Relações e Suas Propriedades

QXD0008 – Matemática Discreta

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Prof. Lucas Ismaily
ismailybf@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

2º semestre/2022

Tópicos desta aula

Nesta apresentação:

- Relação Binária
- Relações binárias e funções
- Propriedades da relação binária:
  - Reflexiva, simétrica, anti-simétrica e transitiva
- Relação Inversa
- Relação Composta

Referências para esta aula

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Seções 9.1 e 9.3** do livro:
  Discrete Mathematics and Its Applications.
  Author: Kenneth H. Rosen. Seventh Edition. **(English version)**

- **Seção 8.1 e 8.3 (Relações e suas propriedades)** do livro: Matemática Discreta e suas Aplicações.
  Autor: Kenneth H. Rosen. Sexta Edição.

Introdução

Motivação

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- O mundo está “povoado” por relações: família, emprego, governo, negócios, etc.
- Entidades em Matemática e Ciência da Computação também podem estar relacionadas entre si de diversas formas.
- Objetivo:
  - estudar relações em conjuntos;
  - estudar formas de representar relações;
  - estudar propriedades de relações.

Definição: Produto Cartesiano

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Definição:** Sejam A e B dois conjuntos. O produto cartesiano de A e B, denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b), tal que $a \in A$ e $b \in B$. Portanto,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \land b \in B\}.$$

Definição: Produto Cartesiano

- **Definição:** Sejam A e B dois conjuntos. O produto cartesiano de A e B, denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b), tal que $a \in A$ e $b \in B$. Portanto,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Exemplo:

- Qual é o produto cartesiano de $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$?

Definição: Produto Cartesiano

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Definição:** Sejam A e B dois conjuntos. O produto cartesiano de A e B, denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b), tal que $a \in A$ e $b \in B$. Portanto,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \land b \in B\}.$$

Exemplo:

- Qual é o produto cartesiano de $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$?
  - **Resposta:** $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$

Definição: Produto Cartesiano

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Definição:** Sejam A e B dois conjuntos. O produto cartesiano de A e B, denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b), tal que $a \in A$ e $b \in B$. Portanto,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \land b \in B\}.$$

Exemplo:

- Qual é o produto cartesiano de $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$?
  - **Resposta:** $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$
- Qual é o produto cartesiano de $B = \{a, b, c\}$ e $A = \{1, 2\}$?

Definição: Produto Cartesiano

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Definição:** Sejam A e B dois conjuntos. O produto cartesiano de A e B, denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b), tal que $a \in A$ e $b \in B$. Portanto,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Exemplo:

- Qual é o produto cartesiano de $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$?
  - **Resposta:** $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$
- Qual é o produto cartesiano de $B = \{a, b, c\}$ e $A = \{1, 2\}$?
  - **Resposta:** $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$

Relações

- Sejam os conjuntos $A = \{0, 5, 8\}$ e $B = \{3, 7, 9\}$.
- Suponha que um elemento de $x \in A$ está relacionado com um elemento $y \in B$ se e somente se $x < y$.
- A notação xRy quer dizer "x está relacionado com y", onde R é o nome da relação (neste caso, $x < y$).

Relações

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Sejam os conjuntos $A = \{0, 5, 8\}$ e $B = \{3, 7, 9\}$.
- Suponha que um elemento de $x \in A$ está relacionado com um elemento $y \in B$ se e somente se $x < y$.
- A notação xRy quer dizer "x está relacionado com y", onde R é o nome da relação (neste caso, $x < y$).
- Logo, temos que:

$$
\begin{aligned}
&0R3 \text{ porque } 0 < 3\\
&0R7 \text{ porque } 0 < 7\\
&0R9 \text{ porque } 0 < 9\\
&5R7 \text{ porque } 5 < 7\\
&5R9 \text{ porque } 5 < 9\\
&8R9 \text{ porque } 8 < 9
\end{aligned}
$$

Relações

- Sejam os conjuntos $A = \{0, 5, 8\}$ e $B = \{3, 7, 9\}$.
- Suponha que um elemento de $x \in A$ está relacionado com um elemento $y \in B$ se e somente se $x < y$.
- A notação xRy quer dizer "x está relacionado com y", onde R é o nome da relação (neste caso, $x < y$).
- Logo, temos que:

$$\begin{gathered}
0\mathrm{R}3 \text{ porque } 0 < 3 \\
0\mathrm{R}7 \text{ porque } 0 < 7 \\
0\mathrm{R}9 \text{ porque } 0 < 9 \\
5\mathrm{R}7 \text{ porque } 5 < 7 \\
5\mathrm{R}9 \text{ porque } 5 < 9 \\
8\mathrm{R}9 \text{ porque } 8 < 9
\end{gathered}$$

- Por outro lado, a notação $x \not R y$ quer dizer que "x não está relacionado com y"

Relações

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Por outro lado, a notação $x \not R y$ quer dizer que "x não está relacionado com y".

Relações

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Por outro lado, a notação $x \not R y$ quer dizer que "x não está relacionado com y".
- Dados os conjuntos $A = \{0, 5, 8\}$ e $B = \{3, 7, 9\}$
- Logo, temos que:

$$\begin{aligned} 5 \not R 3 \text{ porque } 5 > 3 \\ 8 \not R 3 \text{ porque } 8 > 3 \\ 8 \not R 7 \text{ porque } 8 > 7 \end{aligned}$$

Relações

- Dados os conjuntos $A = \{0, 5, 8\}$ e $B = \{3, 7, 9\}$ temos que
- O produto cartesiano de A e B é

$$A \times B = \{(0,3),(0,7),(0,9),(5,3),(5,7),(5,9),(8,3),(8,7),(8,9)\}.$$

Relações

- Dados os conjuntos $A = \{0, 5, 8\}$ e $B = \{3, 7, 9\}$ temos que
- O produto cartesiano de A e B é

$$A \times B = \{(0,3),(0,7),(0,9),(5,3),(5,7),(5,9),(8,3),(8,7),(8,9)\}.$$

- Os elementos que satisfazem à relação R (ou seja, $x < y$) são

$$R = \{(0,3),(0,7),(0,9),(5,7),(5,9),(8,9)\}$$

- Observação: R é um subconjunto de $A \times B$.

Relação Binária

Relação Binária — Definição

Universidade Federal do Ceará

Definição (Relação binária):

- Dados os conjuntos A e B, uma relação binária de A para B é um subconjunto R de $A \times B$.
- Dado um par ordenado (x, y) em $A \times B$, x está relacionado com y por R, escrito xRy, se e somente se $(x, y) \in R$.

O termo "binário" é usado para indicar uma relação entre dois conjuntos.

Relação Binária — Definição

Definição (Relação binária):

- Dados os conjuntos A e B, uma relação binária de A para B é um subconjunto R de $A \times B$.
- Dado um par ordenado (x, y) em $A \times B$, x está relacionado com y por R, escrito xRy, se e somente se $(x, y) \in R$.

O termo "binário" é usado para indicar uma relação entre dois conjuntos.

Notação:

- "x está relacionado com y":

$$xRy \iff (x, y) \in R$$

- "x não está relacionado com y":

$$x \not R y \iff (x, y) \notin R$$

Relação binária num conjunto finito

- **Exemplo 1:** Sejam os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$ e a relação binária de A para B definida como:

$$\forall (x, y) \in A \times B,\ (x, y) \in R \iff x - y \text{ é par}$$

Relação binária num conjunto finito

- **Exemplo 1:** Sejam os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$ e a relação binária de A para B definida como:

$$\forall (x, y) \in A \times B,\ (x, y) \in R \iff x - y \text{ é par}$$

- Logo, temos que:

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2)\}$$

Relação binária num conjunto infinito: Relação de congruência módulo 2

- A relação anterior pode ser generalizada para o conjunto de todos os inteiros $\mathbb{Z}$. Neste caso, a relação binária E de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ pode ser definida como:

$$\forall (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ mEn \iff m - n \text{ é par.}$$

Relação binária num conjunto infinito: Relação de congruência módulo 2

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- A relação anterior pode ser generalizada para o conjunto de todos os inteiros $\mathbb{Z}$. Neste caso, a relação binária E de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ pode ser definida como:

$$\forall (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ mEn \iff m - n \text{ é par.}$$

  - Os inteiros m e n são relacionados por E sse $m \textbf{ mod } 2 = n \textbf{ mod } 2$, ou seja, se os números m e n são pares ou ímpares.

- Quando essa relação é satisfeita, diz-se que m e n são congruentes módulo 2, ou seja, $m \equiv n \pmod{2}$.

Exemplo de relação binária

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Seja a relação C de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$ definida como:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ (x, y) \in C \iff x^2 + y^2 = 1$$

- $(1, 0) \in C$?
  Sim.

- $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \in C$?
  Sim.

- $(-2, 0) \in C$?
  Não.

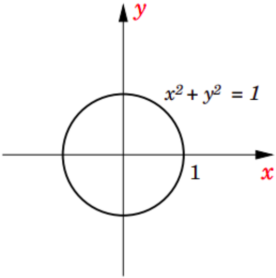


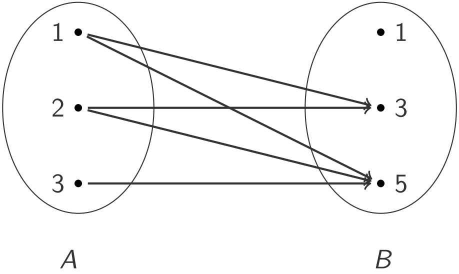
Diagrama de seta de uma relação

- Suponha que R é uma relação de um conjunto A para um conjunto B. O diagrama de seta para R é obtido da seguinte forma:
    - Represente os elementos de A numa região e os elementos de B como pontos em outra região.
    - Para cada x em A e y em B, desenhe uma seta de x para y sse x é relacionado com y por R.

Diagrama de seta de uma relação

Exemplo: Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$ e a relação:

- $\forall (x, y) \in A \times B,\ (x, y) \in S \iff x < y$



Relações e Funções

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Definição:** Uma função f de um conjunto A para um conjunto B é uma relação de A para B que satisfaz as duas propriedades abaixo:

(1) Para cada elemento $x \in A$, existe um elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Cada elemento de A é o primeiro elemento de um par ordenado de f.

(2) Para todos os elementos $x \in A$ e $y, z \in B$, se $(x, y) \in f$ e $(x, z) \in f$, então $y = z$.
Ou seja, não existem dois pares ordenados distintos cujo primeiro elemento seja o mesmo.

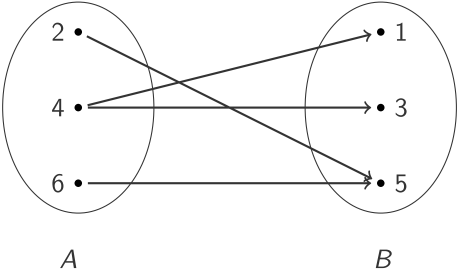
Se f é uma função de A para B, temos que:

$$y = f(x) \iff (x, y) \in f$$

Relações e Funções

Exemplo 1: Sejam os conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$ e a relação:

- $R = \{(2, 5), (4, 1), (4, 3), (6, 5)\}$.
- R é uma função?

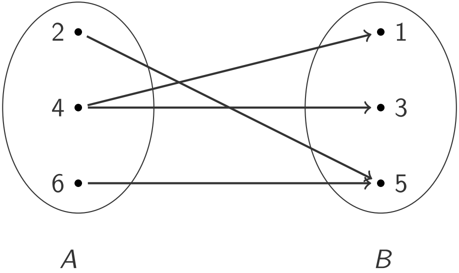


Relações e Funções

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exemplo 1: Sejam os conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$ e a relação:

- $R = \{(2, 5), (4, 1), (4, 3), (6, 5)\}$.
- R é uma função?

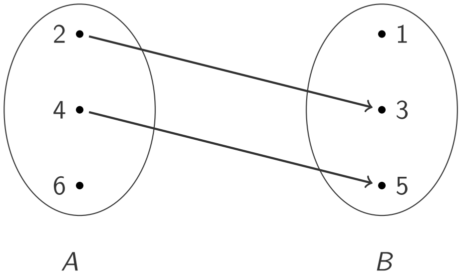


- Não, por causa dos pares $(4, 1)$ e $(4, 3)$.
  Condição (2) não foi satisfeita

Relações e Funções

Exemplo 2: Sejam os conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$ e a relação:

- $S = \forall(x, y) \in A \times B,\ (x, y) \in S \iff y = x + 1.$
- S é uma função?

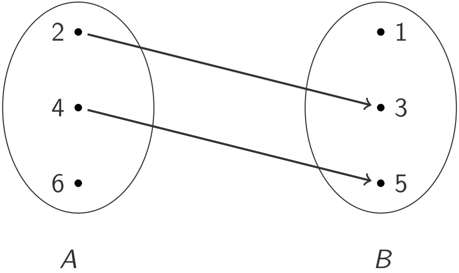


Relações e Funções

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exemplo 2: Sejam os conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$ e a relação:

- $S = \forall (x, y) \in A \times B,\ (x, y) \in S \iff y = x + 1.$
- S é uma função?



- Não, já que $6 \in A$ mas não existe $y \in B$ tal que $y = 6 + 1 = 7$.
  Condição (1) não foi satisfeita

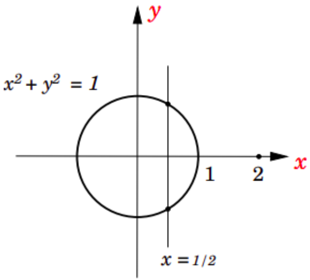
Relações e Funções

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exemplo 3: Sejam a relação C de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$ definida como:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ (x, y) \in C \iff x^2 + y^2 = 1$$

- C é uma função?

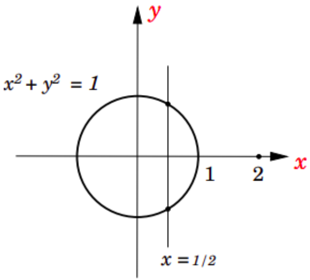


Relações e Funções

Exemplo 3: Sejam a relação C de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$ definida como:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ (x, y) \in C \iff x^2 + y^2 = 1$$

- C é uma função?



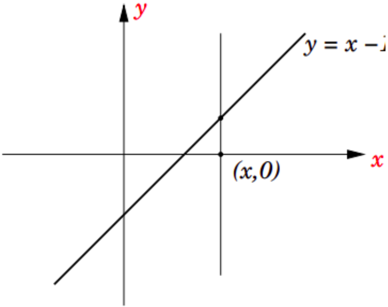
- Não, já que existem números reais x tais que $(x, y) \notin C$, para todo y. Por exemplo, $x = 2$. Condição (1) não foi satisfeita
- Condição (2) também não é satisfeita

Relações e Funções

Exemplo 4: Sejam a relação L de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$ definida como:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ (x, y) \in L \iff y = x - 1$$

- L é uma função?

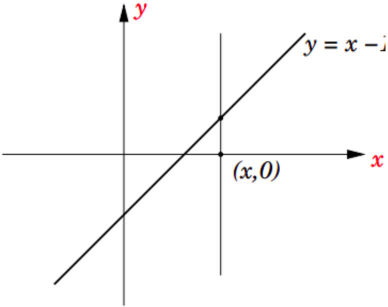


Relações e Funções

Exemplo 4: Sejam a relação L de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$ definida como:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \ (x, y) \in L \iff y = x - 1$$

- L é uma função?



- Sim.

Domínio e Imagem

Domínio e Imagem

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Seja R uma relação de A para B.

- O domínio da relação R é o conjunto

$$Dom(R) = \{a \in A \mid \exists b \in B((a, b) \in R)\}$$

- A imagem ou contradomínio da relação R é o conjunto

$$Img(R) = \{b \in B \mid \exists a \in A((a, b) \in R)\}$$

Obs.: O conjunto de pares ordenados R é uma relação de A para B se e somente se $Dom(R) \subseteq A$ e $Img(R) \subseteq B$.

Domínio e Imagem — Exemplos

- Seja R a relação $\{(1,4),(2,5),(3,5)\}$.
  - Temos que $Dom(R) = \{1,2,3\}$ e $Img(R) = \{4,5\}$.

- Seja R a relação $\{(x, x^2) \colon x \in \mathbb{Z}\}$. Quem é $Dom(R)$ e $Img(R)$?

Domínio e Imagem — Exemplos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Seja R a relação $\{(1,4),(2,5),(3,5)\}$.
  - Temos que $Dom(R) = \{1,2,3\}$ e $Img(R) = \{4,5\}$.

- Seja R a relação $\{(x,x^2) \colon x \in \mathbb{Z}\}$. Quem é $Dom(R)$ e $Img(R)$?
  - Temos que $Dom(R) = \mathbb{Z}$ e $Img(R)$ é o conjunto dos quadrados perfeitos $\{0,1,4,9,\ldots\}$.

- Seja $A = \mathbb{Z}$ e $R = \{(a,b) \colon aRb \Leftrightarrow a = 2b\}$. Quem é $Dom(R)$ e $Img(R)$?

Domínio e Imagem — Exemplos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Seja R a relação $\{(1,4),(2,5),(3,5)\}$.
  - Temos que $Dom(R) = \{1,2,3\}$ e $Img(R) = \{4,5\}$.

- Seja R a relação $\{(x,x^2)\colon x \in \mathbb{Z}\}$. Quem é $Dom(R)$ e $Img(R)$?
  - Temos que $Dom(R) = \mathbb{Z}$ e $Img(R)$ é o conjunto dos quadrados perfeitos $\{0,1,4,9,\ldots\}$.

- Seja $A = \mathbb{Z}$ e $R = \{(a,b)\colon aRb \Leftrightarrow a = 2b\}$. Quem é $Dom(R)$ e $Img(R)$?
  - Temos que $Dom(R)$ é o conjunto dos inteiros pares e $Img(R) = \mathbb{Z}$.

Endorrelações:
Relações binárias em um conjunto

Relações binárias em um conjunto

Em casos de $R \subseteq A \times B$ com $B = A$, relacionamos elementos de A entre eles.
Relações de um conjunto A em si próprio são de especial interesse.

Relações binárias em um conjunto

Em casos de $R \subseteq A \times B$ com $B = A$, relacionamos elementos de A entre eles.
Relações de um conjunto A em si próprio são de especial interesse.

Definição: Seja A um conjunto. Então, uma relação $R\colon A \to A$ é dita uma endorrelação.
Neste caso, afirma-se que R é uma relação binária em A.

Relações binárias em um conjunto

Em casos de $R \subseteq A \times B$ com $B = A$, relacionamos elementos de A entre eles.
Relações de um conjunto A em si próprio são de especial interesse.

> **Definição:** Seja A um conjunto. Então, uma relação $R\colon A \to A$ é dita uma endorrelação.
> Neste caso, afirma-se que R é uma relação binária em A.

Exemplos de relações no conjunto dos inteiros:

- $R_1 = \{(a, b)\colon a \leq b\}$
- $R_2 = \{(a, b)\colon a > b\}$
- $R_4 = \{(a, b)\colon a = b\}$

Obs.: Também pode-se anotar "$R \subseteq A \times A$" como "$R \subseteq A^2$".

Propriedades de Endorrelações

Relações Reflexivas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Estas propriedades são exclusivas às relações binárias do tipo $R \subseteq A \times A$.

Definição: Uma relação R no conjunto A é reflexiva se e somente se $(a, a) \in R$ para todo elemento $a \in A$.

Relações Reflexivas

Estas propriedades são exclusivas às relações binárias do tipo $R \subseteq A \times A$.

Definição: Uma relação R no conjunto A é reflexiva se e somente se $(a, a) \in R$ para todo elemento $a \in A$.

Exemplo 1

Seja $A = \{1, 2, 3\}$, considere $R_1 \subseteq A^2$ tal que $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (3, 3)\}$.

Como A é finito e pequeno, podemos verificar se R_1 é reflexiva **por exaustão**

- Como $1 \in A$, precisamos ter $(1, 1) \in R_1$.
- Como $2 \in A$, precisamos ter $(2, 2) \in R_1$.
- Como $3 \in A$, precisamos ter $(3, 3) \in R_1$.

Relações Reflexivas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Estas propriedades são exclusivas às relações binárias do tipo $R \subseteq A \times A$.

Definição: Uma relação R no conjunto A é reflexiva se e somente se $(a, a) \in R$ para todo elemento $a \in A$.

Exemplo 1
Seja $A = \{1, 2, 3\}$, considere $R_1 \subseteq A^2$ tal que
$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (3, 3)\}$.

Como A é finito e pequeno, podemos verificar se R_1 é reflexiva **por exaustão**

- Como $1 \in A$, precisamos ter $(1, 1) \in R_1$.
- Como $2 \in A$, precisamos ter $(2, 2) \in R_1$.
- Como $3 \in A$, precisamos ter $(3, 3) \in R_1$.

Relações Reflexivas

Estas propriedades são exclusivas às relações binárias do tipo $R \subseteq A \times A$.

Definição: Uma relação R no conjunto A é reflexiva se e somente se $(a, a) \in R$ para todo elemento $a \in A$.

Exemplo 1
Seja $A = \{1, 2, 3\}$, considere $R_1 \subseteq A^2$ tal que
$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (3, 3)\}$.

Como A é finito e pequeno, podemos verificar se R_1 é reflexiva **por exaustão**

- Como $1 \in A$, precisamos ter $(1, 1) \in R_1$. ✔
- Como $2 \in A$, precisamos ter $(2, 2) \in R_1$. ✔
- Como $3 \in A$, precisamos ter $(3, 3) \in R_1$. ✔

Relações Reflexivas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Estas propriedades são exclusivas às relações binárias do tipo $R \subseteq A \times A$.

Definição: Uma relação R no conjunto A é reflexiva se e somente se $(a, a) \in R$ para todo elemento $a \in A$.

Relações Reflexivas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Estas propriedades são exclusivas às relações binárias do tipo $R \subseteq A \times A$.

Definição: Uma relação R no conjunto A é reflexiva se e somente se $(a, a) \in R$ para todo elemento $a \in A$.

Exemplo 2

Considere $R_2 \subseteq \mathbb{Z}^2$ tal que $R_2 = \{(a, b) \colon a \text{ divide } b\}$. R_2 **é reflexiva?**

Relações Reflexivas

Estas propriedades são exclusivas às relações binárias do tipo $R \subseteq A \times A$.

> **Definição:** Uma relação R no conjunto A é reflexiva se e somente se $(a, a) \in R$ para todo elemento $a \in A$.

Exemplo 2

Considere $R_2 \subseteq \mathbb{Z}^2$ tal que $R_2 = \{(a, b) \colon a \text{ divide } b\}$. **$R_2$ é reflexiva?**

Como $\mathbb{Z}$ é infinito, garantir que R_2 é reflexiva exige uma **prova de generalização**.

Neste caso, porém, temos um contra-exemplo: como $0 \in \mathbb{Z}$, precisaríamos ter $(0, 0) \in R_2$, mas este não é o caso, pois uma das condições para que a divida b é termos $a \neq 0$.

Resumidamente, $0 \in \mathbb{Z}$, mas $(0, 0) \notin R_2$. Portanto, R_2 não é reflexiva.

Relações Reflexivas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição: Uma relação R no conjunto A é reflexiva se e somente se $(a, a) \in R$ para todo elemento $a \in A$.

Relações Reflexivas

UNIVERSIDADE
FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição: Uma relação R no conjunto A é reflexiva se e somente se $(a, a) \in R$ para todo elemento $a \in A$.

Exemplo 2
Considere $R_3 \subseteq \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ tal que $R_3 = \{(a, b) \colon a \text{ divide } b\}$. R_3 **é reflexiva?**

Relações Reflexivas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição: Uma relação R no conjunto A é reflexiva se e somente se $(a, a) \in R$ para todo elemento $a \in A$.

Exemplo 2
Considere $R_3 \subseteq \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ tal que $R_3 = \{(a, b) \colon a \text{ divide } b\}$. **$R_3$ é reflexiva?**

Como $\mathbb{Z}^+$ é infinito, garantir que R_3 é reflexiva exige uma **prova de generalização**.

Relações Reflexivas

> **Definição:** Uma relação R no conjunto A é reflexiva se e somente se $(a, a) \in R$ para todo elemento $a \in A$.

Exemplo 2

Considere $R_3 \subseteq \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ tal que $R_3 = \{(a, b) : a \text{ divide } b\}$. **$R_3$ é reflexiva?**

Como $\mathbb{Z}^+$ é infinito, garantir que R_3 é reflexiva exige uma **prova de generalização**.

Prova

Seja k um elemento qualquer de $\mathbb{Z}^+$, precisamos provar que $(k, k) \in R_3$. Como $k \cdot 1 = k$ e $k \neq 0$, podemos aplicar a definição de divisibilidade para concluir que k divide k. Portanto, $(k, k) \in R_3$. Como provamos que $(k, k) \in R_3$ para um elemento qualquer de $\mathbb{Z}^+$, isto vale para todo $k \in \mathbb{Z}^+$. Portanto, R_3 é reflexiva.

Relações Reflexivas

Definição: Uma relação R no conjunto A é reflexiva se e somente se $(a, a) \in R$ para todo elemento $a \in A$.

Relações Reflexivas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição: Uma relação R no conjunto A é reflexiva se e somente se $(a, a) \in R$ para todo elemento $a \in A$.

Quais das relações abaixo são reflexivas?

Considere $a, b \in \mathbb{R}$.

- $R_1 = \{(a, b) \colon a \leq b\}$
- $R_2 = \{(a, b) \colon a > b\}$
- $R_3 = \{(a, b) \colon a = b \text{ or } a = -b\}$
- $R_4 = \{(a, b) \colon a = b\}$
- $R_5 = \{(a, b) \colon a = b + 1\}$
- $R_6 = \{(a, b) \colon a + b \leq 3\}$

Relações Reflexivas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição: Uma relação R no conjunto A é reflexiva se e somente se $(a, a) \in R$ para todo elemento $a \in A$.

Quais das relações abaixo são reflexivas?

Considere $a, b \in \mathbb{R}$.

- $R_1 = \{(a, b) \colon a \leq b\}$ ✔
- $R_2 = \{(a, b) \colon a > b\}$ ✘
- $R_3 = \{(a, b) \colon a = b \text{ or } a = -b\}$ ✔
- $R_4 = \{(a, b) \colon a = b\}$ ✔
- $R_5 = \{(a, b) \colon a = b + 1\}$ ✘
- $R_6 = \{(a, b) \colon a + b \leq 3\}$ ✘

Relações Simétricas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição: Uma relação R no conjunto A é simétrica se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ também temos que $(b, a) \in R$.

Relações Simétricas

Definição: Uma relação R no conjunto A é simétrica se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ também temos que $(b, a) \in R$.

Seja $A = \{1, 2, 3\}$, considere $R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$
R_5 **é simétrica?**

Relações Simétricas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição: Uma relação R no conjunto A é simétrica se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ também temos que $(b, a) \in R$.

Seja $A = \{1, 2, 3\}$, considere $R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$
R_5 é simétrica?

Como A é finito e pequeno, podemos verificar se R_5 é simétrica **por exaustão**

- Como $(1, 1) \in R_5$, precisamos ter $(1, 1) \in R_5$.
- Como $(1, 2) \in R_5$, precisamos ter $(2, 1) \in R_5$.
- Como $(2, 1) \in R_5$, precisamos ter $(1, 2) \in R_5$.
- Como $(1, 3) \in R_5$, precisamos ter $(3, 1) \in R_5$.

Relações Simétricas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição: Uma relação R no conjunto A é simétrica se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ também temos que $(b, a) \in R$.

Seja $A = \{1, 2, 3\}$, considere $R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$
R_5 é simétrica?

Como A é finito e pequeno, podemos verificar se R_5 é simétrica **por exaustão**

- Como $(1, 1) \in R_5$, precisamos ter $(1, 1) \in R_5$. ✔
- Como $(1, 2) \in R_5$, precisamos ter $(2, 1) \in R_5$. ✔
- Como $(2, 1) \in R_5$, precisamos ter $(1, 2) \in R_5$. ✔
- Como $(1, 3) \in R_5$, precisamos ter $(3, 1) \in R_5$. ✘

Portanto, R_3 não é simétrica.

Relações Simétricas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição: Uma relação R no conjunto A é simétrica se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ também temos que $(b, a) \in R$.

Relações Simétricas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição: Uma relação R no conjunto A é simétrica se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ também temos que $(b, a) \in R$.

Considere $R_6 \subseteq \mathbb{Z}^2$ tal que $R_6 = \{(a, b) \colon a + b \text{ é par}\}$. **$R_6$ é simétrica?**

Relações Simétricas

Definição: Uma relação R no conjunto A é simétrica se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ também temos que $(b, a) \in R$.

Considere $R_6 \subseteq \mathbb{Z}^2$ tal que $R_6 = \{(a, b) \colon a + b \text{ é par}\}$. **$R_6$ é simétrica?**

Como $\mathbb{Z}$ é infinito, garantir que R_6 é simétrica exige uma **prova de generalização**.

Relações Simétricas

Definição: Uma relação R no conjunto A é simétrica se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ também temos que $(b, a) \in R$.

Considere $R_6 \subseteq \mathbb{Z}^2$ tal que $R_6 = \{(a, b) \colon a + b \text{ é par}\}$. **$R_6$ é simétrica?**

Como $\mathbb{Z}$ é infinito, garantir que R_6 é simétrica exige uma **prova de generalização**.

Prova

Sejam c, d dois inteiros quaisquer (Instanciação),
suponha que $(c, d) \in R_6$ (Hipótese da Prova Direta).
Pela definição de R_6, $c + d$ é par.
Como $c + d = d + c$ (Comutatividade da Soma), $d + c$ também é par.
Pela definição de R_6, temos que $(d, c) \in R_6$.
Portanto, R_6 é simétrica.

Relações Simétricas

Definição: Uma relação R no conjunto A é simétrica se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ também temos que $(b, a) \in R$.

Relações Simétricas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição: Uma relação R no conjunto A é simétrica se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ também temos que $(b, a) \in R$.

Quais das relações abaixo são simétricas?

Considere $a, b \in \mathbb{R}$.

- $R_1 = \{(a, b) \colon a \leq b\}$
- $R_2 = \{(a, b) \colon a > b\}$
- $R_3 = \{(a, b) \colon a = b \text{ or } a = -b\}$
- $R_4 = \{(a, b) \colon a = b\}$
- $R_5 = \{(a, b) \colon a = b + 1\}$
- $R_6 = \{(a, b) \colon a + b \leq 3\}$

Relações Simétricas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição: Uma relação R no conjunto A é simétrica se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ também temos que $(b, a) \in R$.

Quais das relações abaixo são simétricas?

Considere $a, b \in \mathbb{R}$.

- $R_1 = \{(a, b) \colon a \leq b\}$ **Não**
- $R_2 = \{(a, b) \colon a > b\}$ **Não**
- $R_3 = \{(a, b) \colon a = b \text{ or } a = -b\}$ **Sim**
- $R_4 = \{(a, b) \colon a = b\}$ **Sim**
- $R_5 = \{(a, b) \colon a = b + 1\}$ **Não**
- $R_6 = \{(a, b) \colon a + b \leq 3\}$ **Sim**

Relações Anti-Simétricas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição (Alternativa 1): Uma relação binária R no conjunto A é anti-simétrica se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ com $a \neq b$, tem-se que $(b, a) \notin R$.

$$\forall a \in A,\ \forall b \in A\ [((a, b) \in R \land a \neq b) \implies (b, a) \notin R]$$

Relações Anti-Simétricas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição (Alternativa 1): Uma relação binária R no conjunto A é anti-simétrica se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ com $a \neq b$, tem-se que $(b, a) \notin R$.

$$\forall a \in A,\ \forall b \in A\ [((a, b) \in R \land a \neq b) \implies (b, a) \notin R]$$

Observações:

- A anti-simetria é **independente** da simetria. Estas propriedades não contrariam nem impedem uma à outra.
- Intuitivamente, a anti-simetria é um tipo de **simetria restrita** que admite exclusivamente a simetria de pares do tipo (x, x) na relação.

Relações Anti-Simétricas

Definição (Alternativa 1): Uma relação binária R no conjunto A é anti-simétrica se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ com $a \neq b$, tem-se que $(b, a) \notin R$.

Relações Anti-Simétricas

Definição (Alternativa 1): Uma relação binária R no conjunto A é anti-simétrica se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ com $a \neq b$, tem-se que $(b, a) \notin R$.

Exemplo 1

Seja $A = \{1, 2, 3\}$, considere $R_5 \subseteq A^2$ tal que
$R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$

Como A é finito e pequeno, podemos verificar se R_5 é anti-simétrica **por exaustão**

- Como $(1, 1) \in R_5$, mas $1 = 1$, não há o que verificar neste caso.
- Como $(1, 2) \in R_5$ e $1 \neq 2$, precisamos ter $(2, 1) \notin R_5$.
- Como $(2, 1) \in R_5$ e $2 \neq 1$, precisamos ter $(1, 2) \notin R_5$.
- Como $(1, 3) \in R_5$ e $1 \neq 3$, precisamos ter $(3, 1) \notin R_5$.

Relações Anti-Simétricas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição (Alternativa 1): Uma relação binária R no conjunto A é anti-simétrica se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ com $a \neq b$, tem-se que $(b, a) \notin R$.

Exemplo 1

Seja $A = \{1, 2, 3\}$, considere $R_5 \subseteq A^2$ tal que
$R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$

Como A é finito e pequeno, podemos verificar se R_5 é anti-simétrica **por exaustão**

- Como $(1, 1) \in R_5$, mas $1 = 1$, não há o que verificar neste caso. ✔
- Como $(1, 2) \in R_5$ e $1 \neq 2$, precisamos ter $(2, 1) \notin R_5$. ✘
- Como $(2, 1) \in R_5$ e $2 \neq 1$, precisamos ter $(1, 2) \notin R_5$. ✘
- Como $(1, 3) \in R_5$ e $1 \neq 3$, precisamos ter $(3, 1) \notin R_5$. ✔

Relações Anti-Simétricas

Definição (Alternativa 1): Uma relação binária R no conjunto A é anti-simétrica se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ com $a \neq b$, tem-se que $(b, a) \notin R$.

Relações Anti-Simétricas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição (Alternativa 1): Uma relação binária R no conjunto A é anti-simétrica se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ com $a \neq b$, tem-se que $(b, a) \notin R$.

Exemplo 2

Considere $R_6 \subseteq \mathbb{Z}^2$ tal que $R_6 = \{(a, b) \colon a + b \text{ é par}\}$ **R_6 é anti-simétrica?**

Relações Anti-Simétricas

Definição (Alternativa 1): Uma relação binária R no conjunto A é anti-simétrica se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ com $a \neq b$, tem-se que $(b, a) \notin R$.

Exemplo 2

Considere $R_6 \subseteq \mathbb{Z}^2$ tal que $R_6 = \{(a, b) \colon a + b \text{ é par}\}$ **R_6 é anti-simétrica?**

Como $\mathbb{Z}$ é infinito, garantir que R_6 é anti-simétrica exige uma **prova de generalização**.

Neste caso, porém, temos um contra-exemplo:

$(1, 3) \in R_6$ e $1 \neq 3$, mas $(3, 1) \in R_6$.

Portanto, R_6 não é anti-simétrica.

Relações Anti-Simétricas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição (Alternativa 2): Uma relação binária R no conjunto A é anti-simétrica se e somente se, para todo $a, b \in A$, se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$, então $a = b$.

$$\forall a \forall b [((a, b) \in R \land (b, a) \in R) \implies (a = b)]$$

Relações Anti-Simétricas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição (Alternativa 2): Uma relação binária R no conjunto A é anti-simétrica se e somente se, para todo $a, b \in A$, se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$, então $a = b$.

$$\forall a \forall b[((a, b) \in R \land (b, a) \in R) \implies (a = b)]$$

Qual definição usar?

- A que você preferir entre estas. Elas são equivalentes.

Relações Anti-Simétricas

Definição (Alternativa 2): Uma relação binária R no conjunto A é anti-simétrica se e somente se, para todo $a, b \in A$, se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$, então $a = b$.

Relações Anti-Simétricas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição (Alternativa 2): Uma relação binária R no conjunto A é anti-simétrica se e somente se, para todo $a, b \in A$, se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$, então $a = b$.

Exemplo

Considere $R_8 \subseteq \mathbb{N}^2$ tal que $R_8 = \{(a, b) \colon a \leq b\}$

Como $\mathbb{N}$ é infinito, garantir que R_8 é anti-simétrica exige uma **prova de generalização**.

Relações Anti-Simétricas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição (Alternativa 2): Uma relação binária R no conjunto A é anti-simétrica se e somente se, para todo $a, b \in A$, se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$, então $a = b$.

Exemplo

Considere $R_8 \subseteq \mathbb{N}^2$ tal que $R_8 = \{(a, b) \colon a \leq b\}$

Como $\mathbb{N}$ é infinito, garantir que R_8 é anti-simétrica exige uma **prova de generalização**.

Prova

- Sejam c, d naturais quaisquer. (Instanciação)
- Por prova direta, suponha que $(c, d) \in R_8$ e $(d, c) \in R_8$.
- Pela definição de R_8, isso significa que $c \leq d$ e $d \leq c$.
- Isso nos permite concluir que $c = d$.
- Portanto, R_8 é anti-simétrica.

Relações Anti-Simétricas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição (Alternativa 2): Uma relação binária R no conjunto A é anti-simétrica se e somente se, para todo $a, b \in A$, se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$, então $a = b$.

Relações Anti-Simétricas

Definição (Alternativa 2): Uma relação binária R no conjunto A é anti-simétrica se e somente se, para todo $a, b \in A$, se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$, então $a = b$.

Quais das relações abaixo são anti-simétricas?

Considere $a, b \in \mathbb{R}$.

- $R_1 = \{(a, b) \colon a \leq b\}$
- $R_2 = \{(a, b) \colon a > b\}$
- $R_3 = \{(a, b) \colon a = b \text{ or } a = -b\}$
- $R_4 = \{(a, b) \colon a = b\}$
- $R_5 = \{(a, b) \colon a = b + 1\}$
- $R_6 = \{(a, b) \colon a + b \leq 3\}$

Relações Anti-Simétricas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição (Alternativa 2): Uma relação binária R no conjunto A é anti-simétrica se e somente se, para todo $a, b \in A$, se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$, então $a = b$.

Quais das relações abaixo são anti-simétricas?

Considere $a, b \in \mathbb{R}$.

- $R_1 = \{(a, b) \colon a \leq b\}$ **Sim**
- $R_2 = \{(a, b) \colon a > b\}$ **Sim**
- $R_3 = \{(a, b) \colon a = b \text{ or } a = -b\}$ **Não**
- $R_4 = \{(a, b) \colon a = b\}$ **Sim**
- $R_5 = \{(a, b) \colon a = b + 1\}$ **Sim**
- $R_6 = \{(a, b) \colon a + b \leq 3\}$ **Não**

Relações Transitivas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição: Uma relação binária R no conjunto A é transitiva se e somente se, para todo $a, b, c \in A$, sempre que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, então $(a, c) \in R$.

$$\forall a \in A, \forall b \in A, \forall c \in A, \ [((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \Longrightarrow (a, c) \in R]$$

Relações Transitivas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição: Uma relação binária R no conjunto A é transitiva se e somente se, para todo $a, b, c \in A$, sempre que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, então $(a, c) \in R$.

Relações Transitivas

Definição: Uma relação binária R no conjunto A é transitiva se e somente se, para todo $a, b, c \in A$, sempre que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, então $(a, c) \in R$.

Exemplo

Seja $A = \{1, 2, 3\}$, considere $R_9 = A^2$ tal que $R_9 = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1)\}$

Como A é finito e pequeno, podemos verificar se R_9 é transitiva **por exaustão**

Relações Transitivas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição: Uma relação binária R no conjunto A é transitiva se e somente se, para todo $a, b, c \in A$, sempre que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, então $(a, c) \in R$.

Exemplo

Seja $A = \{1, 2, 3\}$, considere $R_9 = A^2$ tal que $R_9 = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1)\}$

Como A é finito e pequeno, podemos verificar se R_9 é transitiva **por exaustão**

- Como $(1, 1) \in R_9$ e $(1, 3) \in R_9$, precisamos ter $(1, 3) \in R_9$
- Como $(1, 3) \in R_9$ e $(3, 1) \in R_9$, precisamos ter $(1, 1) \in R_9$
- Como $(3, 1) \in R_9$ e $(1, 1) \in R_9$, precisamos ter $(3, 1) \in R_9$
- Como $(3, 1) \in R_9$ e $(1, 3) \in R_9$, precisamos ter $(3, 3) \in R_9$

Relações Transitivas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição: Uma relação binária R no conjunto A é transitiva se e somente se, para todo $a, b, c \in A$, sempre que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, então $(a, c) \in R$.

Exemplo

Seja $A = \{1, 2, 3\}$, considere $R_9 = A^2$ tal que $R_9 = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1)\}$

Como A é finito e pequeno, podemos verificar se R_9 é transitiva **por exaustão**

- Como $(1, 1) \in R_9$ e $(1, 3) \in R_9$, precisamos ter $(1, 3) \in R_9$ ✔
- Como $(1, 3) \in R_9$ e $(3, 1) \in R_9$, precisamos ter $(1, 1) \in R_9$ ✔
- Como $(3, 1) \in R_9$ e $(1, 1) \in R_9$, precisamos ter $(3, 1) \in R_9$ ✔
- Como $(3, 1) \in R_9$ e $(1, 3) \in R_9$, precisamos ter $(3, 3) \in R_9$ ✘

Relações Transitivas

Exemplo

Considere $R_6 \subseteq \mathbb{Z}^2$ tal que $R_6 = \{(a, b) \colon a + b \text{ é par}\}$ **R_6 é transitiva?**

Como $\mathbb{Z}$ é infinito, garantir que R_6 é transitiva exige uma **prova de generalização**.

Relações Transitivas

Exemplo

Considere $R_6 \subseteq \mathbb{Z}^2$ tal que $R_6 = \{(a, b) : a + b \text{ é par}\}$ **R_6 é transitiva?**

Como $\mathbb{Z}$ é infinito, garantir que R_6 é transitiva exige uma **prova de generalização**.

Prova

(1) Sejam c, d, e inteiros quaisquer (Instanciação).

(2) Por prova direta, suponha que $(c, d) \in R_6$ e $(d, e) \in R_6$.

(3) Pela definição de R_6, isso significa que $c + d$ é par e $d + e$ é par.

(4) Portanto, existem inteiros k, l tais que $c + d = 2k$ e $d + e = 2l$.

(5) Então $(c + d) + (d + e) = 2k + 2l \implies c + 2d + e = 2k + 2l$,

(6) o que implica $c + e = 2k + 2l - 2d = 2(k + l - d)$.

(7) Como k, l, d são inteiros, $k + l - d$ é um número inteiro.

(8) Logo, $c + e$ é um número par, o que significa que $(c, e) \in R_6$.

(9) Portanto, R_6 é transitiva.

Relações Transitivas

Definição: Uma relação binária R no conjunto A é transitiva se e somente se, para todo $a, b, c \in A$, sempre que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, então $(a, c) \in R$.

Relações Transitivas

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Definição: Uma relação binária R no conjunto A é transitiva se e somente se, para todo $a, b, c \in A$, sempre que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, então $(a, c) \in R$.

Quais das relações abaixo são transitivas?

Considere $a, b \in \mathbb{R}$.

- $R_1 = \{(a, b) \colon a \leq b\}$
- $R_2 = \{(a, b) \colon a > b\}$
- $R_3 = \{(a, b) \colon a = b \text{ or } a = -b\}$
- $R_4 = \{(a, b) \colon a = b\}$
- $R_5 = \{(a, b) \colon a = b + 1\}$
- $R_6 = \{(a, b) \colon a + b \leq 3\}$

Relações Transitivas

UNIVERSIDADE
FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição: Uma relação binária R no conjunto A é transitiva se e somente se, para todo $a, b, c \in A$, sempre que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, então $(a, c) \in R$.

Quais das relações abaixo são transitivas?

Considere $a, b \in \mathbb{R}$.

- $R_1 = \{(a, b) : a \leq b\}$ **Sim**
- $R_2 = \{(a, b) : a > b\}$ **Sim**
- $R_3 = \{(a, b) : a = b \text{ or } a = -b\}$ **Sim**
- $R_4 = \{(a, b) : a = b\}$ **Sim**
- $R_5 = \{(a, b) : a = b + 1\}$ **Não**
- $R_6 = \{(a, b) : a + b \leq 3\}$ **Não**

Grafo de uma endorrelação

Representação gráfica de uma endorrelação

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Toda endorrelação $R\colon A \to A$ pode ser representada como uma estrutura matemática chamada grafo direcionado.

Representação gráfica de uma endorrelação

- Toda endorrelação $R\colon A \to A$ pode ser representada como uma estrutura matemática chamada grafo direcionado.

- A representação de uma endorrelação $R\colon A \to A$ como grafo direcionado é como segue:
    - cada elemento do conjunto A é representado como um ponto e é denominado vértice.
    - cada par $(a, b) \in R$ é representado por uma seta, com origem em a e destino em b, denominada aresta.

Representação gráfica de uma endorrelação

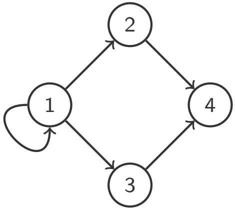
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Toda endorrelação $R\colon A \to A$ pode ser representada como uma estrutura matemática chamada grafo direcionado.

- A representação de uma endorrelação $R\colon A \to A$ como grafo direcionado é como segue:
  - cada elemento do conjunto A é representado como um ponto e é denominado vértice.
  - cada par $(a, b) \in R$ é representado por uma seta, com origem em a e destino em b, denominada aresta.

Exemplo:

Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e a relação binária R em A definida como
$R = \{(1, 2), (2, 4), (3, 4), (1, 1), (1, 3)\}$.



Grafo direcionado de uma endorrelação

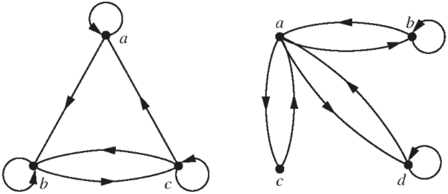
- O grafo direcionado de uma endorrelação pode ser usado para determinar se a relação tem as seguintes propriedades:
  - reflexiva
  - simétrica
  - anti-simétrica
  - transitiva

Grafo direcionado de uma endorrelação

- O grafo direcionado de uma endorrelação pode ser usado para determinar se a relação tem as seguintes propriedades:
  - reflexiva
  - simétrica
  - anti-simétrica
  - transitiva

Exercício:

Determine se as relações para os grafos direcionados ao lado são reflexivas, simétricas, anti-simétricas e/ou transitivas.



(a) Directed graph of R (b) Directed graph of S

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Matriz booleana de uma relação

Matriz booleana de uma relação

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Sejam $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ conjuntos.
- Seja R uma relação binária de A em B.
- R pode ser representada por uma matriz booleana $M_R = [m_{i,j}]$ em que

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } (a_i, b_j) \in R, \\ 0 & \text{se } (a_i, b_j) \notin R. \end{cases}$$

Matriz booleana de uma relação

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Sejam $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ conjuntos.
- Seja R uma relação binária de A em B.
- R pode ser representada por uma matriz booleana $M_R = [m_{i,j}]$ em que

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } (a_i, b_j) \in R, \\ 0 & \text{se } (a_i, b_j) \notin R. \end{cases}$$

Exemplo:

Seja $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$
e $R_1 : A \to B$ tal que
$R_1 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$.

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz booleana de uma relação

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Sejam $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ conjuntos.
- Seja R uma relação binária de A em B.
- R pode ser representada por uma matriz booleana $M_R = [m_{i,j}]$ em que

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } (a_i, b_j) \in R, \\ 0 & \text{se } (a_i, b_j) \notin R. \end{cases}$$

Exemplo:

Seja $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$
e $R_1 : A \to B$ tal que
$R_1 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$.

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Obs.: matrizes booleanas são geralmente usadas para representação de relações em programas de computador.

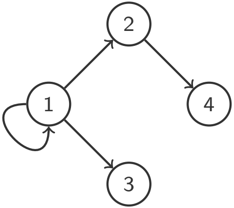
Matriz booleana de uma endorrelação

- Seja A um conjunto e R uma relação binária em um conjunto A com n elementos. A matriz booleana que representa a endorrelação R é uma matriz quadrada.

Matriz booleana de uma endorrelação

- Seja A um conjunto e R uma relação binária em um conjunto A com n elementos. A matriz booleana que representa a endorrelação R é uma matriz quadrada.

Exemplo:
Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $R \colon A \to A$ tal que $R = \{(1, 2), (2, 4), (1, 3), (1, 1)\}$.



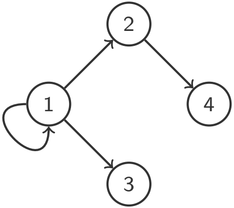
$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz booleana de uma endorrelação

- Seja A um conjunto e R uma relação binária em um conjunto A com n elementos. A matriz booleana que representa a endorrelação R é uma matriz quadrada.

Exemplo:

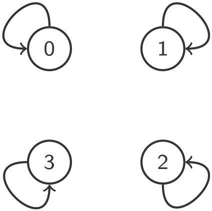
Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $R \colon A \to A$ tal que $R = \{(1, 2), (2, 4), (1, 3), (1, 1)\}$.



$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Obs.: É possível verificar através de um programa se uma endorrelação R é reflexiva, simétrica, anti-simétrica ou transitiva.**

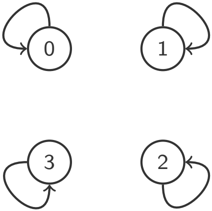
Verificando propriedades de relações

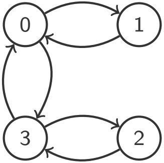


$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

reflexiva

Verificando propriedades de relações





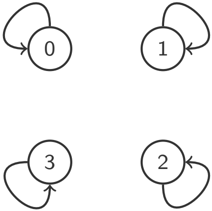
$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

reflexiva

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

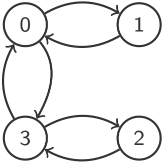
simétrica

Verificando propriedades de relações



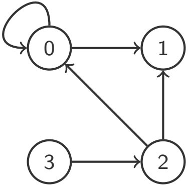
$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

reflexiva



$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
3 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

simétrica



$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

anti-simétrica

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Inverso de uma relação

O inverso de uma relação

- **Definição:** Seja R uma relação de A para B. A relação inversa R^{-1} de B para A é definida como:

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \colon (a, b) \in R\}.$$

O inverso de uma relação

- **Definição:** Seja R uma relação de A para B. A relação inversa R^{-1} de B para A é definida como:

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \colon (a, b) \in R\}.$$

- Essa definição pode ser reescrita operacionalmente como

$$\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ (b, a) \in R^{-1} \Leftrightarrow (a, b) \in R$$

O inverso de uma relação

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

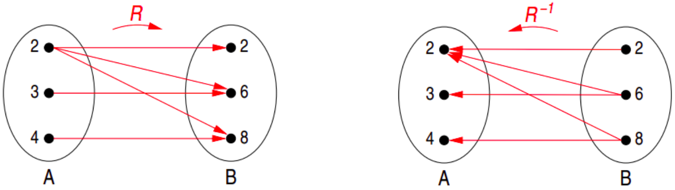
Exemplo: Sejam os conjuntos $A = \{2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 6, 8\}$ e seja R a relação "divide" de A para B: $\forall (x, y) \in A \times B,\ xRy \iff x \mid y$

- $R = \{(2, 2), (2, 6), (2, 8), (3, 6), (4, 8)\}$
- $R^{-1} = \{(2, 2), (6, 2), (8, 2), (6, 3), (8, 4)\}$

O inverso de uma relação

Exemplo: Sejam os conjuntos $A = \{2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 6, 8\}$ e seja R a relação "divide" de A para B: $\forall (x, y) \in A \times B,\ xRy \iff x \mid y$

- $R = \{(2, 2), (2, 6), (2, 8), (3, 6), (4, 8)\}$
- $R^{-1} = \{(2, 2), (6, 2), (8, 2), (6, 3), (8, 4)\}$



$$R^{-1} : \forall (y, x) \in B \times A,\ yR^{-1}x \iff y \text{ é um múltiplo de x.}$$

Composição de Relações

Composição de Relações

Definição (Relação composta): Sejam A, B, C conjuntos. Seja R uma relação de A para B e S uma relação de B para C.

A relação composta de R e S é o conjunto dos pares ordenados (a, c), onde $a \in A$, $c \in C$ e para o qual existe um elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in S$.

Denotamos a composta de R e S por $S \circ R$.

Composição de Relações

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição (Relação composta): Sejam A, B, C conjuntos. Seja R uma relação de A para B e S uma relação de B para C.

A relação composta de R e S é o conjunto dos pares ordenados (a, c), onde $a \in A$, $c \in C$ e para o qual existe um elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in S$.

Denotamos a composta de R e S por $S \circ R$.

Exemplo

Qual é a composta das relações R e S, em que R é a relação de $\{1, 2, 3\}$ em $\{1, 2, 3, 4\}$, com $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$, e S é a relação de $\{1, 2, 3, 4\}$ em $\{0, 1, 2\}$, com $S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$?

Composição de Relações

Definição (Relação composta): Sejam A, B, C conjuntos. Seja R uma relação de A para B e S uma relação de B para C.

A relação composta de R e S é o conjunto dos pares ordenados (a, c), onde $a \in A$, $c \in C$ e para o qual existe um elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in S$.

Denotamos a composta de R e S por $S \circ R$.

Exemplo

Qual é a composta das relações R e S, em que R é a relação de $\{1, 2, 3\}$ em $\{1, 2, 3, 4\}$, com $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$, e S é a relação de $\{1, 2, 3, 4\}$ em $\{0, 1, 2\}$, com $S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$?

Resposta: $S \circ R = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1)\}$

Potências de uma relação

Definição (Potência de uma relação):
Seja R uma relação no conjunto A.
As potências R^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ são definidas recursivamente por

$$R^1 = R \qquad e \qquad R^{n+1} = R^n \circ R.$$

Potências de uma relação

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição (Potência de uma relação):
Seja R uma relação no conjunto A.
As potências R^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ são definidas recursivamente por

$$R^1 = R \qquad e \qquad R^{n+1} = R^n \circ R.$$

Exercício: Seja $R = \{(1,1), (2,1), (3,2), (4,3)\}$.
Encontre as potências R^n com $n \geq 2$.

Potências de uma relação

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição (Potência de uma relação):
Seja R uma relação no conjunto A.
As potências R^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ são definidas recursivamente por

$$R^1 = R \qquad e \qquad R^{n+1} = R^n \circ R.$$

Exercício: Seja $R = \{(1,1), (2,1), (3,2), (4,3)\}$.
Encontre as potências R^n com $n \geq 2$.

Solução Parcial: Como $R^2 = R \circ R$, encontramos
$R^2 = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,2)\}$.

Potências de uma relação

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição (Potência de uma relação):
Seja R uma relação no conjunto A.
As potências R^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ são definidas recursivamente por

$$R^1 = R \qquad e \qquad R^{n+1} = R^n \circ R.$$

Exercício: Seja $R = \{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3)\}$.
Encontre as potências R^n com $n \geq 2$.

Solução Parcial: Como $R^2 = R \circ R$, encontramos
$R^2 = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,2)\}$.

Como $R^3 = R^2 \circ R$, temos $R^3 = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}$.

Potências de uma relação

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição (Potência de uma relação):
Seja R uma relação no conjunto A.
As potências R^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ são definidas recursivamente por

$$R^1 = R \qquad e \qquad R^{n+1} = R^n \circ R.$$

Exercício: Seja $R = \{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3)\}$.
Encontre as potências R^n com $n \geq 2$.

Solução Parcial: Como $R^2 = R \circ R$, encontramos
$R^2 = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,2)\}$.

Como $R^3 = R^2 \circ R$, temos $R^3 = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}$.

Como $R^4 = R^3 \circ R$, temos $R^4 = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\} = R^3$.

Potências de uma relação

Definição (Potência de uma relação):
Seja R uma relação no conjunto A.
As potências R^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ são definidas recursivamente por

$$R^1 = R \qquad e \qquad R^{n+1} = R^n \circ R.$$

Exercício: Seja $R = \{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3)\}$.
Encontre as potências R^n com $n \geq 2$.

Solução Parcial: Como $R^2 = R \circ R$, encontramos
$R^2 = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,2)\}$.

Como $R^3 = R^2 \circ R$, temos $R^3 = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}$.

Como $R^4 = R^3 \circ R$, temos $R^4 = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\} = R^3$.

Como $R^4 = R^3$, isso implica que $R^n = R^3$ para $n = 4, 5, 6, \ldots$ (provar isso)

Potências de uma Relação Transitiva

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema: Seja R uma relação no conjunto A.
A relação R é transitiva **se e somente se** $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Demonstração:

Potências de uma Relação Transitiva

Teorema: Seja R uma relação no conjunto A.
A relação R é transitiva **se e somente se** $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Demonstração:

Seja A um conjunto e R uma relação em A.

($\leftarrow$) Prova direta. Suponha que $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Em particular, $R^2 \subseteq R$.

Queremos provar que R é transitivo.

Sejam então, $a, b, c \in A$ tais que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$.

Pela definição de composição, temos que $(a, c) \in R^2$.

Como $R^2 \subseteq R$, isso implica que $(a, c) \in R$.

Portanto, R é transitivo, como queríamos demonstrar.

Potências de uma Relação Transitiva

Teorema: Seja R uma relação no conjunto A.
A relação R é transitiva **se e somente se** $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Continuação da Demonstração:
($\rightarrow$) Suponha que R é transitiva. Vamos usar indução matemática em n para provar que $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Potências de uma Relação Transitiva

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Teorema: Seja R uma relação no conjunto A.
A relação R é transitiva **se e somente se** $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Continuação da Demonstração:
$(\rightarrow)$ Suponha que R é transitiva. Vamos usar indução matemática em n para provar que $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Caso Base: $n = 1$. Claramente verdadeiro, dado que $R^1 = R \subseteq R$.

Potências de uma Relação Transitiva

Teorema: Seja R uma relação no conjunto A.
A relação R é transitiva **se e somente se** $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Continuação da Demonstração:
$(\rightarrow)$ Suponha que R é transitiva. Vamos usar indução matemática em n para provar que $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Caso Base: $n = 1$. Claramente verdadeiro, dado que $R^1 = R \subseteq R$.

Hipótese de Indução: Suponha que $R^n \subseteq R$, para um inteiro positivo n.

Potências de uma Relação Transitiva

Teorema: Seja R uma relação no conjunto A.
A relação R é transitiva **se e somente se** $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Continuação da Demonstração:
($\rightarrow$) Suponha que R é transitiva. Vamos usar indução matemática em n para provar que $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Caso Base: $n = 1$. Claramente verdadeiro, dado que $R^1 = R \subseteq R$.

Hipótese de Indução: Suponha que $R^n \subseteq R$, para um inteiro positivo n.

Passo Indutivo: Devemos provar que $R^{n+1} \subseteq R$.

Seja $(a, b) \in R^{n+1}$. Pela definição de R^{n+1}, temos que $R^{n+1} = R^n \circ R$.

Potências de uma Relação Transitiva

Teorema: Seja R uma relação no conjunto A.
A relação R é transitiva **se e somente se** $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Continuação da Demonstração:
$(\rightarrow)$ Suponha que R é transitiva. Vamos usar indução matemática em n para provar que $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Caso Base: $n = 1$. Claramente verdadeiro, dado que $R^1 = R \subseteq R$.

Hipótese de Indução: Suponha que $R^n \subseteq R$, para um inteiro positivo n.

Passo Indutivo: Devemos provar que $R^{n+1} \subseteq R$.
Seja $(a, b) \in R^{n+1}$. Pela definição de R^{n+1}, temos que $R^{n+1} = R^n \circ R$.
Logo, existe um elemento $x \in A$ tal que $(a, x) \in R$ e $(x, b) \in R^n$.

Potências de uma Relação Transitiva

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Teorema: Seja R uma relação no conjunto A.
A relação R é transitiva **se e somente se** $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Continuação da Demonstração:
$(\rightarrow)$ Suponha que R é transitiva. Vamos usar indução matemática em n para provar que $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Caso Base: $n = 1$. Claramente verdadeiro, dado que $R^1 = R \subseteq R$.

Hipótese de Indução: Suponha que $R^n \subseteq R$, para um inteiro positivo n.

Passo Indutivo: Devemos provar que $R^{n+1} \subseteq R$.

Seja $(a, b) \in R^{n+1}$. Pela definição de R^{n+1}, temos que $R^{n+1} = R^n \circ R$.

Logo, existe um elemento $x \in A$ tal que $(a, x) \in R$ e $(x, b) \in R^n$.

Pela HI, como $R^n \subseteq R$, obtemos que $(x, b) \in R$.

Potências de uma Relação Transitiva

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema: Seja R uma relação no conjunto A.
A relação R é transitiva **se e somente se** $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Continuação da Demonstração:
($\rightarrow$) Suponha que R é transitiva. Vamos usar indução matemática em n para provar que $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Caso Base: $n = 1$. Claramente verdadeiro, dado que $R^1 = R \subseteq R$.

Hipótese de Indução: Suponha que $R^n \subseteq R$, para um inteiro positivo n.

Passo Indutivo: Devemos provar que $R^{n+1} \subseteq R$.
Seja $(a, b) \in R^{n+1}$. Pela definição de R^{n+1}, temos que $R^{n+1} = R^n \circ R$.
Logo, existe um elemento $x \in A$ tal que $(a, x) \in R$ e $(x, b) \in R^n$.
Pela HI, como $R^n \subseteq R$, obtemos que $(x, b) \in R$.
Como R é transitivo e $(a, x) \in R$ e $(x, b) \in R$, segue que $(a, b) \in R$.
Isso mostra que $R^{n+1} \subseteq R$, completando a prova. $\square$

FIM