# 重心坐标与基函数

January 6, 2019

## 1 重心坐标

重心坐标是构造基函数的基础,所以首先引入重心坐标。

数学中,重心坐标是由单形(如三角形或四面体等)顶点定义的坐标。经典的重心坐标是一种定义在“多边形”上的坐标,而不局限于具体的坐标系。“多边形”内的点由“多边形”各顶点线性表出,组合系数便是重心坐标。下面定义重心坐标,以平面上的多边形为例。

令 $P$ 是一个平面上的 $n$ 边形,其顶点记为 $\{X_i\}_{i=0,\cdots,n}$, $n \geq 2$, 且以逆时针顺序标记。对任意的 $X \in P$, 定义函数 $\lambda_i(x) : P \longrightarrow R,\ i = 0, \cdots, n$. 若

$$X = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(X) X_i,\ \ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(X) \equiv 1.$$

则称 $\lambda_i(X)$ 为齐次坐标,此外,若 $\lambda_i(X) \geq 0,\ i = 0, \cdots, n$, 则称 $\lambda_i(X)$ 为重心坐标。显然可以将上式看作一个以 $\lambda_i(X)$ 为未知量,$X$ 和 $X_i$ 为已知量的非齐次线性方程组,即重心坐标是方程组的非负解。当 $n = 2$ 时,

$$\begin{cases} \lambda_0(X)x_0 + \lambda_1(X)x_1 + \lambda_2(X)x_2 = x, \\ \lambda_0(X)y_0 + \lambda_1(X)y_1 + \lambda_2(X)y_2 = y, \\ \lambda_0(X) + \lambda_1(X) + \lambda_2(X) = 1. \end{cases}$$

即

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0(X) \\ \lambda_1(X) \\ \lambda_2(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

由 $\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的非奇异可知,$\lambda_0(X)$,$\lambda_1(X)$,$\lambda_2(X)$ 存在唯一。

重心坐标的几何意义:

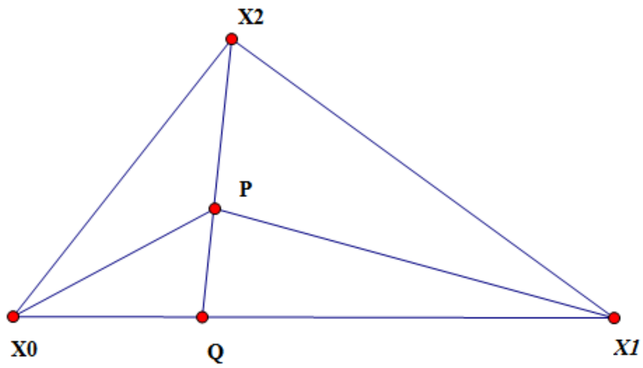


图 1

任取 $P \in \triangle_{X_0X_1X_2}$, 延长 $X_2P$ 使之与 $X_0X_1$ 相交于点 $Q$, 则

$$\lambda_2 = \frac{PQ}{X_2P} = \frac{S_{\triangle PX_0X_1}}{S_{\triangle X_0X_1X_2}}.$$

类似的可以定义一维,高维的重心坐标,定义高维重心坐标时,顶点要遵循右手法则。

# 2 单纯形上的基函数

区间 $[x_0, x_1]$ 上 $p$ 次拉格朗日基函数的构造

首先构造一维区间 $[x_0, x_1]$ 上的重心坐标,

$$\begin{cases} \lambda_0(x)x_0 + \lambda_1(x)x_1 = x, \\ \lambda_0(x) + \lambda_1(x) = 1. \end{cases}$$

则,

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0(x) \\ \lambda_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix},$$

因此,

$$\lambda_0(x) = \frac{\begin{vmatrix} x & x_1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0}, \quad \lambda_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x_0 - x}{x_0 - x_1} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

$\forall x \in [x_0, x_1]$, 则 $\lambda_0(x) \geq 0$,$\lambda_1(x) \geq 0$. 并且

$$\begin{cases} \lambda_0(x_0) = 1, \lambda_0(x_1) = 0, \\ \lambda_1(x_0) = 0, \lambda_1(x_1) = 1. \end{cases}$$

易知, $\lambda_0, \lambda_1$ 都是关于 $x$ 的线性函数 (这里指一次函数)。

重心坐标关于 $x$ 的导数为:

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_0}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x_1 - x_0}, \quad \frac{\mathrm{d}\lambda_1}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x_1 - x_0}.$$

区间 $[x_0, x_1]$ 上的 $p \geq 1$ 次基函数共有 $n_{dof} = p + 1$ 个,

其插值基函数的计算公式如下:

$$\phi_{m,n} = \frac{p^p}{m!n!} \prod_{l_0=0}^{m-1} (\lambda_0 - \frac{l_0}{p}) \prod_{l_1=0}^{n-1} (\lambda_1 - \frac{l_1}{p}).$$

其中 $m \geq 0$, $n \geq 0$, 且 $m + n = p$, 即 $\phi_{m,n}$ 是一个 $m + n = p$ 次多项式。

由 $\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} = \frac{l_0}{p}$ 得到

$$x = x_1 - \frac{l_0}{p}(x_1 - x_0) = (1 - \frac{l_0}{p})x_1 + \frac{l_0}{p}x_0.$$

因为 $(1 - \frac{l_0}{p}) + \frac{l_0}{p} = 1$, 故 $x \in [x_0, x_1]$.

由 $\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{l_1}{p}$ 得到

$$x = x_0 + \frac{l_1}{p}(x_1 - x_0) = \frac{l_1}{p})x_1 + (1 - \frac{l_1}{p})x_0.$$

因为 $(1 - \frac{l_1}{p}) + \frac{l_1}{p} = 1$, 故 $x \in [x_0, x_1]$.

因此插值基函数过节点 $x_1, \frac{(p-1)x_1 + x_0}{p}, \frac{(p-2)x_1 + 2x_0}{p}, \frac{(p-3)x_1 + 3x_0}{p}, \cdots, x_0$, 即把区间 $[x_0, x_1]$ 均匀等分, 步长为 $\frac{(x_1 - x_0)}{p}$.

这个 $p$ 次插值基函数实际上就是这种形式的

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_p)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_p)}$$

拉格朗日插值基函数。

$p$ 次基函数的面向数组的计算构造向量:

$$P = (\frac{1}{0!}, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \cdots, \frac{1}{p!})$$

构造矩阵:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 \\ \lambda_0 - \frac{1}{p} & \lambda_1 - \frac{1}{p} \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_0 - \frac{p-1}{p} & \lambda_1 - \frac{p-1}{p} \end{pmatrix}$$

对 $A$ 的每一列做累乘运算, 并左乘由 $P$ 形成的对角矩阵, 得矩阵:

$$B = \mathrm{diag}(P) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 \\ \prod_{l=0}^{1} (\lambda_0 - \frac{l}{p}) & \prod_{l=0}^{1} (\lambda_1 - \frac{l}{p}) \\ \vdots & \vdots \\ \prod_{l=0}^{p-1} (\lambda_0 - \frac{l}{p}) & \prod_{l=0}^{p-1} (\lambda_1 - \frac{l}{p}) \end{pmatrix}$$

易知, 只需从 $B$ 的每一列中各选择一项相乘 (要求二项次数之和为 $p$), 再乘以 $p^p$ 即可得到相应的基函数, 其中取法共有

$$n_{dof} = p + 1$$

构造指标矩阵:

$$I = \begin{pmatrix} p & 0 \\ p-1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & p \end{pmatrix}$$

由 $I$ 可知一共有 $\overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{p+1}$ 种选择。

## 3 三角形单元

下面考虑二维三角形单元的重心坐标。

给定三角形单元 $\tau$, 其三个顶点 $\mathbf{x}_0 := (x_0, y_0)$, $\mathbf{x}_1 := (x_1, y_1)$ 和 $\mathbf{x}_2 := (x_2, y_2)$ 逆时针排列, 且不在同一条直线上, 那么向量 $\overrightarrow{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_1}$ 和 $\overrightarrow{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_2}$ 是线性无关的. 这等价于矩阵

$$A = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

非奇异. 又 $|A| \neq 0$, 故任给一点 $\mathbf{x} := (x, y) \in \tau$, 下面的线性方程组

$$A \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

有唯一的一组解 $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. 因此对任意二维点 $\mathbf{x} \in \tau$, 有

$$\begin{cases} \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = x, \\ \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = y, \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1. \end{cases}$$

故 $\lambda_0(x_0, y_0) + \lambda_1(x_1, y_1) + \lambda_2(x_2, y_2) = (x, y)$,

$$\mathbf{x} = \lambda_0(\mathbf{x})\mathbf{x}_0 + \lambda_1(\mathbf{x})\mathbf{x}_1 + \lambda_2(\mathbf{x})\mathbf{x}_2 \text{ 且} \lambda_0(\mathbf{x}) + \lambda_1(\mathbf{x}) + \lambda_2(\mathbf{x}) = 1.$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ 称为点 $\mathbf{x}$ 关于点 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$ 的重心坐标.

易知, $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ 都是关于 $\mathbf{x}$ 的线性函数, 且有

$$\begin{array}{lll}\lambda_0(\mathbf{x}_0)=1, & \lambda_0(\mathbf{x}_1)=0, & \lambda_0(\mathbf{x}_2)=0\\ \lambda_1(\mathbf{x}_0)=0, & \lambda_1(\mathbf{x}_1)=1, & \lambda_1(\mathbf{x}_2)=0\\ \lambda_2(\mathbf{x}_0)=0, & \lambda_2(\mathbf{x}_1)=0, & \lambda_2(\mathbf{x}_2)=1\end{array}$$

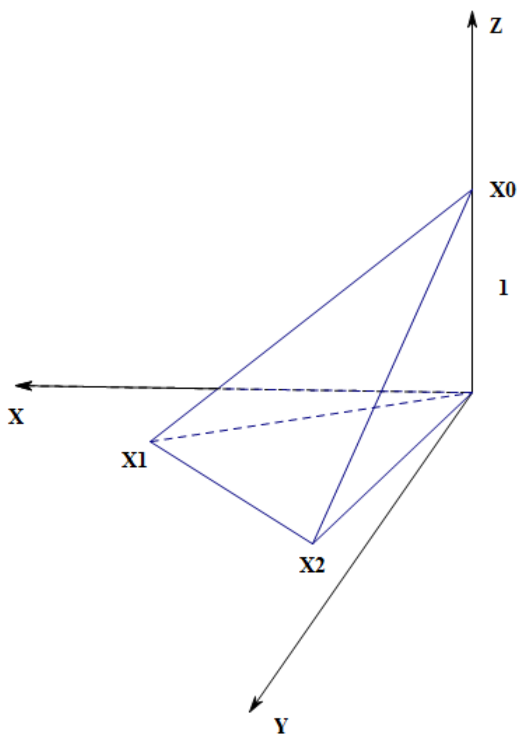


图 2

也可以通过下面的方式计算重心坐标。

设 $\lambda_0(x,y)=ax+by+c$, 则

$$\begin{cases}\lambda_0(x_0,y_0)=ax_0+by_0+c=1,\\ \lambda_0(x_1,y_1)=ax_1+by_1+c=0,\\ \lambda_0(x_2,y_2)=ax_2+by_2+c=0.\end{cases}$$

从而可以求出 $a$,$b$,$c$, 进而求出 $\lambda_0$. 同理可得 $\lambda_1$,$\lambda_2$.

为了考虑变化率的大小和方向,引入梯度。梯度的大小是变化率最大的值,梯度的方向是变化率最大的方向。

$\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2$ 关于 $\mathbf{x}$ 的梯度分别为:

$$\nabla\lambda_0 = \frac{1}{2|\tau|}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)W$$
$$\nabla\lambda_1 = \frac{1}{2|\tau|}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_2)W$$
$$\nabla\lambda_2 = \frac{1}{2|\tau|}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)W$$

其中

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

三角形单元上的 $p$ 次基函数公式

给定三角形单元上的一个重心坐标 $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, 所有 $p \geq 1$ 次基函数的计算公式如下:

$$\phi_{m,n,k} = \frac{p^p}{m!n!k!}\prod_{l_0=0}^{m-1}(\lambda_0 - \frac{l_0}{p})\prod_{l_1=0}^{n-1}(\lambda_1 - \frac{l_1}{p})\prod_{l_2=0}^{k-1}(\lambda_2 - \frac{l_2}{p}).$$

其中 $m \geq 0$, $n \geq 0$, $k \geq 0$, 且 $m+n+k=p$.

因为 $\lambda_0(x_2,y_2)=0, \lambda_1(x_0,y_0)=0, \lambda_2(x_1,y_1)=0$, 因此插值基函数一定过节点 $(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$.
因为 $\lambda_0(\frac{x_1+x_2}{2})=0, \lambda_1(\frac{x_0+x_2}{2})=0, \lambda_2(\frac{x_0+x_1}{2})=0$, 因此插值基函数过节点 $(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}),(\frac{x_0+x_2}{2},\frac{y_0+y_2}{2}),(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{y_0+y_1}{2})$

$\cdots$ 即把三角形单元均匀剖分。

# 参考文献