Relação de Equivalência

QXD0008 – Matemática Discreta

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Prof. Lucas Ismaily
ismailybf@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

2º semestre/2022

Tópicos desta aula

Nesta apresentação:

- Definição de relação de equivalência.
- Classes de Equivalência
- Partições

Referências para esta aula

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Seção 9.5** do livro:
  Discrete Mathematics and Its Applications.
  Author: Kenneth H. Rosen. Seventh Edition. **(English version)**
- **Seção 8.5** do livro: Matemática Discreta e suas Aplicações.
  Autor: Kenneth H. Rosen. Sexta Edição.

Introdução

Motivação

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

O que é "igualdade"?

Igualdade é um conceito fundamental, mais básico

Todo elemento em um conjunto é igual somente a ele mesmo.
Geralmente assumimos que a igualdade é implicitamente entendida.

Exigimos três propriedades de qualquer noção de igualdade:

- Reflexiva: $x = x$
- Simétrica: se $x = y$, então $y = x$
- Transitiva: se $x = y$ e $y = z$, então $x = z$

Motivação

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

O que é "igualdade"?

Igualdade é um conceito fundamental, mais básico
Todo elemento em um conjunto é igual somente a ele mesmo.
Geralmente assumimos que a igualdade é implicitamente entendida.

Exigimos três propriedades de qualquer noção de igualdade:

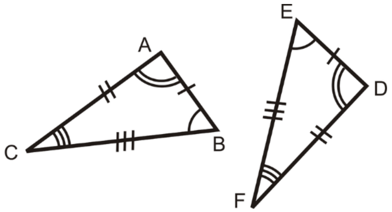
- Reflexiva: $x = x$
- Simétrica: se $x = y$, então $y = x$
- Transitiva: se $x = y$ e $y = z$, então $x = z$

Certas relações apresentam forte semelhança com a relação de igualdade.
Um bom exemplo (da geometria) é a relação "é congruente com", em geral denotada por $\cong$, no conjunto dos triângulos.

Motivação

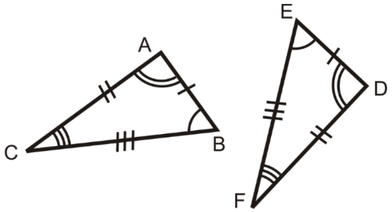
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Informalmente, triângulos são congruentes se têm exatamente a mesma forma.
- Os triângulos congruentes não são iguais mas, em certo sentido, funcionam como triângulos iguais. Um pode ser transformado no outro por meio de rotações, reflexões e translações.



Motivação

- Informalmente, triângulos são congruentes se têm exatamente a mesma forma.
- Os triângulos congruentes não são iguais mas, em certo sentido, funcionam como triângulos iguais. Um pode ser transformado no outro por meio de rotações, reflexões e translações.



- O que há de especial com $\cong$, que faz com que atue como igualdade?
- Relações com as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva são aparentadas com a igualdade e recebem um nome especial.

Relação de Equivalência

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição: Seja A um conjunto não vazio e R uma relação binária em A. Dizemos que R é uma relação de equivalência se e somente se R é reflexiva, simétrica e transitiva.

Exemplo 1: Seja R a relação no conjunto dos inteiros tal que $R = \{(a, b) \colon a = b \text{ ou } a = -b\}$. **R é uma relação de equivalência?**

Relação de Equivalência

Definição: Seja A um conjunto não vazio e R uma relação binária em A. Dizemos que R é uma relação de equivalência se e somente se R é reflexiva, simétrica e transitiva.

Exemplo 1: Seja R a relação no conjunto dos inteiros tal que $R = \{(a, b) \colon a = b$ ou $a = -b\}$. **R é uma relação de equivalência?**

- **R é reflexiva:** para todo $x \in \mathbb{Z}$ temos que $x = x$. Logo, $(x, x) \in R$.

Relação de Equivalência

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição: Seja A um conjunto não vazio e R uma relação binária em A. Dizemos que R é uma relação de equivalência se e somente se R é reflexiva, simétrica e transitiva.

Exemplo 1: Seja R a relação no conjunto dos inteiros tal que $R = \{(a, b) \colon a = b \text{ ou } a = -b\}$. **R é uma relação de equivalência?**

- ***R* é reflexiva:** para todo $x \in \mathbb{Z}$ temos que $x = x$. Logo, $(x, x) \in R$.
- ***R* é simétrica:** suponha $(x, y) \in R$. Temos dois casos a considerar:
  - se $x = y$, então $y = x$ e, portanto, $(y, x) \in R$.
  - se $x = -y$, então $y = -x$. Logo, $(y, x) \in R$.

Relação de Equivalência

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Definição: Seja A um conjunto não vazio e R uma relação binária em A. Dizemos que R é uma relação de equivalência se e somente se R é reflexiva, simétrica e transitiva.

Exemplo 1: Seja R a relação no conjunto dos inteiros tal que $R = \{(a, b) \colon a = b \text{ ou } a = -b\}$. **R é uma relação de equivalência?**

- **R é reflexiva:** para todo $x \in \mathbb{Z}$ temos que $x = x$. Logo, $(x, x) \in R$.
- **R é simétrica:** suponha $(x, y) \in R$. Temos dois casos a considerar:
  - se $x = y$, então $y = x$ e, portanto, $(y, x) \in R$.
  - se $x = -y$, então $y = -x$. Logo, $(y, x) \in R$.
- **R é transitiva:** suponha $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$. Pela definição de R, temos que $a = \pm b$ e $b = \pm c$. Isso implica que $a = \pm c$. Logo, $(a, c) \in R$.

Relação de Equivalência

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição: Seja A um conjunto não vazio e R uma relação binária em A. Dizemos que R é uma relação de equivalência se e somente se R é reflexiva, simétrica e transitiva.

Exemplo 1: Seja R a relação no conjunto dos inteiros tal que $R = \{(a, b) \colon a = b \text{ ou } a = -b\}$. **R é uma relação de equivalência?**

- ***R* é reflexiva:** para todo $x \in \mathbb{Z}$ temos que $x = x$. Logo, $(x, x) \in R$.
- ***R* é simétrica:** suponha $(x, y) \in R$. Temos dois casos a considerar:
  - se $x = y$, então $y = x$ e, portanto, $(y, x) \in R$.
  - se $x = -y$, então $y = -x$. Logo, $(y, x) \in R$.
- ***R* é transitiva:** suponha $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$. Pela definição de R, temos que $a = \pm b$ e $b = \pm c$. Isso implica que $a = \pm c$. Logo, $(a, c) \in R$.

Portanto, *R* é uma relação de equivalência.

Relação de Equivalência

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exemplo 2: Seja R a relação no conjunto dos números reais definida como $R = \{(a, b) \colon a - b \text{ é um inteiro}\}$. **$R$ é uma relação de equivalência?**

Relação de Equivalência

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exemplo 2: Seja R a relação no conjunto dos números reais definida como $R = \{(a, b)\colon a - b$ é um inteiro$\}$. **R é uma relação de equivalência?**

Solução:

- **R é reflexiva:** para todo número real a, temos que $a - a = 0$ e zero é um inteiro. Portanto, $(a, a) \in R$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

Relação de Equivalência

Exemplo 2: Seja R a relação no conjunto dos números reais definida como $R = \{(a, b)\colon a - b$ é um inteiro$\}$. **R é uma relação de equivalência?**

Solução:

- **R é reflexiva:** para todo número real a, temos que $a - a = 0$ e zero é um inteiro. Portanto, $(a, a) \in R$, para todo $a \in \mathbb{R}$.
- **R é simétrica:** suponha $(a, b) \in R$. Pela definição de R, $a - b$ é um inteiro. Logo, $-(a - b)$ é um inteiro. Isso implica que $b - a$ também é um inteiro. Portanto, $(b, a) \in R$.

Relação de Equivalência

Exemplo 2: Seja R a relação no conjunto dos números reais definida como $R = \{(a, b) \colon a - b$ é um inteiro$\}$. **R é uma relação de equivalência?**

Solução:

- **R é reflexiva:** para todo número real a, temos que $a - a = 0$ e zero é um inteiro. Portanto, $(a, a) \in R$, para todo $a \in \mathbb{R}$.
- **R é simétrica:** suponha $(a, b) \in R$. Pela definição de R, $a - b$ é um inteiro. Logo, $-(a - b)$ é um inteiro. Isso implica que $b - a$ também é um inteiro. Portanto, $(b, a) \in R$.
- **R é transitiva:** suponha $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$. Pela definição de R, temos que $a - b$ e $b - c$ são inteiros. Logo, $(a - b) + (b - c) = a - c$ também é um inteiro. Portanto, pela definição de R, temos que $(a, c) \in R$.

Relação de Equivalência

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exemplo 2: Seja R a relação no conjunto dos números reais definida como $R = \{(a, b) \colon a - b \text{ é um inteiro}\}$. **$R$ é uma relação de equivalência?**

Solução:

- **R é reflexiva:** para todo número real a, temos que $a - a = 0$ e zero é um inteiro. Portanto, $(a, a) \in R$, para todo $a \in \mathbb{R}$.
- **R é simétrica:** suponha $(a, b) \in R$. Pela definição de R, $a - b$ é um inteiro. Logo, $-(a - b)$ é um inteiro. Isso implica que $b - a$ também é um inteiro. Portanto, $(b, a) \in R$.
- **R é transitiva:** suponha $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$. Pela definição de R, temos que $a - b$ e $b - c$ são inteiros. Logo, $(a - b) + (b - c) = a - c$ também é um inteiro. Portanto, pela definição de R, temos que $(a, c) \in R$.

Portanto, R é uma relação de equivalência. $\square$

Congruência módulo m

Teorema 14.1: Seja m um inteiro tal que $m > 1$. A relação

$$R = \{(a, b) \colon a \equiv b \pmod{m}\}$$

é uma relação de equivalência no conjunto dos inteiros.

Demonstração:

Congruência módulo m

Teorema 14.1: Seja m um inteiro tal que $m > 1$. A relação

$$R = \{(a, b) \colon a \equiv b \pmod{m}\}$$

é uma relação de equivalência no conjunto dos inteiros.

Demonstração:

Pela def. de congruência modular, temos que $a \equiv b \pmod{m}$ se e somente se m divide $a - b$. Vamos provar que R é uma relação de equivalência mostrando que ela é reflexiva, simétrica e transitiva.

Congruência módulo m

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 14.1: Seja m um inteiro tal que $m > 1$. A relação

$$R = \{(a, b) \colon a \equiv b \pmod{m}\}$$

é uma relação de equivalência no conjunto dos inteiros.

Demonstração:

Pela def. de congruência modular, temos que $a \equiv b \pmod{m}$ se e somente se m divide $a - b$. Vamos provar que R é uma relação de equivalência mostrando que ela é reflexiva, simétrica e transitiva.

Prova da propriedade reflexiva: Seja a um inteiro qualquer. Note que $a - a = 0$ é divisível por m, pois $0 = 0 \cdot m$. Portanto $a \equiv a \pmod{m}$. Assim, congruência módulo m é reflexiva.

Continuação da demonstração

Teorema 14.1: Seja m um inteiro tal que $m > 1$. A relação

$$R = \{(a, b) \colon a \equiv b \pmod{m}\}$$

é uma relação de equivalência no conjunto dos inteiros.

Prova da propriedade de simetria:
Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Suponha que $a \equiv b \pmod{m}$.
➜ Queremos provar que $b \equiv a \pmod{m}$.
Pela def. de congruência modular, temos que m divide $a - b$.
Logo, existe inteiro k tal que $a - b = km$.
Isso implica que $b - a = (-k)m$.
Portanto, pela def. de divisibilidade, temos que $m \mid (b - a)$.
Pela def. de congruência modular, temos que $b \equiv a \pmod{m}$.
Portanto, congruência módulo m é simétrica.

Conclusão da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 14.1: Seja m um inteiro tal que $m > 1$. A relação

$$R = \{(a, b) \colon a \equiv b \pmod{m}\}$$

é uma relação de equivalência no conjunto dos inteiros.

Prova da propriedade transitiva:
Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Suponha que $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m}$.
➜ Queremos provar que $a \equiv c \pmod{m}$.
Pela def. de congruência modular, m divide $a - b$ e $b - c$.
Logo, existem $k, p \in \mathbb{Z}$ tais que $a - b = km$ e $b - c = pm$.
Somando as duas equações, obtemos $(a - b) + (b - c) = km + pm$.
Isso implica em $a - c = (k + p)m$ em que $(k + p) \in \mathbb{Z}$.
Pela def. de divisibilidade, temos que $m \mid (a - c)$.
Pela def. de congruência modular, $a \equiv c \pmod{m}$.
Portanto, congruência módulo m é transitiva. $\square$

Será??

Exemplo 4:
Seja R a relação no conjunto dos números inteiros positivos definida como $R = \{(a, b)\colon a \text{ divide } b\}$. R **é uma relação de equivalência?**

Será??

Exemplo 4:
Seja R a relação no conjunto dos números inteiros positivos definida como $R = \{(a, b) \colon a \text{ divide } b\}$. **$R$ é uma relação de equivalência?**

Solução:

Sabe-se que a relação R acima é reflexiva e transitiva.
Tarefa de casa: Verifique que R é reflexiva e transitiva.

Porém, mesmo que R seja reflexiva e transitiva, **R não é uma relação de equivalência** porque ela não é simétrica!

Um contraexemplo consiste no par $(2, 4)$. Veja que $2 \mid 4$ mas $4 \nmid 2$.
De fato, existem infinitos contraexemplos. $\square$

Classes de Equivalência

Elementos equivalentes

Voltando ao Exemplo 1: Vimos a relação R no conjunto dos inteiros tal que $R = \{(a, b)\colon a = b \text{ ou } a = -b\}$.

Provamos que R é uma relação de equivalência.

Elementos equivalentes

Voltando ao Exemplo 1: Vimos a relação R no conjunto dos inteiros tal que $R = \{(a, b) \colon a = b \text{ ou } a = -b\}$.

Provamos que R é uma relação de equivalência.

Observação: Existem infinitos pares ordenados na relação R como, por exemplo $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(2, 2)$, $(-2, 2)$, etc.

Elementos equivalentes

Voltando ao Exemplo 1: Vimos a relação R no conjunto dos inteiros tal que $R = \{(a, b) \colon a = b \text{ ou } a = -b\}$.

Provamos que R é uma relação de equivalência.

Observação: Existem infinitos pares ordenados na relação R como, por exemplo $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(2, 2)$, $(-2, 2)$, etc.

> **Definição:** Dois elementos a e b que estão relacionados por uma relação de equivalência são ditos equivalentes e isso é representado por $a \sim b$.

Elementos equivalentes

Voltando ao Exemplo 1: Vimos a relação R no conjunto dos inteiros tal que $R = \{(a, b)\colon a = b \text{ ou } a = -b\}$.

Provamos que R é uma relação de equivalência.

Observação: Existem infinitos pares ordenados na relação R como, por exemplo $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(2, 2)$, $(-2, 2)$, etc.

> **Definição:** Dois elementos a e b que estão relacionados por uma relação de equivalência são ditos equivalentes e isso é representado por $a \sim b$.

Deste modo, podemos escrever:

- $0 \sim 0$
- $1 \sim -1$
- $2 \sim 2$
- $-2 \sim 2, \ldots$

Elementos equivalentes

Observação:

Note que a relação de equivalência $R = \{(a, b) \colon a = b \text{ ou } a = -b\}$ "divide" o conjunto dos inteiros, $\mathbb{Z}$, em infinitos conjuntos dois-a-dois disjuntos:

$$\{0\}, \{1, -1\}, \{2, -2\}, \{3, -3\}, \{4, -4\}, \{5, -5\}, \{6, -6\}, \ldots$$

Elementos equivalentes

Observação:

Note que a relação de equivalência $R = \{(a, b) \colon a = b \text{ ou } a = -b\}$ "divide" o conjunto dos inteiros, $\mathbb{Z}$, em infinitos conjuntos dois-a-dois disjuntos:

$$\{0\}, \{1, -1\}, \{2, -2\}, \{3, -3\}, \{4, -4\}, \{5, -5\}, \{6, -6\}, \ldots$$

- o conjunto $\{0\}$ determina o par $(0, 0) \in R$

Elementos equivalentes

Observação:

Note que a relação de equivalência $R = \{(a, b) \colon a = b \text{ ou } a = -b\}$ "divide" o conjunto dos inteiros, $\mathbb{Z}$, em infinitos conjuntos dois-a-dois disjuntos:

$$\{0\},\ \{1, -1\},\ \{2, -2\},\ \{3, -3\},\ \{4, -4\},\ \{5, -5\},\ \{6, -6\},\ \ldots$$

- o conjunto $\{0\}$ determina o par $(0, 0) \in R$
- o conjunto $\{1, -1\}$ determina os pares $(1, 1), (-1, -1), (1, -1), (-1, 1) \in R$

Elementos equivalentes

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Observação:

Note que a relação de equivalência $R = \{(a, b) \colon a = b \text{ ou } a = -b\}$ "divide" o conjunto dos inteiros, $\mathbb{Z}$, em infinitos conjuntos dois-a-dois disjuntos:

$$\{0\}, \{1, -1\}, \{2, -2\}, \{3, -3\}, \{4, -4\}, \{5, -5\}, \{6, -6\}, \ldots$$

- o conjunto $\{0\}$ determina o par $(0, 0) \in R$
- o conjunto $\{1, -1\}$ determina os pares $(1, 1), (-1, -1), (1, -1), (-1, 1) \in R$
- o conjunto $\{2, -2\}$ determina os pares $(2, 2), (-2, -2), (2, -2), (-2, 2) \in R$

Elementos equivalentes

Observação:

Note que a relação de equivalência $R = \{(a, b) \colon a = b \text{ ou } a = -b\}$ "divide" o conjunto dos inteiros, $\mathbb{Z}$, em infinitos conjuntos dois-a-dois disjuntos:

$$\{0\},\ \{1, -1\},\ \{2, -2\},\ \{3, -3\},\ \{4, -4\},\ \{5, -5\},\ \{6, -6\},\ \ldots$$

- o conjunto $\{0\}$ determina o par $(0, 0) \in R$
- o conjunto $\{1, -1\}$ determina os pares $(1, 1), (-1, -1), (1, -1), (-1, 1) \in R$
- o conjunto $\{2, -2\}$ determina os pares $(2, 2), (-2, -2), (2, -2), (-2, 2) \in R$
- generalizando... para $i \geq 3$, o conjunto $\{i, -i\}$ determina os pares $(i, i), (-i, -i), (i, -i), (-i, i) \in R$

Esses subconjuntos de $\mathbb{Z}$ são chamados "classes de equivalência" da relação R.

Classe de Equivalência

Definição: Seja R uma relação de equivalência num conjunto A.
O conjunto de todos os elementos que estão relacionados a um elemento $a \in A$ é chamado classe de equivalência de a.

A classe de equivalência de a com relação a R é denotada por $[a]_R$.
Quando somente uma relação estiver sob consideração, escrevemos somente $[a]$.

Classe de Equivalência

Definição: Seja R uma relação de equivalência num conjunto A. O conjunto de todos os elementos que estão relacionados a um elemento $a \in A$ é chamado classe de equivalência de a.

A classe de equivalência de a com relação a R é denotada por $[a]_R$. Quando somente uma relação estiver sob consideração, escrevemos somente $[a]$.

Observações:

- Se R é uma relação de equivalência num conjunto A, a classe de equivalência do elemento $a \in A$ é:

$$[a]_R = \{s \colon (a, s) \in R\}$$

Classe de Equivalência

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

Definição: Seja R uma relação de equivalência num conjunto A. O conjunto de todos os elementos que estão relacionados a um elemento $a \in A$ é chamado classe de equivalência de a.

A classe de equivalência de a com relação a R é denotada por $[a]_R$. Quando somente uma relação estiver sob consideração, escrevemos somente $[a]$.

Observações:

- Se R é uma relação de equivalência num conjunto A, a classe de equivalência do elemento $a \in A$ é:

$$[a]_R = \{s : (a, s) \in R\}$$

- Se $b \in [a]_R$, então dizemos que b é um representante da classe de equivalência.
  - qualquer elemento da classe pode ser usado como representante.

Classe de Equivalência — Exemplo

Exemplo: Quais são as classes de equivalência para a relação $R = \{(a, b) \colon a = b \text{ ou } a = -b\}$ vista anteriormente?

Classe de Equivalência — Exemplo

Exemplo: Quais são as classes de equivalência para a relação $R = \{(a, b)\colon a = b \text{ ou } a = -b\}$ vista anteriormente?

Solução: Nessa relação de equivalência, vimos que um inteiro é equivalente a si mesmo e ao seu inverso aditivo. Ou seja, $[a] = \{a, -a\}$ para todo $a \in \mathbb{Z}$.

Esse conjunto contém dois inteiros, com exceção do caso em que $a = 0$.

Exemplos específicos de classes de equivalência para essa relação são:

- $[7] = \{-7, 7\}$
- $[-5] = \{-5, 5\}$
- $[5] = \{-5, 5\}$
- $[0] = \{0\}$

Classe de Equivalência — Exemplo

Exemplo: Considere a relação de equivalência congruência módulo 4 no conjunto dos inteiros, definida como $R = \{(a, b) \colon a \equiv b \pmod 4\}$.

Quais são as classes de equivalência dos elementos 0 e 1 nesta relação R?

Classe de Equivalência — Exemplo

Exemplo: Considere a relação de equivalência congruência módulo 4 no conjunto dos inteiros, definida como $R = \{(a, b) \colon a \equiv b \pmod 4\}$.

Quais são as classes de equivalência dos elementos 0 e 1 nesta relação R?

Solução: A classe de equivalência do 0 contém todos os inteiros a tais que $a \equiv 0 \pmod 4$.

Os inteiros nesta classe são aqueles que são divisíveis por 4.

Portanto, a classe de equivalência do 0 para esta relação é $[0] = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\}$.

Classe de Equivalência — Exemplo

Exemplo: Considere a relação de equivalência congruência módulo 4 no conjunto dos inteiros, definida como $R = \{(a, b) \colon a \equiv b \pmod 4\}$.

Quais são as classes de equivalência dos elementos 0 e 1 nesta relação R?

Solução: A classe de equivalência do 0 contém todos os inteiros a tais que $a \equiv 0 \pmod 4$.

Os inteiros nesta classe são aqueles que são divisíveis por 4.

Portanto, a classe de equivalência do 0 para esta relação é $[0] = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\}$.

A classe de equivalência do 1 contém todos os inteiros a tais que $a \equiv 1 \pmod 4$. Os inteiros nesta classe são aqueles que possuem resto 1 quando são divididos por 4.

Portanto, a classe de equivalência do 1 para esta relação é $[1] = \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots\}$. □

Classe de Equivalência — Exemplo

Exemplo: Considere a relação de equivalência congruência módulo 4 no conjunto dos inteiros, definida como $R = \{(a, b) : a \equiv b \pmod 4\}$.

As classes de equivalência dos elementos 0, 1, 2 e 3 nesta relação R são:

- $[0] = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$
- $[1] = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$
- $[2] = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\}$
- $[3] = \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\}$

Obs. 1: $\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3]$

Obs. 2: $[i] \cap [j]$ para $i \neq j$ and $0 \leq i, j \leq 3$

Classes de Equivalência de uma relação definida num conjunto finito

Exemplo:

Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e R uma relação binária em A definida como:

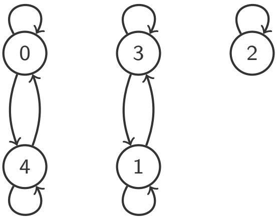
$$\{(0,0),(0,4),(1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(3,3),(4,0),(4,4)\}$$

Classes de Equivalência de uma relação definida num conjunto finito

Exemplo:
Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e R uma relação binária em A definida como:

$$\{(0,0), (0,4), (1,1), (1,3), (2,2), (3,1), (3,3), (4,0), (4,4)\}$$

R é uma relação de equivalência em A:



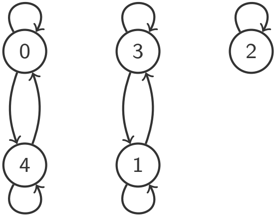
Classes de Equivalência de uma relação definida num conjunto finito

Exemplo:

Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e R uma relação binária em A definida como:

$$\{(0,0),(0,4),(1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(3,3),(4,0),(4,4)\}$$

R é uma relação de equivalência em A:



As classes de equivalência de R são:

$$[0] = \{x \in A \mid xR0\} = \{0, 4\}$$
$$[1] = \{x \in A \mid xR1\} = \{1, 3\}$$
$$[2] = \{x \in A \mid xR2\} = \{2\}$$
$$[3] = \{x \in A \mid xR3\} = \{1, 3\}$$
$$[4] = \{x \in A \mid xR4\} = \{0, 4\}$$

Assim, as classes distintas de equivalência da relação são:

$$\{0, 4\}, \{1, 3\}, \{2\}$$

Classes de Equivalência e Partição

Partição de um conjunto

Definição: Uma partição de um conjunto S é uma coleção de subconjuntos disjuntos não-vazios de S, cuja união é igual a S.

Em outras palavras, a coleção de subconjuntos A_i, com $i \in I$ (I um conjunto de índices), forma uma partição de S se e somente se

- $A_i \neq \emptyset$ para $i \in I$,
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, e
- $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = S$.

Cada subconjunto A_i é chamado bloco da partição.

Partição de um conjunto

Definição: Uma partição de um conjunto S é uma coleção de subconjuntos disjuntos não-vazios de S, cuja união é igual a S.

Em outras palavras, a coleção de subconjuntos A_i, com $i \in I$ (I um conjunto de índices), forma uma partição de S se e somente se

- $A_i \neq \emptyset$ para $i \in I$,
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, e
- $\bigcup_{i \in I} A_i = S$.

Cada subconjunto A_i é chamado bloco da partição.

Exemplo:

- $S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
- $\{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f, g\}\}$ é uma partição de S.
  Cada subconjunto $\{a, b\}$, $\{c, d\}$, $\{e, f, g\}$ é um bloco da partição de S.

Relação de Equivalência $\Rightarrow$ Partição

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- Uma relação de equivalência particiona o conjunto onde ela está definida.
- Os subconjuntos (blocos) que compõem a partição são formados agrupando-se os elementos relacionados.

Relação de Equivalência ⇒ Partição

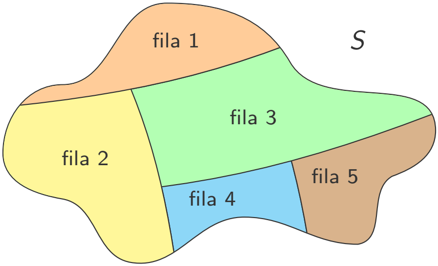
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Uma relação de equivalência particiona o conjunto onde ela está definida.
- Os subconjuntos (blocos) que compõem a partição são formados agrupando-se os elementos relacionados.

Exemplo:

- Seja S o conjunto dos alunos em uma sala de aula com cadeiras organizadas em 5 filas e seja $R \subseteq S^2$ definida como:

$$xRy \iff \text{“}x \text{ senta na mesma fila que } y\text{”}$$



Relação de Equivalência $\Rightarrow$ Partição

Seja R uma relação em A. O teorema a seguir mostra que as classes de equivalência de dois elementos de A ou são idênticas ou são disjuntas.

Teorema 14.2: Seja R uma relação de equivalência num conjunto A e sejam $a, b \in A$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) aRb (ii) $[a] = [b]$ (iii) $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

Demonstração:

Relação de Equivalência $\Rightarrow$ Partição

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Seja R uma relação em A. O teorema a seguir mostra que as classes de equivalência de dois elementos de A ou são idênticas ou são disjuntas.

Teorema 14.2: Seja R uma relação de equivalência num conjunto A e sejam $a, b \in A$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) aRb (ii) $[a] = [b]$ (iii) $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

Demonstração:
A fim de provar o teorema, vamos provar três implicações:

- $(i) \to (ii)$,
- $(ii) \to (iii)$,
- $(iii) \to (i)$.

Relação de Equivalência $\Rightarrow$ Partição

Teorema 14.2: Seja R uma relação de equivalência num conjunto A e sejam $a, b \in A$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) aRb (ii) $[a] = [b]$ (iii) $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

Prova da implicação $(i) \rightarrow (ii)$: Prova direta.

Relação de Equivalência $\Rightarrow$ Partição

Teorema 14.2: Seja R uma relação de equivalência num conjunto A e sejam $a, b \in A$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) aRb (ii) $[a] = [b]$ (iii) $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

Prova da implicação $(i) \to (ii)$: Prova direta.

Suponha que aRb.

Vamos provar que $[a] = [b]$ mostrando que $[a] \subseteq [b]$ e $[b] \subseteq [a]$.

Primeiro, vamos mostrar que $[a] \subseteq [b]$.

Seja $c \in [a]$ arbitrário. Então, aRc.

Como aRb e R é simétrica, sabemos que bRa.

Além disso, como R é transitiva e bRa e aRc, segue que bRc.

Portanto $c \in [b]$. Isso mostra que $[a] \subseteq [b]$.

Relação de Equivalência $\Rightarrow$ Partição

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Teorema 14.2: Seja R uma relação de equivalência num conjunto A e sejam $a, b \in A$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) aRb (ii) $[a] = [b]$ (iii) $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

Prova da implicação $(i) \rightarrow (ii)$: Prova direta.

Suponha que aRb.

Vamos provar que $[a] = [b]$ mostrando que $[a] \subseteq [b]$ e $[b] \subseteq [a]$.

Primeiro, vamos mostrar que $[a] \subseteq [b]$.

Seja $c \in [a]$ arbitrário. Então, aRc.

Como aRb e R é simétrica, sabemos que bRa.

Além disso, como R é transitiva e bRa e aRc, segue que bRc.

Portanto $c \in [b]$. Isso mostra que $[a] \subseteq [b]$.

A prova de que $[b] \subseteq [a]$ é similar e é deixada como exercício.

Relação de Equivalência $\Rightarrow$ Partição

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 14.2: Seja R uma relação de equivalência num conjunto A e sejam $a, b \in A$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) aRb (ii) $[a] = [b]$ (iii) $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

Prova da implicação $(ii) \rightarrow (iii)$: Prova direta.

Suponha que $[a] = [b]$.

Como R é reflexiva, temos que $a \in [a]$.

Logo, o conjunto $[a]$ é não-vazio.

Como $[a]$ é não-vazio e $[a] = [b]$, segue que $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, como queríamos demonstrar.

Relação de Equivalência $\Rightarrow$ Partição

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 14.2: Seja R uma relação de equivalência num conjunto A e sejam $a, b \in A$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) aRb (ii) $[a] = [b]$ (iii) $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

Prova da implicação $(iii) \rightarrow (i)$: Prova direta.

Suponha que $[a] \cap [b] \neq \emptyset$.

Então existe um elemento c tal que $c \in [a]$ e $c \in [b]$.

Em outras palavras, aRc e bRc.

Como R é simétrica, temos que cRb.

Agora, pela transitividade de R, como aRc e cRb, temos que aRb, como queríamos demonstrar.

Relação de Equivalência $\Rightarrow$ Partição

Teorema 14.2: Seja R uma relação de equivalência num conjunto A e sejam $a, b \in A$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) aRb (ii) $[a] = [b]$ (iii) $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

Prova da implicação $(iii) \rightarrow (i)$: Prova direta.

Suponha que $[a] \cap [b] \neq \emptyset$.

Então existe um elemento c tal que $c \in [a]$ e $c \in [b]$.

Em outras palavras, aRc e bRc.

Como R é simétrica, temos que cRb.

Agora, pela transitividade de R, como aRc e cRb, temos que aRb, como queríamos demonstrar.

Como (i) implica (ii), (ii) implica (iii) e (iii) implica (i), concluímos que as afirmações $(i), (ii), (iii)$ são equivalentes. $\square$

Partição $\Rightarrow$ Relação de Equivalência

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Teorema 14.3: Seja $\{A_i \mid i \in I\}$ uma partição de um conjunto S. Seja R a relação em S tal que $(x, y) \in R$ se e somente se x e y pertencem a um mesmo bloco A_i da partição de S.

Então, R é uma relação de equivalência.

Demonstração:

Partição $\Rightarrow$ Relação de Equivalência

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Teorema 14.3: Seja $\{A_i \mid i \in I\}$ uma partição de um conjunto S. Seja R a relação em S tal que $(x, y) \in R$ se e somente se x e y pertencem a um mesmo bloco A_i da partição de S.

Então, R é uma relação de equivalência.

Demonstração:

Para mostrar que R é uma relação de equivalência, vamos mostrar que R é reflexiva, simétrica e transitiva.

Partição $\Rightarrow$ Relação de Equivalência

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Teorema 14.3: Seja $\{A_i \mid i \in I\}$ uma partição de um conjunto S. Seja R a relação em S tal que $(x, y) \in R$ se e somente se x e y pertencem a um mesmo bloco A_i da partição de S.

Então, R é uma relação de equivalência.

Demonstração:

Para mostrar que R é uma relação de equivalência, vamos mostrar que R é reflexiva, simétrica e transitiva.

1. Reflexividade: Seja $a \in S$ arbitrário. Como a está no mesmo bloco que si mesmo, temos que $(a, a) \in R$. Portanto, R é reflexiva.

Partição $\Rightarrow$ Relação de Equivalência

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 14.3: Seja $\{A_i \mid i \in I\}$ uma partição de um conjunto S. Seja R a relação em S tal que $(x, y) \in R$ se e somente se x e y pertencem a um mesmo bloco A_i da partição de S.

Então, R é uma relação de equivalência.

Demonstração:

Para mostrar que R é uma relação de equivalência, vamos mostrar que R é reflexiva, simétrica e transitiva.

1. Reflexividade: Seja $a \in S$ arbitrário. Como a está no mesmo bloco que si mesmo, temos que $(a, a) \in R$. Portanto, R é reflexiva.

2. Simetria: Sejam $a, b \in S$. Suponha $(a, b) \in R$. Então, b e a estão num mesmo bloco da partição. Logo, $(b, a) \in R$ também.
Portanto, R é simétrica.

Partição $\Rightarrow$ Relação de Equivalência

Teorema 14.3: Seja $\{A_i \mid i \in I\}$ uma partição de um conjunto S. Seja R a relação em S tal que $(x, y) \in R$ se e somente se x e y pertencem a um mesmo bloco A_i da partição de S.

Então, R é uma relação de equivalência.

Continuação Demonstração:

Partição $\Rightarrow$ Relação de Equivalência

Teorema 14.3: Seja $\{A_i \mid i \in I\}$ uma partição de um conjunto S. Seja R a relação em S tal que $(x, y) \in R$ se e somente se x e y pertencem a um mesmo bloco A_i da partição de S.

Então, R é uma relação de equivalência.

Continuação Demonstração:

3. Transitividade: Sejam $a, b, c \in S$.

Suponha que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$. Então, a e b estão em um mesmo bloco X da partição e b e c estão em um mesmo bloco Y da partição.

Como os blocos de uma partição são disjuntos e como b pertence tanto ao bloco X quanto ao bloco Y, temos que $X = Y$.

Consequentemente, a e c pertencem ao mesmo bloco da partição. Portanto, $(a, c) \in R$. Assim, R é transitiva.

Partição $\Rightarrow$ Relação de Equivalência

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 14.3: Seja $\{A_i \mid i \in I\}$ uma partição de um conjunto S. Seja R a relação em S tal que $(x, y) \in R$ se e somente se x e y pertencem a um mesmo bloco A_i da partição de S.

Então, R é uma relação de equivalência.

Continuação Demonstração:

3. Transitividade: Sejam $a, b, c \in S$.

Suponha que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$. Então, a e b estão em um mesmo bloco X da partição e b e c estão em um mesmo bloco Y da partição.

Como os blocos de uma partição são disjuntos e como b pertence tanto ao bloco X quanto ao bloco Y, temos que $X = Y$.

Consequentemente, a e c pertencem ao mesmo bloco da partição. Portanto, $(a, c) \in R$. Assim, R é transitiva.

Por 1, 2 e 3, segue que R é uma relação de equivalência. $\square$

Relação de Equivalência $\iff$ Partição

O seguinte resultado segue diretamente dos Teoremas 14.2 e 14.3:

Teorema 14.4: Seja R uma relação de equivalência num conjunto S.

- As classes de equivalência de R formam uma partição de S.
- Dada uma partição $\{A_i \mid i \in I\}$ de S, existe uma relação de equivalência em S que tem os conjuntos A_i como suas classes de equivalência.

FIM