

2021 Final Exam for Scientific Computing

誇りと驕り

判断题

1. 数值求解常微分方程时，显式格式均不是绝对稳定的，时间步长过大时总会不稳定，隐式格式总是绝对稳定的. ()
2. 在针对一个具体问题建模并数值求解的过程中，应该根据建模误差和观测误差相应的确定数值格式的精度，通常数值格式的精度应小于建模和测量误差，但不需要过于追求数值精度. ()
3. Runge 现象表明存在闭区间上的连续函数 f 使得对给定的 $\epsilon > 0$ ，无论多高阶的(插值)多项式都不能使误差一致的小于 ϵ . ()
4. 为了使条件数尽量的小，应该在建立线性方程组时使线性方程组不同方程的系数数量级尽量接近. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 100 & 300 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 200 & 200 \\ 100 & 300 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2000 & 2000 \\ 100 & 300 \end{pmatrix}$ 中条件数最小的是 $\begin{pmatrix} 200 & 200 \\ 100 & 300 \end{pmatrix}$. ()
5. 在求解特征值时，幂法总能求得最大特征值. ()
若想要算法快速收敛，只需谱半径 $\rho(A) \ll 1$. ()
6. 求序列的离散 Fourier 变换的过程中，若其长度为大素数则不适合使用快速 Fourier 变换. ()
在可以自由选择序列长度时，通常将迭代序列长度选为 2 的幂次. ()
7. 在求解线性方程组时，若能对方程的解有较好的猜测值，则应优先考虑使用迭代法求解. ()
对 $x_0 = x_N, x_1 = x_{N+1}, x_{j+1} + 4x_j + x_{j-1} = f_j$ 进行求解时，Jacobi 迭代法总是收敛的且每迭代一次误差下降约一半. ()
8. 使用 Newton 法求解优化问题的主要问题有：其是局部收敛的；计算二阶导数将会付出较大的计算代价. ()

9. 使用最小二乘法求解线性方程组 $Ax = b$ 时, 应先对 A 进行 QR 分解 $A = QR$, 然后求解 $Rx = Q^*b$, 其中 Q^* 是不完全正交矩阵. ()

10. 对积分方程 $\int_0^T K(x-y)f(y)dy = g(x)$ 进行数值离散得到线性方程组时, 若以 T 为周期的函数 $K(x)$ 充分光滑, 则线性方程组的系数矩阵具有很大的条件数, 因而方程的数值解可能具有很大的相对误差. ()

填空题

1. 在使用 LU 分解求解线性方程组时, 可以使用 _____ 来控制迭代的误差. 对稠密矩阵 A 的 LU 分解、QR 分解、特征分解和矩阵求逆的计算复杂度的大小关系是 _____.
2. 在多项式插值时, 若已知经过点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})$ 的多项式是 $P_{n-1}(x)$, 则通过 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)$ 的多项式为 _____.
3. 求解一个大型正定非稀疏矩阵 A 所对应的方程组时, 共轭梯度法和最速下降法每步中所做的矩阵向量乘法次数分别为 _____. 若 A 的条件数为 10000, 则使用共轭梯度法的收敛速度大约能加速为最速下降法的 _____ 倍.
4. 在设计常微分方程数值格式时, _____ 性和 _____ 性能保证算法的收敛性.
5. 在使用 Metropolis 算法对高维空间进行采样时, 若平衡态下任意状态 i 的概率 (密度) 为 π_i , 则转移矩阵 $P(i \rightarrow j) := P_{ij}$ 满足的细致平衡条件为 _____. 该细致平衡条件 _____ (填足以或不足以) 确定转移矩阵. 若转移矩阵还是不可约的, 则 _____ (填足以或不足以) 保证迭代收敛到平稳分布.

问答

1. 写出一个求解 $u_{tt} + \gamma u_t = f(t), \gamma \geq 0$ 且至少具有二阶精度的数值格式并分析其稳定性.

2. 记 $f(x) = x^3 - x$.

(1) 简要给出求解 $f(x) = 0$ 的 Newton 法并写出其数值精度.

(2) 证明: 当 $x_0 > 1/\sqrt{3}$, Newton 法总是收敛到 $x^* = 1$ 的.

3. 写出 QR 分解求解矩阵部分特征值的简要过程并给出降低计算代价的方法.