

Aula 13 - Exercicios

Davi Wentrick Feijó

2024-05-20

Exercício 1

Sejam $V_{\min [\bar{y}_{\text{Reges}}]}$ e $V_{\min [\bar{y}_{\text{Regc}}]}$ as variâncias com os correspondentes B_{oh} e B_{oc} ótimos. Para uma *AASc*, mostre que

$$V_{\min [\bar{y}_{\text{Regc}}]} - V_{\min [\bar{y}_{\text{Reges}}]} = \sum_{h=1}^H a_h (B_{oh} - B_{oc})^2$$

onde

$$B_{0c} = \frac{\sum_{h=1}^H a_h B_{oh}}{\sum_{h=1}^H a_h}$$

e

$$a_h = \frac{W_h^2}{n_h} \sigma_{Xh}^2, h = \overline{1, N}$$

Resolucao:

$$\begin{aligned} V_{\min [\bar{y}_{\text{Regc}}]} - V_{\min [\bar{y}_{\text{Reges}}]} &= \\ &= \sum_{h=1}^H \frac{W_h^2}{n_h} \{ \sigma_{Yh}^2 - 2B_{0c} \sigma_{XYh} + B_{0c}^2 \sigma_{Xh}^2 \} - \sum_{h=1}^H \frac{W_h^2}{n_h} \{ \sigma_{Yh}^2 - 2B_{0h} \sigma_{XYh} + B_{0h}^2 \sigma_{Xh}^2 \} \\ &= \sum_{h=1}^H \frac{W_h^2}{n_h} \{ 2(B_{0h} - B_{0c}) \sigma_{XYh} + (B_{0c}^2 - B_{0h}^2) \sigma_{Xh}^2 \} \\ &= \sum_{h=1}^H \frac{W_h^2}{n_h} \{ 2(B_{0h} - B_{0c}) B_{0h} \sigma_{Xh}^2 + (B_{0c}^2 - B_{0h}^2) \sigma_{Xh}^2 \} \\ &= \sum_{h=1}^H \frac{W_h^2}{n_h} \sigma_{Xh}^2 \{ 2(B_{0h}^2 - B_{0c} B_{0h}) + B_{0c}^2 - B_{0h}^2 \} \\ &= \sum_{h=1}^H \frac{W_h^2}{n_h} \sigma_{Xh}^2 \{ B_{0h}^2 - 2B_{0c} B_{0h} + B_{0c}^2 \} = \sum_{h=1}^H a_h (B_{oh} - B_{oc})^2 \end{aligned}$$

Exercício 2

Deseja-se estimar a quantidade de açúcar que se pode extrair de um caminhão carregado de laranjas. Sorteiam-se 10 laranjas, pesa-se cada uma (X_i), extrai-se o suco e dosa-se a quantidade de açúcar em cada laranja (Y_i). Os resultados estão na tabela.

Laranja	X_i	Y_i
1	0,2000	0,0105
2	0,2400	0,0150
3	0,2150	0,0125
4	0,2100	0,0110
5	0,2500	0,0155
6	0,2300	0,0135
7	0,1950	0,0095
8	0,2050	0,0105
9	0,2100	0,0115
10	0,2200	0,0125

O peso total das laranjas é de 900 kg e foi obtido pela diferença do caminhão cheio para o caminhão vazio. Qual seria o total esperado de açúcar que esta carga de laranjas produziria? Dê um intervalo de confiança para o total de suco de laranja que será obtido com caminhão em questão.

Resolucao:

```
# Criando o dataframe a partir dos dados fornecidos
Xi = c(0.2000, 0.2400, 0.2150, 0.2100, 0.2500, 0.2300, 0.1950, 0.2050, 0.2100, 0.2200)
Yi = c(0.0105, 0.0150, 0.0125, 0.0110, 0.0155, 0.0135, 0.0095, 0.0105, 0.0115, 0.0125)

dados <- data.frame(Laranja = 1:10, Xi, Yi)
```

```
# Visualizando o dataframe
print(dados)
```

```
##   Laranja   Xi   Yi
## 1      1 0.200 0.0105
## 2      2 0.240 0.0150
## 3      3 0.215 0.0125
## 4      4 0.210 0.0110
## 5      5 0.250 0.0155
## 6      6 0.230 0.0135
## 7      7 0.195 0.0095
## 8      8 0.205 0.0105
## 9      9 0.210 0.0115
## 10     10 0.220 0.0125
```

Primeiro passo é estimar quantas laranjas tem no caminhao (ou seja nosso N), para isso vamos calcular a media de peso das 10 laranjas e usando o peso total do caminhao podemos dividir um pelo outro e sabe quantas laranjas caberiam em media em cada caminhao.

```
muX = mean(Xi) #peso medio de uma laranja da nosso amostra de 10
tx = 900 #Peso total das laranjas

N = tx/muX
```

```
## [1] 4137.931
```

Agora que temos nosso N podemos seguir para o calculo do B0

$$\hat{B}_0 = \frac{\sum_{i \in s} (Y_i - \bar{y})(X_i - \bar{x})}{\sum_{i \in s} (X_i - \bar{x})^2} = \frac{s_{XY}}{s_X^2}.$$

```
Sxy = sum((Yi-mean(Yi))*((Xi-mean(Xi))))

S2x = sum((Xi-mean(Xi))^2)

B0 = Sxy/S2x
```

```
## [1] 0.1111111
```

Com nosso β_0 estimado podemos calcular o estimador do tipo regressao:

$$\bar{y}_{\text{Reg}} = \bar{y} + \beta_0 (\mu_X - \bar{x})$$

```
yreg = mean(Yi) + B0*sum(Xi-mean(Xi)) #Media
```

```
## [1] 0.0122
```

Em seguida podemos calcular o estimador do total usando a formula:

$$T_{\text{Reg}} = \hat{\tau}_{\text{Reg}} = N\bar{y}_{\text{Reg}}$$

```
Tyreg = N*yreg #Total
```

```
## [1] 50.48276
```

Exercício 3

Um engenheiro florestal quer estimar a altura média das árvores de uma floresta, que está dividida em áreas de 100×100 m², com base em uma amostra de 10 áreas, de um total de 500 áreas. Todas as árvores da área sorteada são medidas e obtém-se os resultados abaixo.

Área	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_i	42	51	49	55	47	58	43	59	48	41
Y_i	8,89	8,76	9,04	8,49	8,58	9,10	8,31	8,58	8,73	8,86

- Estima a altura média das árvores usando estimadores do tipo regressão e razão.
- Dê as variâncias respectivas dos estimadores usados.
- Compare as propriedades dos estimadores. Neste caso, qual o mais recomendado?