Курс «Численные методы» Ч.2.

ВОЛКОВ Василий Михайлович, Минск, БГУ
v.volkov@tut.by

Минск, 26 марта 2018

Лекция 2.

2.1 Разностные методы решения краевых задач для ОДУ.

.

Когда методы Рунге-Кутты тормозят?

Существует два случая, когда методы Рунге-Кутты могут терять эффективность.
Во-первых, жесткие системы (о них позже), во-вторых, когда вычисление правой части требует больших затрат.

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + \sum_{m=0}^{M} b_m K_m, \quad K_m = \tau f\left(t_k + c_m \tau, y_k + \sum_{n=0}^{m-1} (a_{n,m} K_n)\right),}$$

$$\boxed{\|\delta\| = \|y - u\| = O(\tau^p), \quad p \le M}$$

Структура метода Р-К такова, что для получения большего порядка точности требуется на каждом шаге увеличивать число стадий M, на каждой из которых требуется вычислить **f(t,y)** в некоторых промежуточных точках отрезка **$[t_k, t_{k+1}]$.**
Наиболее проблематичный случай — **f(t,y)** является решением отдельной, сложно разрешимой задачи**.**

;

Постановка задачи

Для задачи Коши:

$$\frac{d}{dx}k\frac{dT}{dx}=-f(x,T).$$

общая схема m-шагового метода (m≥1) имеет вид разностного уравнения:

$$\boxed{\frac{a_0 y_k + a_1 y_{k-1} + \cdots + a_m y_{k-m}}{\tau} = b_0 f_k + b_1 f_{k-1} + \cdots + b_m f_{k-m}}$$

$y_k = y(t_k)$, $f_k = f(t_k, y(t_k))$, $t_k = t_{k-1} + \tau$, $k = 1, 2, \ldots$

Коэффициенты ***a_k, b_k*** вычисляются из соображений максимального порядка аппроксимации.

При **$b_0 = 0$** – многошаговая схема называется ***явной***.

При **$b_0 \neq 0$** – многошаговая схема называется ***НЕявной***.

Неявная схема допускает порядок аппроксимации $\Psi = O(\tau^p)$, $p \le 2m$, для явных – $p \le 2m-1$

;

Реализация многошагового метода

Для начала вычисления y_m , $m=k,k+1,\dots$ по k-шаговой схеме

$$\frac{a_0 y_k + a_1 y_{k-1} + \cdots + a_m y_{k-m}}{\tau} = b_0 f_k + b_1 f_{k-1} + \cdots + b_m f_{k-m}$$

требуется предварительно вычислить y_{k-1} , y_{k-2} , … y_1 ,
y_0 — определяется начальными условиями.
Для этого требуется привлечь какой-либо одношаговый метод.
Вычисление функций правой части f_m **необходимо только в узлах сетки** t_m. Однажды вычисленное значение f_m сохраняется для последующих $k-1$ шагов.
В отличие от методов Р-К, в многошаговых методах функция правой части считается однократно на каждом шаге.

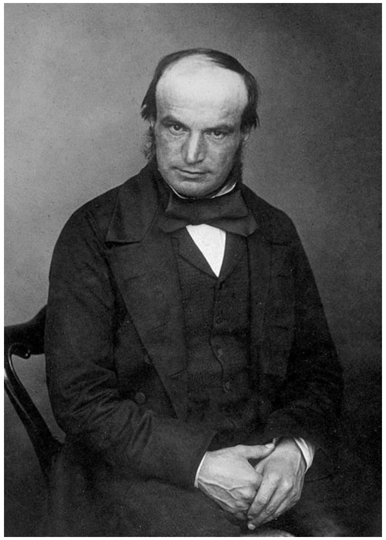
Печальная новость. Общая схема многошагового метода обсолютно неустойчива и непригодна для расчетов

;

Методы Адамса

Джон Кауч А́дамс 1819-1892

в 1946 году по возмущениям орбиты Урана предсказал существование Нептуна



В отличие от общей многошаговой схемы, в методе Адамса только два коэффициента a_0 и a_1 отличны от нуля:

$$\boxed{\frac{y_k - y_{k-1}}{\tau} = b_0 f_k + b_1 f_{k-1} + \cdots + b_m f_{k-m}}$$

Явная схема (**Адамса – Башфорта**) разрешима относительно y_k:

$$\boxed{y_k = y_{k-1} + \tau \sum_{n=1}^{m} b_n f_{k-n}}$$

Неявная схема (**Адамса – Моултона**) разрешима итерационно, например:

$$\boxed{\overset{s+1}{y}_k = y_{k-1} + \tau \sum_{n=1}^{m} b_n f_{k-n} + \tau b_0 f(t_k, \overset{s}{y}_k), \quad \overset{0}{y}_k = y_{k-1}}$$

Примеры метода Адамса

Коэффициенты неявного метода Адамса (Адамса-Моултона).

m	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	$\psi(\tau)$
1	1/2	1/2				$O(\tau^2)$
2	5/12	8/12	–1/12			$O(\tau^3)$
3	9/24	19/24	–5/24	1/24		$O(\tau^4)$
4	251/720	646/720	–264/720	106/720	–19/720	$O(\tau^5)$

Коэффициенты явного метода Адамса (Адамса-Башфорта).

m	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	$\psi(\tau)$
2	3/2	–1/2				$O(\tau^2)$
3	23/12	–16/12	5/12			$O(\tau^3)$
4	55/24	–59/24	37/24	–9/24		$O(\tau^4)$
5	1901/720	–2774/720	2616/720	–1274/720	251/720	$O(\tau^5)$

Устойчивость численного метода

Численный метод решения задачи Коши устойчив, если для любого t_k *найдутся такие постоянные* C_1, C_2, *не зависящие от* τ, *что выполняется неравенство*

$$\boxed{\left|y_k\right| \le C_1\left|y_0\right| + C_2 \max_{m<k}\left|f(t_m, y_m)\right|.}$$

Рассмотрим метод Эйлера для задачи Коши

$$\frac{du}{dt} = \lambda u, \quad \lambda < 0, \quad u(0) = u_0 \ne 0,$$

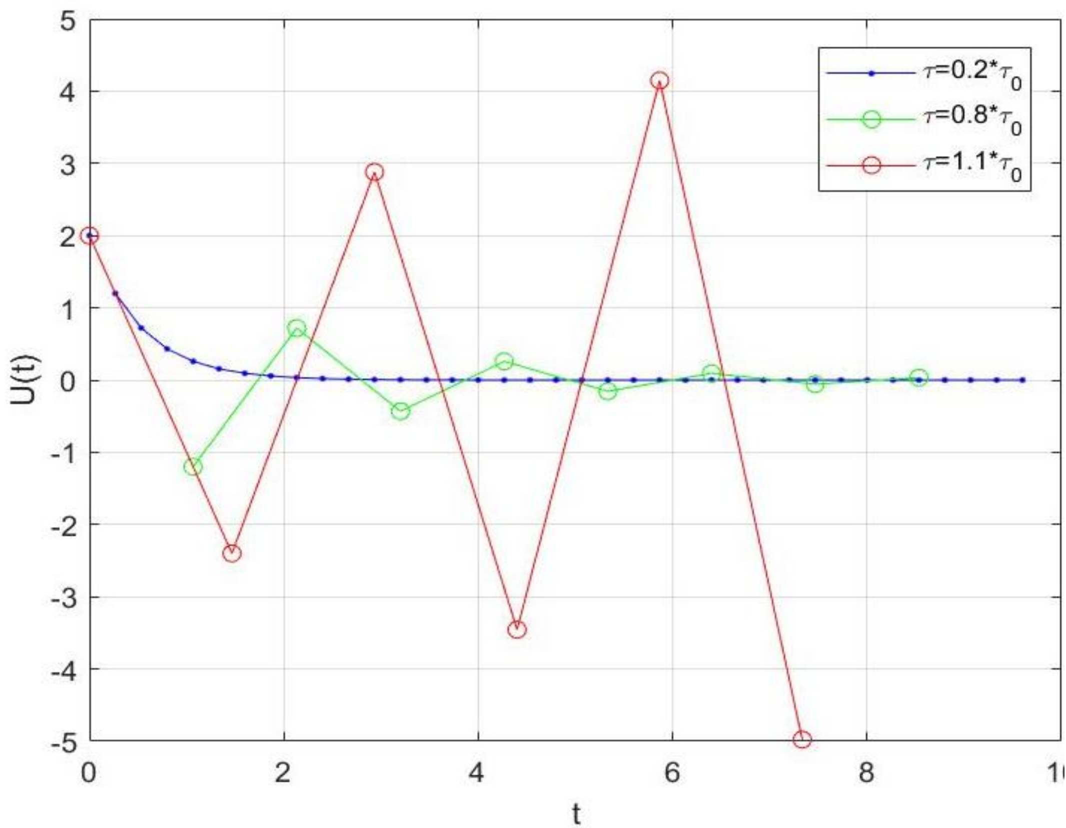
$$y_{k+1} = y_k\left(1+\tau\lambda\right) = y_0\left(1+\tau\lambda\right)^k.$$

Если $\tau>1/\lambda$, то $$\lim_{k\to\infty} y_k = \infty$$

Как выглядит неустойчивость

Рассмотрим метод Эйлера для задачи Коши

$$\frac{du}{dt} = \lambda u, \quad \lambda = -3/2, \quad u(0) = u_0 = 2, \quad \tau_0 = 4/3$$



Исследование устойчивость

Рассмотрим метод Адамса для задачи Коши

$$\frac{du}{dt} = \lambda u, \quad \lambda \leq 0, \quad u(0) = 1$$

$$y_k = y_{k-1} + \tau \sum_{n=0}^{m} b_n \lambda y_n.$$

Поиск решение в виде

$$y_k = q^k$$

приходим к **характеристическому полиному**

$$\boxed{(1 - \tau\lambda b_0) q^m - (1 + \tau\lambda b_1) q^{m-1} - \ldots \tau\lambda b_{m-1} q - \tau\lambda b_m = 0}$$

Условие устойчивости

Теорема. (*Условие корней*) Необходимым и достаточным условием устойчивости однородного разностного уравнения порядка m является принадлежность всех корней его характеристического полинома единичному кругу на комплексной плоскости, , $|q_k| \le 1$, $k=1,2,\ldots m$. при отсутствии кратных корней на границе данного круга.

Исследование устойчивости численных методов решения задачи Коши сводится к проверке условия корней в зависимости от параметра

$$\mu = \tau\lambda, \quad \mathrm{Re}\{\mu\} < 0$$

Исследование устойчивости. Пример 1.

Исследуем устойчивость неявного одношагового метода Адамса.

$$y_k - y_{k-1} = \frac{\tau\lambda}{2}\left(y_k + y_{k-1}\right).$$

Характеристический полином имеет вид

$$\left(1 - \frac{\tau\lambda}{2}\right)q - \left(1 + \frac{\tau\lambda}{2}\right) = 0,$$

Единственный корень характеристического полинома

$$q = \left(1 + \frac{\tau\lambda}{2}\right)\left(1 - \frac{\tau\lambda}{2}\right)^{-1}$$

$$\forall\, \tau > 0 \;\text{ и }\; \operatorname{Re}\{\lambda\} < 0, \quad \text{имеем} \quad |q| < 1$$

Условие корней выполняется для всех возможны значений μ , принадлежащих левой комплексной полуплоскости. Этот случай соответствует ***безусловной или абсолютной устойчивости метода (А-устойчивости)***

.

Исследование устойчивости. Пример 2.

Исследуем устойчивость двухшагового метода.

$$\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2\tau} = \lambda y_k$$

Характеристический полином имеет вид

$$q^2 - 2\tau\lambda q - 1 = 0,$$

По крайней мере для одного из корень характеристического полинома

$$q_{1,2} = \tau\lambda \pm \sqrt{(\tau\lambda)^2 + 1}$$

$$\forall\, \tau > 0 \quad \text{и} \quad \mathrm{Re}\{\lambda\} < 0, \quad \text{имеем} \quad |q| > 1$$

Условие корней не выполняется для всех возможны значений μ, принадлежащих левой комплексной полуплоскости. Этот случай соответствует ***абсолютной неустойчивости*** метода

Область устойчивости

Областью устойчивости многошагового метода называется множество значений μ, для которых выполняется *условие корней*. Для определения границы области устойчивости из характеристического полинома

$$\boxed{q^k = q^{k-1} + \tau\lambda \sum_{n=0}^{m} b_n q^{k-n}}$$

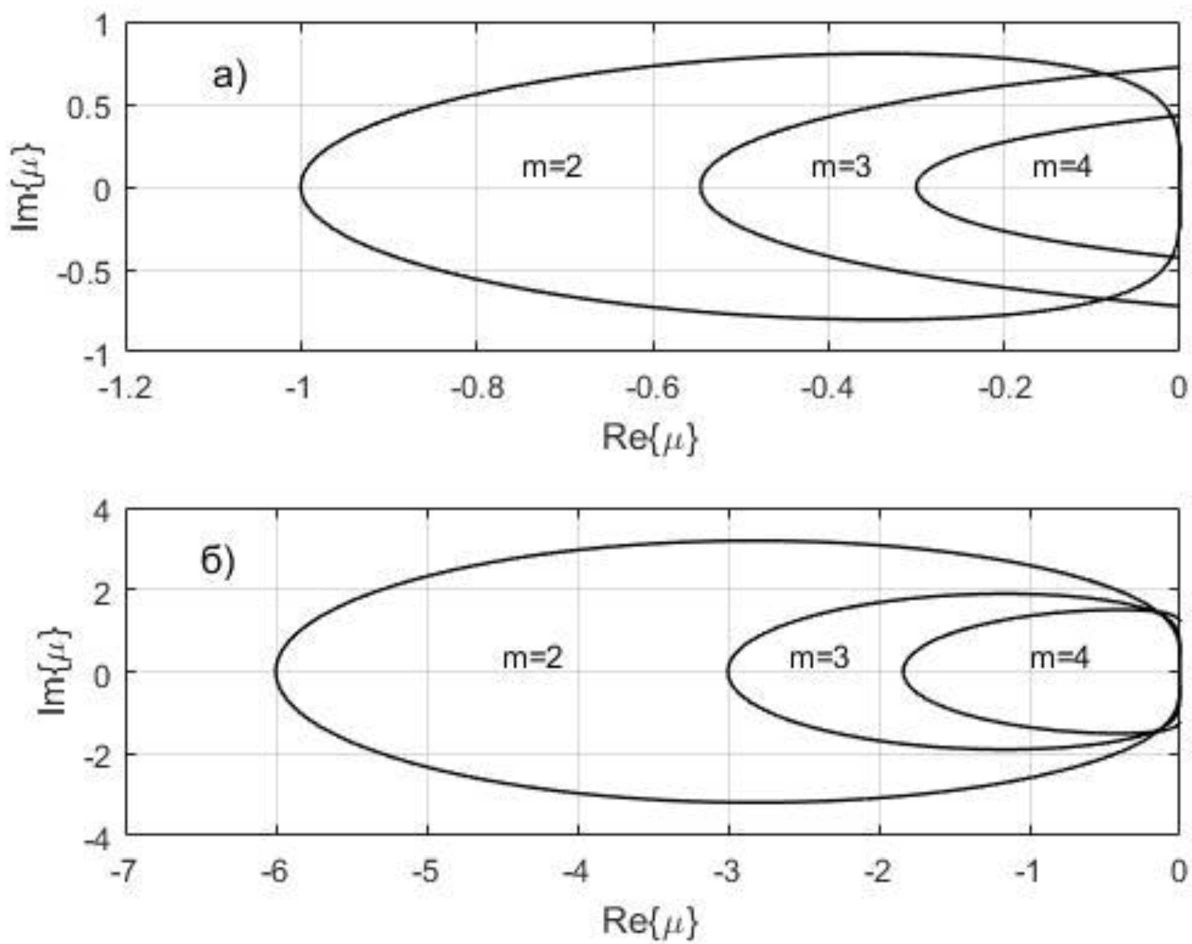
выразим **$\mu=\tau\lambda$:**

$$\mu = \left(q^k - q^{k-1}\right)\left(\sum_{n=0}^{k} b_n q^{k-n}\right)^{-1}$$

Границе области устойчивости соответствует множество точек где

$$|q| \equiv 1: \quad q = \exp(i\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Границы устойчивости метода Адамса



Границы устойчивости явного (а) и неявного (б) методов Адамса различного порядка точности

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!