第一章　　线性代数的背景

November 7, 2018

1

1.1 矩阵

在这一章中,向量空间是定义在复数域上的,$\mathsf{C}^{n\times m}$ 表示由所有定义在 C 上的 $n\times m$ 的矩阵构成的向量空间。

加法:$C=A+B$,这里的 A,B 和 C 都 $\in \mathsf{C}^{n\times m}$,即 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

数乘:$C=\alpha A$,即 $c_{ij}=\alpha a_{ij}$.

乘法:$C=AB$,这里 A$\in$ $\mathsf{C}^{n\times m}$,B$\in$ $\mathsf{C}^{m\times p}$,C$\in$ $\mathsf{C}^{n\times p}$,即 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}$.

a_{*j} 表示矩阵 A 的第 j 列,a_{i*} 表示矩阵 A 的第 i 行。A^H 表示矩阵 A 的转置共轭矩阵,即 $A^H=\bar{A}^H=\bar{A^T}$.

1.2 方阵与特征值

I 表示单位矩阵,若 CA=AC=I,则称矩阵 C 为矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1}.

$det(A)=a_{11}A_{11}+a_{11}A_{11}+\cdots+(-1)^{1+n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}det(A_{1j})$

如果 $det(A)=0$,则称矩阵 A 是奇异的,否则称 A 为非奇异的。

$det(AB)=det(A)det(B)$

$det(A^T)=det(A)$

$det(\alpha A)=\alpha^n det(A)$

$det(\bar{A})=\overline{det(A)}$

$det(I)=1$

1.2.1 定义

设 A 是 n 阶方阵,如果存在数 λ 和非零 n 维列向量 u,使得 $Au=\lambda u$ 成立,则称 λ 是 A 的一个特征值,非零向量 u 称为矩阵 A 的对应于特征值 λ 的特征向量。

$p_A(\lambda)=det(A-\lambda I)$ 称为矩阵 A 的特征多项式,λ 是矩阵 A 的特征值当且仅当 $det(A-\lambda I)\equiv p_A(\lambda)=0$,即 λ 是矩阵 A 的特征多项式的一个根。

矩阵 A 的谱是指 A 的所有特征值组成的集合,记为 $\sigma(A)$。

矩阵 A 是奇异的当且仅当 A 有一个特征值为 0。

1.2.2 命题

矩阵 A 是非奇异的当且仅当 A 可逆。

矩阵 A 的谱半径等于矩阵 A 的特征值的模的最大值,记为 $\rho(A)$,矩阵 A 的迹等于 A 的所有对角线元素的和,记为 $tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$,也等于 A 的所有特征值的和。

1.2.3 命题

如果 λ 是矩阵 A 的特征值,那么 $\bar{\lambda}$ 是矩阵 A^H 的特征值。

如果存在一个非零列向量 x 使得 $Ax=\lambda x$,则称 λ 为一个右特征值,x 称为矩阵 A 的特征值 λ 的右特征向量。如果存在一个非零列向量 y 使得 $yA=y\lambda$,则称 λ 为一个左特征值,y 称为矩阵 A 的特征值 λ 的左特征向量。

$Au=\lambda u, v^H A=\lambda v^H.$

$u^H A^H=\bar{\lambda} u^H, A^H v=\bar{\lambda} v.$

1.3 矩阵范数

设矩阵 A$\in$ $\mathbb{C}^{n\times m}$,定义矩阵 A 的范数 $\parallel A\parallel_{pq}=max\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_q}$,这里 $x\neq 0, x\in \mathbb{C}^m$. 范数满足下面的性质:

$\parallel A\parallel\geq 0, \forall A\in \mathbb{C}^{n\times m}$,并且 $\parallel A\parallel=0$ 当且仅当 A=0.

$\parallel \alpha A\parallel=|\alpha|\parallel A\parallel, \forall A\in \mathbb{C}^{n\times m}, \forall\alpha\in \mathbb{C}$.

$\parallel A+B\parallel\leqslant\parallel A\parallel+\parallel B\parallel, \forall A, B\in \mathbb{C}^{n\times m}$.

当 $q=p$ 时的范数称为 p-范数,有 $\parallel AB\parallel_p\leqslant\parallel A\parallel_p\parallel B\parallel_p$。

对于方阵 A,有 $\parallel A^k\parallel_p\leqslant\parallel A\parallel_p^k$,如果 A^k 的 p-范数小于 1,那么 A^k 收敛到 0。

矩阵 A 的 Frobenius 范数定义为 $(\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|^2)^{1/2}$。

$\parallel A\parallel_1=max\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$,j=1,2,$\cdots$,m.

$\parallel A\parallel_\infty=max\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|$,i=1,2,$\cdots$,n.

$\parallel A\parallel_2=[\rho(A^H A)]^{1/2}=[\rho(AA^H)]^{1/2}$

$\parallel A\parallel_F=[tr(A^H A)]^{1/2}=[tr(AA^H)]^{1/2}$

设 A$\in$ $\mathbb{C}^{n\times m}$,$A^H A$ 的特征值是非负的,令 q=min(n,m),$A^H A$ 的 q 个非负特征值的算术平方根叫作 A 的奇异值。$\parallel A\parallel_2$ 等于矩阵 A 的最大的奇异值,记为 σ_1.

1.4 子空间,秩和核

向量集 G=$a_1, a_2, \cdots, a_q$ 的所有线性组合是一个向量子空间,叫做 G 的线性扩张。

$spanG=spana_1, a_2, \cdots, a_q=z\in \mathbb{C}^n|z=\sum_{i=1}^{q}\alpha_i a_i, \alpha_{i i=1,2,\cdots q}\in \mathbb{C}^n$. 如果 $a_1, a_2, \cdots, a_q$ 是线性无关的,那么 $a_1, a_2, \cdots, a_q$ 叫做 $spanG$ 的一组基。

给定两个向量子空间 S_1 和 S_2,它们的和 $S=S_1+S_2$ 也是一个向量子空间,定义为 S_1 中的所有向量和 S_2 中的所有向量的和。两个向量子空间的交集还是一个子空间,如果交集为 0,则称 S_1 与 S_2 的和为直和,记为 $S=S_1\bigoplus S_2$. 当 S 等于 C^n 时,$\forall x\in C^n$,存在唯一的向量 $x_1\in S_1$ 和 $x_2\in S_2$,使得 $x=x_1+x_2$,即分解是唯一的.

算子 $P:x\longrightarrow x_1$,是线性的,并且有 $P^2=P$,即是幂等的。