目录

1 定义

1.1 函数的变分

函数 $y(x)$ 的变分定义为 $\delta y = y_1(x) - y(x)$，其中 $y_1(x)$ 是"靠近"$y(x)$ 的一个函数，即 δy 是同一自变量 x 处相邻函数的函数值之差。

注意:

$(\delta y)' = y_1'(x) - y'(x) = \delta y'$

$(\delta y)^n = \delta y^n$

1.2 泛函的变分

定义泛函 $J[y(x)] = \int_a^b f(x, y, y')\mathrm{d}x$，则增量 $\triangle J = \int_a^b [f(x, y+\delta y, y'+\delta y') - f(x, y, y')]\mathrm{d}x = \int_a^b [\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(\delta y)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}\delta y \delta y' + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}(\partial y')^2 + \cdots]\mathrm{d}x$

舍弃掉 δy 和 $\delta y'$ 二次项及以上的高次项，得到关于 δy 和 $\delta y'$ 一次项的和，称为 $J[y(X)] = \int_a^b f(x, y, y')\mathrm{d}x$ 的一阶变分，简称为泛函的变分，即 $\delta J = \int_a^b (\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y')\mathrm{d}x$。

1.3 泛函变分的基本运算法则

泛函变分运算法则与微分运算法则基本相同

$(\delta F_1 + F_2) = \delta F_1 + \delta F_2$

$(\delta F)^n = nF^n - 1\delta F$

$(\delta F_1 \cdot F_2) = F_2 \delta F_1 + F_1 \delta F_2$

$(\delta(\frac{F_1}{F_2}) = \frac{1}{F_2^2}(F_2 \delta F_1 - F_1 \delta F_2)$

$\delta \int_a^b F\mathrm{d}x = \int_a^b \delta F\mathrm{d}x$

1.4 泛函变分举例

计算泛函 $J[y(x)] = \int_{-1}^{1}(y'e^7 + xy^2)\mathrm{d}x$ 的变分

$\delta J[y(x)] = \delta\int_{-1}^{1}(y'e^7 + xy^2)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}(2xy\delta y + e^7\delta y')\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}(2xy\delta y)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1}e^7\mathrm{d}\delta y = \int_{-1}^{1}(2xy\delta y)\mathrm{d}x$, 最后一步利用上边界上函数变分为 0。

2 欧拉—拉格朗日方程

欧拉—拉格朗日方程是泛函极值问题的必要条件, 假设 $J[y(x)]$ 的极值问题的解为 $y = y(x)$, 现在推导这个解所满足的微分方程。

$\delta J = \int_a^b(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y')\mathrm{d}x = 0$, 将第二项分部积分得到 $\int_a^b(\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y')\mathrm{d}x = \int_a^b\frac{\partial f}{\partial y'}\mathrm{d}\delta y$, 因为 $\delta y(a) = 0$, $\delta y(b) = 0$, 所以 $\int_a^b(\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y')\mathrm{d}x = -\int_a^b\delta y\mathrm{d}\frac{\partial f}{\partial y'}$, 因此 $\delta J = \int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}\delta y\mathrm{d}x - \int_a^b\delta y\mathrm{d}\frac{\partial f}{\partial y'} = \int_a^b(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}\frac{\partial f}{\partial y'}}{\mathrm{d}x})\delta y\mathrm{d}x = 0$, 因为对于任何函数 δy 都成立, 故 $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}\frac{\partial f}{\partial y'}}{\mathrm{d}x} = 0$, 这就是欧拉—拉格朗日方程。