用 $AMIB$ 方法求解椭圆界面问题

November 4, 2018

目录

1 摘要

本文介绍了使用分片常系数求解二维椭圆界面问题，并且这个问题有二阶精度。这种增广的 MIB 与标准的 MIB,IIM, 明显跳跃 IIM 在一些关键性质有着无缝链接，并且有新的快速界面算法。基于 MIB, 零阶和一阶跳跃点都会强制通过任意的凸界面，并在靠近界面的 Cartesian nodes 处得到虚拟值。通过使用这样的虚拟值，提出了一个简单的程序来重建笛卡尔导数跳量作为辅助变量，并将它们与跳量校正的泰勒级数展开耦合，这使我们能够使跨越界面的中心差分是二阶的。此外，通过使用 Schur 补来'解除'辅助变量和函数值的代数计算，通过使用快速傅立叶变换(FFT)可以有效地反演离散拉普拉斯算子。在我们的数值实验中发现，求解辅助系统的迭代次数与网格尺寸的关系不大。$AMIB$ 优点

1).CPU 的时间明显减少; 2). 在处理复杂界面问题时保二阶精度;

2 简介

2.1 模型

$$-\nabla\cdot(\beta\nabla u)=f(x,y),\ \ (x,y)\in\Omega \tag{1}$$

Dilichlet 边界条件

$$u(x,y)=g(x,y),\ \ (x,y)\in\partial\Omega \tag{2}$$

2.2 符号

符号说明	
符号	含义
Ω	二维长方形区域
nx	x 方向剖分的段数
ny	y 方向剖分的段数
hx	x 方向每段的长度
hy	y 方向每段的长度
μ	$the\ viscosity\ coefficient$
k	$the\ permeability\ tensor$
NC	代表 $cell$ 的个数
NE	代表总的 $edge$ 的个数

3 模型

$$\begin{cases} \frac{\mu}{k}\mathbf{u} + \nabla p = 0 \quad in\ \Omega = (0,1)\times(0,1) \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = f \quad in\ \Omega \\ \mathbf{u} = 0 \quad on\ \partial\Omega \end{cases}$$

且有

$$\int_\Omega f dxdy = 0$$

记 u 为 $\mathbf{u}$ 在 x 方向的分量,v 为 $\mathbf{u}$ 在 y 方向的分量, 则有

$$\begin{cases} \frac{\mu}{k}\cdot u + \partial_x p = 0 \quad (1) \\ \frac{\mu}{k}\cdot v + \partial_y p = 0 \quad (2) \\ \partial_x u + \partial_y v = f \quad (3) \end{cases}$$

4 离散后组装矩阵

利用一阶向前差分把方程变成差分方程,现在从 $edge$ 和 $cell$ 的角度考虑模型。

对于 (1), 从内部纵向 $edge$ 的角度考虑: 我们需要找到内部纵向 $edge$ 所对应的左手边的 $cell$ 和右手边的 $cell$. 左右两边的 $cell$ 所对应的 p 分别记为 p_l、p_r.u 为 $edge$ 的中点,记为 u_m。按照 $mesh$ 里的编号规则排序。

则每条内部边上所对应的差分方程为:

$$\frac{\mu}{k} \cdot u_m + \frac{p_r - p_l}{hx} = 0$$

对于 (2), 从内部横向 $edge$ 的角度考虑: 我们需要找到内部横向 $edge$ 所对应的左手边的 $cell$ 和右手边的 $cell$. $cell$ 所对应的 p 与 (1) 中的相同。v 为 $edge$ 的中点,记为 v_m。

则每条内部边上所对应的差分方程为:

$$\frac{\mu}{k} \cdot v_m + \frac{p_l - p_r}{hy} = 0$$

对于 (3), 从 $cell$ 的角度考虑: 由于单元是四边形单元, 我们记单元所对应边的局部编号为 [0,1,2,3] (StructureQuadMesh.py 里的网格),第 i 个单元所对应的边记为 $e_{i,0}, e_{i,1}, e_{i,2}, e_{i,3}$。

则 (3) 式第 i 个单元所对应的差分方程为:

$$\frac{u_{e_{i,1}} - u_{e_{i,3}}}{hx} + \frac{v_{e_{i,2}} - v_{e_{i,0}}}{hy} = f_i$$

我们需要生成一个 $(NE + NC) \times (NE + NC)$ 的系数矩阵,把它看成分块矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned} A_{1,1} &: NE \times NE \\ A_{1,2} &: NE \times NC \\ A_{2,1} &: NC \times NE \\ A_{2,2} &: NC \times NC \end{aligned}$$

$A_{1,1}$ 对应的是 (1), (2) 两式的第一项,即含有 u, v 的项,A_12 对应的是 (1), (2) 两式的第二项。

参考文献