Курс «Численные методы» Ч.2.

ВОЛКОВ Василий Михайлович, Минск, БГУ
v.volkov@tut.by

Минск, 11 февраля 2019

Лекция 1.

2.1 Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Методы Эйлера и Рунге-Кутты

.

;

;

Задача Коши

Найти частное решение дифференциального уравнения (системы уравнений)

$$\frac{du}{dt} = f(t,u), \qquad t \in [t_0, T],$$

удовлетворяющее дополнительному начальному условию

$$u(t_0) = u_0.$$

Здесь *u*, и f(t,u) могут быть скалярными функциями или вектор-функциями **:**

$$\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_N)^T, \quad \mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_N)^T,$$

В последнем случае мы имеем дело с системами дифференциальных уравнений

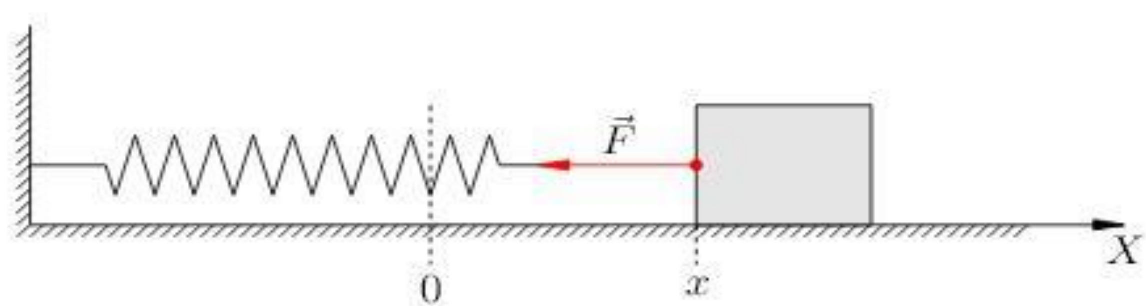
;

Пример дифференциальной задачи Коши

Уравнение движения пружинного маятника

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \left|\frac{dx}{dt} = v,\right| \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{k}{m}kx, \\ \dfrac{dx}{dt} = v \end{cases}$$

Начальные условия: $x(0) = x_0,\ v(0) = v_0.$



;

Метод Эйлера

Рассмотрим задачу Коши:

$$\frac{du}{dt} = f(t,u), \quad t \in [t_0, T], \quad u(t_0) = u_0$$

Выразим решение данной задачи при $t=t_0+\tau$ отрезком ряда:

$$u(t_0+\tau) = u(t_0) + \tau \frac{du(t_0)}{dt} + \frac{\tau^2}{2}\frac{d^2u(t_0+\sigma\tau)}{dt^2}, 0 \le \sigma \le 1.$$

$$u(t_0+\tau) \simeq u(t_0) + \tau \frac{du(t_0)}{dt} = u(t_0) + \tau f(t_0, u_0)$$

При достаточно малом τ приходим к приближенной **формуле Эйлера**

$$\boxed{\begin{aligned} & y_{k+1} = y_k + \tau f\left(t_k, y_k\right), \\ & y_k = y(t_k), t_k = t_{k-1} + \tau, k = 1, 2, \ldots \end{aligned}}$$

здесь $y(t_k)$-- приближенное решение задачи коши в точках $t =$
τ — шаг численного интегрирования.

Оценка погрешности метода Эйлера

Для точного и приближенного решения задачи Коши имеем:

$$y_{k+1} = y_k + \tau f\left(t_k, y_k\right),$$

$$u_{k+1} = u_k + \tau f\left(t_k, u_k\right) + \tau\psi(\tau).$$

Вычитая равенства приходим к задаче для погрешности метода Эйлера $\delta_k = y_k - u_k$ *:*

$$\delta_{k+1} = \delta_k + \tau\left(f(t_k, y_k) - f(t_k, u_k)\right) - \tau \cdot \psi(\tau)$$

Здесь $\psi(\tau) = \dfrac{\tau}{2}\dfrac{d^2u}{dt^2} = O(\tau)$ ***невязка****, возникающая*

при подстановки точного решения в приближенную формулу Эйлера.

Оценка погрешность (продолжение)

Теорема. *Пусть в области определения решения задачи Коши*

$$|f(u,t)| \le M_1, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| \le M_2, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| \le M_3,$$

тогда для погрешности приближенного решения при использовании метода Эйлера имеет место оценка

$$\boxed{|\delta_K| \le C \cdot \tau,}$$

где C — положительная постоянная, не зависящая от шага численного интегрировании τ *.*

Таким образом, погрешность метода Эйлера убывает пропорционально τ *и имеет одинаковый порядок малости с невязкой приближенной формулы. Такое поведение погрешности характеризуется как* ***сходимость*** *численного метода. Степень малого параметра в выражении для невязки определяет* ***порядок аппроксимации***

Правило Рунге

Правило Рунге используется для оценки фактической ошибки приближенного решения дифференциальных задач, когда известен порядок точности численного метода.
Пусть численный метод имеет ***р****-ый порядок точности.*
Приближенное решение, полученное с шагом численного интегрирования τ *, можно представить в виде суммы его точного значения и погрешности*

$$y_\tau(t_k) = u(t_k) + \delta_\tau \cong u(t_k) + \tau^p M$$

Соответственно, при шаге $\tau/2$ *:*

$$y_{\tau/2}(t_k) = u(t_k) + \delta_{\tau/2} \cong u(t_k) + (\tau^p / 2^p) M$$

На основе этих двух формул может быть вычислена погрешность:

$$\left|\delta_{\tau/2}\right| \simeq M \cdot \left(\tau/2\right)^p = \frac{\left|\left(y_\tau(t_k) - y_{\tau/2}(t_k)\right)\right|}{2^p - 1}$$

Методы Рунге-Кутты

Карл Дави́д Тольме́ Ру́нге 1856 - 1927
Ма́ртин Вильге́льм Ку́тта 1867 - 1944

Рассмотрим задачу Коши:

$$\frac{du}{dt} = f(t,u), \quad t \in [t_0, T], \quad u(t_0) = u_0.$$

Выразим решение данной задачи при $t=t_0+\tau$ проинтегрировав равенство:

$$u(t+\tau) = u(t) + \int_t^{t+\tau} f(t,u)dt$$

Идея методов Рунге – Кутты состоит в использовании специальных Квадратурных формул для приближенного вычисления интеграла в приведенном

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + \sum_{m=0}^{M} b_m K_m, \quad K_m = \tau f(t_k + c_m \tau, y_k + \sum_{n=0}^{m-1}(a_{n,m} K_n)),}$$

Метод Рунге-Кутты второго порядка

Из общей формулы Рунге-Кутты (РК) при M=2 имеем:

$$y_{k+1} = y_k + b_1 \tau f(t_k, y_k) + b_2 \tau f(t_k + c_2 \tau, y_k + a_{21} \tau f(t_k, y_k))$$

Точное решение и правую часть задачи Коши представим отрезком ряда

$$u_{k+1} = u(t_{k+1}) = u_k + \tau u'(t_k) + \frac{\tau^2}{2} u''(t_k) + \frac{\tau^3}{6} u'''(t_k + \sigma\tau), \quad 0 \le \sigma \le 1,$$

$$f(t_k + c_2 \tau, u_k + a_{21} \tau f(t_k, u_k)) = f(t_k, u_k) + c_2 \tau f_t + a_{21} \tau \cdot f\, f_u + O(\tau^2)$$

и подставим данные представления в формулу РК

$$\underline{u_k} + \underline{\underline{\tau u'}}(t_k) + \frac{\tau^2}{2} \underline{\underline{\underline{u''}}}(t_k) + O(\tau^3) = \underline{u_k} + b_1 \tau \underline{\underline{f}}(t_k, y_k) +$$

$$+ \left\{ b_2 \tau \underline{\underline{f}}(t_k, u_k) + b_2 c_2 \tau^2 \underline{\underline{\underline{f_t}}}(t_k, u_k) + b_2 a_{21} \tau^2 \underline{\underline{\underline{f\, f_u}}}(t_k, u_k) \right\} + O(\tau^3)$$

Метод Рунге-Кутты второго порядка

После приведения подобных и деления на τ из последней формулы имеем:

$$u'(t_k) = f(t_k, u_k) + \left\{ (\underline{b_1 + b_2 - 1}) \cdot f + \tau \left[\underline{(b_2 c_2 f_t + b_2 a_{21} f \cdot f_u - \frac{1}{2} u''} \right] + O(\tau^2) \right\}$$

Для нахождения коэффициентов схемы, приравняем к нулю выражения в круглых и квадратных скобках

$$b_1 + b_2 - 1 = 0; \quad b_2 c_2 f_t + b_2 a_{21} f \cdot f_u + \frac{1}{2} u'' = 0.$$

Учитывая тождество $u'' = f' = f_t + f_u \cdot u' = f_t + f_u \cdot f$

Приходим к системе уравнений для двухэтапной схемы РК

$$\boxed{b_1 + b_2 = 1, \quad c_2 = a_{21}, \quad b_2 a_{21} = 1/2.}$$

Решение НЕ ОДНОЗНАЧНО!!!

$$a)\ b_1 = 1/2, \quad b_2 = 1/2, \quad c_2 = a_{21} = 1.$$

$$б)\ b_1 = 0, \quad b_2 = 1, \quad c_2 = a_{21} = 1/2$$

Точность методов Рунге-Кутты

Точность методов Рунге-Кутты определяется порядком невязки:

$$\psi(\tau) = O(\tau^p).$$

Для двухэтапного метода РК имеет место второй порядок точности. С увеличением количества этапов ***M***, порядок точности ***p*** методов РК возрастает, как показано ниже в таблице

M	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p	1	2	3	4	4	5	6	6	7

Наибольшей популярностью пользуются методы Рунге – Кутты 4-5-го порядка точности (почему?)

Таблица Бутчера

Коэффициенты методов РК удобно представить в виде таблицы (Таблицы Бутчера):

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array} = \begin{array}{c|ccccc} 0 & 0 & & & & \\ c_2 & a_{21} & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ c_M & a_{M1} & a_{M2} & \cdots & a_{MM-1} & 0 \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & \cdots & b_M \end{array}$$

Пример таблицы Бутчера для метода РК четвертого Порядка (M=4):

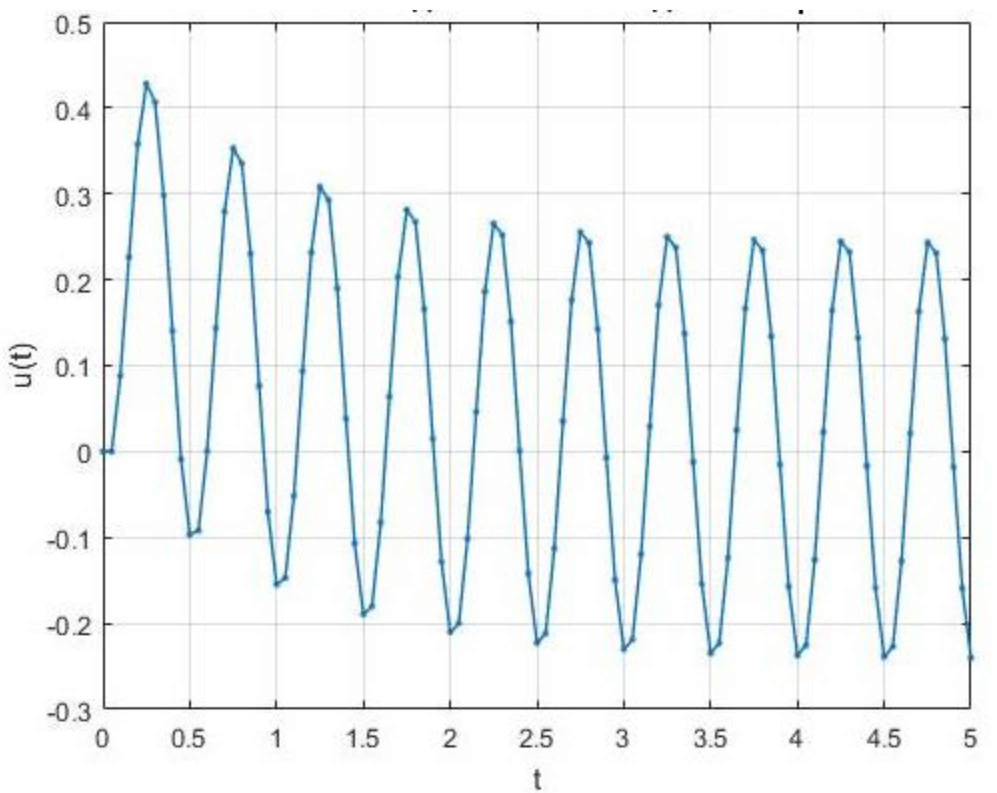
$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array} = \begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & 0 & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + \sum_{m=0}^{M} b_m K_m, \quad K_m = \tau f\left(t_k + c_m\tau, y_k + \sum_{n=0}^{m-1}(a_{n,m}K_n)\right),}$$

Пример

$$\frac{du}{dt} = -u + 3\sin(4\pi t), \quad t \in [0,5], \quad u(0) = 0.$$

```
%Метод Эйлера для задачи Коши
 t_0 = 0;  T = 5;  y_0 = 0;
f = @(t,u) -u+3*sin(4*pi*t);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
tau = 0.05;
K = (T-t_0)/tau+1;
t = t_0:tau:T;   y = zeros(K,1);
y(1) = u_0;
for k=1:K-1
    y(k+1) = y(k)+tau*f(t(k),y(k));
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
plot(t,y,'.-','LineWidth',1)
grid; xlabel('t'); label('u(t)');
```



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!