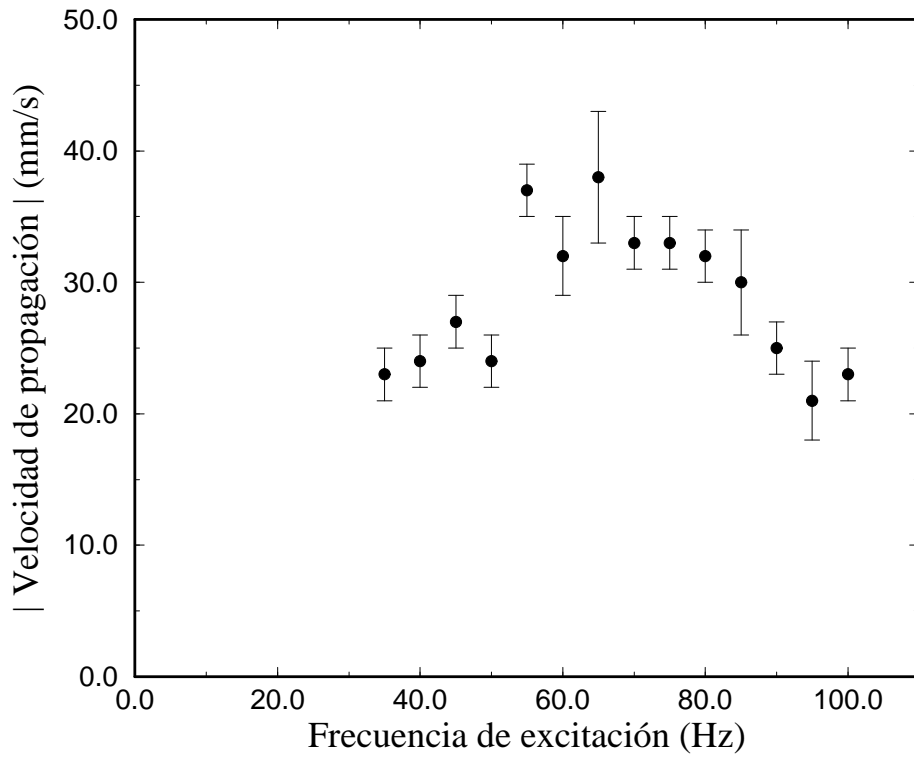


Figura 2.16: Velocidad de las gotas.

Además, en (**fig. 2.16**), las barras de error no son tales sino el intervalo de variación de la velocidad de distintas gotas en uno y otro sentido. Se observa claramente que hay un máximo alrededor de los 65Hz, justamente donde empezaba la histéresis en los umbrales de creación y desaparición de las gotas (**fig. 2.13**). Estos dos fenómenos están provocados debido a que

el tamaño de las gotas disminuye más lentamente que el de la longitud de onda, tal como se ha observado en los experimentos. En la frecuencia de excitación en que el diámetro de la gota es igual a la longitud de onda el gradiente de presiones que provoca el movimiento de la misma tiene una resultante global nula, y por tanto no se selecciona la velocidad de la gota y podemos tener un rango de velocidades grande. En los casos en que las gotas sean más pequeñas o más grandes que la longitud de onda habrá siempre una fuerza neta en una dirección dependiendo de las condiciones iniciales en el movimiento de la gota que provocará una aceleración de la gota suficientemente grande para superar la fuerza neta en sentido contrario y poner en movimiento la gota con un rango de velocidades posibles pequeño, y además con una velocidad más pequeña cuanto más distante esté el tamaño de la gota de la longitud de onda. La histéresis viene explicada en que si la gota es mayor que la longitud de onda entonces no se verá absorbida aunque se disminuya la amplitud de excitación. En cambio para gotas más pequeñas que la longitud de onda la deformación de la interfaz es crítica cuando la gota está en un mínimo de la deformación citada, ya que, debido a tener una curvatura menor, no habrá un volumen de gas entre la gota y la interfaz que pueda producir el gradiente de presiones que sustenta la gota.

A los argumentos citados en el párrafo anterior cabe añadir que cuando las gotas son de distinto tamaño que la longitud de onda y las condiciones iniciales de la gota son que no se mueve o se mueve muy poco y está en un sitio donde la fuerza neta es nula, entonces la fuerza neta en los instantes siguientes no es suficientemente grande como para que la aceleración en la gota supere las fuerzas netas en sentido contrario, y por tanto la gota se pondrá a oscilar como también se ha observado experimentalmente.

Finalmente cabe decir que los pares (o trios, etc) de gotas se mueven perpendicularmente al eje que une sus centros y en ocasiones a velocidades ligeramente menores que las gotas debido al aumento de grados de libertad de movimiento respecto de una gota aislada.

- A amplitudes de excitación ligeramente superiores a las del *umbral de observación de la estructura* se llega a un umbral donde aparecen nuevos modos como respuesta a inestabilidades secundarias o defectos de varios tipos en la estructura que evolucionan [37, 39, 40, 44]. Se ha medido este **umbral**

de aparición de defectos (fig. 2.17). Este umbral se ha tomado con una calibración distinta de la usada en los umbrales de observación de la estructura o de aparición de las gotas y esto va a hacer que no se puedan comparar directamente las dos figuras y se deba escalar una de ellas.

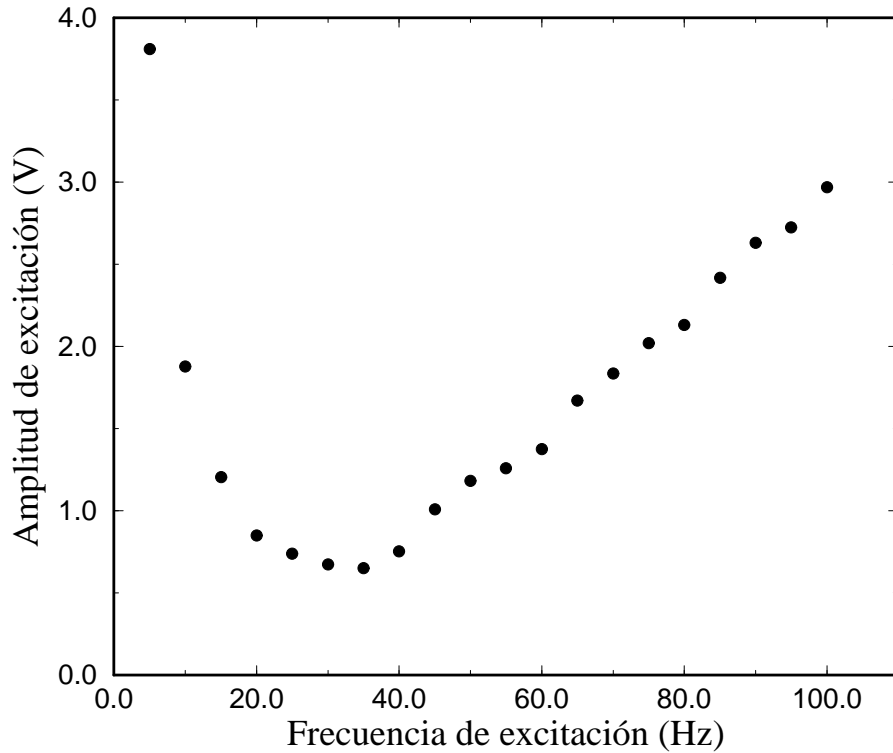


Figura 2.17: Umbral de aparición de defectos.

El proceso que sigue el sistema es el siguiente: Los modos perpendiculares a los principales (en la dirección de excitación) se hacen inestables por encima de una amplitud de excitación mostrándose en forma de ondulaciones de la estructura (fig. 2.18) con una longitud de onda el doble del ancho del tubo. Estas ondulaciones se hacen más y más fuertes apareciendo defectos que se propagan y destruyen a lo largo del tubo. La escala de tiempos involucrada

en la evolución de los defectos es mucho más corta que la del movimiento de la estructura e incluso que la de movimiento de las gotas.

El tipo de defectos más estable es un par de dislocaciones de signos opuestos (**fig. 2.19**) que evolucionan balanceándose en el tubo hasta que se aniquilan entre si. Este tipo de defectos, si se aumenta la amplitud de la excitación, se puede convertir en estructuras más complejas como líneas de defectos (**fig. 2.20**), estructuras poligonales y estructuras parecidas a varicosas como primer estadio de un régimen caótico.

También se observan estructuras con defectos distribuidos de forma sinusoidal en la estructura (**fig. 2.21**) como reflejo de una inestabilidad secundaria.

Todos los defectos de la estructura están producidos por variaciones espaciales de la fase y ocurren como resultado de inestabilidades secundarias que excitan modos perpendiculares a la estructura inicial y de la geometría que evita que aparezcan estructuras regulares con estos modos adicionales. Estos defectos evolucionan muy rápidamente. Los defectos y su evolución son un primer estado hacia estados caóticos y turbulentos. La escala de tiempos de evolución de los defectos queda explicada por la escala corta de tiempos de evolución de los modos.

- A partir de imágenes espacio-temporales y de sus transformadas discretas de Fourier se han medido las **velocidades de las estructuras en regímenes con amplitudes de excitación superiores a los del umbral de observación de la estructura**. Como ejemplo de los comportamientos observados se representan estas velocidades en función de la amplitud de excitación para unas pocas frecuencias en las (**figs. 2.22, 2.23, 2.24, 2.25, 2.26**)

En este conjunto de figuras se han marcado con un círculo relleno los picos de Fourier más importantes y con una circunferencia otros picos menos importantes en módulo. Se observa que cuando en el *umbral de observación de la estructura* la velocidad de la estructura es nula entonces a medida que se aumenta la amplitud de excitación la velocidad de la estructura aumenta monótonamente hasta llegar a estados caóticos. Evidentemente esto solamente ocurre por encima de un umbral en el que la velocidad de la estructura pasa de ser nula a tener un valor diferente de cero. Para frecuencias superiores al umbral que separa las estructuras con velocidad nula o no, en el *umbral de observación de la estructura*, la velocidad de la estruc-

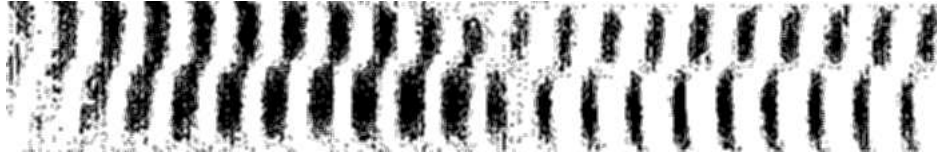


Figura 2.18: Estructura ondulada.

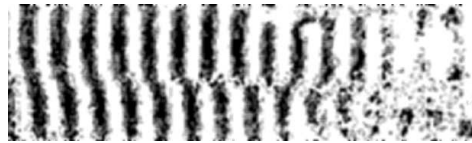


Figura 2.19: Par de dislocaciones (Frecuencia de excitación: 80Hz).

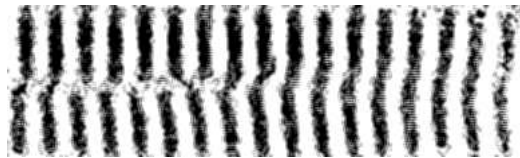


Figura 2.20: Línea de dislocaciones (Frecuencia de excitación: 90Hz).



Figura 2.21: Oscilaciones de defectos.

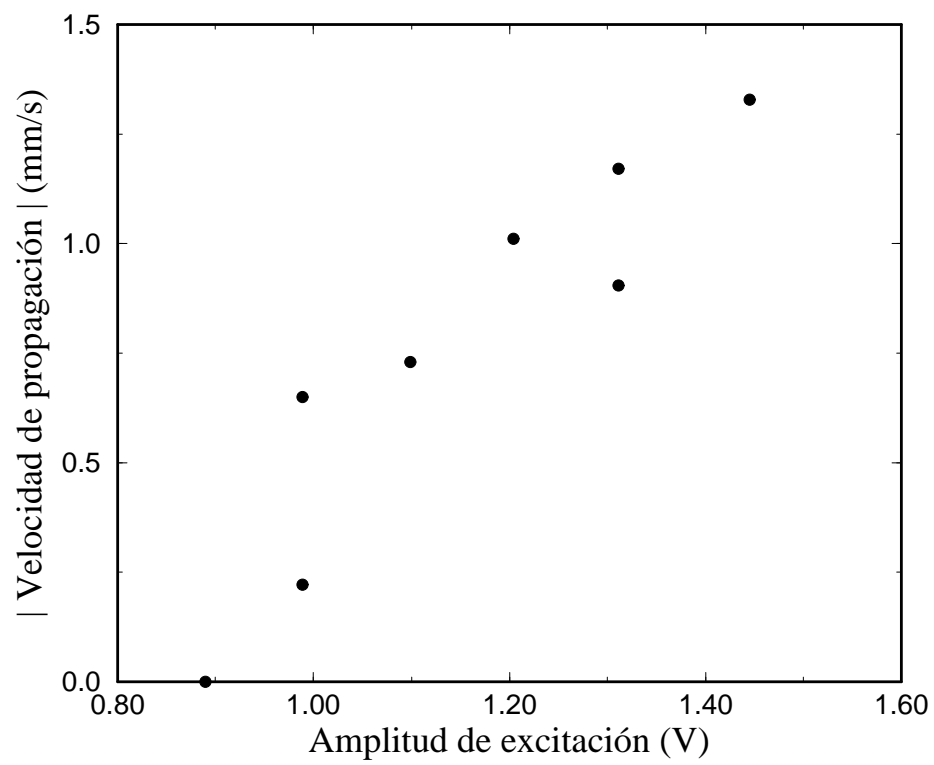


Figura 2.22: Velocidades de las estructuras (Frecuencia de excitación: 15Hz).

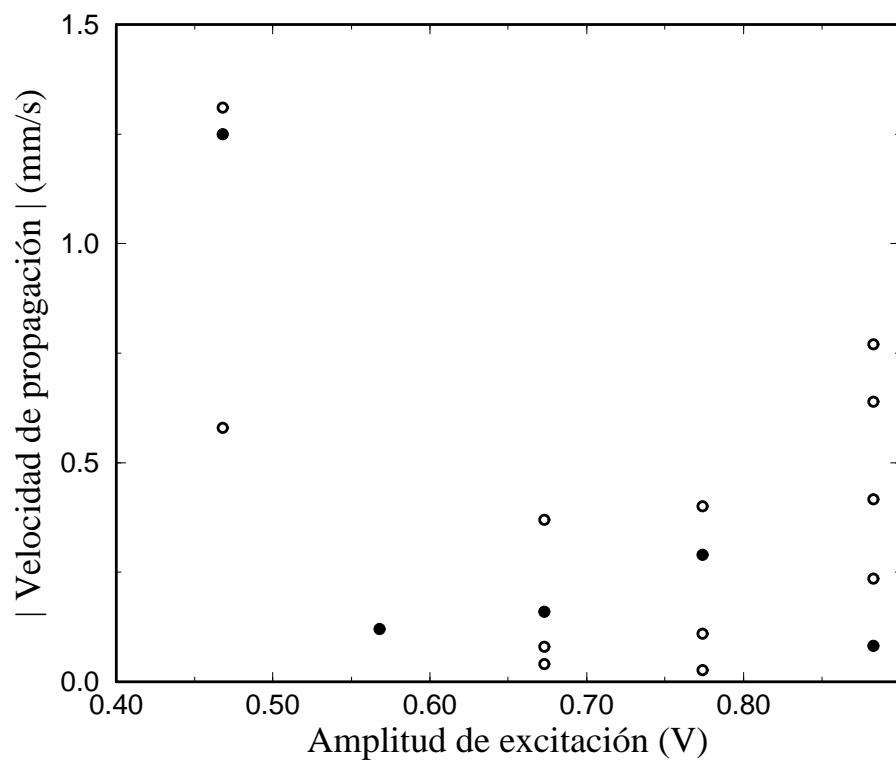


Figura 2.23: Velocidades de las estructuras (Frecuencia de excitación: 30Hz).

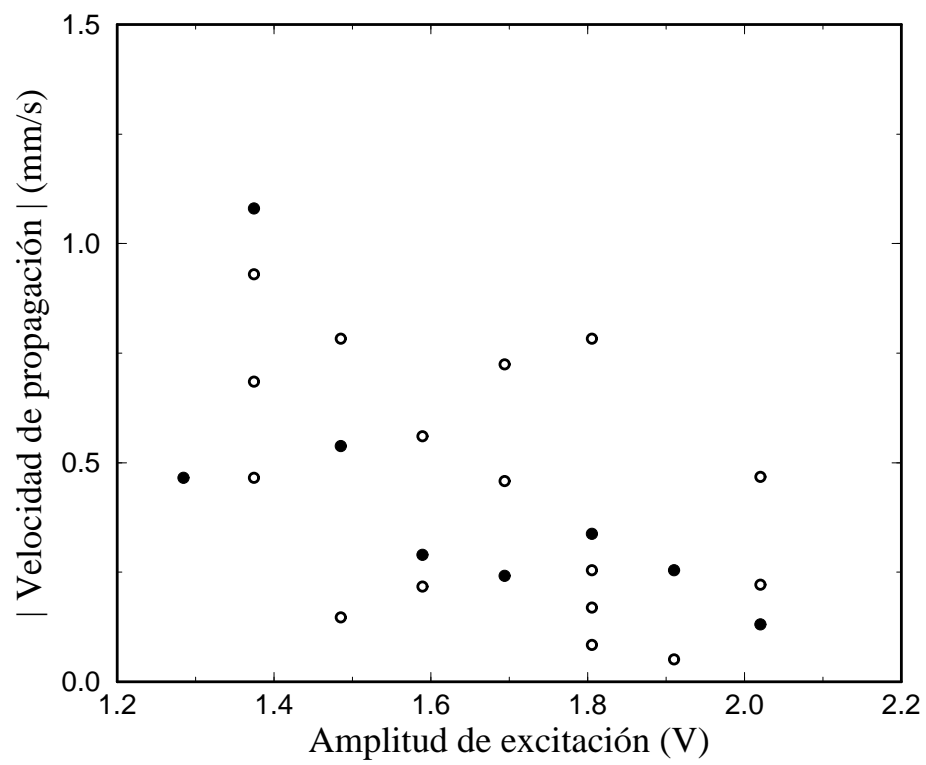


Figura 2.24: Velocidades de las estructuras (Frecuencia de excitación: 60Hz).

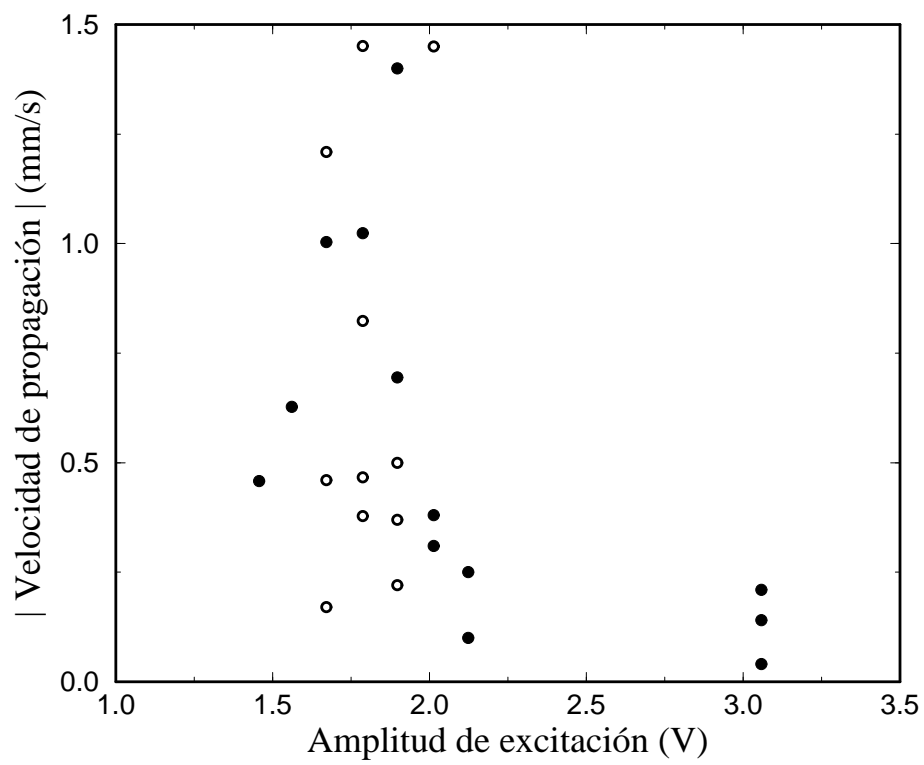


Figura 2.25: Velocidades de las estructuras (Frecuencia de excitación: 65Hz).

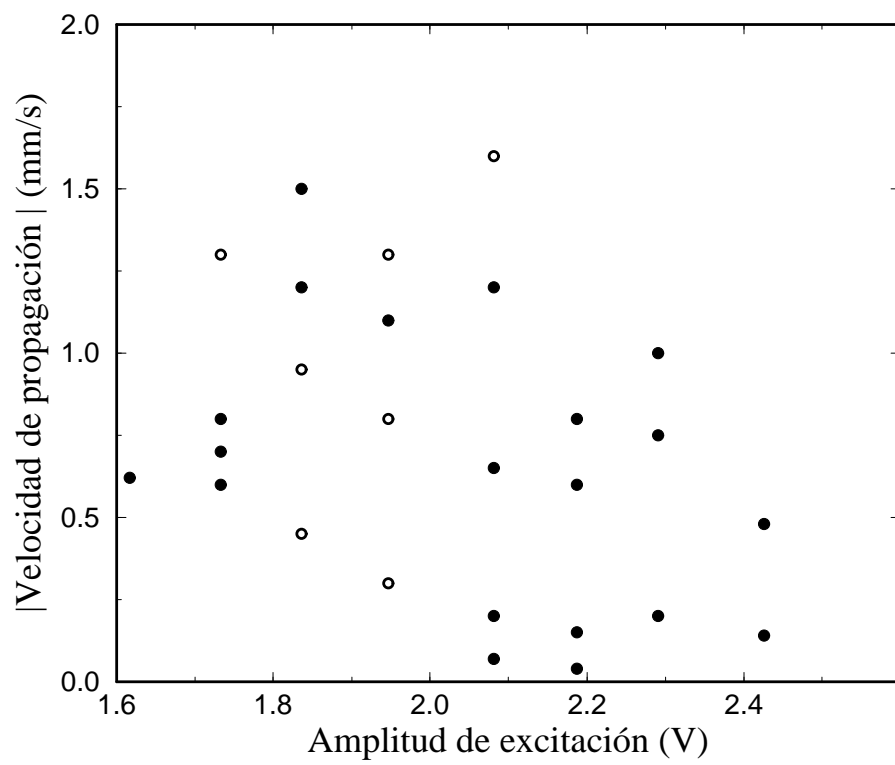


Figura 2.26: Velocidades de las estructuras (Frecuencia de excitación: 70Hz).

tura crece monótonamente hasta llegar a un máximo, decreciendo a partir de entonces hasta valores nulos debido a la presencia de defectos y/o gotas. Cabe matizar que este proceso se ve enmascarado por la aparición de otras velocidades que reflejan el comportamiento no lineal del sistema, típicamente velocidades armónicas o subarmónicas de la fundamental. Se ha observado que las velocidades del sistema varían muy suavemente cuando se alcanzan regímenes no lineales, en el sentido que, generalmente, la no linealidad hace aparecer nuevas velocidades y que todas las velocidades tienen una mayor dispersión y una distribución estocástica en el tiempo. Esto es reflejo directo de que el régimen no lineal se alcanza fundamentalmente mediante aparición de defectos y gotas, cuya distribución espacio-temporal es evidentemente estocástica. Es así como también un régimen ligeramente no lineal se convierte en caótico y más adelante en turbulento plenamente desarrollado.

El mecanismo de inestabilización que sigue la estructura es que tiene una velocidad más o menos bien definida, salvo cuando localmente la estructura se rompe o se deforma por causa de un defecto o de una gota. La estructura tiende a recuperar la forma inicial alcanzando de forma transitoria una velocidad mayor o menor a la que normalmente tendría hasta que el sistema se vuelve a estabilizar. Por consiguiente, el sistema presenta un número finito de velocidades que va alternando cada vez que aparece un defecto o una gota. Ésto hace que a medida que aparecen más defectos o más gotas el sistema se vuelve más caótico. Las velocidades fundamentales más elevadas se presentan para unas amplitudes de excitación determinadas (**fig. 2.27**) por el hecho de que justo después los defectos y/o gotas empiezan a ser importantes, en este sentido pueden compararse los dos comportamientos (**fig. 2.32**)

Estas velocidades fundamentales máximas se representan en la (**fig. 2.28**). Se observa en ésta que por encima del umbral en el que las velocidades de propagación de la estructura en el *umbral de observación de la estructura* pasan de un valor nulo a un valor distinto de cero, las velocidades máximas de propagación tienen una forma similar a las que se miden en el *umbral de observación de la estructura*. Sin embargo, por debajo de ese umbral, las velocidades máximas son no nulas y siendo monótonamente crecientes respecto la amplitud de excitación, son las más altas antes de llegar a regímenes

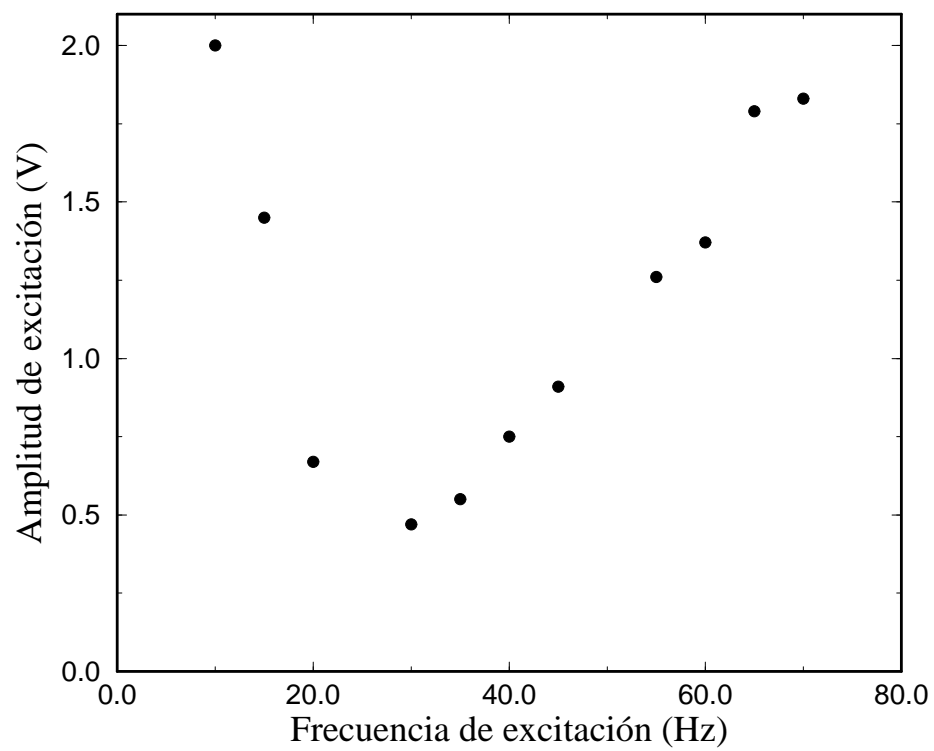


Figura 2.27: Umbral de velocidades de propagación máximas.

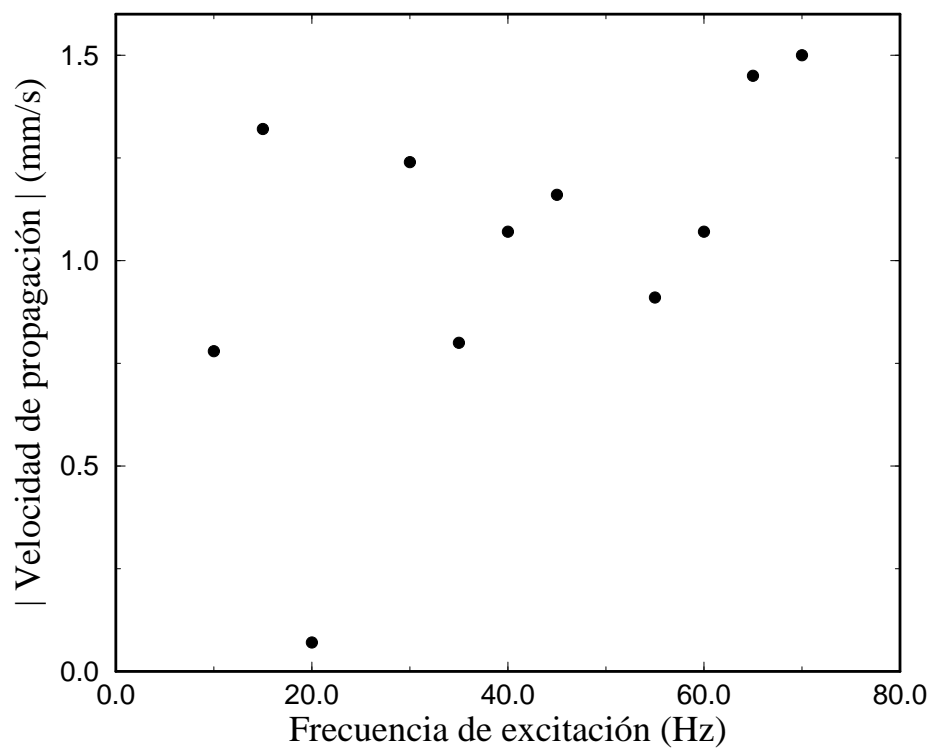


Figura 2.28: Velocidades de propagación máximas.

claramente turbulentos.

- Tal y como se ha indicado anteriormente el sistema se vuelve claramente caótico y a amplitudes de excitación aún más elevadas en turbulento plenamente desarrollado (**fig. 2.29**). En los **régimenes caóticos** se han observado rutas de transición al caos con desdoblamiento de periodos, con intermitencias debidas a la existencia de defectos y gotas, y además sistemas con comportamientos del tipo de Ruelle-Takens-Newhouse (**figs. 2.30, 2.31**). Cabe destacar que todas estas observaciones necesitan confirmaciones más precisas, como pueden ser la medida de exponentes de Liapunov, atractores extraños, etc, con unos sistemas experimentales más precisos y convenientes.

Cabe destacar, sin embargo, que son los defectos y las gotas quienes contribuyen en gran medida a la consecución de estados caóticos [39], y más adelante a los estados turbulentos completamente desarrollados que se han observado.

- Finalmente, se debe comentar la fenomenología que aparece a frecuencias de excitación por encima de las usadas normalmente, más concretamente en el rango de frecuencias 350-400Hz: en una frecuencia de este rango, que depende muy sensiblemente de la temperatura y otros parámetros externos, y a amplitudes de excitación anormalmente bajas, la interfaz empieza a oscilar con un número de onda adimensional del orden de *uno*. Si se aumenta la amplitud ligeramente, aparece en el centro del tubo una **estructura localizada** de la forma típica de un solitón no propagativo y de una anchura típica del orden de 5mm. Ésta es una estructura muy estable, pues se puede reducir la amplitud de excitación bastante por debajo del umbral de aparición de la estructura localizada sin que ésta desaparezca. Se observa que si se reduce la frecuencia de excitación la estructura localizada deja de ser estable sin desaparecer, ya que se desdobla en dos. Por consiguiente, tendremos a igual distancia del centro y de hecho bastante cercanos entre sí, a dos estructuras localizadas como la anterior. Si se reduce aún más la frecuencia, se vuelven a desdoblar las estructuras localizadas y así sucesivamente hasta que la densidad de estructuras localizadas en la zona central del tubo es suficientemente grande como para que las estructuras estén tan cerca como para que se unan. De esta forma se llega a una amplitud de excitación en la

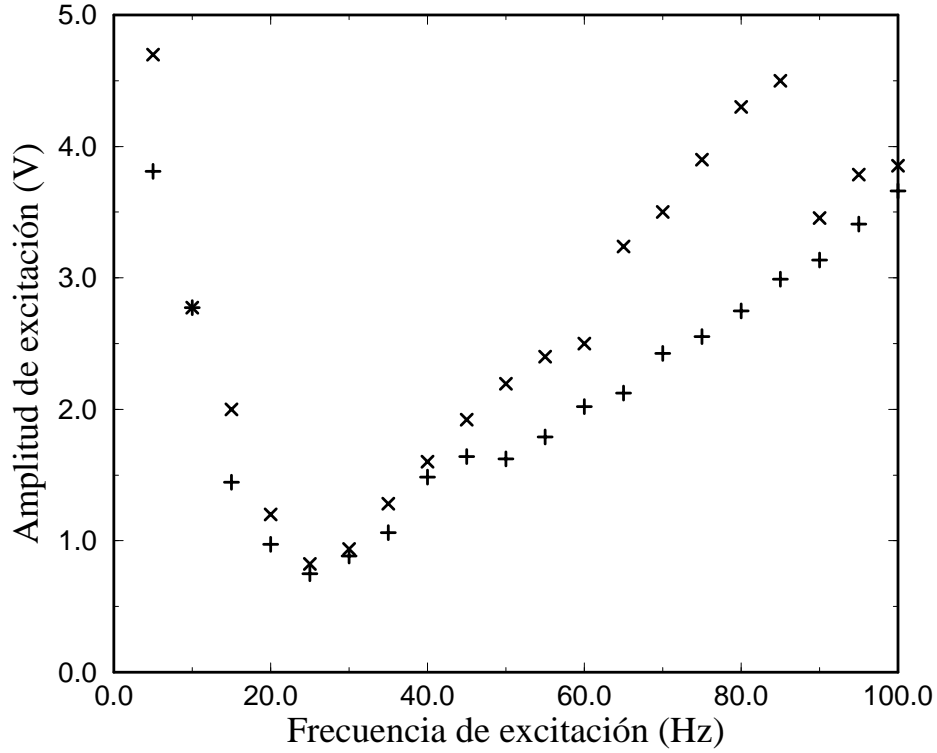


Figura 2.29: Umbrales de aparición de caos (+) y turbulencia desarrollada (x).

que hay una elevación central de líquido en el tubo y no hay líquido en los extremos. Esto último ocurre porque todas las estructuras se han acercado demasiado entre ellas, y éstas en sí mismas ya constituyen una elevación de líquido. Toda esta fenomenología proviene de una interacción resonante entre ondas interfaciales y ondas de densidad. A estas frecuencias el gas es compresible y precisamente la frecuencia natural de densidad del sistema está en este rango de frecuencias. Entonces la onda de densidad provoca un gradiente de presiones que provoca las oscilaciones antes comentadas. A partir de una cierta amplitud se crea una estructura localizada debido a la interacción antes citada. El comportamiento al disminuirse la frecuencia de

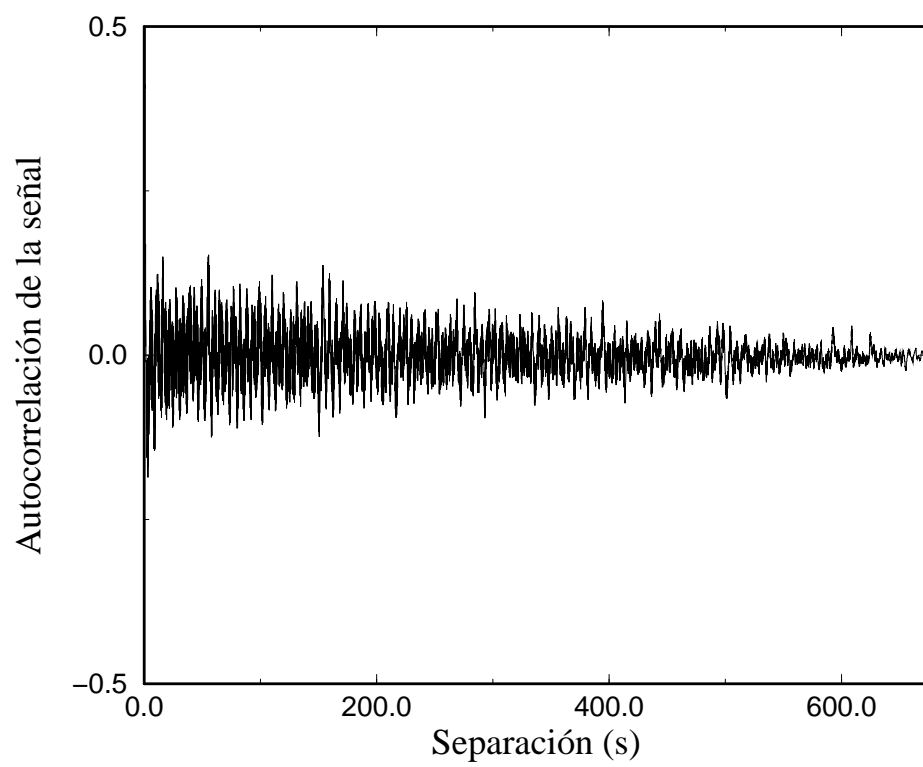


Figura 2.30: Función de autocorrelación temporal caótica (Frecuencia: 35Hz).

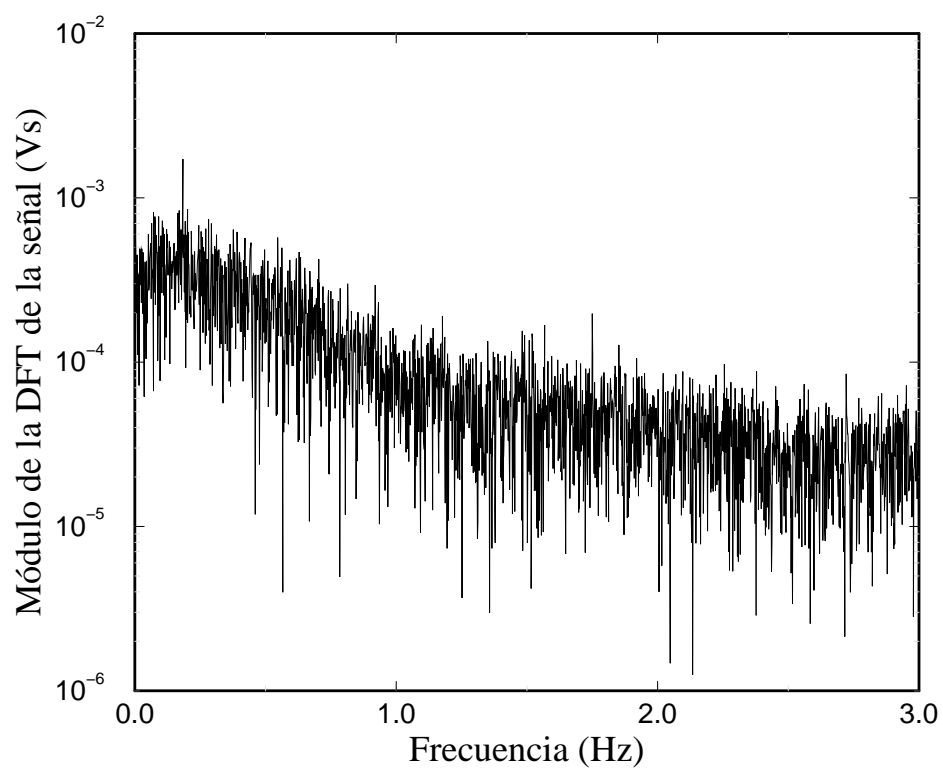


Figura 2.31: Espectro de Fourier temporal caótico (Frecuencia: 35Hz).

excitación es aún un hecho no explicado y harían falta más experimentos para determinar la causa de esta fenomenología.

Para finalizar con esta sección se muestra en la (**fig. 2.32**) como se solapan y se interpretan juntos los umbrales de amplitudes de excitación (aunque por simplicidad no se han puesto los fenómenos de histéresis) que han aparecido a lo largo de esta sección.

En la figura (**fig. 2.32**), la línea continua representa el *umbral de observación de la estructura* (con distinta calibración que en la (**fig. 2.3**)), la línea de guiones (- - -) hace referencia al umbral de aparición de defectos, la línea de puntos (· · ·) representa el umbral de aparición de gotas (con distinta calibración que en la (**fig. 2.13**)), la línea de guiones largos (- - - -) es la aparición de estados caóticos, la de puntos y guiones (- · - ·) es la de turbulencia plenamente desarrollada y por último los asteriscos (*) representan las amplitudes en las que las estructuras tienen velocidades máximas. Como se puede ver todos estos umbrales tienen un aspecto similar debido a que lo que se miden son amplitudes de excitación y que éstas son proporcionales al parámetro que controla los efectos no lineales en el sistema, estando relacionado este último directamente con la deformación de la interfaz.

Por último, falta decir que [1, 2] basan su estudio en un sistema con geometría de cilindro excitado de forma perpendicular a su eje principal y en una zona del espacio de fases donde la fenomenología importante se basa en la interacción de los dos modos fundamentales perpendiculares entre sí que se excitan en muy bajas frecuencias. Estos estudios se hacen siempre cerca de la frecuencia de resonancia natural y ni la fenomenología lineal o no lineal se corresponde, ni los modelos teóricos que explican los experimentos son aplicables en nuestro caso, siempre por ser experimentos muy similares pero en sistemas de comportamiento muy distinto.

2.3 Discusión.

En esta sección es importante que se consideren cuestiones tan importantes como la longitud de correlación, la longitud de amortiguamiento (o longitud viscosa) y el interés particular que tiene hacer los experimentos anteriores con este tipo de fluidos y con los montajes experimentales usados.

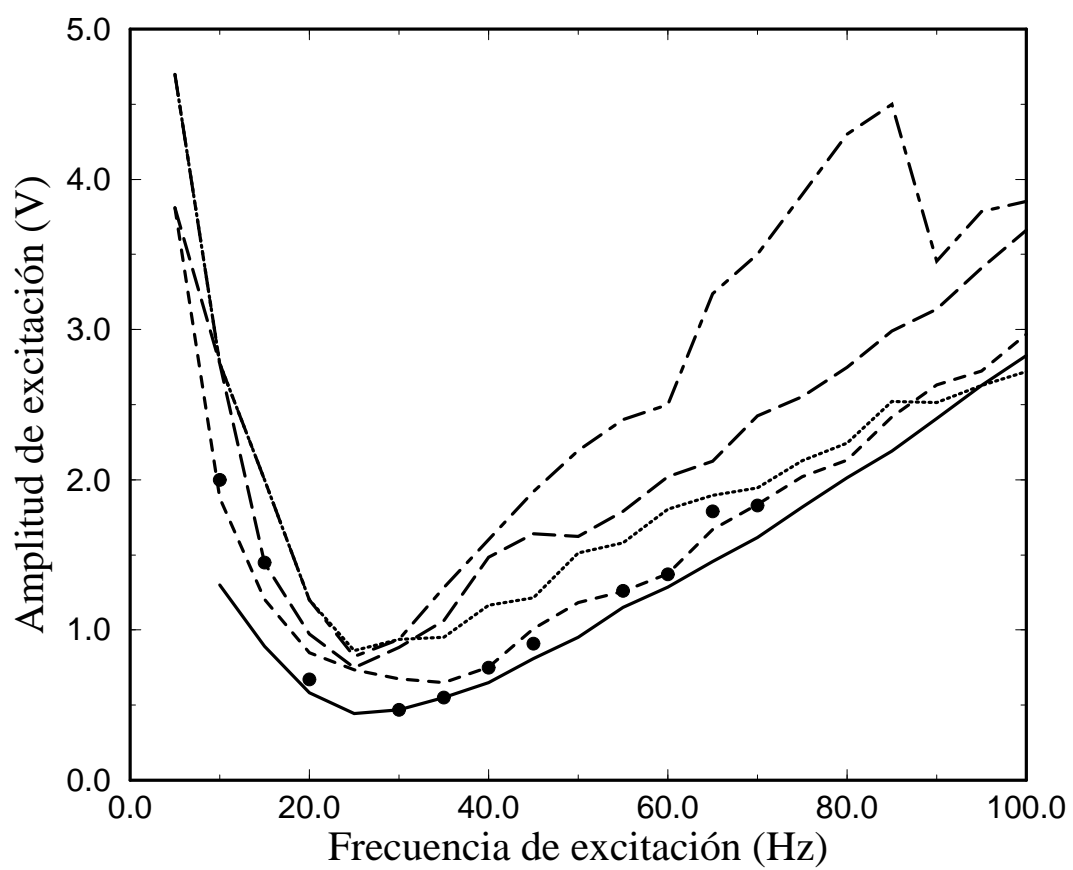


Figura 2.32: Distintos umbrales de amplitudes de excitación.

Con los parámetros del fluido considerado, la longitud viscosa para una frecuencia de excitación de $50Hz$ es de un 20% de la longitud total del tubo es decir de unos $6cm$. En todo el rango de frecuencias de excitación la longitud viscosa es de este orden de magnitud, excepto a frecuencias muy bajas, donde es claramente mayor, y en frecuencias muy altas, donde es ligeramente menor. Esto significa que los efectos viscosos amortiguan relativamente poco la onda en el sentido que una onda que se crea en una extremidad va a propagarse hasta el centro del tubo con poco amortiguamiento.

La longitud de correlación en un sistema es muy útil para ver, entre muchas otras cosas, cuán correlacionada está la estructura con las condiciones de contorno, es decir, cuánto depende la estructura de la geometría del sistema. La longitud de correlación está relacionada directamente con la dispersión y degeneración de valores propios del sistema, entendida esta última en el sentido más amplio de la palabra. De esta manera, supongamos que tenemos un sistema que se encuentra en un estado sin dispersión alguna pero que está degenerado. Consideremos primero el caso en que no esté degenerado, entonces el sistema tiene una longitud de correlación igual al tamaño del sistema. Si la degeneración del estado es finita o infinita numerable la longitud de correlación se mantiene en el tamaño del sistema, porque el sistema selecciona (no nos importa aquí con que mecanismo) uno de esos estados. Sin embargo, si la degeneración de los valores propios del sistema es infinita no numerable, hay estados infinitamente cercanos que hacen que la longitud de correlación sea una medida promedio en estos estados y sea menor que el tamaño del sistema.

La dispersión en el estado del sistema es un parámetro que nos da una mejor medida de la longitud de correlación del sistema. En este sentido, si estamos estudiando la importancia de las condiciones de contorno en la estructura, la variable importante que reflejaría el ajuste de la estructura en las condiciones de contorno es el número de onda. Por consiguiente, si el estado (o estados, si el valor propio correspondiente está degenerado) tiene más dispersión en modos de Fourier, entonces la longitud de correlación será menor. De hecho esto coincide con la definición típica de longitud de correlación.

En definitiva, la longitud de correlación es la magnitud dimensional correspondiente a la inversa de la dispersión adimensional, que representa el intervalo de números de onda adimensionales de los modos de Fourier que se excitan con mayor amplitud relativa.

Para tener un sistema en donde las condiciones de contorno sean poco importantes y se pueda considerar el sistema como infinito es necesario en primer lugar que en el sistema quepan muchas longitudes de onda y que por tanto las curvas de resonancia espacial sean casi continuas. Esto se refleja en el número de onda adimensional. En los regímenes considerados es del orden de varias centenas. Por tanto nuestras curvas de resonancia espacial serán casi continuas y las oscilaciones en la curva de *umbral de observación de la estructura* serán mínimas excepto en la zona donde el número de onda adimensional sea relativamente pequeño, es decir a frecuencias bajas.

En segundo lugar es necesario que la longitud de correlación sea pequeña, es decir, que la dispersión adimensional sea mucho mayor que *uno*. Sin embargo nuestras curvas de resonancia espacial indican que la dispersión adimensional es del orden de *uno*. Por tanto el sistema, en este sentido, no puede considerarse en absoluto infinito y la estructura dependerá mucho de las condiciones de contorno. En cualquier caso, el sistema es prácticamente unidimensional y por tanto los efectos de la geometría se reducen a únicamente la longitud del tubo. En consecuencia, no habrá transición al caos via inestabilidades transversales, sino más bien mediante la aparición de defectos y estructuras unidimensionales móviles.

A nosotros nos interesa tener un sistema con poca dependencia de la geometría. Esto implica que necesitaríamos un fluido muy viscoso para obtener unas curvas de resonancia espacial anchas y por tanto una dispersión adimensional grande, pero ésto provocaría que tomando un sistema grande en el sentido de tener números de onda adimensionales grandes (sin que aparezcan inestabilidades seculares, por tanto en un régimen de frecuencias aplicadas no muy alto) tendríamos ondas con longitud viscosa muy pequeña y que no llegarían al centro del tubo, impidiendo así la aparición de los fenómenos más interesantes de interacción que se han observado. Por tanto el fluido muy viscoso queda descartado y se tomará un fluido poco viscoso, para tener ondas interfaciales con una longitud viscosa relativamente grande y así poder tener ondas en todo el tubo, incluso siendo la excitación de las mismas localizada en las extremidades del sistema. Se tomará un recipiente casi unidimensional, esto reducirá los efectos de tener una dispersión adimensional pequeña al solo hecho de la dependencia de la estructura de la longitud del tubo. Si además el tubo es relativamente largo tendremos en un rango razonable de frecuencias, y considerando las otras características físicas del fluido usado, números de onda adimensionales mucho mayores que *uno*.

En resumen, el tener un fluido con las características físicas que tiene y un recipiente con la geometría que tiene permite observar todo el tipo de fenomenología que se muestra en esta tesis, a diferencia de sistemas similares excepto en alguna de sus características principales, a saber la geometría, el tamaño del tubo, la viscosidad cinemática, la tensión superficial reducida o los rangos de frecuencias o amplitudes de excitación aplicadas.

Para finalizar esta sección, cabe decir que en el futuro se deben perfeccionar los sistemas de medida en el sentido expuesto anteriormente (**sec. 2.1**) para medir con una mayor precisión la evolución del sistema en estados no lineales y de transición al caos. Además, es necesario hacer medidas cuantitativas del régimen de interacción entre ondas interfaciales y ondas de densidad. En lo que hace referencia a el control del sistema experimental, conviene conseguir un control mucho más preciso de la temperatura, que podría conseguirse, sin duda, por inmersión del tubo en agua procedente de un baño térmico. Además, debe hacerse también un control más preciso de la respuesta del altavoz en amplitudes altas como las correspondientes a los regímenes no lineales.

Capítulo 3

Interfaces excitadas perpendicularmente a la gravedad. Modelos teóricos.

3.1 Modelo lineal rotacional.

Partimos de las mismas consideraciones iniciales de la (**sec. 1.2**), salvo que en esta sección tomaremos que la fase vapor no tiene ningún efecto hidrodinámico (y por lo tanto en las ecuaciones quitaremos los subíndices que indican la fase) y que el flujo es bidimensional considerando que en la dirección del eje y no hay flujos hidrodinámicos.

Estas dos simplificaciones no van a comportar demasiados problemas, la primera porque la densidad de la fase gas es mucho menor que la fase líquida y las viscosidades son ambas muy pequeñas, la segunda porque sabemos que en el régimen lineal no se excitan modos perpendiculares a los principales.

Las ecuaciones del movimiento después de ponernos en el sistema de referencia en movimiento y hacer los cambios de variables adecuados (**sec. 1.2**) pasan a ser:

$$\nabla \cdot \vec{b} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} b_\eta \\ b_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ h^{-2} \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \Pi + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + h^{-2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \begin{pmatrix} b_\eta \\ b_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = 0 \quad \text{en} \quad \eta = 0, 1 \quad z = -1 \quad (3.1)$$

En $z=0$,

$$b_z = \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$\Pi = \frac{h^2}{Fr} \xi + \left(\eta - \frac{1}{2} \right) \dot{v}_0(t) - \frac{1}{Bo} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \eta^2} + \frac{2}{Re} \frac{\partial b_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial b_\eta}{\partial z} + h^2 \frac{\partial b_z}{\partial \eta} = 0$$

Ahora, debido a que el flujo es bidimensional se puede poner el campo de velocidades en función de la función de corriente Ψ y haciendo después un cambio de variable:

$$b_\eta = \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad b_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}$$

$$\Pi = hP \quad z = \frac{y}{h} \quad \eta = x$$

De ahora en adelante, cuando no haya posible confusión, los subíndices denotarán derivación parcial. Ahora las ecuaciones serán:

$$P_x = H[\Psi_y]$$

$$P_y = -H[\Psi_x]$$

$$\Psi_x|_{x=0,1; y=-h} = 0 \quad \Psi_y|_{x=0,1; y=-h} = 0$$

En $y=0$,

$$\Psi_x + \xi_t = 0 \quad (3.2)$$

$$\Psi_{xx} = \Psi_{yy}$$

$$P = \frac{h}{Fr}\xi + h^{-1}\left(x - \frac{1}{2}\right)\dot{v}_0(t) - \frac{1}{hBo}\xi_{xx} - \frac{2}{Re}\Psi_{xy}$$

Donde aquí el laplaciano se efectúa en el subespacio considerado de dos dimensiones y $H = \frac{1}{Re}\Delta - \frac{\partial}{\partial t}$. De la primera y la segunda de las **(ec. 3.2)** se deduce:

$$\Delta H[\Psi] = 0 \quad (3.3)$$

Nótese que la **(ec. 3.3)** no es totalmente separable, sólo lo es para la variable temporal respecto de las espaciales, esto complica enormemente el problema. Véase, sin embargo que la solución formal de la ecuación en el volumen no es compleja:

$$Ker[\Delta H] = Ker[\Delta] + Ker[H] \quad (3.4)$$

Y el segundo sumando del término de la derecha es un espacio vectorial equivalente al que se obtiene de solucionar la ecuación del calor. Sin embargo, sobre esta solución formal es difícil imponer las condiciones de contorno. Por tanto, primero separaremos las ecuaciones en variables temporales y espaciales. De la separación sigue:

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, t) &= \int_C e^{-\lambda t} E(\lambda, x, y) d\lambda \\ \xi(x, t) &= \int_C e^{-\lambda t} \Lambda(\lambda, x) d\lambda \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\dot{v}_0(t) = \int_C e^{-\lambda t} s(\lambda) d\lambda$$

Y entonces sustituyendo la expresión resultante de la cuarta de las **(ec. 3.2)** y derivando la última de las **(ec. 3.2)** respecto de x , sustituyendo seguidamente el valor para P_x que da la primera de las **(ec. 3.2)**, de forma que obtengamos unas ecuaciones en donde sólo aparezca E :

$$\Delta Q_\lambda[E] = 0$$

$$E_x|_{x=0,1; y=-h} = 0 \quad E_y|_{x=0,1; y=-h} = 0$$

En $y=0$,

$$E_{xx} = E_{yy} \quad (3.6)$$

$$\mathcal{Q}_\lambda[E_y] = \frac{h}{\lambda F_r} E_{xx} + h^{-1} s(\lambda) - \frac{1}{\lambda h B_o} E_{xxxx} - \frac{2}{Re} E_{xxy}$$

Donde $\mathcal{Q}_\lambda = \frac{1}{Re} \Delta + \lambda \mathcal{I}$. La primera ecuación de **(ec. 3.6)** tiene también una solución formal simple:

$$Ker[\Delta \mathcal{Q}_\lambda] = Ker[\Delta] + Ker[\mathcal{Q}_\lambda] \quad (3.7)$$

Por consiguiente, ahora hemos reducido la primera ecuación de **(ec. 3.6)** a la ecuación de Laplace y la de Helmholtz:

$$E = \phi + \varphi$$

$$\Delta[\phi] = 0 \quad (3.8)$$

$$\mathcal{Q}_\lambda[\varphi] = 0$$

Antes de continuar se debe suponer un problema completo de contorno. Es decir, supondremos que cada una de las dos funciones suplementarias ϕ y φ toman valores de funciones de una variable real. En cada contorno del sistema será una función distinta, que denotaremos con un subíndice (u , d , l , y r) que representará el contorno de arriba, debajo, izquierda y derecha respectivamente. Además las dos funciones suplementarias las podemos escindir en dos en virtud de la linealidad de las ecuaciones en el volumen. Las funciones en las que hemos escindido las suplementarias se denotarán por los subíndices 1 y 2. Las de subíndice 1 tienen condiciones de contorno homogéneas en la dirección x y las de subíndice 2 tienen condiciones de contorno homogéneas en la dirección y . En las direcciones perpendiculares se cumplen las condiciones de contorno que habíamos prefijado antes. Para solucionar estas ecuaciones ahora ya podemos usar el método de separación de variables. Por tanto tenemos las siguientes expresiones para ϕ :

$$\phi = \phi_1 + \phi_2$$

$$\phi_1 \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m e^{m\pi y} + b_m e^{-m\pi y} \right) \sin(\pi m x)$$

$$\phi_2 \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \left(c_m e^{\frac{m\pi x}{h}} + d_m e^{-\frac{m\pi x}{h}} \right) \sin\left(\frac{\pi m y}{h}\right)$$

Los coeficientes a_m , b_m , c_m y d_m serán los que permitan verificar las condiciones de contorno, es decir:

$$\phi_u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (a_m + b_m) \sin(\pi m x)$$

$$\phi_d(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m e^{-m\pi h} + b_m e^{m\pi h} \right) \sin(\pi m x)$$

$$\phi_l(y) = \sum_{m=1}^{\infty} (c_m + d_m) \sin\left(\frac{\pi m y}{h}\right)$$

$$\phi_r(y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(c_m e^{\frac{m\pi}{h}} + d_m e^{-\frac{m\pi}{h}} \right) \sin\left(\frac{\pi m y}{h}\right)$$

Las expresiones para φ se calculan análogamente y dan resultados muy similares, salvo que las funciones propias que se obtienen de la ecuación de Helmholtz son distintas.

Del conjunto de expresiones anteriores se pueden deducir los valores de los coeficientes nombrados anteriormente multiplicando las expresiones por un conjunto de funciones ortonormales a las primeras (existen, pues los operadores en cuestión son autoadjuntos) y resolviendo el sistema de ecuaciones algebraico resultante. En definitiva la expresión para E es:

$$E = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\pi m x) \cdot \int_0^1 d\tau \sin(\pi m \tau) \left\{ \frac{\sinh[\pi m(h+y)]}{\sinh(\pi m h)} \phi_u(\tau) \right. \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sinh \left[(h+y) \sqrt{\pi^2 m^2 - \lambda R e} \right]}{\sinh \left(h \sqrt{\pi^2 m^2 - \lambda R e} \right)} \varphi_u(\tau) - \frac{\sinh(\pi m y)}{\sinh(\pi m h)} \phi_d(\tau) \\
& - \frac{\sinh \left(y \sqrt{\pi^2 m^2 - \lambda R e} \right)}{\sinh \left(h \sqrt{\pi^2 m^2 - \lambda R e} \right)} \varphi_d(\tau) \Bigg\} - \frac{2}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \left(\frac{\pi m y}{h} \right) \cdot \\
& \cdot \int_0^{-h} d\tau \sin \left(\frac{\pi m \tau}{h} \right) \left\{ \frac{\sinh \left[\frac{(1-x)\pi m}{h} \right]}{\sinh \left(\frac{\pi m}{h} \right)} \phi_l(\tau) \right. \\
& + \frac{\sinh \left[(1-x) \sqrt{\frac{\pi^2 m^2}{h^2} - \lambda R e} \right]}{\sinh \left(\sqrt{\frac{\pi^2 m^2}{h^2} - \lambda R e} \right)} \varphi_l(\tau) + \frac{\sinh \left(\frac{\pi m x}{h} \right)}{\sinh \left(\frac{\pi m}{h} \right)} \phi_r(\tau) \\
& \left. + \frac{\sinh \left(x \sqrt{\frac{\pi^2 m^2}{h^2} - \lambda R e} \right)}{\sinh \left(\sqrt{\frac{\pi^2 m^2}{h^2} - \lambda R e} \right)} \varphi_r(\tau) \right\}
\end{aligned}$$

En consecuencia, sólo falta imponer sobre la E dada por la **(ec. 3.9)** las *ocho* condiciones de contorno de **(ec. 3.6)** para determinar absolutamente las *ocho* funciones arbitrarias en los contornos. Las condiciones de que las velocidades normales a las paredes se anulan hacen que $\phi_d + \varphi_d = 0$, $\phi_l + \varphi_l = 0$, $\phi_r + \varphi_r = 0$ con lo que la forma de E se simplifica bastante:

$$\begin{aligned}
E &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\pi m x) \cdot \int_0^1 d\tau \sin(\pi m \tau) \left\{ \frac{\sinh[\pi m(h+y)]}{\sinh(\pi m h)} \phi_u(\tau) \right. & (3.10) \\
& + \frac{\sinh \left[(h+y) \sqrt{\pi^2 m^2 - \lambda R e} \right]}{\sinh \left(h \sqrt{\pi^2 m^2 - \lambda R e} \right)} \varphi_u(\tau) \\
& + \phi_d(\tau) \left(\frac{\sinh \left[y \sqrt{\pi^2 m^2 - \lambda R e} \right]}{\sinh \left[h \sqrt{\pi^2 m^2 - \lambda R e} \right]} - \frac{\sinh[\pi m y]}{\sinh[\pi m h]} \right) \Bigg\} \\
& - \frac{2}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \left(\frac{\pi m y}{h} \right) \cdot \int_0^{-h} d\tau \sin \left(\frac{\pi m \tau}{h} \right) \cdot
\end{aligned}$$

$$\cdot \left\{ \phi_l(\tau) \left(\frac{\sinh \left[\frac{(1-x)\pi m}{h} \right]}{\sinh \left[\frac{\pi m}{h} \right]} - \frac{\sinh \left[(1-x)\sqrt{\frac{\pi^2 m^2}{h^2} - \lambda Re} \right]}{\sinh \left[\sqrt{\frac{\pi^2 m^2}{h^2} - \lambda Re} \right]} \right) \right. \\ \left. + \phi_r(\tau) \left(\frac{\sinh \left[\frac{\pi m x}{h} \right]}{\sinh \left[\frac{\pi m}{h} \right]} - \frac{\sinh \left[x\sqrt{\frac{\pi^2 m^2}{h^2} - \lambda Re} \right]}{\sinh \left[\sqrt{\frac{\pi^2 m^2}{h^2} - \lambda Re} \right]} \right) \right\}$$

De la condición que los esfuerzos tangenciales en la interfaz son nulos (tercera expresión de **(ec. 3.6)**) se deduce:

$$\phi_u(\tau) + \varphi_u(\tau) = -\frac{\lambda Re}{2} \int_0^\tau ds \int_0^s dx \varphi_u(x) \quad (3.11)$$

La cuarta expresión de **(ec. 3.2)** donde se ha introducido la segunda expresión de **(ec. 3.5)** es la que nos determina la deformación de la interfaz. Si a esta expresión le introducimos la **(ec. 3.11)** obtendremos una expresión integral pero compacta de la interfaz en el espacio de Fourier-Laplace:

$$\Lambda = -\frac{Re}{2} \int_0^x d\tau \varphi_u(\tau) \quad (3.12)$$

Y la expresión para la E pasa a ser:

$$E = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\pi m x) \cdot \int_0^1 d\tau \sin(\pi m \tau) \cdot \quad (3.13) \\ \cdot \left\{ -\frac{\lambda Re}{2} \frac{\sinh[\pi m(h+y)]}{\sinh(\pi m h)} \int_0^\tau ds \int_0^s dx \varphi_u(x) \right. \\ + \varphi_u(\tau) \left(\frac{\sinh \left[(h+y)\sqrt{\pi^2 m^2 - \lambda Re} \right]}{\sinh \left(h\sqrt{\pi^2 m^2 - \lambda Re} \right)} - \frac{\sinh[\pi m(h+y)]}{\sinh(\pi m h)} \right) \\ + \phi_d(\tau) \left(\frac{\sinh \left[y\sqrt{\pi^2 m^2 - \lambda Re} \right]}{\sinh \left[h\sqrt{\pi^2 m^2 - \lambda Re} \right]} - \frac{\sinh[\pi m y]}{\sinh[\pi m h]} \right) \Bigg\} \\ - \frac{2}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \left(\frac{\pi m y}{h} \right) \cdot \int_0^{-h} d\tau \sin \left(\frac{\pi m \tau}{h} \right) \cdot$$

$$\cdot \left\{ \phi_l(\tau) \left(\frac{\sinh \left[\frac{(1-x)\pi m}{h} \right]}{\sinh \left[\frac{\pi m}{h} \right]} - \frac{\sinh \left[(1-x)\sqrt{\frac{\pi^2 m^2}{h^2} - \lambda Re} \right]}{\sinh \left[\sqrt{\frac{\pi^2 m^2}{h^2} - \lambda Re} \right]} \right) \right. \\ \left. + \phi_r(\tau) \left(\frac{\sinh \left[\frac{\pi m x}{h} \right]}{\sinh \left[\frac{\pi m}{h} \right]} - \frac{\sinh \left[x\sqrt{\frac{\pi^2 m^2}{h^2} - \lambda Re} \right]}{\sinh \left[\sqrt{\frac{\pi^2 m^2}{h^2} - \lambda Re} \right]} \right) \right\}$$

Hasta aquí los resultados son exactos en el régimen lineal y falta imponer las *tres* condiciones de agarre a la pared y la condición dinámica perpendicular a la interfaz en la interfaz. Dado que la región en los extremos del tubo donde son importantes los efectos viscosos es muy pequeña y no nos va a influir en el volumen, dado también que el flujo que tenemos en los experimentos se puede considerar en todo el rango de frecuencias de excitación aplicadas como en aguas profundas tendremos que los efectos viscosos en la pared inferior son despreciables. Y finalmente debido a la aproximación de flujo bidimensional, si considerásemos la pared inferior, también deberíamos considerar las laterales. Entonces se pueden considerar despreciables los efectos viscosos en las paredes. Para poder imponer esta condición de deslizamiento en las paredes deberemos tener en cuenta que no basta con no imponer la de agarre, sino que debemos hacer que tres de las funciones arbitrarias que nos quedan las podamos poner en función de la única que nos quedará y que se determinará a partir de la condición dinámica en la interfaz que nos falta aplicar. Para imponer el deslizamiento debemos hacer que los esfuerzos viscosos en las paredes sean nulos, condiciones que toman la forma:

$$E_{xx} = 0 \quad \text{en} \quad x = 0, 1 \quad (3.14)$$

$$E_{yy} = 0 \quad \text{en} \quad y = -h$$

Con estas tres condiciones llegamos a una expresión reducida de E en la que la única función incógnita es φ_u :

$$E = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\pi m x) \cdot \int_0^1 d\tau \sin(\pi m \tau) \cdot \\ \cdot \left\{ -\frac{\lambda Re \sinh[\pi m(h+y)]}{2 \sinh(\pi m h)} \int_0^\tau ds \int_0^s dx \varphi_u(x) \right. \quad (3.15)$$

$$+ \varphi_u(\tau) \left(\frac{\sinh \left[(h+y) \sqrt{\pi^2 m^2 - \lambda Re} \right]}{\sinh \left(h \sqrt{\pi^2 m^2 - \lambda Re} \right)} - \frac{\sinh[\pi m(h+y)]}{\sinh(\pi m h)} \right) \Bigg\}$$

Nótese que los efectos de caja finita estan introducidos ya en la **(ec. 3.15)**, pues hemos aplicado la condición de que la velocidad normal a la pared se anule. También cabe destacar el carácter no local de la **(ec. 3.15)**, que es debido a la creación de vorticidad en la interfaz.

Por último, se introduce la expresión para E en la última de las expresiones de la **(ec. 3.6)**. El procedimiento a seguir es: se deriva la expresión de E respecto de las variables que aparecen en la última de las expresiones de **(ec. 3.6)**, después se toma el valor $y = 0$ teniendo en cuenta la **(ec. 3.12)**. De estas operaciones se obtiene la relación de dispersión:

$$\begin{aligned} 0 = G(m, \lambda) \quad \equiv \quad & \frac{h\pi m}{2} \left\{ \lambda^2 \coth[\pi m h] + \frac{h\pi m}{Fr} + \frac{\pi^3 m^3}{hBo} \right. \\ & + \frac{4\pi^2 m^2 \sqrt{\pi^2 m^2 - \lambda Re}}{Re^2} \left(\sqrt{\pi^2 m^2 - \lambda Re} \cdot \right. \\ & \left. \left. \cdot \coth[\pi m h] - \pi m \coth \left[h \sqrt{\pi^2 m^2 - \lambda Re} \right] \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

de donde obtenemos la solución final para la interfaz:

$$\xi = 2 \sum_{\substack{m=1 \\ m \notin (2)}}^{\infty} \cos(\pi m x) \int_{\mathbf{C}} e^{-\lambda t} \frac{s(\lambda)}{G(m, \lambda)} d\lambda + \xi_{hom} \quad (3.17)$$

Obsérvese que si en la **(ec. 3.16)** se hace el límite de profundidades infinitas y se supone que el número de onda no está discretizado se reproduce el resultado obtenido por Lamb [46], que a segundo orden de aproximación da el coeficiente de disipación correcto para las ondas interfaciales calculado en [46, 50].

El término explícito de **(ec. 3.17)** es la solución particular ξ_p para la interfaz debida al movimiento del tubo y ξ_{hom} es la solución homogénea, que se debe incluir, ya que el excitar un sistema moviéndolo no implica evitar ondas interfaciales debidas a otras fuentes o a las condiciones iniciales. La solución homogénea

corresponde a valores del numero de onda que anulen la relación de dispersión (ec. 3.16):

$$\xi_{hom} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\pi m x) \int_{\{w \in \mathbf{C} / G(m, w) = 0\}} e^{-\lambda t} q(m, \lambda) d\lambda \quad (3.18)$$

donde $q(m, \lambda)$ se determinará por las condiciones iniciales.

Para el caso más simple de una excitación puramente sinusoidal $\dot{v}_0(t) = 2\pi \cos(2\pi t)$, o en el espacio de Fourier-Laplace $s(\lambda) = \pi[\delta(\lambda + 2\pi i) + \delta(\lambda - 2\pi i)]$, la deformación de la interfaz será:

$$\xi_p = 2\pi \sum_{\substack{m=1 \\ m \notin (2)}}^{\infty} \cos(\pi m x) \left[\frac{e^{2\pi i t}}{G(m, -2\pi i)} + \frac{e^{-2\pi i t}}{G(m, 2\pi i)} \right] \quad (3.19)$$

3.2 Resultados y discusión.

Se pueden reproducir todos los comportamientos del régimen lineal, entendidos éstos no como los que se presentan en el *umbral de observación de la estructura*, ya que en este umbral es posible que haya interacciones no lineales (por ejemplo en la zona de histéresis) que provoquen una fenomenología a otras escalas (por ejemplo, el hecho de que los patrones sean o no propagativos). En este sentido se reproducen la relación de dispersión forzada, el *umbral de observación de la estructura* y la curva de los tiempos de aparición de la estructura. Además se pueden calcular las curvas de resonancia espacial, observando que el comportamiento es el esperado.

Por simulación numérica de la (ec. 3.19) de forma directa para $t=0$ se obtiene la deformación de la interfaz en la zona central del tubo en el régimen lineal (figs. 3.1, 3.2, 3.3). Se observa que tienen forma periódica y que tienen unos pocos modos de Fourier predominantes. En concordancia con lo que ya se había discutido en la (sec. 1.3) cuando se aumenta la frecuencia aplicada la distancia relativa entre los modos que pertenecen al entorno del predominante disminuye y por tanto se observará una combinación de más modos de Fourier que en frecuencias más bajas. En este sentido también la viscosidad hace que

cuanto más alta sea la frecuencia, mayor será la anchura de la curva de resonancia espacial y por tanto habrá más modos con amplitud predominante..

Un primer cálculo a hacer es el de las curvas de resonancia espacial (**fig. 3.4**). El cálculo únicamente consiste en hacer el módulo de cada modo que aparece en la (**ec. 3.19**). Se observa que las curvas empiezan decreciendo frente al número de onda hasta un mínimo, entonces crece bruscamente hasta el valor del número de onda predominante, volviendo a decrecer bruscamente tendiendo a cero.

Esta curva, como esperábamos, tiene un factor de calidad muy elevado ya que la resonancia es muy estrecha y alta. Para todas las frecuencias de excitación las curvas de resonancia espacial presentan el mismo comportamiento. De hecho en la zona de números de onda mucho mas pequeños que el predominante las distintas curvas de resonancia espacial se solapan, y si bien para números de onda mayores que el predominante no se solapan, todas tienen el mismo tipo de decaimiento. Sin embargo, en la altura de los picos de resonancia hay oscilaciones según se varia la frecuencia de excitación debido a que las curvas de resonancia espacial estan discretizadas por las condiciones de contorno. Nótese, sin embargo que las curvas son casi continuas y que en las curvas de resonancia espacial la discretización sólo será apreciable para frecuencias de excitación muy bajas debido a que entonces los números de onda predominantes son más pequeños.

Para calcular el número de onda predominante debemos calcular para cada frecuencia los máximos de la curva de resonancia espacial asociada, pues éstos nos darán para cada frecuencia el número de onda que hace mínimo $G(m, -2\pi\iota) \cdot G(m, 2\pi\iota)$, es decir, de esta forma habremos calculado la relación de dispersión forzada (**fig. 3.5**).

En la (**fig. 3.5**) los círculos representan los resultados experimentales y la linea de guiones representa el calculo rotacional expuesto anteriormente. El modelo irrotacional de dos fluidos (no se representa en la figura) ajusta mejor que el rotacional de un solo fluido. Sin embargo, el modelo rotacional de un fluido afectado por una constante multiplicativa de corrección calculada de la relación de dispersión irrotacional de dos fluidos ajusta mejor que el cálculo irrotacional, aún teniendo en cuenta que la constante de corrección no es tal constante y tiene un comportamiento más complejo por debajo de una frecuencia de excitación de 25Hz, ya que se ha calculado en la aproximación capilar. Como se puede ver, incluso así el ajuste es bueno en la zona gravitatoria.

También se puede calcular el *umbral de observación de la estructura*. Recorde-

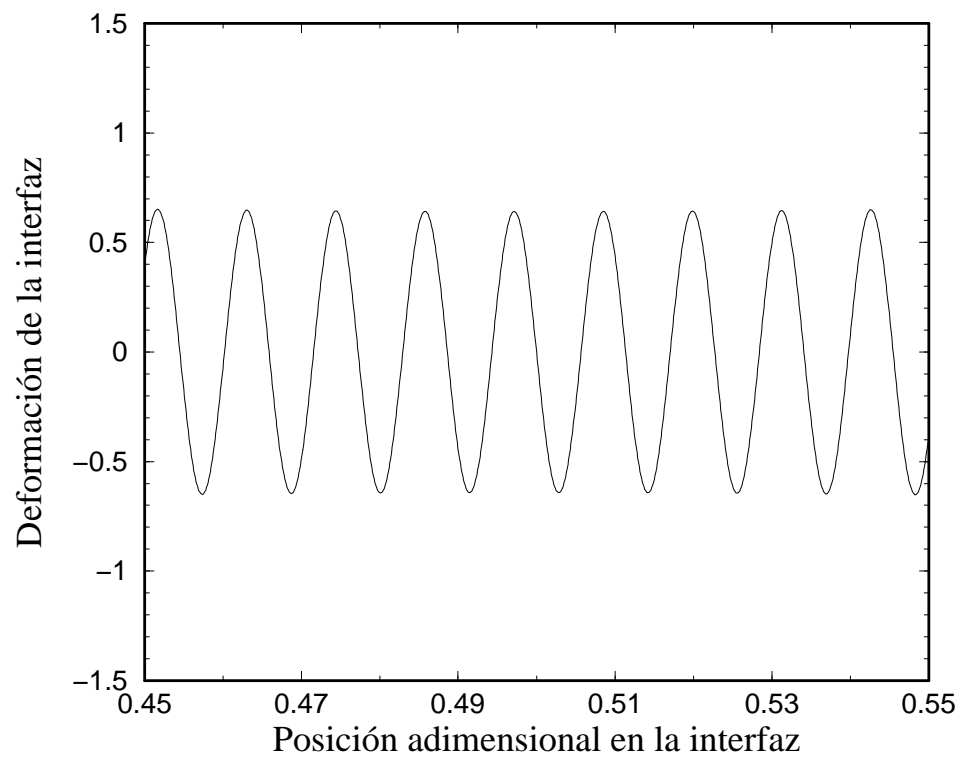


Figura 3.1: Deformación de la interfaz adimensional (Frecuencia de excitación: 25Hz).

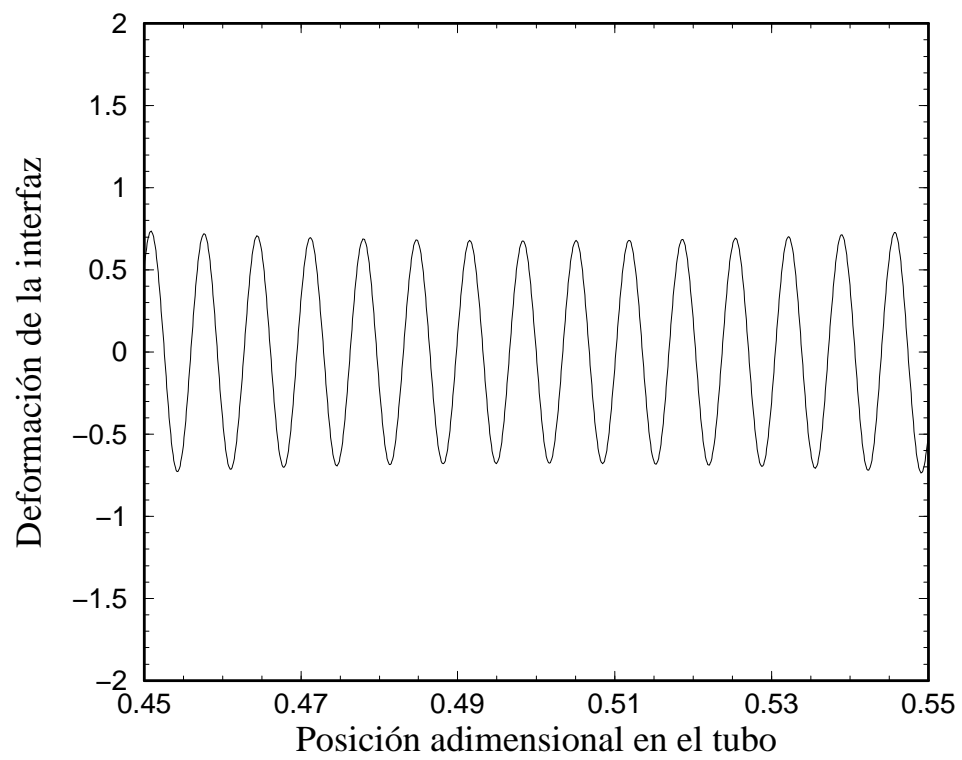


Figura 3.2: Deformación de la interfaz adimensional (Frecuencia de excitación: 45Hz).

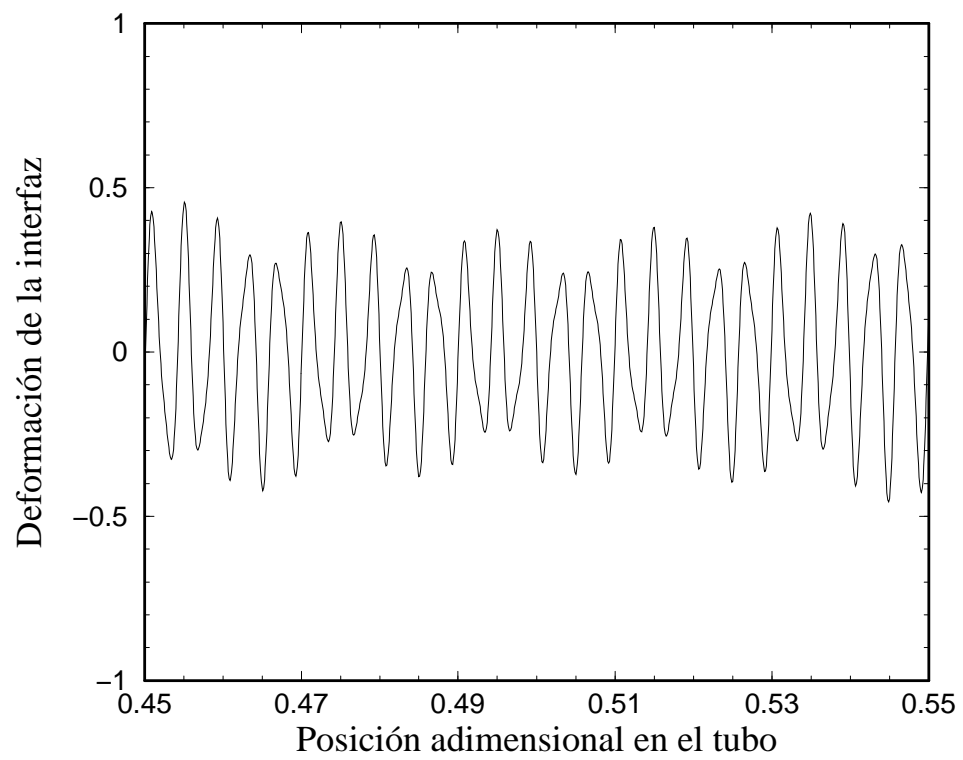


Figura 3.3: Deformación de la interfaz adimensional (Frecuencia de excitación: 90Hz).

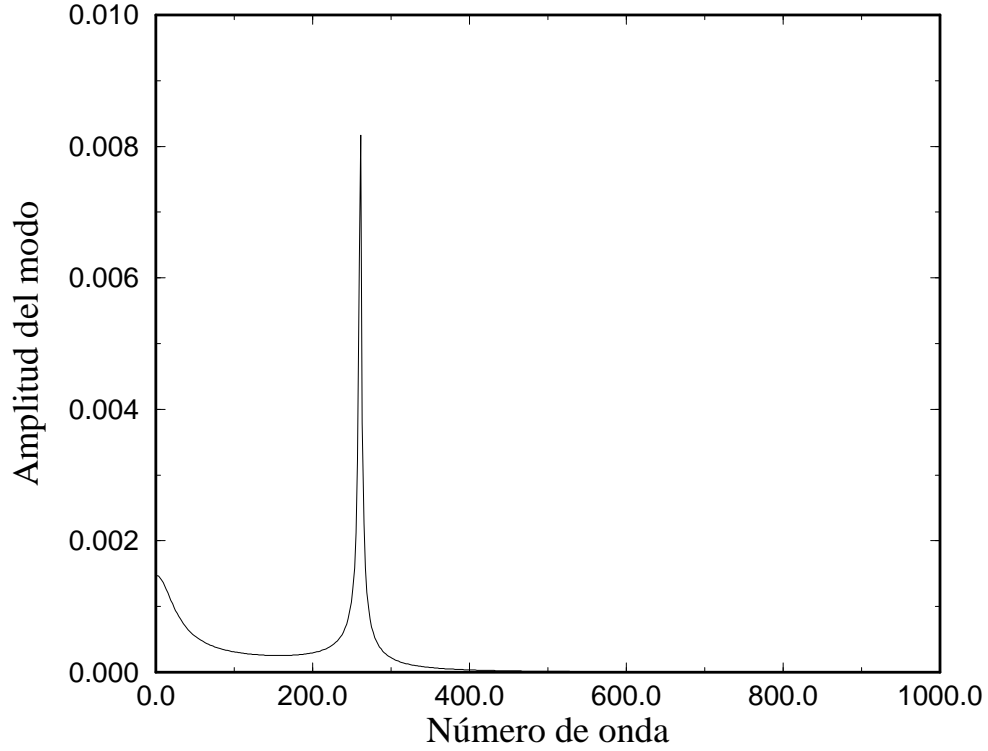


Figura 3.4: Curva de resonancia espacial (Frecuencia de excitación: 45Hz).

mos que éste es para cada frecuencia la amplitud de excitación necesaria para que la deformación de la interfaz alcance un nivel determinado. Ésto último, puesto en forma de ecuación es:

$$\xi_{umbral}^+ = H \epsilon \xi$$

Esta ecuación considera la igualdad entre el umbral de medida (constante para un sistema de medida), que es un parámetro dimensional y el valor que debe tomar la deformación de la interfaz en ese punto, teniendo en cuenta la adimensionalización que se hace de la deformación de la interfaz (**sec. 1.2**). Teniendo en cuenta que de los parámetros involucrados los únicos que no son

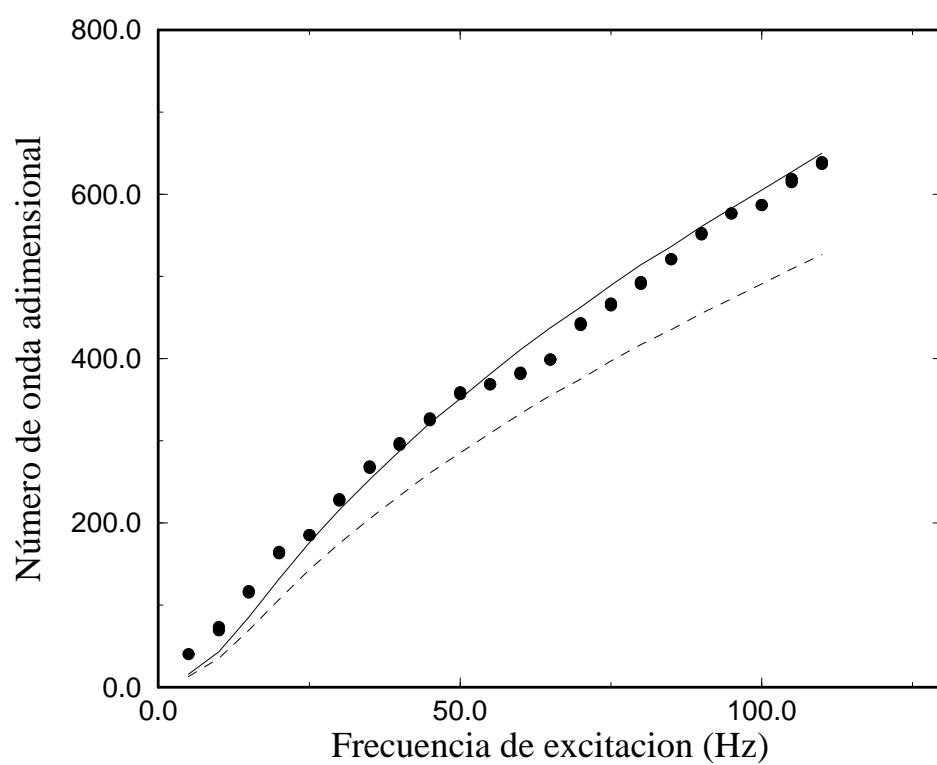


Figura 3.5: Relación de dispersión forzada. Los círculos representan resultados experimentales, la línea de guiones el resultado del modelo rotacional y la línea sólida el modelo rotacional considerando una corrección debida al hecho de tener dos fluidos.

constantes son Δx_0 y ξ y que $\Delta x_0 \propto V$ se deduce que:

$$V \propto \frac{1}{\xi}$$

es decir que el voltaje aplicado (amplitud de excitación) es proporcional a la inversa de la deformación adimensional de la interfaz, que es lo que podemos calcular con los modelos teóricos. En primer lugar debe calcularse la deformación de la interfaz. Para hacer ésto se calcula la amplitud total (considerando un número suficiente de modos) en los puntos correspondientes a la zona central del tubo, y se toma la amplitud mayor para calcular la inversa, dando lugar a una curva proporcional a la de *umbral de observación de la estructura* (**fig. 3.6**).

La curva de *umbral de observación de la estructura* empalma cualitativamente al escalarla pues la relación entre el resultado teórico y el experimental es de proporcionalidad. En la (**fig. 3.6**) ya se ha escalado la variable. Se observa que en ésta hay un desplazamiento del mínimo que, como ya se ha dicho, es debido a los argumentos expuestos en capítulos anteriores y a la interacción destructiva que hay en la región gravitatoria entre modos predominantes de frecuencias muy cercanas.

También se pueden calcular los tiempos de aparición de la estructura (**fig. 3.7**). En este caso es suficiente calcularlo con el modelo irrotacional (**sec. 1.2**) sobre todo teniendo en cuenta la dispersión de datos experimentales. Se hace un ajuste de los tiempos, teniendo en cuenta que hay una contribución de los tiempos viscosos y otra del tiempo que tarda la onda a viajar al centro del tubo, como se ha comentado en el (**cap. 1**).

En esta figura también ajustan los modelos lineales (línea sólida) con el experimento (círculos), por tanto ya vemos que el acuerdo de la teoría con el experimento en el régimen lineal es completo.

Sin embargo, hay algunos puntos importantes que comentar. El modelo teórico, aparte de reproducir resultados experimentales debe ser consistente. Así pues la (**ec. 3.17**) debe ser tal que no debe contener ninguna singularidad, en el sentido que para cualquier función excitadora suave y acotada $\dot{v}_0(t)$ la integral y la suma de la expresión (**ec. 3.17**) deben converger. En concreto la (**ec. 3.19**) como expresión de la deformación de la interfaz resultante de una fuerza excitadora sinusoidal debe tener un valor finito, cosa que queda comprobada por las figuras de curvas de resonancia espacial. Pero aún más, $G(m, \lambda)$ debe ser distinta de cero para cualquier $\lambda \in \mathfrak{F}$, es decir que la viscosidad tiene que hacer

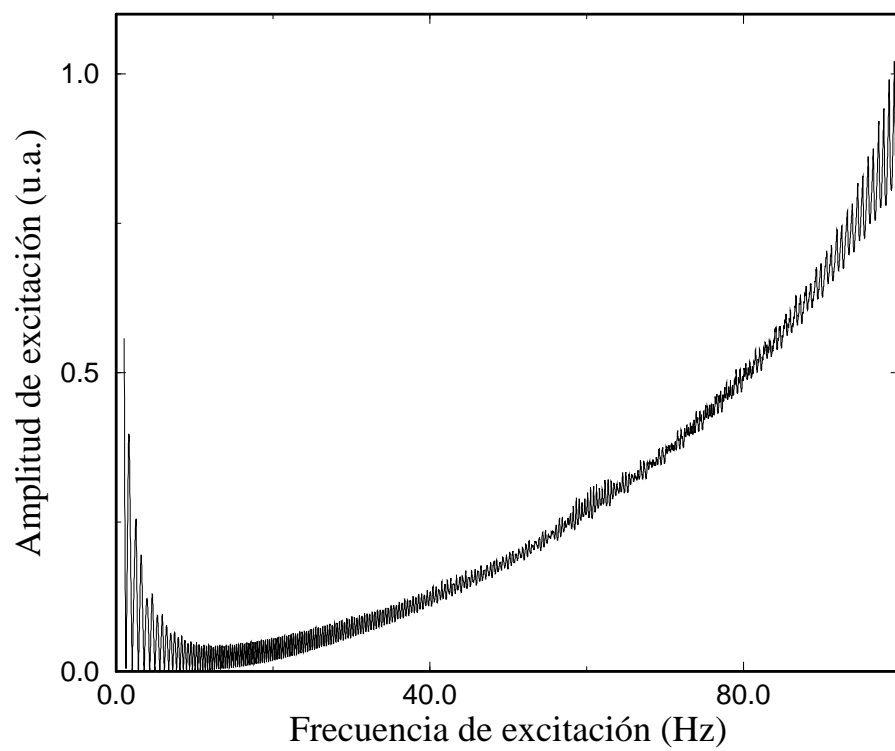


Figura 3.6: *Umbral de observación de la estructura.*

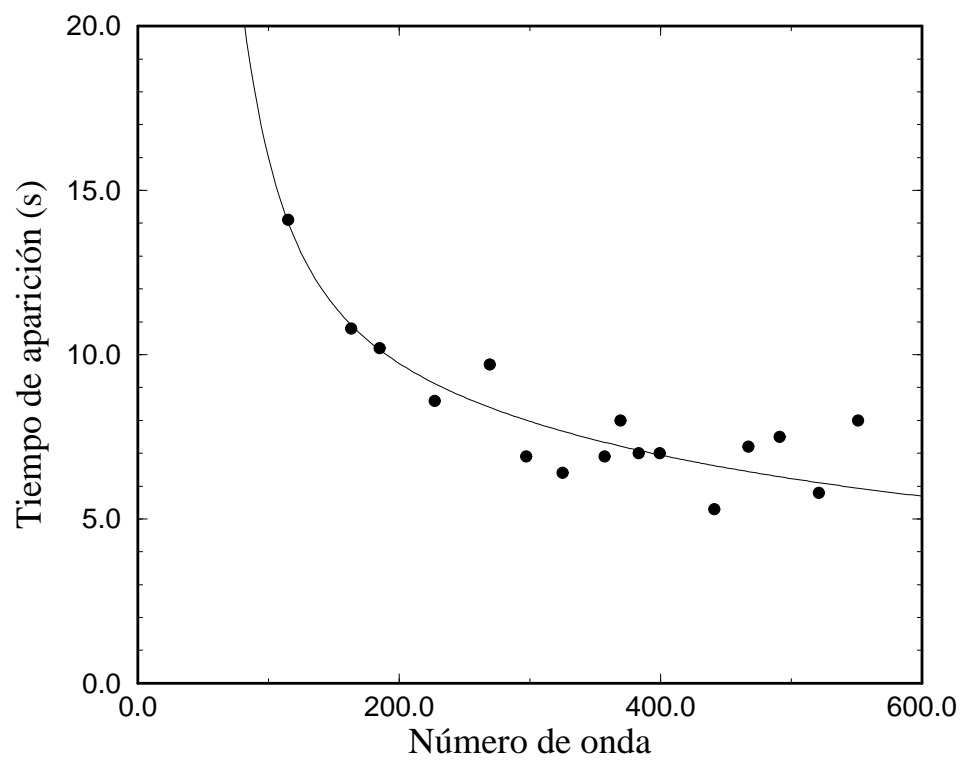


Figura 3.7: Tiempos de aparición de la estructura. Los círculos se corresponden a puntos experimentales y la curva sólida al modelo teórico.

amortiguar cualquier modo sin excitar externamente, de forma que al excitarlo externamente, el modo sature ya en la teoría lineal. También hemos comprobado que ésto ocurre. Incluso las restricciones deben ser más fuertes sobre $G(m, \lambda)$: en $\lambda \in \mathfrak{S}$ debe crecer más rápidamente que una potencia de m con exponente mayor que *uno* para números de onda m grandes, para que la expresión completa de la deformación de la interfaz sea finita. Ésto se puede ver directamente de la forma de la relación de dispersión.

También la (ec. 3.18) debe ser consistente con la teoría en el sentido que $\forall m \in \mathcal{N} \quad G(m, \lambda) = 0 \Rightarrow \Re(\lambda) > 0$. Ésto es necesario para asegurar que las perturbaciones van a decaer en el régimen lineal debido a los efectos viscosos. Esta aserción se ha comprobado numéricamente para una gran cantidad de frecuencias excitadoras y números de onda y se ha visto que asintóticamente también se cumple.

En lo que hace referencia a modelos no lineales del problema que nos ocupa, una primera posibilidad es el ataque directo por parte de esquemas perturbativos, tanto de una como de varias escalas. Dado que, en el régimen lineal el número de modos excitados a considerar es infinito, *a priori* el modelo no lineal también debería considerarlos. Obviamente, un modelo no lineal, incluso en regímenes débilmente no lineales implicaría un desarrollo teórico no abordable en el momento actual.

De hecho, una aproximación simple al régimen no lineal podría ser el suponer una perturbación respecto del modo predominante definido a través del problema lineal. Quizás una aproximación de este tipo sería realista para frecuencias relativamente altas, es decir en el régimen de ondas claramente capilares, donde nuestros resultados muestran un buen acuerdo entre la variación de la amplitud del modo predominante frente a la frecuencia y los resultados experimentales. Para bajas frecuencias, donde los efectos gravitatorios empiezan a ser importantes ya se ha discutido que cualquier interpretación de los resultados experimentales necesariamente implica considerar interacciones entre modos predominantes correspondientes a frecuencias aplicadas próximas. En consecuencia, un desarrollo no lineal en esta última región de frecuencias de excitación sería de una complejidad extraordinaria. A pesar de ello, en la región capilar, considerar un solo modo como solución del problema lineal a perturbar entraña serias dificultades porque, de hecho, no es solución del problema lineal. Sólo sería factible una integración numérica de las ecuaciones del movimiento, que se deja para el futuro. Tales

análisis, además deberían considerar condiciones realistas del problema, hasta ahora no consideradas completamente. Así ya el problema lineal revela que las amplitudes de los modos dependen fuertemente de la frecuencia aplicada y de la temperatura a través de los números adimensionales Re , Fr y Bo de tal forma que muy pequeñas variaciones en frecuencia o/y temperatura implican variaciones en amplitud de un orden de magnitud. Por otro lado, si en el problema lineal los efectos de fluctuaciones de frecuencia añadidos a los efectos de fluctuaciones de temperatura no parecen afectar de forma importante a la evolución del sistema (al respecto se hizo un análisis de variación de parámetros del sistema), en el análisis no lineal no tiene por que ser esta la situación y en consecuencia, sería necesario analizar experimentalmente este problema.

Argumentos similares a los citados se podrían considerar en la discusión de un análisis no lineal desarrollando ecuaciones de amplitud, ya que en nuestro caso, al ser solución del régimen lineal la superposición de infinitos modos, no es evidente la selección de las escalas espaciales y temporales a tener en cuenta. Construir una ecuación de amplitudes de forma fenomenológica implica un mejor conocimiento que el actual de la evolución espacio-temporal de las estructuras y ya se han iniciado montajes experimentales al respecto.

Cabe decir que, Miles [1] hizo un modelo teórico considerando la interacción resonante no lineal entre dos modos, sin embargo, su modelo consideraba un amortiguamiento efectivo, además de estudiar un sistema muy distinto al nuestro, principalmente porque el recipiente que se movía era un cilindro situado con su eje principal paralelo a la gravedad. Ésto hacía aparecer dos modos perpendiculares entre sí, que eran de números de onda muy bajos debido a que se excitaba el sistema en la frecuencia natural del mismo. En este punto, [1] estudiaba el espacio de parámetros de control en el entorno de la resonancia en la frecuencia natural. Con todo ésto, concluimos que sus resultados no representan de ninguna manera la situación experimental que nosotros planteamos.

Capítulo 4

Interfaces excitadas paralelamente a la gravedad.

4.1 Introducción al problema de Faraday.

4.1.1 Descripción preliminar del sistema.

El sistema experimental consiste en un prisma de base circular o cuadrada situado con la base perpendicular a la gravedad (**fig. 4.1**) y que forzamos mecánicamente de forma paralela a la gravedad.

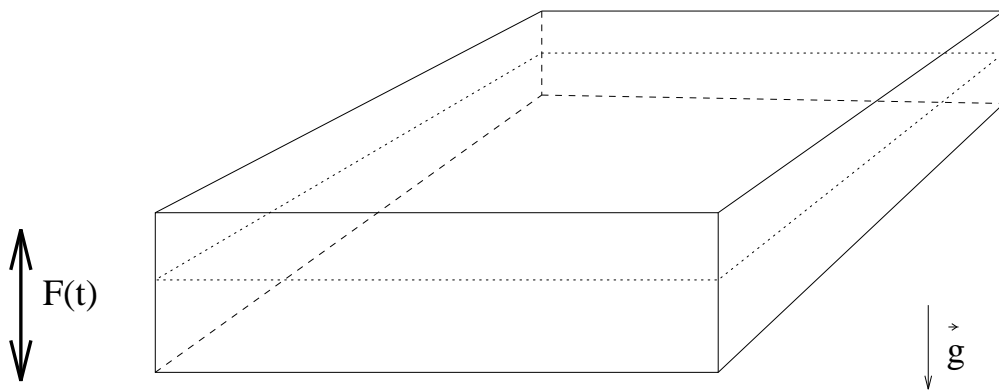


Figura 4.1: Experimento de Faraday.

La excitación será periódica y de aceleraciones crecientes a frecuencias fijas,

que variarán desde 10Hz. hasta 150Hz, obteniendo aceleraciones de hasta $15g$. Se utilizarán fluidos muy viscosos por motivos que se expondrán más adelante. Si el flujo no fuera viscoso, habría frecuencias de excitación, para las que una aceleración infinitesimal haría la interfaz plana inestable. Sin embargo al tener flujos viscosos, para cualquier frecuencia de excitación la interfaz plana es un estado del sistema estable para aceleraciones menores que un umbral no nulo. El mecanismo de aparición de la inestabilidad es el presentado en la (**fig. 4.2**), donde también puede verse el carácter subarmónico típico de las inestabilidades paramétricas.

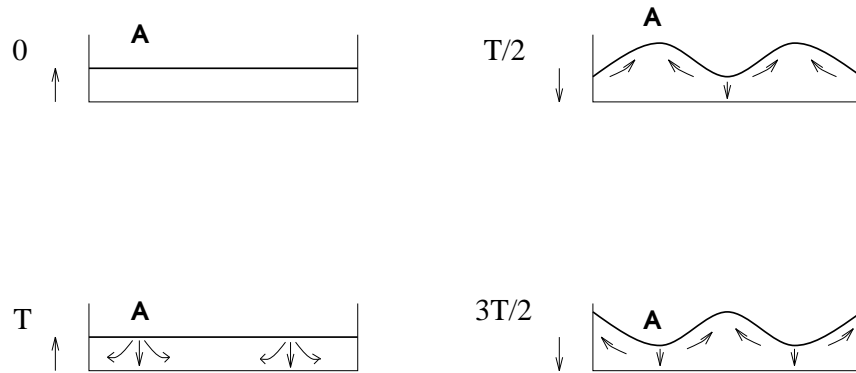


Figura 4.2: Inestabilidad de Faraday.

Siendo la excitación sinusoidal pura, habrá un modo que tiene un umbral inferior que los demás. En este sentido, en el régimen lineal se excitará un sólo modo. Ésto es posible porque en el régimen lineal el tipo de excitación mantiene un subgrupo continuo de transformaciones del sistema no forzado bajo el que la deformación de la interfaz sinusoidal pura es invariante. A medida que el sistema deja de estar en el régimen lineal, otros modos se excitan e interaccionan no linealmente entre si. Además, a medida que tenemos flujos más viscosos la curva umbral para cada modo se hace más plana cerca del mínimo, por tanto en flujos viscosos, habrá un mayor número de modos que se excitarán muy cerca del umbral.

En definitiva, el sistema a una frecuencia dada tiene asociadas unas curvas de umbrales de excitación espacial que en este caso representan la aceleración de excitación en función del número de onda necesaria para excitar el modo de Fourier

con ese número de onda y coincide con la curva de estabilidad marginal para la frecuencia dada. Estos umbrales tienen forma de lenguas [45], teniendo cada una de ellas su mínimo relativo asociado y su pulsación característica. La primera de las lenguas tiene el mínimo absoluto y corresponde a una excitación subarmónica, la segunda corresponde a una excitación armónica y así sucesivamente.

Está claro que el número de onda que se mide en el régimen lineal va a ser el mínimo absoluto de estas curvas de umbrales (que coincide con el mínimo relativo de la primera lengua subarmónica).

Estas curvas de umbrales están discretizadas. Ocurre por la misma razón que en el caso del tubo, es decir debido a que nuestro sistema está confinado.

En este sistema, forzado paramétricamente, en el estado estacionario alcanzado en el umbral a una frecuencia excitadora tendremos que el modo que se excita lo hace a una pulsación mitad de la excitadora. La pulsación y número de onda del modo están relacionados por una relación de dispersión forzada, esta vez paramétricamente, análoga a la que se hallaba en el problema del tubo.

Así pues se puede definir un umbral de aceleración global para una onda de Faraday: Para una frecuencia de excitación, el umbral de aceleración será la aceleración mínima que se debe imponer al recipiente para que un modo se haga inestable. Esta curva de umbral de aceleración global coincide con una curva de estabilidad marginal global en donde se contemplan los efectos de todos los modos. La cuestión de qué amplitud alcanzarán los modos en esa curva de estabilidad marginal no la puede resolver la teoría lineal, a diferencia de en el caso del tubo. En este caso la ecuación en el régimen lineal de la ecuación de la interfaz es invariante bajo el grupo continuo de transformaciones puntuales que forma el multiplicar la deformación por un real positivo. Ésto hace que en el régimen lineal no se seleccione la deformación de la interfaz, de hecho en la curva de estabilidad marginal los modos no crecen pero tampoco decrecen, con lo cual la perturbación que hace que aparezcan esos modos es la que determina su amplitud, si bien esta amplitud debería ser infinitesimal pues en caso contrario los efectos no lineales empezarían a afectar a la deformación de la interfaz haciendo la selección estacionaria de la amplitud de la interfaz. Además cuando la interfaz desarrolla un modo de esta forma, los efectos no lineales hacen aparecer otros nuevos modos que interactuarán con los primeros. También son los efectos no lineales que determinan la estructura o patrón estacionario, es decir, si las ondas aparecerán todas en un sentido (apareciendo un patrón de franjas) o en direcciones perpendiculares

(apareciendo patrones cuadrados o de rollos cruzados), etc. En la teoría lineal hay degeneración del modo que alcanza la curva de estabilidad marginal y la linealidad del sistema hace que no se seleccione uno o una combinación concreta de modos.

Es importante decir que en la inestabilidad de Faraday el hecho de la discretización de las curvas umbrales de excitación espacial hace que el umbral de aceleración global oscile de forma similar al umbral de amplitudes de excitación en el caso del tubo. En este caso es posible medir estas oscilaciones, porque son mucho más anchas debido a la viscosidad mayor del fluido [28].

La deformación de la interfaz en la inestabilidad de Faraday aparece indistintamente en cualquier lugar de la interfaz, a diferencia del problema del tubo en el que la deformación de la interfaz se creaba en los extremos del tubo y se propagaba hacia otros lugares de la interfaz, debido a cualquier perturbación y seguidamente aparece de forma global en toda la interfaz.

Si se aumenta la aceleración de excitación los patrones estacionarios establecidos en regímenes poco no lineales se pueden hacer inestables apareciendo inestabilidades secundarias.

Antes de describir la fenomenología de forma completa, debemos considerar otros fenómenos colaterales con el principal de la inestabilidad de Faraday, fenómenos que pueden llegar a ser importantes sino se les hace un tratamiento experimental específico. Éste es el problema del menisco que en el caso del tubo no tenía más importancia. En el problema de Faraday, si hay un menisco con una longitud característica $\left(\frac{\sigma}{\rho g}\right)^{\frac{1}{2}}$, aunque ésta sea pequeña, provocará la aparición de ondas superficiales de tipo no-faraday debidas a la modulación que tendrá esa longitud del menisco a través de una gravedad efectiva variable. Esta modulación hará que los extremos, que es donde está el menisco, emitan ondas a la pulsación externa y no a la mitad de la misma. Ésto facilita la distinción experimental de estas ondas de las ondas Faraday. El problema no es sólo el enmascaramiento de las ondas Faraday sino que también pueden modificar umbrales, patrones, etc propios de las ondas Faraday. Entonces es importante que no haya menisco alguno o al menos minimizarlo, los métodos usados para conseguirlo se describirán extensamente en la (**sec. 4.2**).

Finalmente, para completar esta descripción preliminar de nuestro sistema daremos una visión esquemática de los resultados experimentales que serán presentados en detalle en la (**sec. 4.2**).

Fijada una frecuencia de excitación, si aumentamos la aceleración impuesta desde 0 hasta el umbral de aceleración de excitación global no ocurre absolutamente nada en el sistema. Una vez que se llega al umbral de aceleración de excitación, el componente de Fourier que ha alcanzado la curva de estabilidad marginal de cualquier fluctuación no decaerá con el tiempo. Ésto provocará que aparezca un patrón muy desordenado de un modo de Fourier, evidentemente degenerado. Si se aumenta ligeramente la aceleración los efectos no lineales afectan al sistema en varios sentidos:

1. El modo que había alcanzado la curva de estabilidad marginal se hace inestable y por tanto crece (indefinidamente según la teoría lineal) y se manifiesta claramente.
2. Otros modos, cercanos al primero, alcanzan la curva de estabilidad marginal. Incluso algunos la superan y se hacen inestables.
3. Todos los modos inestables interactúan no linealmente y los efectos no lineales hacen saturar el crecimiento de los modos, alcanzando una deformación de la interfaz finita.
4. Los efectos no lineales hacen que se rompa la degeneración de los modos lineales, seleccionando un patrón o estructura globales que se manifiestan.

Si bien, todo ésto parece que va a modificar de tal modo la fenomenología que los modelos lineales no sirven para nada, no es en absoluto cierto. En este sentido, si se aumenta muy ligeramente la aceleración por encima de la curva del umbral de aceleración de excitación global los efectos no lineales 2 y 3 prácticamente no se manifiestan y sólo son importantes los efectos 1 y 4.

Como en el caso del tubo aquí dependiendo de los números de onda que se excitan (a mayor frecuencia excitadora, mayor número de onda) hay ondas capilares, gravitatorias u ondas capilaro-gravitatorias.

Los patrones que aparecen cerca de la curva umbral dependen fuertemente del número de Reynolds, es decir que dependen de la viscosidad pero también pueden depender de la excitación externa. En flujos poco viscosos predomina el patrón cuadrado, el de franjas paralelas en flujos muy viscosos. Está claro entonces que para flujos intermedios habrá figuras intermedias y fenómenos oscilatorios entre ellas.

En todo caso nosotros nos concentraremos en el caso de flujos muy viscosos y cabe comentar que la estructura cuesta que se forme debido a la rotura de simetría que el sistema debe hacer puesto que es lo mismo tener franjas orientadas en una dirección que en otra. Además, antes de tener esa estructura bien formada las franjas aparecen débilmente onduladas, habiendo una coexistencia de dos números de onda. Eso puede ser posible debido a que las curvas de umbrales de aceleración espacial están discretizadas y que por tanto antes de seleccionarse absolutamente el patrón hay estados intermedios que desaparecen al elevar un poco la aceleración impuesta.

Cuando se eleva más la amplitud de la aceleración excitadora [29], los efectos no lineales 2 y 3 toman importancia, haciéndose la estructura en franjas inestable en sí misma y apareciendo una modulación de amplitudes transversal oscilatoria (T.A.M. oscilatoria) de frecuencias inconmensurables con la frecuencia de excitación. A más altas aceleraciones la T.A.M. oscilatoria sufre una inestabilidad de fase y aún a más altas aceleraciones aparecen dislocaciones y finalmente gotas, de forma parecida a lo que ocurre con el tubo.

Si el flujo fuera poco viscoso, pasaríamos del patrón cuadrado a modulaciones de baja frecuencia debidas al movimiento de defectos de fase. En flujos intermedios coexisten T.A.M. oscilatorias y estacionarias.

4.1.2 Modelo lineal irrotacional.

Consideraremos en principio que tenemos un prisma de base cuadrada de lado L . Todo el cálculo puede hacerse sin problemas suponiendo el prisma de base circular, con el único cambio en las funciones propias del sistema en el plano x - y .

Entonces, consideramos un fluido viscoso (aceite de bomba de vacío) en contacto con aire en un prisma de base cuadrada (**fig. 4.3**) a temperatura ambiente (22°C). Las características físicas principales del aceite [28] son $\rho_L = 865 \text{ Kg/m}^3$, $\nu_L = 1.3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$, $\sigma = 2.8 \cdot 10^{-2} \text{ Kg/s}^2$ donde ρ , ν y σ son la densidad, la viscosidad cinemática y la tensión superficial respectivamente.

De acuerdo con los experimentos (**sec. 4.2**) consideraremos que el prisma se mueve periódicamente en la dirección del eje z en un rango de frecuencias (f) y aceleraciones en los que son válidas las aproximaciones del modelo. La posición del prisma se puede definir:

$$z_0(t) = \int_0^t v_0(\tau) d\tau \quad (4.1)$$

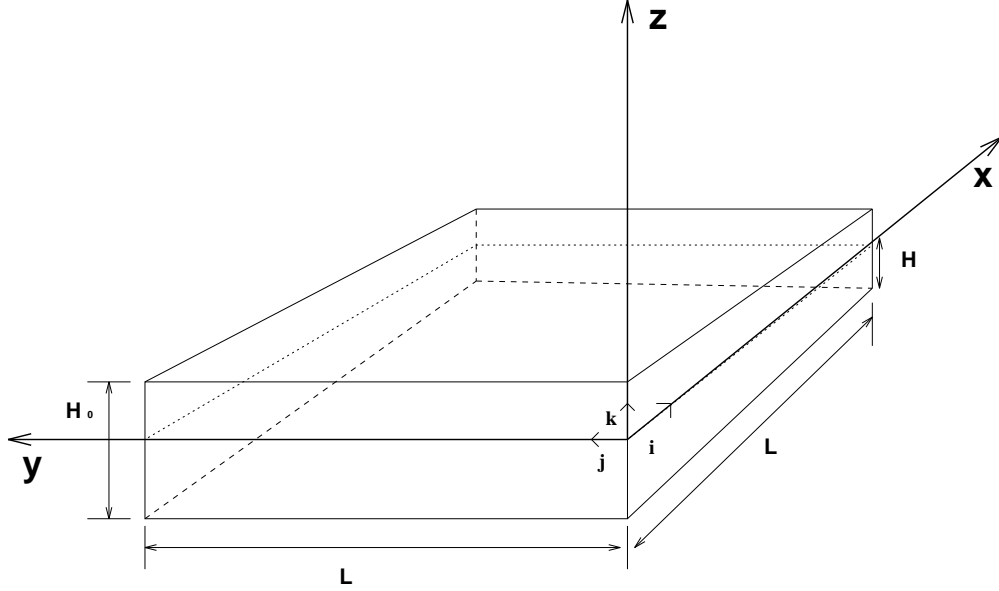


Figura 4.3: Sistema físico y ejes coordenados.

donde $v_0(t)$ es la velocidad instantanea del prisma y t es el tiempo.

Las ecuaciones del movimiento son las **(ecs. 0.2, 0.21)** para el líquido y para el gas (que tomaremos como aire) siendo $\vec{f}(\vec{x}, t) = -\rho g \hat{k}$. Respecto de las condiciones de contorno en las paredes tenemos también para los dos fluidos las condiciones **(ec. 0.15)** siendo $\vec{v}_p = \vec{v}_0(t) = v_0(t)\hat{k}$. La ecuación de la interfaz es la **(ec. 0.29)** y en ella se verifican las condiciones de contorno **(ec. 0.18)** para los dos fluidos y **(ecs. 0.22, 0.23)** siendo el fluido 1 el aceite de bomba de vacío y el fluido 2 un gas.

Llamando a Δz la amplitud del desplazamiento del prisma y $\Omega = 2\pi f$ la pulsación de excitación, se definen los siguientes parámetros adimensionales que usaremos más tarde:

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{H}{L} & \gamma &= \frac{\rho_G}{\rho_L} \\
 \tilde{\gamma} &= \frac{\mu_G}{\mu_L} & \gamma' &= 1 - \gamma \\
 \epsilon &= \frac{\Delta z}{H} & h_0 &= \frac{H_0}{H} - 1
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}
Fr &= \frac{H f^2}{g} & Bo &= \frac{\rho_L L^4 f^2}{\sigma H} \\
Re_L &= \frac{L^2 f}{\nu_L}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

donde d , L , H , Δx son las longitudes características con las que se adimensionalizan las longitudes y el periodo de excitación el tiempo con el que se adimensionalizan los tiempos y Fr , Bo y Re son los números de Froude, Bond y Reynolds respectivamente.

Para cada frecuencia aplicada, ϵ definida anteriormente es proporcional a los desplazamientos del prisma. La deformación de la interfaz es independiente de los desplazamientos del prisma. Por consiguiente, no podemos usar el parámetro adimensional ϵ como parametro de no linealidad. Siendo así, es interesante tomar como parámetro de control el cociente entre la amplitud de la aceleración del prisma y la gravedad terrestre. También está claro que debemos introducir una nueva longitud que determinará la amplitud de la deformación de la interfaz. Esta longitud frente a la profundidad del fluido va a representar el parámetro adimensional de no linealidad a . Así pues podemos expresar ξ como series de potencias de a . Una vez realizada la adimensionalización hacemos un cambio de variable:

$$\begin{aligned}
x &= x \\
y &= y \\
\eta &= z - \epsilon z_0(t) \\
t &= t
\end{aligned}$$

expresando los campos de velocidades y las presiones como:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_L(\vec{r}, t) &= \frac{\epsilon}{a} \vec{v}_0(t) + \vec{b}_L(\vec{r} - \epsilon \vec{z}_0(t), t) \\
\vec{v}_G(\vec{r}, t) &= \frac{\epsilon}{a} \vec{v}_0(t) + \vec{b}_G(\vec{r} - \epsilon \vec{z}_0(t), t) \\
p_L(\vec{r}, t) &= -h^2 \left[\frac{1}{Fr} + \epsilon \dot{v}_0(t) \right] \eta + a \Pi_L \\
p_G(\vec{r}, t) &= -h^2 \left[\frac{1}{Fr} + \epsilon \dot{v}_0(t) \right] \eta + a \Pi_G
\end{aligned} \tag{4.4}$$

siendo \vec{r} el vector posición, \vec{b} y Π las contribuciones a las velocidades y a la presión dinámica con condiciones de contorno homogéneas en el sistema de referencia móvil.

Las ecuaciones resultantes las desarrollamos al orden más bajo en a y se obtiene para la ecuación de Navier-Stokes para el líquido:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} b_{L\eta} \\ b_{Ly} \\ b_{Lz} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ h^{-2} \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} \Pi_L + \frac{1}{Re_L} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + h^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \begin{pmatrix} b_{L\eta} \\ b_{Ly} \\ b_{Lz} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

donde los subíndices representan la componente del vector en esa dirección. Para el aire se obtienen unas ecuaciones similares.

Las condiciones de contorno pasarán a ser:

$$\vec{b}_L = \vec{b}_G = 0 \quad \text{en} \quad x = 0, 1 \quad y = 0, 1 \quad \eta = -1, h_0$$

Para $z=0$ (sobre la interfaz):

$$\begin{aligned} b_{Lz} &= \frac{\partial \xi}{\partial t} = b_{Gz} \\ \Pi_L - \gamma \Pi_G &= h^2 \gamma' \left[\frac{1}{Fr} + \epsilon \dot{v}_0(t) \right] \xi - \frac{1}{Bo} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) \\ &+ \frac{2}{Re_L} \frac{\partial b_{Lz}}{\partial \eta} - \frac{2\gamma}{Re_G} \frac{\partial b_{Gz}}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 dx dy \xi(x, y, t) = 0$$

Ahora es el momento de hacer la simplificación debida a que el flujo es considerado irrotacional. Ésto es una aproximación válida para flujos poco viscosos, que no son los que corresponderían al caso experimental tratado, en este sentido debe considerarse esta aproximación como una de primer orden en viscosidades y que en este sentido, se reproducen cualitativamente los resultados encontrados en los modelos más sofisticados y en experimentos.

Entonces el campo de velocidades de las dos fases se pueden describir por funciones armónicas definidas para cada fase ψ de la siguiente manera:

$$\vec{b} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \hat{j} + h^{-2} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \hat{k}$$

y las ecuaciones (**ecs. 0.2, 0.21**) se expresarán:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi_L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_L}{\partial y^2} + h^{-2} \frac{\partial^2 \psi_L}{\partial \eta^2} &= 0 \\
\Pi_L + \frac{\partial \psi_L}{\partial t} &= 0 \\
\frac{\partial^2 \psi_G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_G}{\partial y^2} + h^{-2} \frac{\partial^2 \psi_G}{\partial \eta^2} &= 0 \\
\Pi_G + \frac{\partial \psi_G}{\partial t} &= 0
\end{aligned} \tag{4.7}$$

junto con las condiciones de contorno (**ec. 4.6**) que ahora son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi_L}{\partial x} = \frac{\partial \psi_G}{\partial x} &= 0 \quad \text{en } x = 0, 1 \\
\frac{\partial \psi_L}{\partial y} = \frac{\partial \psi_G}{\partial y} &= 0 \quad \text{en } y = 0, 1 \\
\frac{\partial \psi_L}{\partial \eta} &= 0 \quad \text{en } \eta = -1 \\
\frac{\partial \psi_G}{\partial \eta} &= 0 \quad \text{en } \eta = h_0
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Para $\eta = 0$,

$$h^{-2} \frac{\partial \psi_L}{\partial \eta} = h^{-2} \frac{\partial \psi_G}{\partial \eta} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_L - \gamma \Pi_G &= \\
h^2 \gamma' \left[\frac{1}{Fr} + \epsilon \dot{v}_0(t) \right] \xi - \frac{1}{Bo} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \xi \\
+ \frac{2h^{-2}}{Re_L} \frac{\partial^2 \psi_L}{\partial \eta^2} - \frac{2h^{-2} \gamma}{Re_G} \frac{\partial^2 \psi_G}{\partial \eta^2}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno (**ec. 4.8**) podemos resolver las ecuaciones (**ec. 4.7**) obteniendo soluciones de la siguiente forma:

$$\psi_L = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} T_L^{n_1, n_2}(t) \cos(\pi n_1 x) \cos(\pi n_2 y) \cosh(k_{n_1, n_2}(1 + \eta)) \tag{4.11}$$

$$\psi_G = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} T_G^{n_1, n_2}(t) \cos(\pi n_1 x) \cos(\pi n_2 y) \cosh(k_{n_1, n_2}(\eta - h_0)) \quad (4.12)$$

donde:

$$k_{n_1, n_2} = \pi h \left[n_1^2 + n_2^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.13)$$

Sustituyendo las expresiones para ψ_L y ψ_G en la **(ec. 4.9)** obtendremos:

$$T_G^{n_1, n_2}(t) = -\frac{\sinh(k_{n_1, n_2})}{\sinh(h_0 k_{n_1, n_2})} T_L^{n_1, n_2}(t) \quad (4.14)$$

Y también:

$$\xi = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \Upsilon_{n_1, n_2}(t) \cos(\pi n_1 x) \cos(\pi n_2 y) \quad (4.15)$$

siendo:

$$\Upsilon_{n_1, n_2} = h^{-2} k_{n_1, n_2} \sinh(k_{n_1, n_2}) \int_0^t T_L^{n_1, n_2}(t') dt' \quad (4.16)$$

Finalmente, sustituyendo **(ecs. 4.11, 4.12, 4.14, 4.15)** en **(ec. 4.10)** obtendremos:

$$\frac{d^2 \Upsilon_{n_1, n_2}}{dt^2} + 2\chi_{n_1, n_2} \frac{d\Upsilon_{n_1, n_2}}{dt} + \left(\omega_{n_1, n_2}^2 + \chi_{n_1, n_2}^2 + q_{n_1, n_2} \dot{v}_0(t) \right) \Upsilon_{n_1, n_2} = 0 \quad (4.17)$$

Esta ecuación es la de un oscilador paramétrico amortiguado y llamada ecuación de Mathieu amortiguada que se puede reducir a la conocida ecuación de Mathieu con el cambio $\Upsilon_{n_1, n_2} = \exp(-\chi_{n_1, n_2} t) \Xi_{n_1, n_2}$

Aquí los parámetros χ_{n_1, n_2} , q_{n_1, n_2} y ω_{n_1, n_2}^2 vienen dados por las siguientes expresiones:

$$\chi_{n_1, n_2} = \frac{k_{n_1, n_2}^2}{h^2 Re_L} \frac{1 + \tilde{\gamma} \frac{\tanh(k_{n_1, n_2})}{\tanh(k_{n_1, n_2} h_0)}}{1 + \gamma \frac{\tanh(k_{n_1, n_2})}{\tanh(k_{n_1, n_2} h_0)}} \quad (4.18)$$

$$q_{n_1, n_2} = \epsilon k_{n_1, n_2} \tanh(k_{n_1, n_2}) \frac{\gamma'}{1 + \gamma \frac{\tanh(k_{n_1, n_2})}{\tanh(k_{n_1, n_2} h_0)}} \quad (4.19)$$

$$\omega_{n_1, n_2}^2 = k_{n_1, n_2} \tanh(k_{n_1, n_2}) \frac{\frac{\gamma'}{Fr} + \frac{k_{n_1, n_2}^2}{h^4 Bo}}{1 + \gamma \frac{\tanh(k_{n_1, n_2})}{\tanh(k_{n_1, n_2} h_0)}} - \chi_{n_1, n_2}^2 \quad (4.20)$$

siendo el parámetro de control proporcional a $\epsilon \cdot Fr$. Obsérvese que la ecuación **(ec. 4.17)** es, como hemos dicho anteriormente, invariante frente a dilataciones de $\Upsilon_{n_1, n_2}(t)$ que representaría la amplitud de cada modo de Fourier dependiente del tiempo. Ésto haría que la deformación de la interfaz sea desconocida, así como el patrón que formarían las ondas, si no se incorporan los efectos no lineales. Nótese también que en la expresión que define χ_{n_1, n_2} en **(ec. 4.18)** falta un factor *dos* debido a la consideración irrotacional, al igual que en la **(ec. 1.18)**

La solución de **(ec. 4.17)** puede hallarse numéricamente, o bien mediante tablas. La metodología a usar es la de la teoría de Floquet [58], con ella se pueden obtener las curvas de umbrales de excitación espacial, así como las otras magnitudes típicas en los regímenes lineales, salvo las indicadas en el parrafo anterior. En la **(sec. 4.3)** se expondrá un modelo lineal rotacional como completitud de lo dicho aquí, en el sentido que, siendo los fluidos utilizados por nosotros experimentalmente muy viscosos, da una aproximación mucho mejor al problema.

4.2 Resultados experimentales.

4.2.1 Montajes experimentales y experimentos.

Los fluidos utilizados fueron principalmente aceite de bomba de vacio y propileno glicol. El primero se usó en la mayoría de los experimentos y el segundo fué porque se usó un tinte fluorescente soluble en propileno glicol que permitió usar un método de visualización basado en fluorescencia como se indicará posteriormente. Las propiedades físicas del aceite de bomba de vacio a temperatura ambiente son [28] $\rho = 865 \text{ Kg/m}^3$, $\nu = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$, $\sigma = 2.8 \cdot 10^{-2} \text{ Kg/s}^2$ donde ρ , ν y σ son las densidad, la viscosidad cinemática y la tensión superficial respectivamente. El caso del propileno glicol es mucho más delicado, se usa un tinte de tipo sulforodamina a una concentración del orden del 0.02% para estudiar inestabilidades

secundarias como se comentará más adelante. El problema fundamental del propileno glicol es que a temperatura ambiente absorbe muy bien agua cambiando las propiedades del fluido, y por tanto los experimentos deben hacerse en vacío.

El montaje principal (**fig. 4.4**) consta de un recipiente, que podemos escoger entre distintas geometrías (prisma de base cuadrada, circular, etc) situado encima de una mesa vibradora, que es esencialmente un altavoz diseñado para hacer vibrar sistemas de masa no despreciable, todo esto montado sobre un soporte de latón lleno de perdigones de plomo para absorber vibraciones externas no deseadas. El rango de frecuencias de excitación es 10-150Hz y la aceleración máxima es de 15g.

La disipación Joule debida a la elevada intensidad de corriente eléctrica que pasa por la mesa vibradora afecta la temperatura de los recipientes que contienen los líquidos usados en el experimento. Para evitar esto, se refrigeran los recipientes con agua o aire. Conjuntamente a esta refrigeración hay un control de la temperatura mediante células Peltier y una resistencia de platino. Con los datos de la resistencia de platino se ajustaba automáticamente (mediante un proceso retroalimentado) la intensidad que debía pasar por las células Peltier. En este sistema, sin embargo, y debido a la inhomogeneidad que provocaba el sistema de refrigeración, podían existir diferencias de temperatura entre el centro y los bordes del recipiente de hasta 2° C. En este montaje también es muy importante que los recipientes estén perfectamente horizontales y que el movimiento sea vertical. Para conseguir esto se equilibra dinámicamente el sistema con masas ajustables al recipiente. Con esto se consigue que las inhomogeneidades en la aceleración del recipiente sean menores al 3%. En el sistema se mide la aceleración impuesta con un acelerómetro piezoeléctrico.

El sistema de medida se ha basado principalmente en dos métodos, que son utilizables simultáneamente. Ambos esquematizados en la (**fig. 4.4**), y se describirán a continuación. El primero, denotado en la figura como luz cónica, consiste en poner en la vertical del recipiente con el fluido un sistema consistente en una circunferencia de diámetro D de 100 LEDs en la franja infrarroja. En el centro de la circunferencia se coloca una cámara C.C.D., que registrará las reflexiones de los LEDs en la interfaz. Por una construcción geométrica simple se ve que sólo llegará luz de los LEDs a la cámara cuando los ángulos que forma la interfaz con la horizontal estén entre $\frac{D-2d}{4L}$ y $\frac{D+2d}{4L}$ siendo d el tamaño de la base del recipiente que contiene el líquido, D el diámetro de la circunferencia de LEDs y L la distancia entre ambos (que para que sea válida esta estimación de ángulos, debe ser mucho

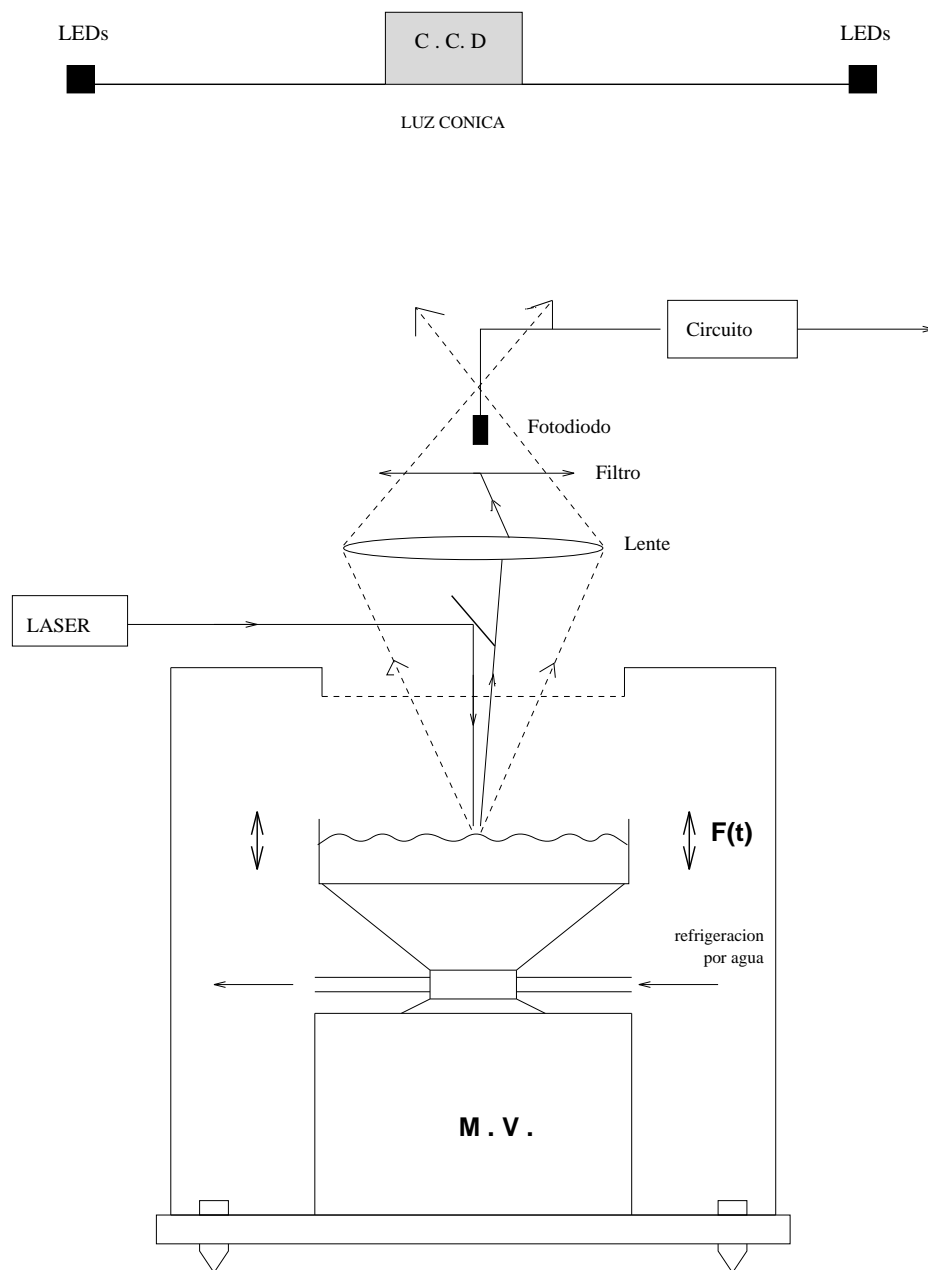


Figura 4.4: Figura esquemática del montaje experimental.

mayor que D y d). En nuestro sistema estos ángulos iban entre 0.7° y 4.2° . De ésto deducimos que los umbrales de la inestabilidad de Faraday van a medirse un poco mayores de lo que realmente son. Los LEDs se pueden sincronizar con la mesa vibradora a través de un circuito y se toman las imágenes con una cámara de alta velocidad. Esta sincronización se puede hacer a la misma frecuencia o a una frecuencia mitad de la excitadora. Ésto último permite que se distinga entre ondas superficiales excitadas externamente y las excitadas paramétricamente, las cuales tienen una frecuencia característica mitad de la de excitación. Además de esta separación, es importante la sincronización para evitar el efecto estroboscópico. De las medidas con este sistema podremos observar lo siguiente cuando tenemos la interfaz plana, la cámara no detecta luz alguna. Cuando la interfaz se desestabiliza y se producen ondas, éstas se observan en la cámara cuando presentan ángulos mayores que el mínimo. Supongamos por simplicidad que la estructura que forman las ondas es de franjas, entonces justo después del umbral se observa un patrón de franjas de una longitud de onda mitad de la real, debido que los puntos observables son aquellos que tienen mayor derivada, en consecuencia habrá dos puntos de éstos cada longitud de onda. A medida que crece la amplitud de la deformación de la interfaz cada punto medido antes se desdoblará en dos que se separarán y se irán acercando a las crestas y los valles de la deformación de la interfaz por ser el lugar geométrico de puntos de la interfaz que presenta una pendiente en el rango de ángulos considerados. Así a partir de una amplitud de la interfaz, que no será mucho mayor de lo que es en el umbral, los máximos y los mínimos quedarán descritos por líneas paralelas muy cercanas entre si.

El segundo pretende hacer medidas locales de la deformación de la interfaz. Se dirige un haz láser (en este caso de argón) a la interfaz, tal y como indica la figura. En el líquido, como ya se ha comentado antes, se ha disuelto un tinte fluorescente que responde a la luz del láser difundiendo luz roja, que se focaliza con una lente convergente situada a distancia de la interfaz menor que la distancia focal de la lente. Se intercepta la luz antes de llegar al punto imagen de la interfaz con un fotodiodo después de haber sido filtrada respecto reflexiones del haz del láser, y la señal del fotodiodo se registra después de pasar por un circuito que reduce el ruido y quita la señal de alta y de baja frecuencia. Cuando las deformaciones de la interfaz son pequeñas la intensidad recibida en el fotodiodo está relacionada con la deformación de la interfaz que ha provocado que el punto imagen de la misma se haya desplazado. A la señal medida hay que sustraerle el movimiento

equivalente de la interfaz plana.

A parte de tomar medidas experimentales se ha montado la mayor parte del perfeccionamiento del sistema que hemos descrito más arriba, de forma que el láser recorra una línea en la interfaz, gracias a un espejo octogonal móvil y que la medida no sea de un solo punto en la interfaz, sino que sea de una línea o una zona de la superficie.

En cuanto a los experimentos que se han hecho, están los que coinciden con el caso del tubo como son: Hay la medida del umbral para el que la interfaz plana se hace inestable, la de los números de onda excitados en el estado crítico y el de tiempos de aparición de la estructura, aunque esta última tiene dos variaciones: la primera consiste en una medida igual a la que se hace en el tubo, es decir pasando bruscamente de una aceleración de excitación nula al valor crítico de la aceleración, o bien en situarse justo por debajo del estado crítico y aumentar ligeramente la aceleración de excitación. Este segundo método es reproducible más fielmente de forma teórica.

Otras medidas experimentales son las de umbrales de inestabilidades secundarias, de frecuencias de modulaciones resultantes de estas inestabilidades secundarias, etc.

Antes de hacer una descripción de los resultados, se debe comentar que en el caso de Faraday es importante el efecto del menisco, ya que al mover el recipiente, la gravedad se modula haciendo que la longitud característica del menisco $l \sim \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$ también varíe periódicamente. Esta variación de la longitud característica del menisco considerando la ecuación de continuidad hace que se emitan ondas superficiales a la frecuencia de la excitación. Por consiguiente, hay ondas en la interfaz que no son paramétricas y que a partir de ahora llamaremos ondas de menisco y que pueden modificar umbrales, estructuras, etc. Para evitar esto se deben minimizar los efectos del menisco. Para ello hay varias alternativas, la primera es usar la condición de contorno de *recipiente a rebosar* que consigue que la interfaz quede fijada al borde y por tanto no haya menisco, pero hay una fuerte discretización de los modos y dependencia de la geometría además de hacer que sea imposible que se desarrolle un solo modo de Fourier. Una segunda alternativa es usar una condición de contorno de *playa* (borde con pendiente suave) que no tiene las desventajas del método anterior y cerca de la playa las ondas de menisco se amortiguan muy bien y por tanto en el centro del recipiente no afectan a la instauración de la inestabilidad paramétrica. Y finalmente hay la

posibilidad de la condición de contorno de *escalón* (borde con forma de escalón, siendo la profundidad del fluido muy pequeña en la parte alta del escalón) con características similares al caso de la playa. Para los experimentos se han hecho módulos insertables en los recipientes que simulan las condiciones de contorno de playa y de escalón.

4.2.2 Resultados experimentales y discusión.

Un primer experimento es el de la medida de amplitudes de aceleración en el estado crítico de aparición de la estructura. Éste tiene una forma cualitativamente parecida a la del *umbral de observación de la estructura* en el problema del tubo, salvo que el decrecimiento del umbral si aumentamos la frecuencia para frecuencias pequeñas es debido a los efectos de flujo en aguas superficiales. Lo que se ve en el umbral es una estructura absolutamente desordenada, que se ordena si aumentamos ligeramente la aceleración de excitación formando un patrón de franjas (**fig. 4.5**) (si el fluido considerado fuese poco viscoso el patrón sería cuadrado, de hecho se ha observado la transición de franjas a cuadrados aumentando la temperatura, ya que ésta modifica de forma importante la viscosidad del fluido [29]). Debido a que los números de onda adimensionales son del orden de 10, las oscilaciones en el umbral de aceleración crítica se observan, a diferencia del caso del tubo, porque para el paso de un número de onda a otro, hace falta una variación de la frecuencia medible.

También se han medido los números de onda críticos. Recordemos que en el problema de Faraday, al provenir la deformación de la interfaz de una inestabilidad, en el estado crítico un solo modo se ha hecho inestable. La relación entre el número de onda de ese modo y la frecuencia de excitación es la relación de dispersión forzada paramétrica, que es equivalente a la relación de dispersión forzada del tubo, salvo que la frecuencia del modo excitado es la mitad de la del predominante con ese número de onda en el problema del tubo.

El experimento de Faraday a viscosidades elevadas no presenta en ningún momento patrones propagativos. Sin embargo si las amplitudes de la aceleración se aumentan el sistema presenta una inestabilidad secundaria [29] que consiste en una modulación de amplitudes transversal oscilatoria (TAM oscilatoria) con una frecuencia inconmensurable con la frecuencia de excitación. A amplitudes de aceleración más elevadas aparecen defectos y para aceleraciones muy elevadas se expelen gotas de la interfaz. Concretamente en la (**fig. 4.6**) se observa primero la

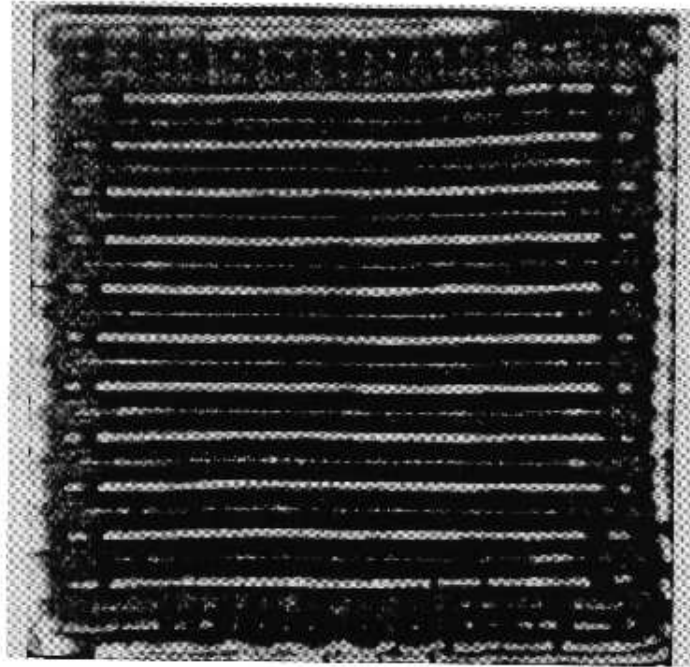


Figura 4.5: Patrón de franjas.

interfaz plana (*a*), después la interfaz en el umbral completamente desordenada (*b*) (los efectos no lineales aún no han seleccionado la estructura), la siguiente imagen corresponde a la estructura bien formada en el régimen lineal (*c*). Después aparece la modulación de amplitudes transversal oscilatoria (*d*) y finalmente defectos (*e*). La última imagen ya es caótica (*f*). Los umbrales de amplitudes de aceleración de la inestabilidad secundaria y de los defectos son de forma similar a los de la aparición de la estructura.

Si los fluidos hubiesen sido de baja viscosidad el patrón cuadrado hubiese inestabilizado en modulación de amplitudes de baja frecuencia correspondiente al movimiento de defectos de fase (la teoría predice modulación de amplitudes transversal estacionaria [19]).

El número de trabajos experimentales sobre aspectos lineales, no lineales y

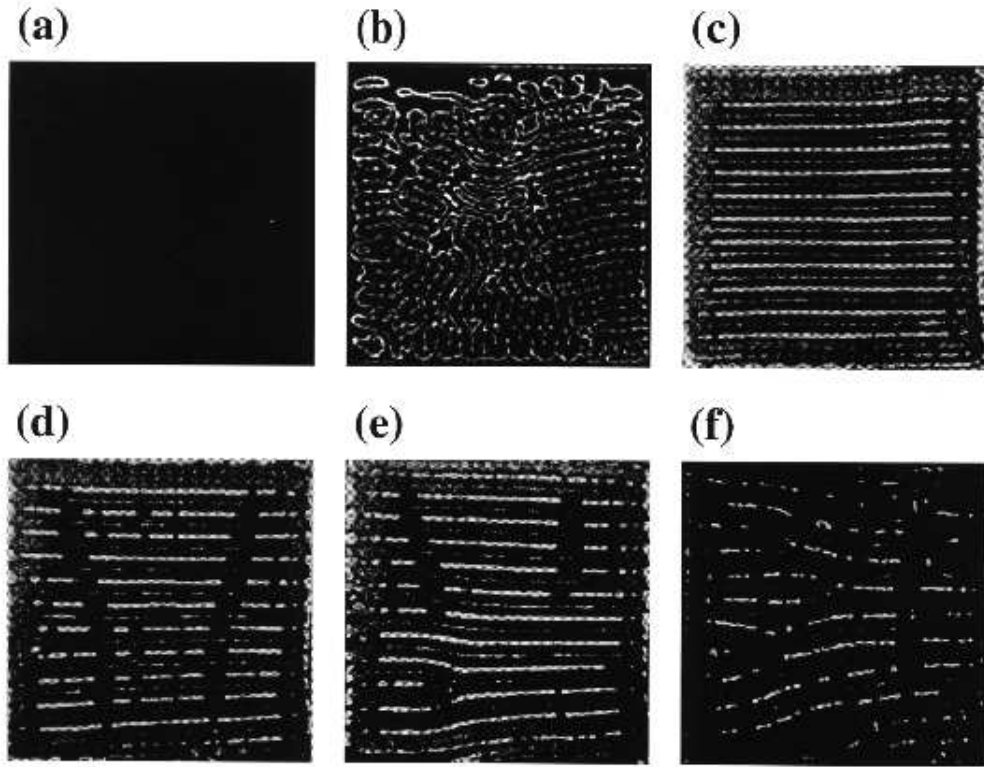


Figura 4.6: Evolución de las estructuras aumentando progresivamente la amplitud de la aceleración de excitación.

de transición al caos en el problema de Faraday es últimamente muy importante en la literatura. Sin ánimo de ser exhaustivo, hay contribuciones experimentales importantes en [10, 12, 13, 14, 15, 17, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 29].

A continuación consideraremos cuestiones tan importantes como la longitud de correlación, la longitud viscosa y el interés particular que tiene hacer los experimentos anteriores con este tipo de fluidos y con los montajes experimentales usados.

Con los parámetros del fluido considerado, la longitud viscosa es para una frecuencia de excitación de $50Hz$ de un 0.4% del tamaño del recipiente, es decir de unos $0.4mm$. Ésto implica que los efectos viscosos amortiguan las ondas en

unas longitudes muy pequeñas y por tanto si las ondas se produjeran de forma localizada no llegarían muy lejos del lugar de creación.

De acuerdo con lo expuesto en la (**sec. 2.3**) respecto la longitud de correlación y la dispersión en el estado del sistema, en el sistema de Faraday los números de onda adimensionales son del orden de 10, ésto hace que la discretización de las curvas de resonancia espacial es más importante que en el problema del tubo, sin embargo los números de onda son suficientemente grandes como para considerar al sistema desde este punto de vista como grande.

En cuanto a la longitud de correlación cabe decir que la dispersión en el problema de Faraday se puede calcular fácilmente [26] y da para nuestro sistema un valor adimensional del orden de 12, que a su vez no puede ser considerado como infinito pero sí que es suficientemente grande como para que el recipiente que contiene los líquidos con los que hemos experimentado pueda ser considerado como grande.

A nosotros nos interesa tener un sistema con poca dependencia de la geometría. De hecho hacemos los experimentos con unos fluidos y en unas condiciones que permite considerar el sistema como grande, en el sentido que no van a ser importantes los efectos de la geometría. En efecto, las estructuras que aparecen en ausencia de ondas de menisco y en el régimen lineal son independientes de la geometría.

El problema que aparecería en el tubo de que las ondas no se desplazarían a otros lugares por la alta viscosidad no lo tenemos aquí. La inestabilidad de Faraday es global en el sentido que existe igual probabilidad de excitación de la onda en cualquier zona del recipiente. Por tanto primero, como se ha comentado anteriormente, aparecerá una estructura desordenada que al aumentar la amplitud de excitación se irá ordenando hasta formar la estructura favorecida por el sistema en los parámetros de control correspondientes, gracias a efectos débilmente no lineales que favorecen la interacción entre zonas cercanas de fluido en la interfaz.

Para finalizar con este capítulo cabe decir que Fauve *et al.* [21] estudian experimentalmente el problema de Faraday con CO_2 a presión de vapor muy cerca del punto crítico (304.13 K). Aunque la viscosidad cinemática del CO_2 sea muy pequeña en el entorno del punto crítico, el hecho que la tensión superficial tienda a cero hace que las ondas muy cerca del punto crítico (en este sentido termodinámico en el problema del tubo no estamos cerca del punto crítico) sean gravitatorias. Además la diferencia de densidades entre el líquido y el gas tienden a cero cosa

que hace que a medida que nos acerquemos al punto crítico la viscosidad sea más relevante y por tanto haya una transición del patrón de cuadrados al de franjas). Sin embargo [21] hacen la hipótesis que el comportamiento de que la longitud de onda de la deformación de la interfaz sature en el punto crítico es debida a efectos de viscosidad muy elevados y que por tanto debe hacerse el analisis rotacional [27]. Nosotros hemos reproducido numéricamente este hecho usando el modelo irrotacional (sec. 4.1.2) (fig. 4.7).

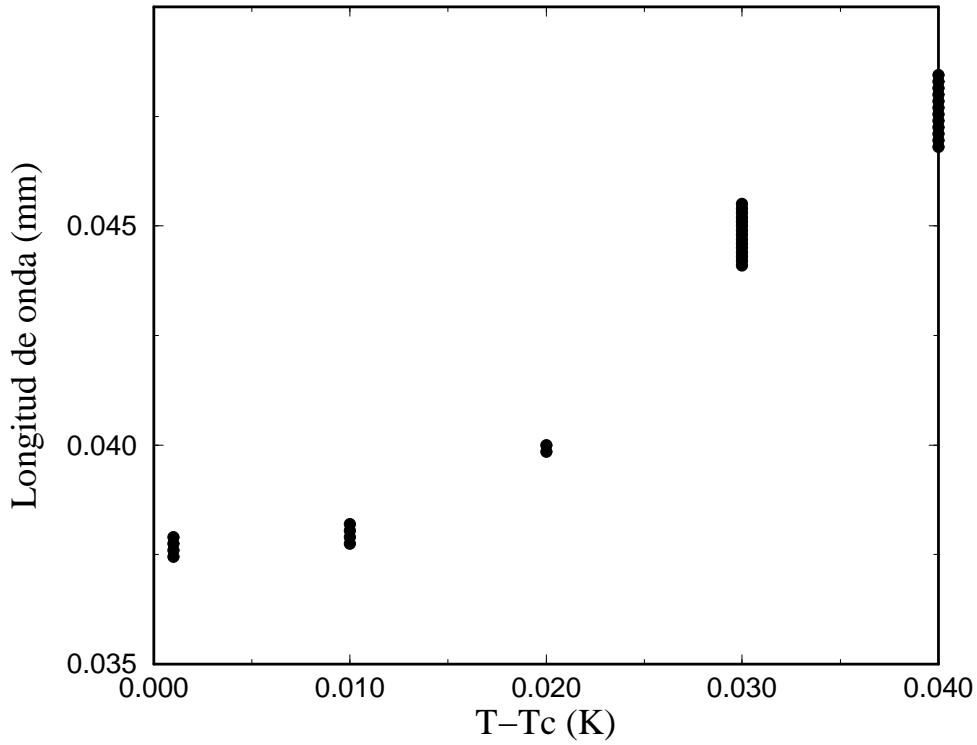


Figura 4.7: Saturación de la longitud de onda en el punto crítico.

Como se ve, la longitud de onda tiene el mismo comportamiento cualitativo que los experimentos y por tanto el motivo por el que la longitud de onda satura no es la inclusión de términos rotacionales en las ecuaciones del movimiento.

4.3 Teoría.

En este capítulo nos limitaremos a describir el modelo lineal rotacional hecho por Kumar y Tuckerman [27] y a hacer un resumen de algunos modelos no lineales para el problema de Faraday [11, 16, 17, 19, 25, 32] por completitud pero sin ánimo alguno de ser exhaustivos.

El modelo lineal rotacional de Kumar y Tuckerman hace un análisis de estabilidad lineal para una capa infinita de líquido de viscosidad cinemática ν y profundidad h . Su derivación se basa en las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos incompresibles y en la condición de agarre en el fondo de la celda, así como en las condiciones en la interfaz. El cálculo se hace en el sistema de referencia móvil.

Se linealizan las ecuaciones alrededor de la solución de la interfaz plana de forma estandar. Primero, se elimina la presión de la forma clásica, obteniéndose la misma ecuación (**ec. 3.3**) pero para la componente z de la velocidad. En todas las demás ecuaciones se eliminan las componentes horizontales de la velocidad. Entonces, expandiendo las diferentes variables hidrodinámicas en términos de las funciones propias $S_{\vec{k}}(x, y) = e^{\pm i\vec{k} \cdot \vec{r}}$, escribiendo por ejemplo:

$$\xi(x, y, t) = \int d\vec{k} \xi_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (4.21)$$

Kumar y Tuckerman derivan un conjunto infinito de sistemas lineales desacoplados (un sistema para cada modo propio). Para resolver el problema de estabilidad lineal usan la conocida teoría de Floquet [56, 58]. La excitación es periódica de período $\frac{2\pi}{f}$, entonces el teorema de Floquet dice que la deformación de la interfaz puede escribirse:

$$\xi_{\vec{k}}(t) = e^{(s+i\alpha)t} \tilde{\xi}_{\vec{k}}(t) \quad (4.22)$$

donde $\tilde{\xi}_{\vec{k}}(t)$ es una función periódica del tiempo con periodo $\frac{2\pi}{f}$ y por tanto se puede expandir en serie de Fourier: (a partir de ahora omitiremos el subíndice \vec{k})

$$\xi(t) = e^{(s+i\alpha)t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n e^{inft} \quad (4.23)$$

siendo $(s + i\alpha)$ el exponente de Floquet y $e^{(s+i\alpha)\frac{2\pi}{f}}$ el multiplicador de Floquet. La estabilidad de la solución depende del signo de s . De acuerdo con Kumar y Tuckerman sólo los dos casos $\alpha = 0$ (respuesta armónica) y $\alpha = \frac{f}{2}$ (respuesta

subarmónica) pueden llevar a una inestabilidad (lo demuestra numéricamente en este modelo; para el caso de la ecuación de Mathieu amortiguada (**ec. 4.17**) es mucho más sencillo y se puede demostrar analíticamente). Utilizando el mismo tipo de expansión de Floquet para las otras variables hidrodinámicas y substituyendolo en las ecuaciones hidrodinámicas linealizadas se obtiene que ξ_n satisface:

$$A_n \xi_n = a(\xi_{n+1} + \xi_{n-1}) \quad (4.24)$$

donde a es la amplitud de la aceleración aplicada y $A_n = A_n(k, \nu, g, \frac{\sigma}{\rho}, s, \alpha, f)$. Siguiendo a Kumar y Tuckerman se impone la condición que la interfaz es una función real y se truncan las series de Fourier. Entonces la solución aproximada puede ponerse fácilmente en forma matricial con coeficientes reales

$$\mathbf{A}\vec{\xi} = a\mathbf{B}\vec{\xi} \quad (4.25)$$

siendo \mathbf{A} una matriz tridiagonal con coeficientes complejos dependiendo de muchos parámetros y \mathbf{B} una matriz en banda que contiene información de la excitación externa y con coeficientes 0, 1, 2 o -1 en el caso de excitación sinusoidal.

Usualmente se fija una amplitud de la excitación a y se halla s y por tanto la curva de estabilidad marginal $s(k, a) = 0$. Sin embargo en este problema los coeficientes dependen de forma fuertemente no lineal de s , por tanto es difícil hallarlo. Entonces el procedimiento que siguen Kumar y Tuckerman es fijar $s = 0$ y tomar, o bien $\alpha = 0$ (caso armónico), o bien $\alpha = \frac{f}{2}$ (caso subarmónico) y resolver numéricamente la ecuación de valores propios para a (**ec. 4.25**) resultando la curva de estabilidad marginal para los modos (curva de resonancia espacial) $a = a(k, s = 0, \alpha = 0)$ (lenguas armónicas) y $a = a(k, s = 0, \alpha = \frac{f}{2})$ (lenguas subarmónicas).

Es importante hacer notar que este modelo no toma en cuenta efectos de tamaño finito como fricción contra las paredes laterales y discretización de los modos. Como ya se hizo notar en la (**sec. 4.1**) el análisis de estabilidad lineal no refleja la saturación de la deformación de la interfaz debida a efectos no lineales ni explica la selección de los modos que llevan a la formación de la estructura.

Entre los formalismos que se siguen para estudiar el comportamiento en el régimen no lineal del problema de Faraday, está el clásico de Miles [11, 17] en el que se consideran representables los grados de libertad del sistema en un esquema hamiltoniano, y en éste se hace un desarrollo perturbativo haciendo énfasis en el análisis de la interacción resonante entre distintos modos (generalmente dos) con

el interés de estudiar el espacio de fases cercano a la frecuencia natural. Siendo el tratamiento hamiltoniano, éste se debe hacer en el sistema ideal y *a posteriori* (en las ecuaciones de amplitudes) se añade uno o más terminos fenomenológicos para dar cuenta de los efectos de amortiguamiento.

También puede usarse un formalismo de construcción de las ecuaciones de amplitudes haciendo desarrollos perturbativos en varias escalas de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que expresan la evolución del sistema ideal. Como conclusión también deben añadirse terminos fenomenológicos de amortiguamiento. Se han hecho estos tipos de desarrollos tanto en el régimen de ondas gravitatorias [16] como en el de capilares [19], para fluidos poco viscosos.

En particular, la teoría lineal predice un crecimiento exponencial de los modos inestables. Cerca del umbral el ritmo de crecimiento es cercano a cero y la amplitud de los modos marginales puede escribirse:

$$\xi(t) = A(t)e^{\imath\frac{f}{2}t} \quad (4.26)$$

Se puede separar la dependencia temporal lenta de las oscilaciones rápidas a la frecuencia de $\frac{f}{2}$ introduciendo una escala larga $T = \epsilon t$ siendo ϵ un parámetro adimensional pequeño. Entonces haciendo un desarrollo de las ecuaciones siendo ahora la amplitud de los modos marginalmente inestables una función de las dos escalas de tiempo.

$$\xi(t, T) = A(T)e^{\imath\frac{f}{2}t} \quad (4.27)$$

Una vez hecho este supuesto se puede derivar la ecuación de amplitudes [14] que en su forma normal es

$$A_T = -(\lambda + \imath\delta)A + \imath\frac{f_0\epsilon}{4}A^* + (\alpha + \imath\beta)|A|^2A \quad (4.28)$$

siendo λ el coeficiente de amortiguamiento, δ el coeficiente de desintonización de la resonancia, ϵ la amplitud de la excitación, todos supuestos de orden ϵ .

El término proporcional a A^* resulta de la rotura de la simetría de invarianza bajo translaciones temporales. α y β introducen correcciones dependientes del módulo de la amplitud al amortiguamiento λ y a la frecuencia propia f_0 .

Edwards y Fauve [22, 26] y Milner [19] encontraron ecuaciones de amplitud para la desestabilización de varios modos y su interacción considerando también la posibilidad de existencia de gradientes espaciales de la amplitud en una escala

de longitudes larga. Además Milner dedujo una función de Liapunov para el caso poco viscoso (la viscosidad la añadió de forma fenomenológica).

Aunque no se han deducido rigurosamente ecuaciones de amplitud para el caso muy viscoso, hay modelos de ecuaciones de amplitud que describen patrones de franjas [32].

Conclusiones y perspectivas.

Conclusiones.

En la memoria que presentamos se han estudiado fenómenos hidrodinámicos en interfaces excitadas periódicamente de forma mecánica. Dentro de estos fenómenos, dos tipos han sido los que nos han interesado: los de interfaces excitadas de forma perpendicular a la gravedad (a la que nos referimos en la memoria como problema del tubo) y los de interfaces excitadas paralelamente a la gravedad (problema de Faraday).

El primer caso (tubo) es un problema poco estudiado en la literatura y en consecuencia se han realizado experimentos que han permitido establecer de forma clara la fenomenología tanto en el régimen lineal como en el no lineal en un amplio rango de frecuencias. A través de la definición de un estado pseudocrítico que corresponde al *umbral de observación de la estructura* se ha podido estudiar la formación de estructuras en un régimen casi lineal tanto estacionarias como propagativas, existiendo una frecuencia umbral para que las estructuras sean propagativas, y su evolución. Se ha estudiado como aparecen modos transversales en los regímenes no lineales, además de defectos, alcanzando estados caóticos. Los resultados obtenidos se inscriben bien dentro del conjunto de fenómenos lejos del equilibrio conectados con la creación de estructuras espaciales periódicas, transitorias o estacionarias, desarrolladas a partir de estados homogéneos mediante la ruptura de simetrías.

También dentro del trabajo experimental se han puesto en evidencia otros fenómenos novedosos como es la aparición y formación de gotas suspendidas sobre la superficie líquida. Se ha hecho un estudio de estos fenómenos, concretamente sobre la velocidad de estas gotas, la interacción entre ellas, y sus umbrales de creación y destrucción. Además se ha observado la existencia de interacción

entre ondas de densidad y ondas interfaciales en rangos de frecuencias por encima de los utilizados en el resto de este trabajo.

Para este tipo de problema no existe en la literatura una teoría adecuada. Hemos desarrollado un primer modelo lineal irrotacional que nos ha permitido estudiar buena parte de los resultados del estado pseudocrítico definido experimentalmente, justificando en consecuencia que el régimen dinámico correspondiente se puede aproximar bien a un régimen lineal.

El análisis no lineal del problema implica la consideración de los efectos viscosos. Así, se ha desarrollado un segundo modelo lineal rotacional como paso imprescindible para el posterior análisis no lineal del problema. Las predicciones teóricas concuerdan bien con los resultados experimentales.

Concluimos, en el caso de interfaces excitadas perpendicularmente a la gravedad, que las características del fluido utilizado (CO_2 a presión de vapor y temperatura ambiente), la geometría del sistema (casi unidimensional) y la excitación mecánica externa aplicada (periódica, perpendicular a la gravedad y en el eje principal del tubo) hacen que el sistema estudiado y que se presenta en esta tesis sea muy interesante. En particular, por tener unos números de onda adimensionales muy elevados, y sin embargo no poderse considerar el sistema como infinito, presenta una fenomenología particular. La transición al caos se hace básicamente a través de la aparición de defectos en la estructura y también de gotas las cuales interactúan entre si y con las paredes teniendo una vida media muy larga.

Aunque contemporaneamente a la realización de esta tesis se han publicado modelos lineales rotacionales para el modelo de Faraday (1995) en esta tesis se propone un modelo lineal irrotacional para dicho problema de Faraday que nos ha permitido interpretar resultados experimentales recientes de otros autores (1992).

Adicionalmente se han desarrollado técnicas de medida adecuadas para el problema de Faraday, así como se han hecho estudios experimentales preliminares de inestabilidades secundarias en interfaces fluidas excitadas paralelamente a la gravedad en sistemas de viscosidad elevada.

Concluimos finalmente que, en el problema de Faraday, la viscosidad de los fluidos utilizados, el tamaño del sistema, y la excitación externa aplicada (periódica y paralela a la gravedad) hacen que el sistema pueda ser considerado como infinito y como tal, ser un sistema muy adecuado para comprobar experimentalmente los modelos rotacionales (en los que se consideraba el sistema como infinito) a los que ya nos hemos referido. Además la poca dependencia del sistema respecto de

la geometría ha hecho que se puedan investigar de forma consistente las inestabilidades secundarias.

Perspectivas.

Las perspectivas del problema del tubo son grandes tanto en el aspecto teórico como en el experimental.

En el aspecto experimental, se deben continuar las medidas en regímenes no lineales, especialmente haciendo énfasis en el estudio de los estados caóticos. Para ello se usaría el sistema de adquisición de imágenes citado en la memoria de forma que se evitaría el efecto estroboscópico consiguiendo el mayor número de imágenes relevantes posible. Además cabe estudiar a fondo la interacción de ondas de densidad con las ondas interfaciales. Además será interesante estudiar la respuesta de nuestro sistema frente a excitaciones no sinusoidales para estudiar interacciones resonantes entre ondas que no se pueden observar en ningún caso con una excitación sinusoidal.

Desde el punto de vista teórico los esfuerzos se centrarían en la construcción rigurosa de una ecuación de amplitudes así como en los aspectos señalados en la discusión correspondiente al capítulo teórico.. Todo esto se vera complementado con el análisis numérico del problema hasta ahora no realizado. Además en la linea del estudio no lineal del problema del tubo se pueden desarrollar estudios no perturbativos basados en métodos de resolución analítica de sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales como por ejemplo la aplicación de grupos continuos de simetrías.

En lo que hace referencia al problema de Faraday, de nuestro trabajo se concluye que el estudio en sistemas con alta viscosidad es muy útil en el sentido referido antes. Se han observado estados transitorios con estructuras espirales y otra fenomenología novedosa que merece especial atención en estudios futuros.

En general, será una linea a seguir, el estudio de los fenómenos de esta tesis para fluidos polares, o para fluidos no newtonianos, que darían una visión del problema más general, en el sentido que debe haber una fenomenología que se conservará respecto de los casos ya estudiados. A su vez presentarían una nueva fenomenología que tendría unas consecuencias más aplicadas debido al carácter de los materiales (pinturas, geles, etc) utilizados.

'... it seemed to me that there came a wave, greater and yet calmer than all the others, and it took me and lifted me from the ship, and bore me high upon its shoulders, and rolling to the land it cast me upon the turf, and then drained away, pouring back over the cliff in a great waterfall.'

UNFINISHED TALES J.R.R. Tolkien

Referencias

- [1] MILES, J. [1984] Resonantly forced surface waves in a circular cylinder. *J. Fluid Mech.* **149**, 15.
- [2] FUNAKOSHI, M. & INOUE, S. [1988] Surface waves due to resonant horizontal oscillation. *J. Fluid Mech.* **192**, 219.
NOBILI, M. & CILIBERTO, S. & COCCIARO, B. & FAETTI, S. & FRONZONI, L. [1988] Time-dependent surface waves in a horizontally oscillating container. *Europhys. Lett.* **7** (7), 587.
- [3] GONZÁLEZ-VIÑAS, W. & SALÁN, J. [1994] Surface waves periodically excited in a CO₂ tube. *Europhys. Lett.* **26** (9), 665.
- [4] GONZÁLEZ-VIÑAS, W. & SALÁN, J. [1994] Resonantly forced surface waves in a Natterer tube. Patterns, defects and squeezes. *Int. J. Bif. Chaos* **4** (5), 1113.
- [5] GONZÁLEZ-VIÑAS, W. & SALÁN, J. [1996] A linear rotacional model for externally excited capillary-gravity waves in a CO₂ tube. *En preparación*.
- [6] GONZÁLEZ-VIÑAS, W. & SALÁN, J. [1996] Drops on a resonantly forced interface. *En preparación*.
- [7] FARADAY, M. [1831] On the forms and states of fluids on vibrating elastic surfaces. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **52**, 319.
- [8] RAYLEIGH, LORD [1883] On the crispations of fluid resting upon a vibrating support. *Philos. Mag.* **16**, 50.
- [9] BENJAMIN, T.B. & URSELL, F. [1954] The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion. *Proc. R. Soc. London A* **225**, 505.

- [10] CILIBERTO, S. & GOLLUB, J.P. [1984] Pattern competition leads to chaos. *Phys. Rev. Lett.* **62** (4), 422.
- [11] MILES, J. [1984] Nonlinear Faraday resonance. *J. Fluid Mech.* **146**, 285.
- [12] EZERSKIĬ, A.B. & RABINOVICH, M.I. & REUTOV, V.P. & STAROBINETS, I.M. [1986] Spatiotemporal chaos in the parametric excitation of a capillary ripple. *Sov. Phys. JETP* **64** (6), 1228.
- [13] DOUADY, S. & FAUVE, S. [1988] Pattern selection in Faraday instability. *Europhys. Lett.* **6** (3), 221.
- [14] DOUADY, S. [1989] Instabilite Parametrique d'Ondes de Surface. *These de Doctorat. Université Paris VI*.
- [15] TUFILLARO, N.B. & RAMSHANKAR, R. & GOLLUB, J.P. [1989] Order-disorder transition in capillary ripples. *Phys. Rev. Lett.* **62** (4), 422.
- [16] NAGATA, M. [1989] Nonlinear Faraday resonance in a box with a square base. *J. Fluid Mech.* **209**, 265.
- [17] MILES, J. & HENDERSON, D. [1990] Parametrically forced surface waves. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **22**, 143.
- [18] CILIBERTO, S. & DOUADY, S. & FAUVE, S. [1991] Investigating space-time chaos in Faraday instability by means of the fluctuations of the driving acceleration. *Europhys. Lett.* **15** (1), 23.
- [19] MILNER, S.T. [1991] Square patterns and secondary instabilities in driven capillary waves. *J. Fluid Mech.* **225**, 81.
- [20] GOLLUB, J.P. [1991] Nonlinear waves: dynamics and transport. *Physica D* **51**, 501.
- [21] FAUVE & KUMAR & LAROCHE & BEYSENS & GARRABOS [1992] Parametric instability of a liquid-vapor interface close to the critical point. *Phys. Rev. Lett.* **68** (21), 3160.
- [22] EDWARDS, S. & FAUVE, S. [1993] Parametrically excited quasicrystalline surface waves. *Phys. Rev. E* **47** (2), 788.

- [23] MÜLLER, H.W. [1993] Periodic triangular patterns in the Faraday experiment. *Phys. Rev. Lett.* **71** (20), 3287.
- [24] GLUCKMAN & MARCQ & BRIDGER & GOLLUB [1993] Time averaging of chaotic spatiotemporal wave patterns. *Phys. Rev. Lett.* **71** (13), 2034.
- [25] EGO, V. & MANNEVILLE, S. & BECHHOEFER, J. [1994] Comunicación privada.
- [26] EDWARDS, S. & FAUVE, S. [1994] Patterns and quasipatterns in the Faraday experiment. *J. Fluid Mech.* **278**, 123.
- [27] KUMAR, K. & TUCKERMAN, L.S. [1994] Parametric instability of the interface between two fluids *J. Fluid Mech.* **279**, 49.
BEYER, J. & FRIEDRICH, R. [1995] Faraday instability: Linear analysis for viscous fluids. *Phys. Rev. E* **51** (2), 1162.
- [28] BECHHOEFER, J. & EGO, V. & MANNEVILLE, S. & JOHNSON, B. [1995] An experimental study of the onset of parametrically pumped surface waves in viscous fluids. *J. Fluid Mech.* **288**, 325.
- [29] DAUDET, L. & EGO, V. & MANNEVILLE, S. & BECHHOEFER, J. [1995] Secondary instabilities of surface waves on viscous fluids in the Faraday instability. *Europhys. Lett.* **32** (4), 313.
- [30] KUMAR & BAJAJ [1995] Competing patterns in the Faraday instability. *Phys. Rev. E* **52** (5), 4606.
- [31] FRIEDEL, H. & LAEDKE, E.W. & SPATSCHEK, K.H. [1995] Bifurcations and nonlinear dynamics of surface waves in Faraday resonance. *J. Fluid Mech.* **284**, 341.
- [32] ZHANG, W. & VINYALS, J. [1995] *Phys. Rev. Lett.* **74**, 690.
- [33] MILES, J. [1991] On the initial value problem for a wavemaker. *J. Fluid Mech.* **229**, 589.
- [34] TENG, M.H. & WU, T.Y., [1992] Nonlinear water waves in channels of arbitrary shape. *J. Fluid Mech.* **242**, 211.

- [35] GROVES, M.D. [1995] Theoretical aspects of gravity-capillary waves in non-rectangular channels. *J. Fluid Mech.* **290**, 377.
- [36] JAYARATNE, O.W. & MASON, B.J. [1964] The coalescence and bouncing of water drops at an air/water interface. *Proc. Roy. Soc. London A* **280**, 545.
- [37] MERMIN, N.D. [1979] The topological theory of defects in ordered media. *Rev. Mod. Phys.* **51** (3), 591.
- [38] KRINSKII, V.I. [1986] Auto-waves in biologically active media. *Nonlinear phenomena in plasma physics and hydrodynamics*, editor: Sagdeev, MIR, pp. 210-223.
- [39] COULLET, P. & GIL, L. & LEGA, J. [1989] Defect-mediated turbulence. *Phys. Rev. Lett.* **62** (14), 1619.
- [40] MANNEVILLE, P. [1990] Dissipative Structures and Weak Turbulence. *Academic Press, Inc.*
- [41] SMART, Ú & EARNSHAW [1991] Electrocapillary parametric forcing of interfacial waves. *Rev. Sci. Instrum.* **62** (6), 1663.
- [42] JIANG, Y.J. & UMEMURA, A. & LAW, C.K. [1992] An experimental investigation on the collision behaviour of hydrocarbon droplets. *J. Fluid Mech.* **234**, 171.
- [43] NEWELL, A.C. & PASSOT, T. & LEGA, J. [1993] Order parameter equations for patterns. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **25**, 399.
- [44] CROSS, M.C. & HOHENBERG, P.C. [1993] Pattern formation outside of equilibrium. *Rev. Mod. Phys.* **65** (3), 851.
- [45] HILBORN, R.C. [1994] Chaos and Nonlinear Dynamics. *Oxford University Press*.
BERGÉ, P. & POMEAU, Y. & VIDAL, C. [1986] Order within the Chaos. *Wiley*.
- [46] LAMB SIR H.. [1945] Hydrodynamics. *Dover*.
- [47] SCIPIO, L.A. [1967] Principles of Continua. *John Wiley & Sons*.

- [48] YIH C.S. [1969] Fluid Mechanics. *McGraw-Hill, Inc.*.
- [49] KINSMAN, B. [1984] Wind Waves. *Dover*.
- [50] LANDAU, L.D. & LIFSHITZ, E.M. [1987] Fluid Mechanics. *Pergamon Press.*.
- [51] SEGEL, L.A. [1987] Mathematics Applied to Continuum Mechanics. *Dover*, Part C.
- [52] LIN, C.C. & SEGEL, L.A. [1988] Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences. *SIAM Classics*.
- [53] VELARDE, M.G. & GARAZO, A.N. & CHRISTOV, C.I. [1991] Localized structures and solitary waves excited by interfacial stresses. *Spontaneous Formation of Space-Time Structures*, editores: Riste & Sherrington, Kluwer, pp. 263-272.
- [54] HAMMACK, J.L. & HENDERSON, D.M. [1993] Resonant interactions among water waves. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **25**, 55.
- [55] GONZÁLEZ-VIÑAS, W. [1995] Apuntes de clase de ondas de agua (Física de fluidos). *No publicado*.
- [56] HALE, J.K. [1963] Oscillations in Nonlinear Systems. *Dover*.
- [57] BLUMAN, G.W. & COLE, J.D. [1974] Similarity Methods for Differential Equations. *Appl. Math. Sci.*, 13, *Springer-Verlag*.
BLUMAN, G.W. & KUMEI, S. [1989] Symmetries and Differential Equations. *Appl. Math. Sci.*, 81, *Springer-Verlag*.
- [58] SAATY, T.L. & BRAM, J. [1981] Nonlinear Mathematics. *Dover*, pp. 219-235.
- [59] WEAST, R.C. (Ed.) [1983] CRC Handbook of chemistry and physics. *CRC Press, Inc.*.