Lista 2 Multivariada

Davi Wentrick Feijó

2023-05-02

Provar o seguinte teorema: Sejam A e B matrizes idempotentes. Então,

(a) $A + B$ é idempotente somente quando $AB = BA = 0$.

$$(A + B)^2 = A + B$$
$$A^2 + AB + BA + B^2 = A + B$$

Como A e B são idempotentes, temos $A^2 = A$ e $B^2 = B$.

$$A + AB + BA + B = A + B$$
$$AB + BA = A + B - B - A$$
$$AB + BA = 0$$

(b) $C = AB$ é idempotente somente quando $AB = BA$.

$$C^2 = ABAB = AB$$

Agora, queremos manipular essa equação para obter AB = BA. Para isso, podemos reescrever ABAB da seguinte forma

$$ABAB = AB$$

$$ABAB - AB = 0$$
$$AB(AB - I) = 0$$

Para essa equacao ser igual a zero temos duas opceos:

$$AB = 0 \qquad AB - I = 0 \Rightarrow AB = I$$

(c) $I - A$ é idempotente.

Temos que mostrar que:

$$(I - A)^2 = I - A$$

Vamos abrir o quadrado

$$I^2 - IA - AI + A^2 = I - A$$
$$I - 2A + A^2 = I - A$$

Como A é idempotente entao $A^2 = A$

$$I - 2A + A = I - A$$

$$I - A = I - A$$

Acabmos de mostrar que

$$(I - A)^2 = (I - A)$$