Fecho de uma endorrelação

QXD0008 – Matemática Discreta

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Prof. Lucas Ismaily
ismailybf@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

2º semestre/2022

Tópicos desta aula

Nesta apresentação:

- Fecho reflexivo
- Fecho simétrico
- Fecho transitivo
  - Grafos direcionados e fechos transitivos
  - Caminhos em grafos e caminhos em relações
  - Caracterização do fecho transitivo de uma relação

Referências para esta aula

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Seção 9.4** do livro:
  Discrete Mathematics and Its Applications.
  Author: Kenneth H. Rosen. Seventh Edition. **(English version)**

- **Seção 8.4** do livro: Matemática Discreta e suas Aplicações.
  Autor: Kenneth H. Rosen. Sexta Edição.

Introdução

Motivação

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Frequentemente é desejável estender uma relação R de forma a garantir que ela satisfaz determinado conjuntos de propriedades.
  - por exemplo, garantir que R satisfaz a propriedade reflexiva

Motivação

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Frequentemente é desejável estender uma relação R de forma a garantir que ela satisfaz determinado conjuntos de propriedades.
    - por exemplo, garantir que R satisfaz a propriedade reflexiva
- Se uma relação binária R definida em um conjunto A não possui uma determinada propriedade P, podemos "estender" R e obter uma nova relação R^* em A que tenha essa propriedade.

Motivação

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Frequentemente é desejável estender uma relação R de forma a garantir que ela satisfaz determinado conjuntos de propriedades.
  - por exemplo, garantir que R satisfaz a propriedade reflexiva
- Se uma relação binária R definida em um conjunto A não possui uma determinada propriedade P, podemos "estender" R e obter uma nova relação R^* em A que tenha essa propriedade.
- Estender significa que a nova relação R^* em A contém todos os pares de R e os pares adicionais necessários para que a propriedade P seja válida.

Fecho de uma endorrelação

Definição: Seja R uma endorrelação num conjunto A e P uma propriedade. O fecho de R com relação à propriedade P é a endorrelação R^* no conjunto A que satisfaz as três condições abaixo:

1. R^* satisfaz a propriedade P.
2. $R \subseteq R^*$.
3. Se S é uma outra relação qualquer que contém R e satisfaz a propriedade P, então $R^* \subseteq S$.
   - ou seja, R^* é a menor endorrelação em A que contém R e que satisfaz a propriedade P

Fecho de uma endorrelação

Definição: Seja R uma endorrelação num conjunto A e P uma propriedade. O fecho de R com relação à propriedade P é a endorrelação R^* no conjunto A que satisfaz as três condições abaixo:

1. R^* satisfaz a propriedade P.
2. $R \subseteq R^*$.
3. Se S é uma outra relação qualquer que contém R e satisfaz a propriedade P, então $R^* \subseteq S$.
   - ou seja, R^* é a menor endorrelação em A que contém R e que satisfaz a propriedade P

- **Obs. 1:** O fecho de uma endorrelação R com relação a uma determinada propriedade P pode não existir.

Fecho de uma endorrelação

Definição: Seja R uma endorrelação num conjunto A e P uma propriedade. O fecho de R com relação à propriedade P é a endorrelação R^* no conjunto A que satisfaz as três condições abaixo:

1. R^* satisfaz a propriedade P.
2. $R \subseteq R^*$.
3. Se S é uma outra relação qualquer que contém R e satisfaz a propriedade P, então $R^* \subseteq S$.
   - ou seja, R^* é a <u>menor</u> endorrelação em A que contém R e que satisfaz a propriedade P

- **Obs. 1:** O fecho de uma endorrelação R com relação a uma determinada propriedade P pode não existir.
- **Obs. 2:** Fechos de uma relação R com relação às propriedades reflexiva, simétrica e transitiva podem ser encontrados.

Fecho reflexivo

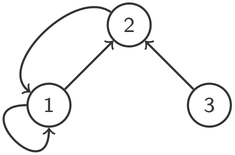
Definição: Seja A um conjunto e R uma endorrelação em A. O fecho reflexivo de R é a endorrelação R^* em A que satisfaz as três condições abaixo:

1. R^* é reflexiva.
2. $R \subseteq R^*$
3. Se S é uma outra relação transitiva qualquer que contém R, então $R^* \subseteq S$.

Fecho Reflexivo

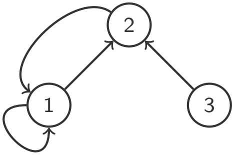
Exemplo: A relação $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,2)\}$ no conjunto $A = \{1,2,3\}$ não é reflexiva.

Como construir uma relação reflexiva contendo R que seja a menor possível?



Fecho Reflexivo

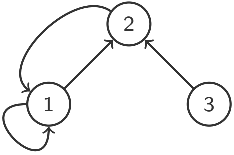
Exemplo: A relação $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,2)\}$ no conjunto $A = \{1,2,3\}$ não é reflexiva.
Como construir uma relação reflexiva contendo R que seja a menor possível?

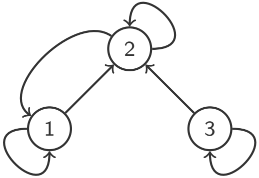


Resposta: Adicionando os pares $(2,2)$ e $(3,3)$ em R, porque estes são os únicos pares da forma (a,a) que não estão em R. Além disso, **toda** relação reflexiva que contém R deve conter também $(2,2)$ e $(3,3)$.

Fecho Reflexivo

Exemplo: A relação $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,2)\}$ no conjunto $A = \{1,2,3\}$ não é reflexiva.
Como construir uma relação reflexiva contendo R que seja a menor possível?



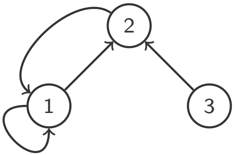


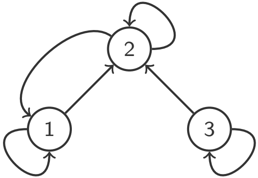
Resposta: Adicionando os pares $(2,2)$ e $(3,3)$ em R, porque estes são os únicos pares da forma (a,a) que não estão em R. Além disso, **toda** relação reflexiva que contém R deve conter também $(2,2)$ e $(3,3)$.

Fecho Reflexivo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exemplo: A relação $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,2)\}$ no conjunto $A = \{1,2,3\}$ não é reflexiva.
Como construir uma relação reflexiva contendo R que seja a menor possível?





Resposta: Adicionando os pares $(2,2)$ e $(3,3)$ em R, porque estes são os únicos pares da forma (a,a) que não estão em R. Além disso, **toda** relação reflexiva que contém R deve conter também $(2,2)$ e $(3,3)$.

- Como essa nova relação contém R, é reflexiva e está contida em toda relação reflexiva que contém R, ela é chamada de fecho reflexivo de R.

Fecho Reflexivo

Exercício para casa: Seja R uma endorrelação num conjunto A. Prove que o fecho reflexivo de R é a relação $R \cup \Delta$ tal que $\Delta = \{(a, a)\colon a \in R\}$.

Obs.: A endorrelação Δ é chamada relação diagonal em A.

Fecho Reflexivo

Exercício para casa: Seja R uma endorrelação num conjunto A. Prove que o fecho reflexivo de R é a relação $R \cup \Delta$ tal que $\Delta = \{(a, a) \colon a \in R\}$.

Obs.: A endorrelação Δ é chamada relação diagonal em A.

Exemplo:

Qual é o fecho reflexivo da endorelação $R = \{(a, b) \colon a < b\}$ no conjunto dos inteiros?

Fecho Reflexivo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exercício para casa: Seja R uma endorrelação num conjunto A. Prove que o fecho reflexivo de R é a relação $R \cup \Delta$ tal que $\Delta = \{(a, a) \colon a \in R\}$.

Obs.: A endorrelação Δ é chamada relação diagonal em A.

Exemplo:
Qual é o fecho reflexivo da endorelação $R = \{(a, b) \colon a < b\}$ no conjunto dos inteiros?

Solução:

- De acordo com a definição acima, o fecho reflexivo de R é

$$R \cup \Delta = \{(a, b) \colon a < b\} \cup \underbrace{\{(a, a) \colon a \in \mathbb{Z}\}}_{\text{relação diagonal } \Delta} = \{(a, b) \colon a \leq b\}.$$

Fecho simétrico

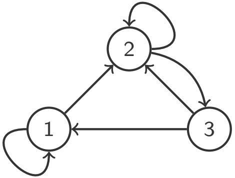
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição: Seja A um conjunto e R uma endorrelação em A. O fecho simétrico de R é a endorrelação R^* em A que satisfaz as três condições abaixo:

1. R^* é simétrica.
2. $R \subseteq R^*$
3. Se S é uma outra relação simétrica qualquer que contém R, então $R^* \subseteq S$.

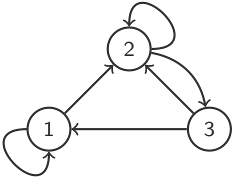
Fecho simétrico

Exemplo: A relação $R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,2),(3,1)\}$ no conjunto $A = \{1,2,3\}$ não é simétrica. Como construir uma relação simétrica contendo R que seja a menor possível?



Fecho simétrico

Exemplo: A relação $R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,2),(3,1)\}$ no conjunto $A = \{1,2,3\}$ não é simétrica. Como construir uma relação simétrica contendo R que seja a menor possível?

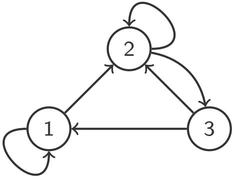


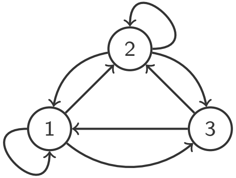
Resposta: Adicionando os pares $(2,1)$ e $(1,3)$ em R, porque estes são os únicos pares da forma (b,a) com $(a,b) \in R$ que não estão em R. Esta nova relação é simétrica e contém R. Além disso, **toda** relação simétrica que contém R deve conter também $(2,1)$ e $(1,3)$.

Fecho simétrico

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Exemplo: A relação $R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,2),(3,1)\}$ no conjunto $A = \{1,2,3\}$ não é simétrica. Como construir uma relação simétrica contendo R que seja a menor possível?



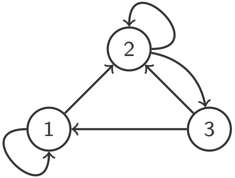


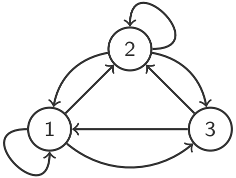
Resposta: Adicionando os pares $(2,1)$ e $(1,3)$ em R, porque estes são os únicos pares da forma (b,a) com $(a,b) \in R$ que não estão em R. Esta nova relação é simétrica e contém R. Além disso, **toda** relação simétrica que contém R deve conter também $(2,1)$ e $(1,3)$.

Fecho simétrico

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exemplo: A relação $R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,2),(3,1)\}$ no conjunto $A = \{1,2,3\}$ não é simétrica. Como construir uma relação simétrica contendo R que seja a menor possível?





Resposta: Adicionando os pares $(2,1)$ e $(1,3)$ em R, porque estes são os únicos pares da forma (b,a) com $(a,b) \in R$ que não estão em R. Esta nova relação é simétrica e contém R. Além disso, **toda** relação simétrica que contém R deve conter também $(2,1)$ e $(1,3)$.

- Como essa nova relação contém R, é simétrica e está contida em toda relação simétrica que contém R, ela é chamada de fecho simétrico de R.

Fecho simétrico

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Como o exemplo anterior ilustrou, o fecho simétrico da endorrelação R em A pôde ser construído adicionando a R todos os pares (b, a) que não estão em R mas que $(a, b) \in R$.
- A adição desses pares produz uma relação que é simétrica, que contém R, e que está contida em qualquer relação simétrica que contém R.

Exercício para casa: Seja R uma endorrelação em um conjunto A. Prove que o fecho simétrico da relação R pode ser construído tomando a união da relação R com a sua inversa. Ou seja, prove que $R \cup R^{-1}$ é o fecho simétrico de R.

- Lembre-se que $R^{-1} = \{(b, a) \colon (a, b) \in R\}$.

Fecho transitivo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

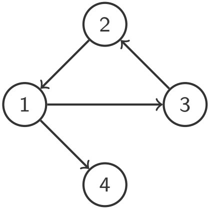
Definição: Seja A um conjunto e R uma endorrelação em A. O fecho transitivo de R é a endorrelação R^* em A que satisfaz as três condições abaixo:

1. R^* é transitiva.
2. $R \subseteq R^*$
3. Se S é uma outra relação transitiva qualquer que contém R, então $R^* \subseteq S$.

Fecho transitivo

Exemplo:

- Considere a relação $R = \{(1,3),(1,4),(2,1),(3,2)\}$ no conjunto $A = \{1,2,3,4\}$. Esta relação é transitiva?

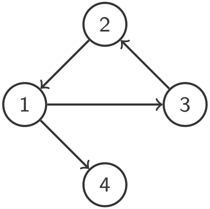


Fecho transitivo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exemplo:

- Considere a relação $R = \{(1,3),(1,4),(2,1),(3,2)\}$ no conjunto $A = \{1,2,3,4\}$. Esta relação é transitiva?
- **Resposta:** Não, pois ela não contém todos os pares da forma (a, c) tal que (a, b) e (b, c) estão em R. Os pares desta forma que não estão em R são $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$ e $(3, 1)$.

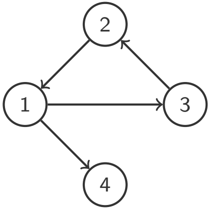


relação não transitiva

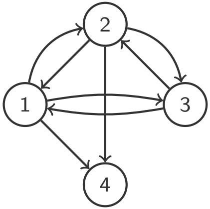
Fecho transitivo

Exemplo:

- Considere a relação $R = \{(1,3),(1,4),(2,1),(3,2)\}$ no conjunto $A = \{1,2,3,4\}$. Esta relação é transitiva?
- **Resposta:** Não, pois ela não contém todos os pares da forma (a, c) tal que (a, b) e (b, c) estão em R. Os pares desta forma que não estão em R são $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$ e $(3, 1)$.
- A relação resultante da adição desses pares em R é transitiva?



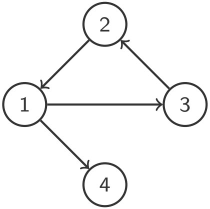
relação não transitiva



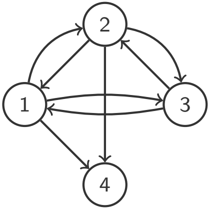
Fecho transitivo

Exemplo:

- Considere a relação $R = \{(1,3),(1,4),(2,1),(3,2)\}$ no conjunto $A = \{1,2,3,4\}$. Esta relação é transitiva?
- **Resposta:** Não, pois ela não contém todos os pares da forma (a,c) tal que (a,b) e (b,c) estão em R. Os pares desta forma que não estão em R são $(1,2)$, $(2,3)$, $(2,4)$ e $(3,1)$.
- A relação resultante da adição desses pares em R é transitiva?
  - Não, pois ela contém $(3,1)$ e $(1,4)$ mas não contém $(3,4)$.



relação não transitiva



relação não transitiva

Fecho transitivo

- O exemplo anterior mostra que construir o fecho transitivo de uma relação é mais complicado que construir os fechos reflexivo e simétrico.
- Veremos que a representação de uma relação como um grafo direcionado ajuda na construção do fecho transitivo.

Caminhos em grafos direcionados e Caminhos em Relações

Caminhos em grafos direcionados

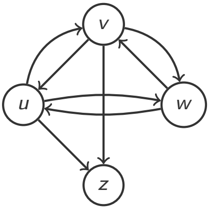
Definição: Um caminho de a para b no grafo direcionado G é uma sequência de arestas $(x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$ em G, em que n é um inteiro não negativo e $x_0 = a$ e $x_n = b$.

Este caminho é indicado por $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$.
O comprimento deste caminho é n.
Podemos considerar um conjunto vazio de arestas como um caminho de (a, a).

Caminhos em grafos direcionados

Definição: Um caminho de a para b no grafo direcionado G é uma sequência de arestas $(x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$ em G, em que n é um inteiro não negativo e $x_0 = a$ e $x_n = b$.

Este caminho é indicado por $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$.
O comprimento deste caminho é n.
Podemos considerar um conjunto vazio de arestas como um caminho de (a, a).



Grafo G

Quais dessas sequências são caminhos em G?

- u, v, w
- u, z, w, v
- u, v, u, w, v, z
- w, v, u, w

Caminhos em relações

O termo "caminho" que usamos em grafos também se aplica a relações.

Definição: Seja $R\colon A \to A$ uma endorrelação e $a, b \in A$. Dizemos que existe um caminho de comprimento n de a para b em R **se e somente se** existe uma sequência de elementos $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b \in A$ com $(a, x_1) \in R$, $(x_1, x_2) \in R$, ..., e $(x_{n-1}, b) \in R$.

Exemplo: Seja $R = \{(3,1),(2,4),(1,2),(4,3),(4,1)\}$ uma endorrelação em $A = \{1,2,3,4\}$. Encontre um caminho de 3 para 4 em R.

Caminhos em relações

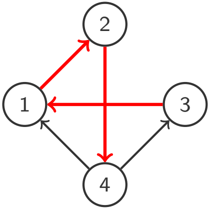
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

O termo "caminho" que usamos em grafos também se aplica a relações.

Definição: Seja $R\colon A \to A$ uma endorrelação e $a, b \in A$. Dizemos que existe um caminho de comprimento n de a para b em R **se e somente se** existe uma sequência de elementos $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b \in A$ com $(a, x_1) \in R$, $(x_1, x_2) \in R$, ..., e $(x_{n-1}, b) \in R$.

Exemplo: Seja $R = \{(3,1),(2,4),(1,2),(4,3),(4,1)\}$ uma endorrelação em $A = \{1,2,3,4\}$. Encontre um caminho de 3 para 4 em R.

Solução: $3, 1, 2, 4$
Comprimento do caminho $= 3$



Caracterização de caminhos em relações

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 13.1: Seja R uma endorrelação em um conjunto A, $a, b \in A$ e n um inteiro positivo. Existe um caminho de comprimento n de a para b em R **se e somente se** $(a, b) \in R^n$.

Demonstração:

Caracterização de caminhos em relações

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 13.1: Seja R uma endorrelação em um conjunto A, $a, b \in A$ e n um inteiro positivo. Existe um caminho de comprimento n de a para b em R **se e somente se** $(a, b) \in R^n$.

Demonstração:
Seja R uma endorrelação em um conjunto A e $a, b \in A$.
Seja $P(n)$ a afirmação existe um caminho de comprimento n de a para b em R se e somente se $(a, b) \in R^n$.

Caracterização de caminhos em relações

Teorema 13.1: Seja R uma endorrelação em um conjunto A, $a, b \in A$ e n um inteiro positivo. Existe um caminho de comprimento n de a para b em R **se e somente se** $(a, b) \in R^n$.

Demonstração:
Seja R uma endorrelação em um conjunto A e $a, b \in A$.
Seja $P(n)$ a afirmação existe um caminho de comprimento n de a para b em R se e somente se $(a, b) \in R^n$.

Vamos provar por indução matemática em n.

Caracterização de caminhos em relações

Teorema 13.1: Seja R uma endorrelação em um conjunto A, $a, b \in A$ e n um inteiro positivo. Existe um caminho de comprimento n de a para b em R **se e somente se** $(a, b) \in R^n$.

Demonstração:
Seja R uma endorrelação em um conjunto A e $a, b \in A$.
Seja $P(n)$ a afirmação existe um caminho de comprimento n de a para b em R se e somente se $(a, b) \in R^n$.

Vamos provar por indução matemática em n.

Caso Base: $n = 1$. Por definição, existe um caminho de a para b em R de comprimento igual a 1 se e somente se $(a, b) \in R$.

Portanto, $P(1)$ é verdadeira. Isso completa o caso base.

Continuação da Demonstração

Lembrete: $P(n) =$ existe um caminho de comprimento n de a para b em R se e somente se $(a, b) \in R^n$.

Passo Indutivo: Suponha que o teorema é verdadeiro para um inteiro positivo n arbitrário (**Hipótese de Indução**).

Continuação da Demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Lembrete: $P(n) =$ existe um caminho de comprimento n de a para b em R se e somente se $(a, b) \in R^n$.

Passo Indutivo: Suponha que o teorema é verdadeiro para um inteiro positivo n arbitrário (**Hipótese de Indução**).
A seguir, provaremos que o teorema é verdadeiro para o inteiro $n + 1$.

Continuação da Demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Lembrete: $P(n) =$ existe um caminho de comprimento n de a para b em R se e somente se $(a, b) \in R^n$.

Passo Indutivo: Suponha que o teorema é verdadeiro para um inteiro positivo n arbitrário (**Hipótese de Indução**).
A seguir, provaremos que o teorema é verdadeiro para o inteiro $n + 1$.

Existe um caminho de comprimento $n + 1$ de a para b **se e somente se** existe um elemento $c \in A$ tal que $(a, c) \in R$ e existe um caminho de comprimento n de c para b em R,

Continuação da Demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Lembrete: $P(n) =$ existe um caminho de comprimento n de a para b em R se e somente se $(a, b) \in R^n$.

Passo Indutivo: Suponha que o teorema é verdadeiro para um inteiro positivo n arbitrário (**Hipótese de Indução**).
A seguir, provaremos que o teorema é verdadeiro para o inteiro $n + 1$.

Existe um caminho de comprimento $n + 1$ de a para b **se e somente se** existe um elemento $c \in A$ tal que $(a, c) \in R$ e existe um caminho de comprimento n de c para b em R, que, pela HI, equivale a $(c, b) \in R^n$.

Continuação da Demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Lembrete: $P(n) =$ existe um caminho de comprimento n de a para b em R se e somente se $(a, b) \in R^n$.

Passo Indutivo: Suponha que o teorema é verdadeiro para um inteiro positivo n arbitrário (**Hipótese de Indução**).
A seguir, provaremos que o teorema é verdadeiro para o inteiro $n + 1$.

Existe um caminho de comprimento $n + 1$ de a para b **se e somente se** existe um elemento $c \in A$ tal que $(a, c) \in R$ e existe um caminho de comprimento n de c para b em R, que, pela HI, equivale a $(c, b) \in R^n$.

Logo, pela HI, existe um caminho de comprimento $n + 1$ de a para b **se e somente se** existe um elemento $c \in A$ tal que $(a, c) \in R$ e $(c, b) \in R^n$.

Continuação da Demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Lembrete: $P(n)$ = existe um caminho de comprimento n de a para b em R se e somente se $(a, b) \in R^n$.

Passo Indutivo: Suponha que o teorema é verdadeiro para um inteiro positivo n arbitrário (**Hipótese de Indução**).
A seguir, provaremos que o teorema é verdadeiro para o inteiro $n + 1$.

Existe um caminho de comprimento $n + 1$ de a para b **se e somente se** existe um elemento $c \in A$ tal que $(a, c) \in R$ e existe um caminho de comprimento n de c para b em R, que, pela HI, equivale a $(c, b) \in R^n$.

Logo, pela HI, existe um caminho de comprimento $n + 1$ de a para b **se e somente se** existe um elemento $c \in A$ tal que $(a, c) \in R$ e $(c, b) \in R^n$.

Tal elemento c existe **se e somente** $(a, b) \in R^{n+1}$.

Continuação da Demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

> **Lembrete:** $P(n)$ = existe um caminho de comprimento n de a para b em R se e somente se $(a, b) \in R^n$.

Passo Indutivo: Suponha que o teorema é verdadeiro para um inteiro positivo n arbitrário (**Hipótese de Indução**).
A seguir, provaremos que o teorema é verdadeiro para o inteiro $n + 1$.

Existe um caminho de comprimento $n + 1$ de a para b **se e somente se** existe um elemento $c \in A$ tal que $(a, c) \in R$ e existe um caminho de comprimento n de c para b em R, que, pela HI, equivale a $(c, b) \in R^n$.

Logo, pela HI, existe um caminho de comprimento $n + 1$ de a para b **se e somente se** existe um elemento $c \in A$ tal que $(a, c) \in R$ e $(c, b) \in R^n$.

Tal elemento c existe **se e somente** $(a, b) \in R^{n+1}$.

Portanto, existe um caminho de comprimento $n + 1$ de a para b **se e somente se** $(a, b) \in R^{n+1}$. Isso completa a prova. $\square$

Fechos Transitivos

Vamos mostrar que encontrar um fecho transitivo de uma relação é equivalente a determinar quais pares de vértices no grafo direcionado correspondente estão conectados por um caminho.

Fechos Transitivos

Vamos mostrar que encontrar um fecho transitivo de uma relação é equivalente a determinar quais pares de vértices no grafo direcionado correspondente estão conectados por um caminho.

Para isso, precisaremos da seguinte definição:

Definição: Seja R uma endorrelação em um conjunto A. A relação de conectividade R^* consiste nos pares de (a, b), tal que existe um caminho de comprimento pelo menos um, de a para b em R.

Fechos Transitivos

Vamos mostrar que encontrar um fecho transitivo de uma relação é equivalente a determinar quais pares de vértices no grafo direcionado correspondente estão conectados por um caminho.

Para isso, precisaremos da seguinte definição:

> **Definição:** Seja R uma endorrelação em um conjunto A. A relação de conectividade R^* consiste nos pares de (a, b), tal que existe um caminho de comprimento pelo menos um, de a para b em R.

Como R^n consiste nos pares (a, b), tal que existe um caminho de comprimento n de a para b, segue que R^* é a união de todos os R^n:

$$R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$$

Fechos Transitivos

Exemplo:

Seja A o conjunto de todas as pessoas do mundo.
A endorrelação $R\colon A \to A$ contém o par (a, b) se e somente se a conhece b.

- O que é R^n quando $n \geq 1$?
- O que é R^*?

Fechos Transitivos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exemplo:

Seja A o conjunto de todas as pessoas do mundo.
A endorrelação $R \colon A \to A$ contém o par (a, b) se e somente se a conhece b.

- O que é R^n quando $n \geq 1$?
- O que é R^*?

Resposta: R^n consiste em todos os pares (a, b), tal que existam pessoas $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, tal que a conhece x_1, x_1 conhece x_2, …, e x_{n-1} conhece b.

Fechos Transitivos

Exemplo:

Seja A o conjunto de todas as pessoas do mundo.
A endorrelação $R\colon A \to A$ contém o par (a, b) se e somente se a conhece b.

- O que é R^n quando $n \geq 1$?
- O que é R^*?

Resposta: R^n consiste em todos os pares (a, b), tal que existam pessoas $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, tal que a conhece x_1, x_1 conhece x_2, ..., e x_{n-1} conhece b.

A relação R^* contém (a, b) se existir uma sequência de pessoas, começando com a e terminando com b, tal que cada pessoa na sequência conhece a pessoa seguinte na sequência.

Fechos Transitivos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exemplo:
Seja A o conjunto de todas as pessoas do mundo.
A endorrelação $R\colon A \to A$ contém o par (a, b) se e somente se a conhece b.

- O que é R^n quando $n \geq 1$?
- O que é R^*?

Resposta: R^n consiste em todos os pares (a, b), tal que existam pessoas $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, tal que a conhece x_1, x_1 conhece x_2, ..., e x_{n-1} conhece b.

A relação R^* contém (a, b) se existir uma sequência de pessoas, começando com a e terminando com b, tal que cada pessoa na sequência conhece a pessoa seguinte na sequência.

Teoria dos seis graus de separação [Stanley Milgram, 1967]:
No mundo, são necessários no máximo seis laços de amizade para que duas pessoas quaisquer estejam ligadas.

Fechos Transitivos

O teorema a seguir mostra que o fecho transitivo de uma relação e a relação de conectividade associada são iguais:

Teorema 13.2: O fecho transitivo de uma relação R é igual à relação de conectividade R^*.

Atenção: Demonstração no livro. Teorema 2 da seção.

Fechos Transitivos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

O teorema a seguir mostra que o fecho transitivo de uma relação e a relação de conectividade associada são iguais:

Teorema 13.2: O fecho transitivo de uma relação R é igual à relação de conectividade R^*.

Atenção: Demonstração no livro. Teorema 2 da seção.

- Agora sabemos que o fecho transitivo e a relação de conectividade são iguais. Mas como computar esta relação?

Fechos Transitivos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

O teorema a seguir mostra que o fecho transitivo de uma relação e a relação de conectividade associada são iguais:

Teorema 13.2: O fecho transitivo de uma relação R é igual à relação de conectividade R^*.

Atenção: Demonstração no livro. Teorema 2 da seção.

- Agora sabemos que o fecho transitivo e a relação de conectividade são iguais. Mas como computar esta relação?
- Dado um grafo direcionado finito G associado a uma relação R, não precisamos examinar caminhos arbitrariamente longos para determinar se existe um caminho entre dois de seus vértices.

Fechos Transitivos

O teorema a seguir mostra que o fecho transitivo de uma relação e a relação de conectividade associada são iguais:

> **Teorema 13.2:** O fecho transitivo de uma relação R é igual à relação de conectividade R^*.

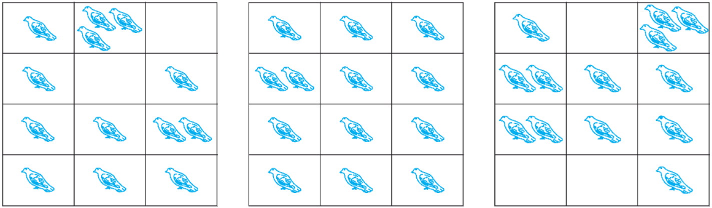
Atenção: Demonstração no livro. Teorema 2 da seção.

- Agora sabemos que o fecho transitivo e a relação de conectividade são iguais. Mas como computar esta relação?
- Dado um grafo direcionado finito G associado a uma relação R, não precisamos examinar caminhos arbitrariamente longos para determinar se existe um caminho entre dois de seus vértices.
- O próximo teorema mostrará que basta examinar caminhos que não contenham mais do que n arestas, em que n é o número de vértices do grafo.

Princípio da Casa dos Pombos

Vamos precisar do seguinte princípio na prova do próximo resultado:

Princípio da Casa dos Pombos: Seja k um inteiro positivo. Se $k+1$ ou mais objetos são guardados em k caixas, então existe pelo menos uma caixa contendo dois ou mais objetos.



Três tentativas de se colocar 13 pombos em 12 caixas

Fechos Transitivos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 13.3: Seja A um conjunto com n elementos e R uma relação em A. Sejam $a, b \in R$.

(I) Se existir um caminho de comprimento pelo menos um em R de a para b, então existirá um tal caminho com comprimento que não exceda n.

(II) Se $a \neq b$ e existir um caminho de comprimento pelo menos um em R de a para b, então existirá um tal caminho com comprimento que não exceda $n-1$.

Demonstração do Teorema 13.3

Seja A um conjunto com n elementos e R uma relação em A.
Sejam $a, b \in R$.

Demonstração do Teorema 13.3

Seja A um conjunto com n elementos e R uma relação em A.
Sejam $a, b \in R$.

Suponha que existe um caminho de a para b em R. **Pegue o menor caminho possível** e seja m o comprimento desse caminho. Suponha que $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m$ seja esse caminho, em que $x_0 = a$ e $x_m = b$. Vamos dividir a prova em dois casos: $a = b$ e $a \neq b$.

Demonstração do Teorema 13.3

Seja A um conjunto com n elementos e R uma relação em A.
Sejam $a, b \in R$.

Suponha que existe um caminho de a para b em R. **Pegue o menor caminho possível** e seja m o comprimento desse caminho. Suponha que $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m$ seja esse caminho, em que $x_0 = a$ e $x_m = b$. Vamos dividir a prova em dois casos: $a = b$ e $a \neq b$.

Caso 1: $a = b$. Se $m \leq n$ não há o que provar.

Demonstração do Teorema 13.3

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Seja A um conjunto com n elementos e R uma relação em A.
Sejam $a, b \in R$.

Suponha que existe um caminho de a para b em R. **Pegue o menor caminho possível** e seja m o comprimento desse caminho. Suponha que $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m$ seja esse caminho, em que $x_0 = a$ e $x_m = b$. Vamos dividir a prova em dois casos: $a = b$ e $a \neq b$.

Caso 1: $a = b$. Se $m \leq n$ não há o que provar.
Então, suponha, **por absurdo**, que $m > n$. Ou seja, $m \geq n + 1$.

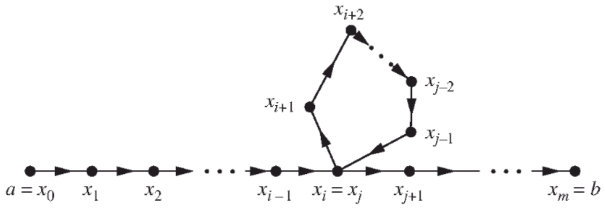
Demonstração do Teorema 13.3

Seja A um conjunto com n elementos e R uma relação em A.
Sejam $a, b \in R$.

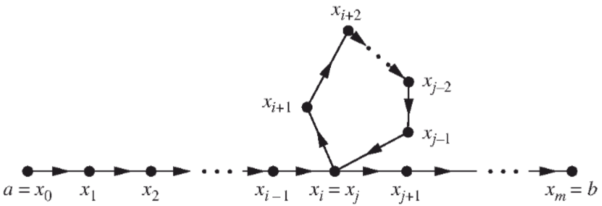
Suponha que existe um caminho de a para b em R. **Pegue o menor caminho possível** e seja m o comprimento desse caminho. Suponha que $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m$ seja esse caminho, em que $x_0 = a$ e $x_m = b$. Vamos dividir a prova em dois casos: $a = b$ e $a \neq b$.

Caso 1: $a = b$. Se $m \leq n$ não há o que provar.
Então, suponha, **por absurdo**, que $m > n$. Ou seja, $m \geq n + 1$.

Pelo Princípio da Casa dos Pombos, como existem n vértices em A, entre os m vértices $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$, pelo menos dois são iguais.



Demonstração do Teorema 13.3

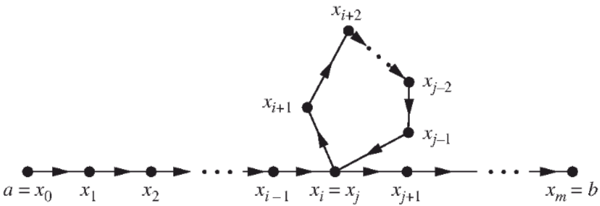


Seja $x_i = x_j$ com $0 \leq i < j \leq m - 1$. Então, o caminho contém um circuito de x_i para si mesmo. Esse circuito pode ser removido do caminho de a para b, deixando um caminho de a para b com comprimento menor. Esse caminho é

$$x_0, x_1, \ldots, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_{m-1}, x_m$$

Demonstração do Teorema 13.3

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

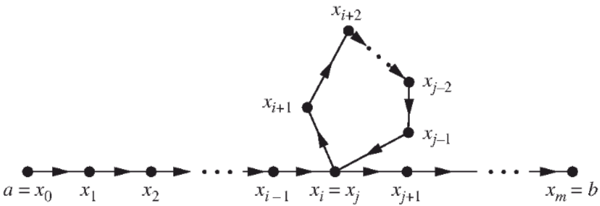


Seja $x_i = x_j$ com $0 \leq i < j \leq m-1$. Então, o caminho contém um circuito de x_i para si mesmo. Esse circuito pode ser removido do caminho de a para b, deixando um caminho de a para b com comprimento menor. Esse caminho é

$$x_0, x_1, \ldots, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_{m-1}, x_m$$

Logo, o caminho resultante possui comprimento menor que o caminho original. Contradição! Pois o caminho original já era o menor de todos.

Demonstração do Teorema 13.3



Seja $x_i = x_j$ com $0 \leq i < j \leq m - 1$. Então, o caminho contém um circuito de x_i para si mesmo. Esse circuito pode ser removido do caminho de a para b, deixando um caminho de a para b com comprimento menor. Esse caminho é

$$x_0, x_1, \ldots, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_{m-1}, x_m$$

Logo, o caminho resultante possui comprimento menor que o caminho original. Contradição! Pois o caminho original já era o menor de todos.

Caso 2: $a \neq b$. **Exercício para casa.** $\square$

Consequência do Teorema 13.3

Corolário 13.4: Seja A um conjunto com n elementos e R uma endorrelação em A. O fecho transitivo R^* da relação R é a união

$$R^* = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \cup R^n$$

Demonstração.

Seja A um conjunto com n elementos e R uma endorrelação em A.

Seja R^* o fecho transitivo da endorrelação $R \colon A \to A$.

Pelo Teorema 13.2, existe um caminho em R^* entre dois vértices a e b se e somente se existe um caminho entre esses dois vértices em R^i, para algum inteiro positivo i. Ou seja, $R^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$.

O Teorema 13.3 afirma que basta procurar por i no intervalo de valores $1, 2, \ldots, n$. Logo, $R^* = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$.

□

FIM