

Lista Entrega 2 - Multivariada

Davi Wentrück Feijó - 200016806

2023-04-25

4) Exercício 30 da Lista 3

Utilize a decomposição espectral $\Sigma = UDV^T$ para mostrar que $\sum_{i=1}^n \text{Var}(x_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, em que λ_i são os elementos da matriz diagonal D.

| | | | |
|----|----|----|----|
| 53 | 58 | 51 | 69 |
| 91 | 52 | 50 | 69 |
| 97 | 59 | 70 | 63 |
| 63 | 82 | 91 | 72 |

Vamos calcular a matriz de covariâncias!

| | | | |
|------------|---------|-----------|--------|
| 454.66667 | -127.00 | -45.33333 | -55.00 |
| -127.00000 | 174.25 | 236.50000 | 26.75 |
| -45.33333 | 236.50 | 373.66667 | 16.50 |
| -55.00000 | 26.75 | 16.50000 | 14.25 |

Vamos obter os autovetores e autovalores

```
## eigen() decomposition
## $values
## [1] 6.162642e+02 3.915484e+02 9.020790e+00 1.452954e-14
##
## $vectors
##      [,1]      [,2]      [,3]      [,4]
## [1,] 0.60105416 0.76927209 0.1886343 -0.1066369
## [2,] -0.50567684 0.19806846 0.3803186 -0.7486104
## [3,] -0.61168719 0.60319643 -0.2624244 0.4394613
## [4,] -0.09414674 -0.07171749 0.8665496 0.4848554
```

Obtendo a matriz diagonal dos autovalores D

| | | | |
|----------|----------|---------|---|
| 616.2642 | 0.0000 | 0.00000 | 0 |
| 0.0000 | 391.5484 | 0.00000 | 0 |
| 0.0000 | 0.0000 | 9.02079 | 0 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.00000 | 0 |

Matriz do autovetores P

| | | | |
|------------|------------|------------|------------|
| 0.6010542 | 0.7692721 | 0.1886343 | -0.1066369 |
| -0.5056768 | 0.1980685 | 0.3803186 | -0.7486104 |
| -0.6116872 | 0.6031964 | -0.2624244 | 0.4394613 |
| -0.0941467 | -0.0717175 | 0.8665496 | 0.4848554 |

Obtendo a matriz inversa dos autovetores P^{-1}

| | | | |
|------------|------------|------------|------------|
| 0.6010542 | -0.5056768 | -0.6116872 | -0.0941467 |
| 0.7692721 | 0.1980685 | 0.6031964 | -0.0717175 |
| 0.1886343 | 0.3803186 | -0.2624244 | 0.8665496 |
| -0.1066369 | -0.7486104 | 0.4394613 | 0.4848554 |

Obtendo a matriz de covariancias pela decomposição espectral por meio da seguinte equacao PDP^{-1}

| | | | |
|------------|---------|-----------|--------|
| 454.66667 | -127.00 | -45.33333 | -55.00 |
| -127.00000 | 174.25 | 236.50000 | 26.75 |
| -45.33333 | 236.50 | 373.66667 | 16.50 |
| -55.00000 | 26.75 | 16.50000 | 14.25 |

podemos perceber que voltamos para a matriz de covariancia

Calculando a variância total somando a diagonal da matriz de covariancia

| |
|----------|
| x |
| 1016.833 |

Calculando a variância explicada por cada dimensao dividindo os autovalores pela variancia total

| |
|-----------|
| x |
| 0.6060621 |
| 0.3850664 |
| 0.0088715 |
| 0.0000000 |

checando se a soma da variancias (diagonal da matriz de covariancia) é igual a soma da diagonal dos autovalores

```
## [1] TRUE
```

Realizando o problema anterior por meio do SVD

$A = U\Sigma V^T$ onde U = autovetores de AA^T e V = autovetores de $A^T A$ logo vamos calcular U e V

Matriz U

| | | |
|------------|------------|------------|
| 0.6010542 | 0.7692721 | 0.1886343 |
| -0.5056768 | 0.1980685 | 0.3803186 |
| -0.6116872 | 0.6031964 | -0.2624244 |
| -0.0941467 | -0.0717175 | 0.8665496 |

Matriz V

| | | |
|------------|------------|------------|
| 0.6010542 | 0.7692721 | 0.1886343 |
| -0.5056768 | 0.1980685 | 0.3803186 |
| -0.6116872 | 0.6031964 | -0.2624244 |
| -0.0941467 | -0.0717175 | 0.8665496 |

Calculando autovalores e autovetores

Autovetores de AA^T : 379781.5 153310.1 81.37466 0

Autovetores de $A^T A$: 379781.5 153310.1 81.37466 0

Como temos os mesmos autovalores para AA^T e $A^T A$ vamos calcular que é a matriz diagonal da raiz quadrada dos autovalores diferentes de 0

| | | |
|----------|----------|---------|
| 616.2642 | 0.0000 | 0.00000 |
| 0.0000 | 391.5484 | 0.00000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 9.02079 |

Juntando a matriz decomposta por meio da equacao $A = U\Sigma V^T$

| | | | |
|------------|---------|-----------|--------|
| 454.66667 | -127.00 | -45.33333 | -55.00 |
| -127.00000 | 174.25 | 236.50000 | 26.75 |
| -45.33333 | 236.50 | 373.66667 | 16.50 |
| -55.00000 | 26.75 | 16.50000 | 14.25 |

Comparando resultados com a funcao `svd()` do R

```
## [1] 616.2642 391.5484 9.0208 0.0000
```

```
##      [,1]      [,2]      [,3]      [,4]
## [1,] -0.6011 -0.7693 0.1886 -0.1066
## [2,] 0.5057 -0.1981 0.3803 -0.7486
## [3,] 0.6117 -0.6032 -0.2624 0.4395
## [4,] 0.0941 0.0717 0.8665 0.4849
```

```
##      [,1]      [,2]      [,3]      [,4]
## [1,] -0.6011 -0.7693 0.1886 -0.1066
## [2,] 0.5057 -0.1981 0.3803 -0.7486
## [3,] 0.6117 -0.6032 -0.2624 0.4395
## [4,] 0.0941 0.0717 0.8665 0.4849
```

Calculando o traco da matriz de covariancias

```
## [1] 1016.833
```

Calculando o traco da matriz D por meio da funcao `svd()`

```
## [1] 1016.833
```

Calculando o traco da matriz D manualmente feito pelo R

```
## [1] 1016.833
```

Podemos ver que todos os resultados batem tanto no SVD quanto na decomposicao por autovalores!

5) Exercício 31 da Lista 3

Reproduza o estudo de redução de dimensão SVD de imagens, utilizando duas imagens. A primeira com poucos detalhes (abstrata, por exemplo) e a segunda com vários detalhes. Justifique sua escolha de dimensão na redução de cada imagem e compare os resultados. Você achou a redução compatível com as imagens utilizadas? Justifique.

Para realização da questão, foi utilizado o seguinte código com base no código disponibilizado no aprender pelo professor!

#função para comprimir a imagem (img é a imagem escolhida e x é a quantidade de dimensões)

```
compression <- function(img,x) {  
  img = readImage(img) %>%  
    rgb_2gray()  
  img_svd = svd(img)  
  D = diag(img_svd$d)  
  U = img_svd$u  
  V = img_svd$v  
  U5 <- as.matrix(U[,1:x])  
  V5 <- as.matrix(V[,1:x])  
  D5 <- diag(img_svd$d[1:x])  
  img_gray <- U5 %*% D5 %*% t(V5)  
  
  cat("Com x = ",x,"a imagem contem",tr(D5)/tr(D) * 100, "% da variancia total")  
  return(img_gray)  
}
```

As imagens escolhidas foram:



```
imagem_comprimida = compression(img = "barco.jpg",x = 20)
```

```
## Com x = 20 a imagem contem 60.76406 % da variancia total
```




```
imagem_comprimida = compression(img = "imagem_abstrata.jpg", x = 70)
```

```
## Com x = 70 a imagem contem 48.15103 % da variancia total
```



Os valores de $x = 20$ e $x = 70$ foram escolhidos pois eu acredito que são os valores em que dá pra identificar melhor o que a imagem quer representar! Vale notar a diferença de complexidade entre as imagens, enquanto que o barco foi necessário somente 20 para ter uma boa representação da imagem original, o quadro precisou de 70 para que ficasse claro o que era pra ser representado