

Relações de Equivalência

Matemática Discreta

Prof. Lucas Ismaily

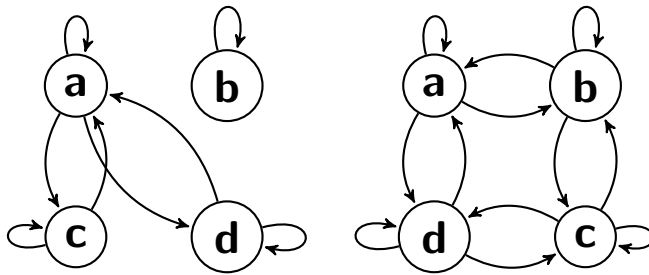
2º Semestre de 2022

Aluno: [] Matrícula: []

Questões:

- Quais destas relações em $\{0, 1, 2, 3\}$ são relações de equivalência? Quais propriedades estão faltando nas que não são relações de equivalência?
 - $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
 - $\{(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$
 - $\{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
 - $\{(0, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$
 - $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 3)\}$
- Quais destas relações no conjunto de todas as funções de \mathbf{Z} para \mathbf{Z} são relações de equivalência? Quais propriedades estão faltando nas que não são relações de equivalência?
 - $\{(f, g) | f(1) = g(1)\}$
 - $\{(f, g) | f(0) = g(0) \text{ ou } f(1) = g(1)\}$
 - $\{(f, g) | f(x) - g(x) = 1 \text{ para } x \in \mathbf{Z}\}$
 - $\{(f, g) | f(0) = g(1) \text{ e } f(1) = g(0)\}$
- Defina três relações de equivalência no conjunto de prédios de um *campus* universitário. Determine as classes de equivalência para cada uma dessas relações de equivalência.
- Mostre que a relação de equivalência lógica no conjunto de todas as proposições compostas é uma relação de equivalência. Quais são as classes de equivalência de \mathbf{V} e \mathbf{F} ?
- Suponha que A seja um conjunto não vazio e que f seja uma função que tem A como seu domínio. Seja R a relação em A que consiste em todos os pares ordenados (x, y) tal que $f(x) = f(y)$.

- (a) Mostre que R é uma relação de equivalência em A .
- (b) Quais são as classes de equivalência de R ?
6. Mostre que a relação R , que consiste em todos os pares (x, y) tal que x e y são sequências de bits de comprimento maior que ou igual a 3, que coincidem em seus primeiros 3 bits, é uma relação de equivalência no conjunto de todas as sequências de bits de comprimento maior que ou igual a 3.
7. Seja R a relação no conjunto de pares ordenados de inteiros positivos tal que $((a, b), (c, d)) \in R$ se e somente se $a + d = b + c$. Mostre que R é uma relação de equivalência.
8. Determine se as relações abaixo são de equivalência.



9. Mostre que a relação R no conjunto de todas as sequências de bits tal que $s R t$ se e somente se s e t contiverem o mesmo número de 1s é uma relação de equivalência.
10. Quais são as classes de equivalência da sequência de bits 011 para a relação de equivalência do anterior?
11. Qual é a classe de congruência $[n]_5$ (ou seja, a classe de equivalência de n relativa à congruência módulo 5) quando n for
- | | |
|--------|---------|
| (a) 2? | (c) 6? |
| (b) 3? | (d) -3? |
12. Dê uma descrição de cada classe de congruência módulo 6.
13. (a) Qual é a classe de equivalência de $(1, 2)$ na relação de equivalência do exercício 7?
- (b) Dê uma interpretação das classes de equivalência para a relação de equivalência R do exercício 7. [Dica: Observe a diferença $a - b$ correspondente a (a, b) .]
14. Quais destas coleções de subconjuntos são partições de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

- (a) $\{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}$
- (b) $\{1\}, \{2, 3, 6\}, \{4\}, \{5\}$
- (c) $\{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}$
- (d) $\{1, 4, 5\}, \{2, 6\}$

15. Quais destas coleções de subconjuntos são partições no conjunto de sequências de bits de comprimento 8?

- (a) o conjunto das sequências de bits que começam com 1, o conjunto das sequências de bits que começam com 00 e o conjunto das sequências de bits que começam com 01
- (b) o conjunto das sequências de bits que contêm a sequência 00, o conjunto das sequências de bits que contêm a sequência 01, o conjunto das sequências de bits que contêm a sequência 10 e o conjunto das sequências de bits que contêm a sequência 11
- (c) o conjunto das sequências de bits que terminam com 00, o conjunto das sequências de bits que terminam com 01, o conjunto das sequências de bits que terminam com 10 e o conjunto das sequências de bits que terminam com 11
- (d) o conjunto das sequências de bits que terminam com 111, o conjunto das sequências de bits que terminam com 011 e o conjunto das sequências de bits que terminam com 00
- (e) o conjunto das sequências de bits que têm $3k$ uns, em que k é um inteiro não negativo; o conjunto das sequências de bits que têm $3k + 1$ uns, em que k é um inteiro não negativo; e o conjunto das sequências de bits que têm $3k + 2$ uns, em que k é um inteiro não negativo

16. Quais destas relações são partições do conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de pares ordenados de inteiros?

- (a) o conjunto dos pares (x, y) , no qual x ou y é ímpar; o conjunto dos pares (x, y) , no qual x é par; e o conjunto dos pares (x, y) , no qual y é par
- (b) o conjunto dos pares (x, y) , no qual x e y são ambos ímpares; o conjunto dos pares (x, y) , no qual exatamente um entre x e y é ímpar; e o conjunto dos pares (x, y) , no qual x e y são ambos pares
- (c) o conjunto dos pares (x, y) , no qual x é positivo; o conjunto dos pares (x, y) , no qual y é positivo; e o conjunto dos pares (x, y) , no qual x e y são ambos negativos
- (d) o conjunto dos pares (x, y) , no qual $3 \mid x$ e $3 \mid y$; o conjunto dos pares (x, y) , no qual $3 \mid x$ e $3 \nmid y$; o conjunto dos pares (x, y) , no qual $3 \nmid x$ e $3 \mid y$; e o conjunto dos pares (x, y) , no qual $3 \nmid x$ e $3 \nmid y$
- (e) o conjunto dos pares (x, y) , no qual $x > 0$ e $y > 0$; o conjunto dos pares (x, y) , no qual $x > 0$ e $y \leq 0$; o conjunto dos pares (x, y) , no qual $x \leq 0$ e $y > 0$; e o conjunto dos pares (x, y) , no qual $x \leq 0$ e $y \leq 0$

(f) o conjunto dos pares (x, y) , no qual $x \neq 0$ e $y \neq 0$; o conjunto dos pares (x, y) , no qual $x = 0$ e $y \neq 0$; e o conjunto dos pares (x, y) , no qual $x \neq 0$ e $y = 0$

17. Liste os pares ordenados nas relações de equivalência produzidas por estas partições de $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

(a) $\{0\}, \{1, 2\}, \{3, 4, 5\}$

(c) $\{0, 1, 2\}, \{3, 4, 5\}$

(b) $\{0, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}$

(d) $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$

Def.: Uma partição P_1 é denominada um **refinamento** da partição P_2 se todo conjunto em P_1 for um subconjunto de um dos conjuntos em P_2 .

18. Mostre que a partição formada a partir das classes de congruência módulo 6 é um refinamento da partição obtida a partir das classes de congruência módulo 3.

19. Mostre que a partição do conjunto de sequências de bits de comprimento 16, formada pelas classes de equivalência de sequências de bits que coincidem nos últimos 8 bits, é um refinamento da partição formada a partir das classes de equivalência de sequências de bits que coincidem nos últimos 4 bits

20. Encontre a menor relação de equivalência no conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ que contenha a relação $\{(a, b), (a, c), (d, e)\}$.

21. Seja $R = \{(x, y) \mid x - y \text{ é um inteiro}\}$.

(a) Qual é a classe de equivalência de 1 para essa relação de equivalência.

(b) Qual é a classe de equivalência de $1/2$ para essa relação de equivalência.

22. Determine o número de relações de equivalência diferentes em um conjunto com três elementos, listando-as.

23. Suponha que formemos uma partição P a partir de uma relação de equivalência R . Qual é a relação R' que resulta se formamos uma relação de equivalência a partir de P ?

24. Projete um algoritmo para encontrar a menor relação de equivalência que contenha uma dada relação.