Indução e Definições Recursivas

Matemática Discreta

Prof. Lucas Ismaily

2º Semestre de 2022

Aluno: [ ] Matrícula: [ ]

Indução:

1. Considere $P(n)$ como a proposição que afirma que uma postagem de n centavos pode ser feita usando-se apenas selos de 3 e 5 centavos. Os itens desse exercício formam uma demonstração por indução completa de que $P(n)$ é verdadeira para $n \geq 8$.
   (a) Mostre que as proposições $P(8), P(9)$ e $P(10)$ são verdadeiras, completando o passo base da demonstração.
   (b) Qual é a hipótese indutiva da demonstração?
   (c) O que você precisa para demonstrar o passo de indução?
   (d) Complete o passo de indução para $k \geq 10$.
   (e) Explique por que esses passos mostram que esta prposição é verdadeira sempre que $n \geq 8$.

2. (a) Determine quais postagens podem ser feitas usando-se apenas selos de 4 e 11 centavos.
   (b) Demonstre sua resposta de (a) usando o princípio da indução matemática. Certifique-se de afirmar explicitamente sua hipótese indutiva no passo de indução.
   (c) Demonstre sua resposta de (a) usando a indução completa. Em que a hipótese indutiva dessa demonstração difere da demonstração usada com indução matemática?

3. Qual a quantidade de dinheiro que pode ser reunida usando apenas notas de $\$2$ e $\$5$? Demonstre sua resposta usando a indução completa.

4. Considere esta variação do jogo de Nim. O jogo começa com n cartas. Dois jogadores podem remover as cartas uma, duas ou três de cada vez. O jogador que remover a última carta, perde. Use a indução completa para mostrar que se cada jogador jogar com a melhor estratégia possível, o primeiro vence, se $n = 4j, 4j + 2$ ou $4j + 3$ para qualquer número inteiro não negativo j, e o segundo jogador vence no outro caso possível, quando $n = 4j + 1$ para qualquer número inteiro não negativo j.

5. Suponha que $P(n)$ seja uma função proposicional. Determine se para cada número inteiro positivo n, a proposição $P(n)$ deve ser verdadeira, e justifique sua resposta, se

   (a) $P(1)$ for verdadeira; para todos os números inteiros positivos n, se $P(n)$ for verdadeira, então $P(n+2)$ é verdadeira.
   (b) $P(1)$ e $P(2)$ forem verdadeiros; para todos os números inteiros positivos n, se $P(n)$ e $P(n+1)$ forem verdadeiras, então $P(n+2)$ é verdadeira.
   (c) $P(1)$ for verdadeira; para todos os números inteiros positivos n, se $P(n)$ for verdadeira, então $P(2n)$ é verdadeira.
   (d) $P(1)$ for verdadeira; para todos os números inteiros positivos n, se $P(n)$ for verdadeira, então $P(n+1)$ é verdadeira.

6. Mostre que, se a proposição $P(n)$ for verdadeira para infinitos números inteiros positivos n e $P(n+1) \to P(n)$ for verdadeira para todos os números inteiros positivos n, então $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos n.

7. O que há de errado com esta "demonstração" por indução completa?
   Teorema: Para todo número inteiro não negativo n, $5n = 0$.
   Passo base: $5 \cdot 0 = 0$.
   Passo de indução: Suponha que $5j = 0$ para todos os números inteiros não negativos j com $0 \leq j \leq k$. Escreva $k+1 = i+j$, em que i e j são números naturais menores que $k+1$. Pela hipótese indutiva, $5(k+1) = 5(i+j) = 5i + 5j = 0 + 0 = 0$.

Definições recursivas:

8. Encontre $f(1), f(2), f(3)$ e $f(4)$ se $f(n)$ for definido recursivamente por $f(0) = 1$ e para $n = 0, 1, 2, \ldots$

   (a) $f(n+1) = f(n) + 2$.
   (b) $f(n+1) = 3f(n)$.
   (c) $f(n+1) = 2^{f(n)}$.
   (d) $f(n+1) = f(n)^2 + f(n) + 1$.

9. Encontre $f(2), f(3), f(4)$ e $f(5)$ se $f(n)$ for definido recursivamente por $f(0) = -1$, $f(1) = 2$ e para $n = 1, 2, \ldots$

   (a) $f(n+1) = f(n) + 3f(n-1)$.
   (b) $f(n+1) = f(n)^2 f(n-1)$.
   (c) $f(n+1) = 3f(n)^2 - 4f(n-1)^2$.
   (d) $f(n+1) = f(n-1)/f(n)$.

10. Determine se cada uma das definições propostas abaixo é uma definição recursiva válida de uma função f a partir do conjunto dos números inteiros não negativos para o conjunto dos números inteiros. Se f for bem definida, encontre uma fórmula para $f(n)$ quando n for um número inteiro não negativo e demonstre que sua fórmula é válida.

    (a) $f(0) = 0, f(n) = 2f(n-2)$ para $n \geq 1$
    (b) $f(0) = 1, f(n) = f(n-1) - 1$ para $n \geq 1$
    (c) $f(0) = 2, f(1) = 3, f(n) = f(n-1) - 1$ para $n \geq 2$
    (d) $f(0) = 1, f(1) = 2, f(n) = 2f(n-2)$ para $n \geq 2$
    (e) $f(0) = 1, f(n) = 3f(n-1)$ se n for ímpar e $n \geq 1$ e $f(n) = 9f(n-2)$ se n for par e $n \geq 2$

11. Dê uma definição recursiva da sequência $\{a_n\}, n = 1, 2, 3, ...$ se

    (a) $a_n = 6n$.
    (b) $a_n = 2n + 1$.
    (c) $a_n = 10^n$.
    (d) $a_n = 5$.

12. Seja F como uma função tal que $F(n)$ é a soma dos primeiros n números inteiros positivos. Dê uma definição recursiva de $F(n)$.

13. Dê uma definição recursiva de $P_m(n)$, o produto do número inteiro m pelo número inteiro não negativo n.

    Nos exercícios a seguir, f_n é o n-ésimo número de Fibonacci.

14. Demonstre que $f_1 + f_3 + ... + f_{2n-1} = f_{2n}$ quando n é um número inteiro positivo.

15. Mostre que $f_0 f_1 + f_1 f_2 + ... + f_{2n-1} f_{2n} = f_{2n}^2$ quando n é um número inteiro positivo.

16. Dê uma definição recursiva do conjunto dos números inteiros positivos que são multiplos de 5.

17. Dê uma definição recursiva do

    (a) conjunto de números inteiros pares.
    (b) conjunto de números inteiros positivos congruentes a 2 módulo 3.
    (c) conjunto de números inteiros positivos não divisíveis por 5.

18. Use a indução estrutural para mostrar que $n(T) \geq 2h(T) + 1$, em que T é uma árvore binária completa, $n(T)$ é igual ao número de vértices de T e $h(T)$ é a altura de T.