Relação de Ordem

QXD0008 – Matemática Discreta

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Prof. Lucas Ismaily
ismaily@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

2º semestre/2022

Tópicos desta aula

Nesta apresentação:

- Relação de Ordem Parcial
- Ordem Total
- Diagrama de Hasse
- Elementos Extremos de um Conjunto Parcialmente Ordenado

Referências para esta aula

- **Seção 9.6** do livro:
  Discrete Mathematics and Its Applications.
  Author: Kenneth H. Rosen. Seventh Edition. **(English version)**

- **Seção 8.6** do livro: Matemática Discreta e suas Aplicações.
  Autor: Kenneth H. Rosen. Sexta Edição.

Introdução

Relação de Ordem Parcial

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição: Uma relação R em um conjunto S é dita relação de ordem parcial se e somente se R é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Definição: Um conjunto S juntamente com uma relação de ordem parcial R é chamado conjunto parcialmente ordenado (CPO) e é denotado por (S, R).

Relação de Ordem Parcial

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Exemplo 1:
Seja R a endorrelação "menor que ou igual" no conjunto dos números reais, definida como $R = \{(a, b) \colon a \leq b\}$. **Prove que R é uma ordem parcial.**

Relação de Ordem Parcial

Exemplo 1:
Seja R a endorrelação "menor que ou igual" no conjunto dos números reais, definida como $R = \{(a, b) \colon a \leq b\}$. **Prove que R é uma ordem parcial.**

Solução: A fim de provar que R é uma ordem parcial no conjunto $\mathbb{R}$, vamos provar que ela é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Relação de Ordem Parcial

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exemplo 1:
Seja R a endorrelação "menor que ou igual" no conjunto dos números reais, definida como $R = \{(a, b) \colon a \leq b\}$. **Prove que R é uma ordem parcial.**

Solução: A fim de provar que R é uma ordem parcial no conjunto $\mathbb{R}$, vamos provar que ela é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Reflexiva: R é reflexiva sobre $\mathbb{R}$ pois para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $x \leq x$. Logo, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos xRx.

Relação de Ordem Parcial

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exemplo 1:
Seja R a endorrelação "menor que ou igual" no conjunto dos números reais, definida como $R = \{(a, b) \colon a \leq b\}$. **Prove que R é uma ordem parcial.**

Solução: A fim de provar que R é uma ordem parcial no conjunto $\mathbb{R}$, vamos provar que ela é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Reflexiva: R é reflexiva sobre $\mathbb{R}$ pois para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $x \leq x$. Logo, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos xRx.

Anti-simétrica: Sejam $x, y \in \mathbb{R}$.

Suponha que $x \leq y$ e $y \leq x$.

Como $x \leq y$ e $y \leq x$, obtemos que $x = y$.

Portanto, xRy e yRx implica $x = y$.

Logo, R é anti-simétrica.

Relação de Ordem Parcial

Exemplo 1:
Seja R a endorrelação "menor que ou igual" no conjunto dos números reais, definida como $R = \{(a, b) \colon a \leq b\}$. **Prove que R é uma ordem parcial.**

Continuação da Solução:

Transitiva: Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Suponha que $x \leq y$ e $y \leq z$.

Como $x \leq y$ e $y \leq z$, obtemos que $x = z$.

Portanto, xRy e yRz implica xRz.

Logo, R é transitiva. $\square$

- Como a relação R é uma ordem parcial no conjunto dos reais, temos que $(\mathbb{R}, R)$ é um conjunto parcialmente ordenado.

Relação de Ordem Parcial

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exemplo 2:
Seja R a relação "divide" no conjunto dos inteiros positivos, $\mathbb{Z}^+$, definida como $R = \{(a, b) \colon a \mid b\}$. **Prove que R é uma ordem parcial.**

Relação de Ordem Parcial

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exemplo 2:
Seja R a relação "divide" no conjunto dos inteiros positivos, $\mathbb{Z}^+$, definida como $R = \{(a, b) \colon a \mid b\}$. **Prove que R é uma ordem parcial.**

Solução: A fim de provar que R é uma ordem parcial no conjunto $\mathbb{Z}^+$, vamos provar que ela é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Relação de Ordem Parcial

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exemplo 2:
Seja R a relação “divide” no conjunto dos inteiros positivos, $\mathbb{Z}^+$, definida como $R = \{(a, b) \colon a \mid b\}$. **Prove que R é uma ordem parcial.**

Solução: A fim de provar que R é uma ordem parcial no conjunto $\mathbb{Z}^+$, vamos provar que ela é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Reflexiva: Para todo $x \in \mathbb{Z}^+$, temos que $x \mid x$, pois $x = 1 \cdot x$.
Portanto, R é reflexiva.

Relação de Ordem Parcial

Exemplo 2:
Seja R a relação "divide" no conjunto dos inteiros positivos, $\mathbb{Z}^+$, definida como $R = \{(a, b) \colon a \mid b\}$. **Prove que R é uma ordem parcial.**

Solução: A fim de provar que R é uma ordem parcial no conjunto $\mathbb{Z}^+$, vamos provar que ela é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Reflexiva: Para todo $x \in \mathbb{Z}^+$, temos que $x \mid x$, pois $x = 1 \cdot x$.
Portanto, R é reflexiva.

Anti-simétrica: Sejam $x, y \in \mathbb{Z}^+$.
Suponha que $x \mid y$ e que $y \mid x$.
Então, existem $k, p \in \mathbb{Z}^+$ tais que $y = kx$ e $x = py$. $(\star)$
Isso implica que $x = py = p(kx) = (pk)x$.
Disso, concluímos que pk $= 1$.
O único valor possível para p e k é $p = k = 1$.
Substituindo esses valores de p e k em $(\star)$, obtemos $x = y$.
Portanto, R é anti-simétrica.

Relação de Ordem Parcial

Exemplo 2:
Seja R a relação "divide" no conjunto dos inteiros positivos, $\mathbb{Z}^+$, definida como $R = \{(a, b) \colon a \mid b\}$. **Prove que R é uma ordem parcial.**

Continuação da Solução:

Transitiva: Sejam $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

Suponha que $x \mid y$ e que $y \mid z$.

Então, existem inteiros k e p tais que $y = xk$ e $z = yp$.

Substituindo o valor de y na segunda igualdade, obtemos que $z = (xk)p = x(kp)$, onde kp é um inteiro.

Logo, pela def. de divisibilidade, $x \mid z$.

Portanto, R é transitiva. $\square$

- Como a relação R é uma ordem parcial no conjunto dos inteiros positivos, temos que $(\mathbb{Z}^+, R)$ é um conjunto parcialmente ordenado.

Relação de Ordem Parcial

Definição: Seja S um conjunto. O conjunto das partes de S, denotado por $\mathcal{P}(S)$, é o conjunto de todos os subconjuntos de S.

Exemplo: O conjunto das partes do conjunto $S = \{1, 2, 3\}$ é o conjunto $\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

Relação de Ordem Parcial

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Definição: Seja S um conjunto. O conjunto das partes de S, denotado por $\mathcal{P}(S)$, é o conjunto de todos os subconjuntos de S.

Exemplo: O conjunto das partes do conjunto $S = \{1, 2, 3\}$ é o conjunto $\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

Exemplo 3:

Mostre que a relação de inclusão $\subseteq$ é uma relação de ordem parcial no conjunto das partes de um conjunto S.

Relação de Ordem Parcial

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Definição: Seja S um conjunto. O conjunto das partes de S, denotado por $\mathcal{P}(S)$, é o conjunto de todos os subconjuntos de S.

Exemplo: O conjunto das partes do conjunto $S = \{1, 2, 3\}$ é o conjunto $\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

Exemplo 3:
Mostre que a relação de inclusão $\subseteq$ é uma relação de ordem parcial no conjunto das partes de um conjunto S.

Solução:
Seja S um conjunto. Vamos mostrar que a relação $\subseteq$ no conjunto $\mathcal{P}(S)$ é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Reflexiva: Seja A um elemento pertencente ao conjunto $\mathcal{P}(S)$. Como $A \subseteq A$ para todo conjunto A em $\mathcal{P}(S)$, concluímos que $\subseteq$ é reflexiva.

Relação de Ordem Parcial

Exemplo 3:
Mostre que a relação de inclusão $\subseteq$ é uma relação de ordem parcial no conjunto das partes de um conjunto S.

Continuação da Solução:

Anti-simétrica: Sejam $A, B \in \mathcal{P}(S)$.
Suponha que $A \subseteq B$ e que $B \subseteq A$.
Isso implica que $A = B$.
Portanto, $\subseteq$ é anti-simétrica.

Relação de Ordem Parcial

Exemplo 3:
Mostre que a relação de inclusão $\subseteq$ é uma relação de ordem parcial no conjunto das partes de um conjunto S.

Continuação da Solução:

Anti-simétrica: Sejam $A, B \in \mathcal{P}(S)$.
Suponha que $A \subseteq B$ e que $B \subseteq A$.
Isso implica que $A = B$.
Portanto, $\subseteq$ é anti-simétrica.

Transitiva: Sejam $A, B, C \in \mathcal{P}(S)$.
Suponha que $A \subseteq B$ e que $B \subseteq C$.
Isso implica que $A \subseteq C$.
Portanto, $\subseteq$ é transitiva. $\square$

Relação de Ordem Parcial

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exemplo 3:
Mostre que a relação de inclusão $\subseteq$ é uma relação de ordem parcial no conjunto das partes de um conjunto S.

Continuação da Solução:

Anti-simétrica: Sejam $A, B \in \mathcal{P}(S)$.
Suponha que $A \subseteq B$ e que $B \subseteq A$.
Isso implica que $A = B$.
Portanto, $\subseteq$ é anti-simétrica.

Transitiva: Sejam $A, B, C \in \mathcal{P}(S)$.
Suponha que $A \subseteq B$ e que $B \subseteq C$.
Isso implica que $A \subseteq C$.
Portanto, $\subseteq$ é transitiva. $\square$

- Como a relação $\subseteq$ é uma ordem parcial no conjunto das partes de um conjunto S, temos que $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ é um conjunto parcialmente ordenado.

Noção de ordem

Relações de ordem parcial são usadas para estabelecer uma ordem entre os elementos de um conjunto.

Noção de ordem

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Relações de ordem parcial são usadas para estabelecer uma ordem entre os elementos de um conjunto.

- Por exemplo, no conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}, \leq)$, temos que:

$$\cdots \leq -4 \leq -3 \leq -2 \leq -1 \leq 0 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 \leq \cdots$$

Além disso, no CPO $(\mathbb{Z}, \leq)$ temos a seguinte propriedade:
para quaisquer dois elementos $x, y \in \mathbb{Z}$, temos que $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Noção de ordem

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Relações de ordem parcial são usadas para estabelecer uma ordem entre os elementos de um conjunto.

- Por exemplo, no conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}, \leq)$, temos que:

$$\cdots \leq -4 \leq -3 \leq -2 \leq -1 \leq 0 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 \leq \cdots$$

Além disso, no CPO $(\mathbb{Z}, \leq)$ temos a seguinte propriedade:
para quaisquer dois elementos $x, y \in \mathbb{Z}$, temos que $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Definição: Sejam a e b elementos de um CPO (S, R). Dizemos que a e b são comparáveis se e somente se aRb ou bRa.

Quando a e b são elementos de (S, R) tais que nem aRb nem bRa, a e b são ditos incomparáveis.

- **Obs.:** Quaisquer dois elementos do CPO $(\mathbb{Z}, \leq)$ são comparáveis.

Relação de Ordem Total

Definição: Seja (S, R) um CPO tal que quaisquer dois elementos de S são comparáveis. S é dito um conjunto totalmente ordenado e a relação R é chamada uma ordem total.

- No exemplo anterior, vimos que o CPO $(\mathbb{Z}, \leq)$ é totalmente ordenado porque $a \leq b$ ou $b \leq a$ sempre que a e b são inteiros.
- Outros exemplos de CPOs totalmente ordenados:
  - $(\mathbb{Z}, \geq)$
  - $(\mathbb{R}, \leq)$
  - $(\mathbb{R}, \geq)$
  - (A, R), tal que $A = \{3, 9, 27, 81\}$ e $R = \{(a, b) \in A \times A \colon a \mid b\}$.

Relação de Ordem Total

Exemplo:
Seja $A = \{x \colon x \text{ é uma potência de 3 e } x > 0\}$ e seja R uma relação em A definida como $R = \{(a, b) \in A \times A \colon a \mid b\}$.
Mostre que o CPO (A, R) é totalmente ordenado.

Relação de Ordem Total

Exemplo:
Seja $A = \{x \colon x \text{ é uma potência de 3 e } x > 0\}$ e seja R uma relação em A definida como $R = \{(a, b) \in A \times A \colon a \mid b\}$.
Mostre que o CPO (A, R) é totalmente ordenado.

Solução:
Para mostrar que o CPO (A, R) é totalmente ordenado, devemos mostrar que quaisquer dois elementos a e b de A são comparáveis, ou seja, que $a \mid b$ ou $b \mid a$.

Relação de Ordem Total

Exemplo:
Seja $A = \{x : x \text{ é uma potência de 3 e } x > 0\}$ e seja R uma relação em A definida como $R = \{(a, b) \in A \times A : a \mid b\}$.
Mostre que o CPO (A, R) é totalmente ordenado.

Solução:
Para mostrar que o CPO (A, R) é totalmente ordenado, devemos mostrar que quaisquer dois elementos a e b de A são comparáveis, ou seja, que $a \mid b$ ou $b \mid a$.

Sejam $a, b \in A$. Por definição, a e b são potências de 3 e $a, b > 0$.

Ou seja, $a = 3^i$ e $b = 3^j$, para $i, j \in \mathbb{Z}^+$.

Suponha, sem perda de generalidade, que $i < j$.

Então, $3^i < 3^j$ e, portanto, $a < b$. Logo, $\frac{b}{a} = \frac{3^j}{3^i} = 3^{j-i}$, onde 3^{j-i} é um inteiro positivo. Portanto, $b = a \cdot 3^{j-i}$.

Pela definição de divisibilidade, temos que $a \mid b$, como queríamos demonstrar. $\square$

Relação de Ordem Total – Observações

- **Nem todos os CPOs são totalmente ordenados.**
  Dois elementos de um certo conjunto podem não ser comparáveis, dependendo da relação empregada.

- Por exemplo, considere o CPO $(\mathbb{Z}^+, |)$ onde $|$ é a relação **divide**.
  - Note que 2 não é comparável com 3 nem 3 é comparável com 2 porque $2 \nmid 3$ e $3 \nmid 2$.

- Similarmente, o CPO $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \subseteq)$ não é totalmente ordenado.
  - o conjunto $\{1, 2\}$ não é comparável com o conjunto $\{1, 3\}$ e vice versa porque nenhum desses conjuntos está contido no outro.

Diagrama de Hasse

- Tal como acontece com as relações e funções, existe uma representação gráfica conveniente para ordens parciais – Diagramas de Hasse.
- Considere o grafo direcionado de uma ordem parcial — uma vez que sabemos que estamos lidando com uma ordem parcial, sabemos implicitamente que a relação deve ser reflexiva e transitiva. Assim podemos simplificar o grafo da seguinte forma:

Construindo o diagrama de Hasse para $(\{1, 2, 3, 4\}, \leq)$

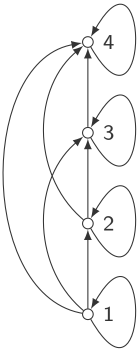


Diagrama de Hasse

- Tal como acontece com as relações e funções, existe uma representação gráfica conveniente para ordens parciais – Diagramas de Hasse.
- Considere o grafo direcionado de uma ordem parcial — uma vez que sabemos que estamos lidando com uma ordem parcial, sabemos implicitamente que a relação deve ser reflexiva e transitiva. Assim podemos simplificar o grafo da seguinte forma:

Construindo o diagrama de Hasse para $(\{1, 2, 3, 4\}, \leq)$

- Remova todos os laços

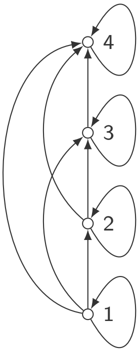


Diagrama de Hasse

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- Tal como acontece com as relações e funções, existe uma representação gráfica conveniente para ordens parciais – Diagramas de Hasse.
- Considere o grafo direcionado de uma ordem parcial — uma vez que sabemos que estamos lidando com uma ordem parcial, sabemos implicitamente que a relação deve ser reflexiva e transitiva. Assim podemos simplificar o grafo da seguinte forma:

Construindo o diagrama de Hasse para $(\{1, 2, 3, 4\}, \leq)$

- Remova todos os laços
- Remova todas as arestas transitivas

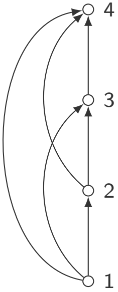


Diagrama de Hasse

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Tal como acontece com as relações e funções, existe uma representação gráfica conveniente para ordens parciais – Diagramas de Hasse.
- Considere o grafo direcionado de uma ordem parcial — uma vez que sabemos que estamos lidando com uma ordem parcial, sabemos implicitamente que a relação deve ser reflexiva e transitiva. Assim podemos simplificar o grafo da seguinte forma:

Construindo o diagrama de Hasse para $(\{1, 2, 3, 4\}, \leq)$

- Remova todos os laços
- Remova todas as arestas transitivas
- Torne o grafo não direcionado — ou seja, podemos supor que as orientações estão para cima.

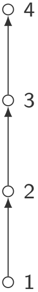


Diagrama de Hasse

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Tal como acontece com as relações e funções, existe uma representação gráfica conveniente para ordens parciais – Diagramas de Hasse.
- Considere o grafo direcionado de uma ordem parcial — uma vez que sabemos que estamos lidando com uma ordem parcial, sabemos implicitamente que a relação deve ser reflexiva e transitiva. Assim podemos simplificar o grafo da seguinte forma:

Construindo o diagrama de Hasse para $(\{1, 2, 3, 4\}, \leq)$

- Remova todos os laços
- Remova todas as arestas transitivas
- Torne o grafo não direcionado — ou seja, podemos supor que as orientações estão para cima.

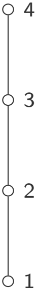


Diagrama de Hasse

Exemplo:

Desenhe o diagrama de Hasse para a relação de ordem parcial

$$R = \{(a, b) \colon a \mid b\}$$

no conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$ (divisores de 60).

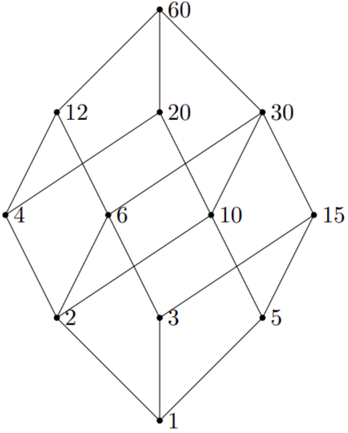


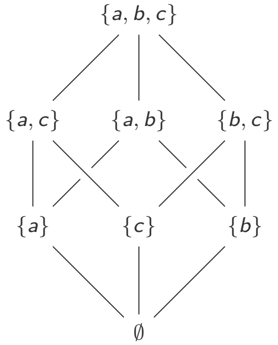
Diagrama de Hasse

Exemplo:

Desenhe o diagrama de Hasse para a relação de ordem parcial

$$R = \{(A, B) \colon A \subseteq B\}$$

no conjunto das partes $\mathcal{P}(S)$ tal que $S = \{a, b, c\}$.



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Elementos Extremos

Maximal

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição: Considere o conjunto parcialmente ordenado (S, R).

- Um elemento $x \in S$ é um elemento maximal de S se e somente se não existe $c \in S$ tal que xRc e $x \neq c$.

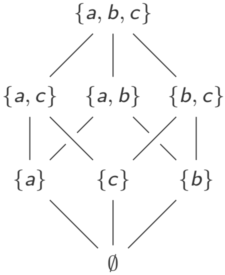
Maximal

Definição: Considere o conjunto parcialmente ordenado (S, R).

- Um elemento $x \in S$ é um elemento maximal de S se e somente se não existe $c \in S$ tal que xRc e $x \neq c$.

Exemplo 1:
Considere o CPO $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$
com $S = \{a, b, c\}$.

- **Quem é o elemento maximal?**



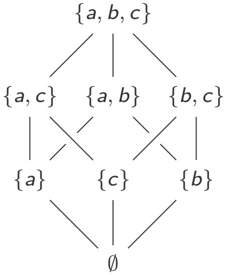
Maximal

Definição: Considere o conjunto parcialmente ordenado (S, R).

- Um elemento $x \in S$ é um elemento maximal de S se e somente se não existe $c \in S$ tal que xRc e $x \neq c$.

Exemplo 1:
Considere o CPO $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$
com $S = \{a, b, c\}$.

- **Quem é o elemento maximal?**
  - **Resposta:** $\{a, b, c\}$



Minimal

Definição: Considere o conjunto parcialmente ordenado (S, R).

- Um elemento $x \in S$ é um elemento minimal de S se e somente se não existe $c \in S$ tal que cRx e $x \neq c$.

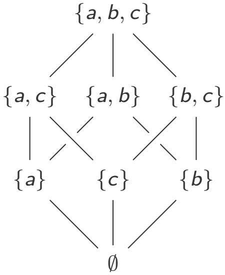
Minimal

Definição: Considere o conjunto parcialmente ordenado (S, R).

- Um elemento $x \in S$ é um elemento minimal de S se e somente se não existe $c \in S$ tal que cRx e $x \neq c$.

Exemplo 1:
Considere o CPO $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$
com $S = \{a, b, c\}$.

- **Quem é o elemento minimal?**



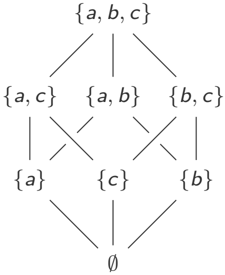
Minimal

Definição: Considere o conjunto parcialmente ordenado (S, R).

- Um elemento $x \in S$ é um elemento minimal de S se e somente se não existe $c \in S$ tal que cRx e $x \neq c$.

Exemplo 1:
Considere o CPO $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$
com $S = \{a, b, c\}$.

- **Quem é o elemento minimal?**
    - **Resposta:** $\emptyset$



Minimal e Maximal

Definição: Considere o conjunto parcialmente ordenado (S, R).

- Um elemento $x \in S$ é um elemento maximal de S se e somente se não existe $c \in S$ tal que xRc e $x \neq c$.
- Um elemento $x \in S$ é um elemento minimal de S se e somente se não existe $c \in S$ tal que cRx e $x \neq c$.

Minimal e Maximal

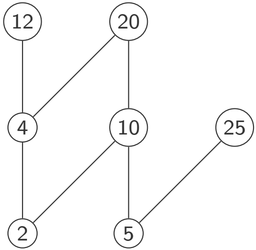
Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Definição: Considere o conjunto parcialmente ordenado (S, R).

- Um elemento $x \in S$ é um elemento maximal de S se e somente se não existe $c \in S$ tal que xRc e $x \neq c$.
- Um elemento $x \in S$ é um elemento minimal de S se e somente se não existe $c \in S$ tal que cRx e $x \neq c$.

Exemplo 2:
Considere o CPO $(A, |)$ com
$A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}$.

- **Quem é o elemento minimal?**
- **Quem é o elemento maximal?**



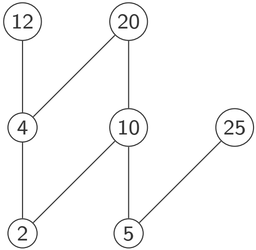
Minimal e Maximal

Definição: Considere o conjunto parcialmente ordenado (S, R).

- Um elemento $x \in S$ é um elemento maximal de S se e somente se não existe $c \in S$ tal que xRc e $x \neq c$.
- Um elemento $x \in S$ é um elemento minimal de S se e somente se não existe $c \in S$ tal que cRx e $x \neq c$.

Exemplo 2:
Considere o CPO $(A, |)$ com
$A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}$.

- **Quem é o elemento minimal?**
  - **Resposta:** 2 e 5
- **Quem é o elemento maximal?**
  - **Resposta:** 12, 20 e 25



Minimal e Maximal

Definição: Considere o conjunto parcialmente ordenado (S, R).

- Um elemento $x \in S$ é um elemento maximal de S se e somente se não existe $c \in S$ tal que xRc e $x \neq c$.
- Um elemento $x \in S$ é um elemento minimal de S se e somente se não existe $c \in S$ tal que cRx e $x \neq c$.

Exemplo 3:

- Considere o CPO $(\mathbb{R}, \leq)$. Quem é o elemento minimal? E o maximal?

Minimal e Maximal

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição: Considere o conjunto parcialmente ordenado (S, R).

- Um elemento $x \in S$ é um elemento maximal de S se e somente se não existe $c \in S$ tal que xRc e $x \neq c$.
- Um elemento $x \in S$ é um elemento minimal de S se e somente se não existe $c \in S$ tal que cRx e $x \neq c$.

Exemplo 3:

- Considere o CPO $(\mathbb{R}, \leq)$. Quem é o elemento minimal? E o maximal?
  - **Não tem nenhum dos dois.**

Minimal e Maximal

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Definição: Considere o conjunto parcialmente ordenado (S, R).

- Um elemento $x \in S$ é um elemento maximal de S se e somente se não existe $c \in S$ tal que xRc e $x \neq c$.
- Um elemento $x \in S$ é um elemento minimal de S se e somente se não existe $c \in S$ tal que cRx e $x \neq c$.

Exemplo 3:

- Considere o CPO $(\mathbb{R}, \leq)$. Quem é o elemento minimal? E o maximal?
  - **Não tem nenhum dos dois.**
- Considere o CPO $(\mathbb{N}^+, \leq)$. Quem é o elemento minimal? E o maximal?

Minimal e Maximal

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição: Considere o conjunto parcialmente ordenado (S, R).

- Um elemento $x \in S$ é um elemento maximal de S se e somente se não existe $c \in S$ tal que xRc e $x \neq c$.
- Um elemento $x \in S$ é um elemento minimal de S se e somente se não existe $c \in S$ tal que cRx e $x \neq c$.

Exemplo 3:

- Considere o CPO $(\mathbb{R}, \leq)$. Quem é o elemento minimal? E o maximal?
  - **Não tem nenhum dos dois.**
- Considere o CPO $(\mathbb{N}^{+}, \leq)$. Quem é o elemento minimal? E o maximal?
  - **Não tem maximal. O minimal é o 1.**

Mínimo e Máximo

Definição: Considere o conjunto parcialmente ordenado (S, R).

- Um elemento $a \in S$ é um elemento máximo de S se e somente se bRa **para todo** $b \in S$.
- Um elemento $a \in S$ é um elemento mínimo de S se e somente se aRb **para todo** $b \in S$.

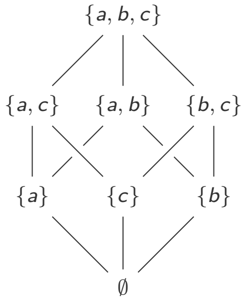
Mínimo e Máximo

Definição: Considere o conjunto parcialmente ordenado (S, R).

- Um elemento $a \in S$ é um elemento máximo de S se e somente se bRa **para todo** $b \in S$.
- Um elemento $a \in S$ é um elemento mínimo de S se e somente se aRb **para todo** $b \in S$.

Exemplo 1:
Considere o CPO $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ com $A = \{a, b, c\}$.

- **Quem é o elemento mínimo?**
- **Quem é o elemento máximol?**



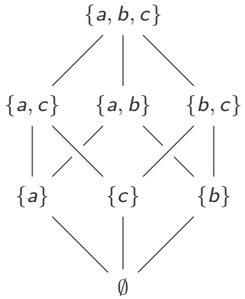
Mínimo e Máximo

Definição: Considere o conjunto parcialmente ordenado (S, R).

- Um elemento $a \in S$ é um elemento máximo de S se e somente se bRa **para todo** $b \in S$.
- Um elemento $a \in S$ é um elemento mínimo de S se e somente se aRb **para todo** $b \in S$.

Exemplo 1:
Considere o CPO $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ com $A = \{a, b, c\}$.

- **Quem é o elemento mínimo?**
  - **Resposta:** $\emptyset$
- **Quem é o elemento máximol?**
  - **Resposta:** $\{a, b, c\}$



Mínimo e Máximo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição: Considere o conjunto parcialmente ordenado (S, R).

- Um elemento $a \in S$ é um elemento máximo de S se e somente se bRa **para todo** $b \in S$.
- Um elemento $a \in S$ é um elemento mínimo de S se e somente se aRb **para todo** $b \in S$.

Mínimo e Máximo

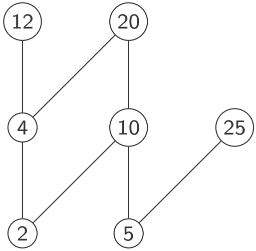
Definição: Considere o conjunto parcialmente ordenado (S, R).

- Um elemento $a \in S$ é um elemento máximo de S se e somente se bRa **para todo** $b \in S$.
- Um elemento $a \in S$ é um elemento mínimo de S se e somente se aRb **para todo** $b \in S$.

Exemplo 2:

Considere o CPO $(A, |)$ com $A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}$.

- **Quem é o elemento mínimo?**
- **Quem é o elemento máximo?**



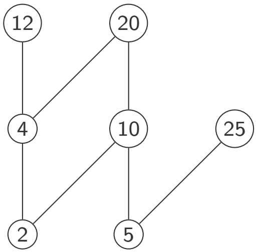
Mínimo e Máximo

Definição: Considere o conjunto parcialmente ordenado (S, R).

- Um elemento $a \in S$ é um elemento máximo de S se e somente se bRa **para todo** $b \in S$.
- Um elemento $a \in S$ é um elemento mínimo de S se e somente se aRb **para todo** $b \in S$.

Exemplo 2:
Considere o CPO $(A, |)$ com
$A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}$.

- **Quem é o elemento mínimo?**
  - **Resposta:** não tem
- **Quem é o elemento máximo?**
  - **Resposta:** não tem.

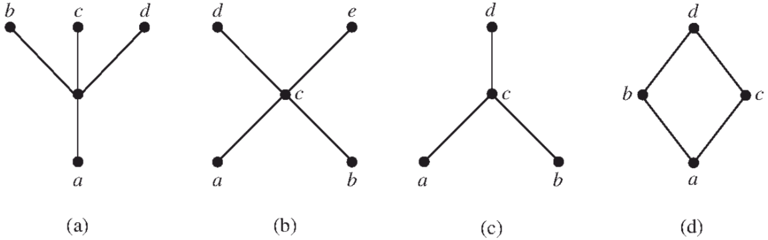


Mínimo e Máximo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição: Considere o conjunto parcialmente ordenado (S, R).

- Um elemento $a \in S$ é um elemento máximo de S se e somente se bRa **para todo** $b \in S$.
- Um elemento $a \in S$ é um elemento mínimo de S se e somente se aRb **para todo** $b \in S$.



FIM