Курс «Численные методы»

ВОЛКОВ Василий Михайлович, Минск, БГУ
v.volkov@tut.by

Минск, 11 декабря 2019

Лекция 8.

МЕТОД НЬЮТОНА

Два подхода, приводящих к итерационному методу Ньютона

Пусть x=x* -- корень уравнения

$$f(x)=0, \quad f(x^*)=0.$$

При этом: $f'(x^*) \neq 0$

Для произвольной точки $x^{(0)}$ в окрестности x*

$$f(x^*) = f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})(x^{(0)} - x^*) + O\left((x^{(0)} - x^*)^2\right)$$

Из данного разложения следует приближенное выражение

$$x^* = x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)}) + O\left((x^* - x^{(0)})^2\right)}{f'(x^{(0)})} \quad \Rightarrow \quad x^* \cong x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})}.$$

;

Метод Ньютона для одного уравнения

$$\boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}}$$

Метод Ньютона эквивалентен методу простой итерации с оптимальным значением итерационного параметра:

$$\boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} - \tau f(x^{(k)}), \quad \tau_k = \frac{1}{f'(x^{(k)})}}$$

;

Сходимость метода Ньютона

Воспользуемся эквивалентностью метода Ньютона и метода простой итерации с функцией φ(x) вида:

$$\boxed{\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

Условие сходимости: $\left|\varphi'(x)\right| < 1:$

$$\phi'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

Для дважды непрерывно дифференцируемой f(x) при f'(x)≠0, найдется такая окрестность корня, где |f(x)|<<1 и, как следствие, условие сходимости выполняется .

Локальная сходимость метода Ньютона *означает, что условие сходимости гарантированно выполняется только в достаточно малой окрестности корня.*

Скорость сходимости метода Ньютона

Из разложения в степенной ряд корень уравнения равен:

$$x^* = x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)}) + O\left((x^* - x^{(0)})^2\right)}{f'(x^{(0)})}$$

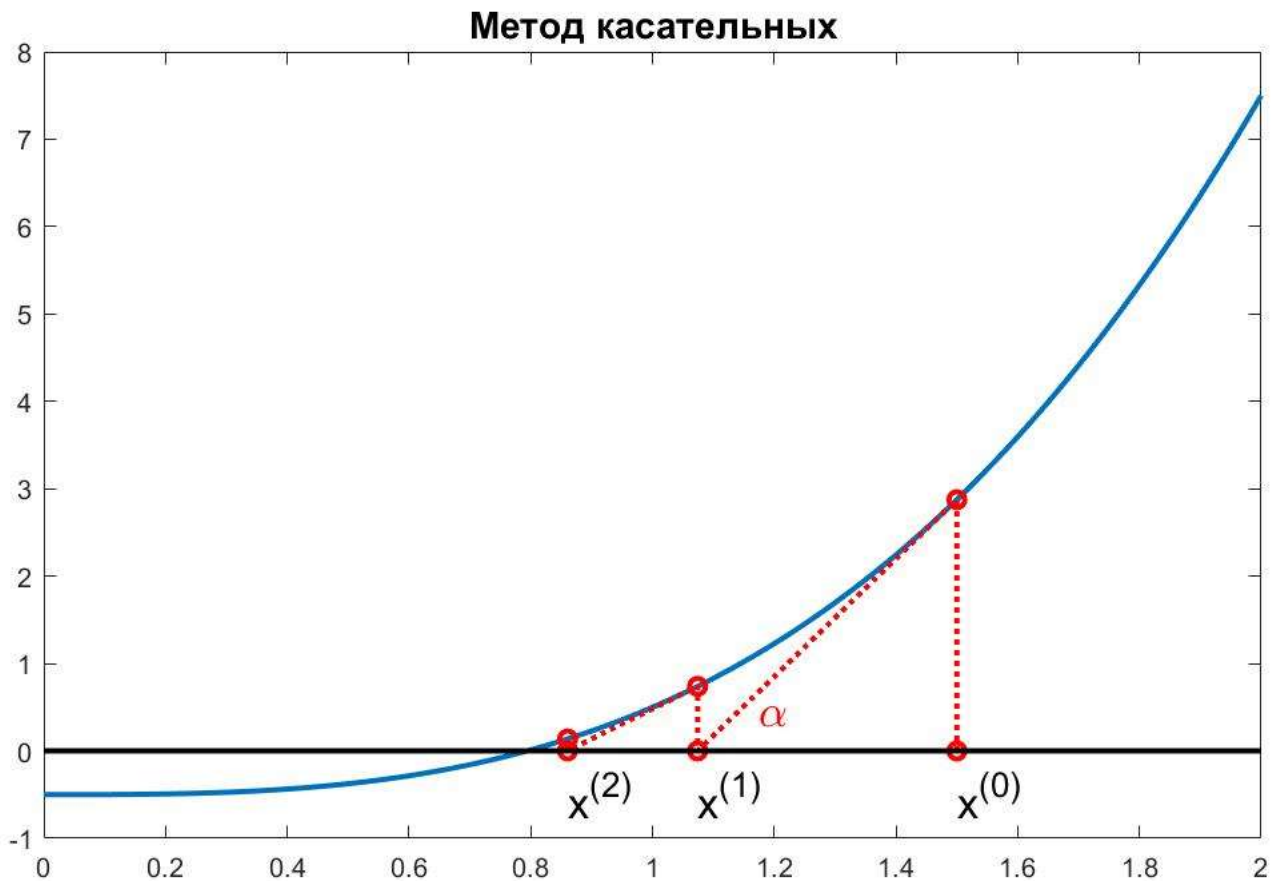
Вычитая данное равенство из формулы метода Ньютона,

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})},$$

будем иметь $$\left|x^{(1)} - x^*\right| = \left|\frac{O\left((x^* - x^{(0)})^2\right)}{f'(x^{(0)})}\right|.$$

Последнее означает, что погрешность каждого последую - щего приближения по порядку величины оценивается квадратом погрешности на предыдущей итерации **—** ***метод Ньютона имеет <u>КВАДРАТИЧНУЮ СХОДИМОСТЬ</u>***

Геометрическая интерпретация



$$x^{(0)} - x^{(1)} = \frac{f(x^{(0)})}{\mathrm{tg}(\alpha)}, \quad \mathrm{tg}(\alpha) = f'(x^{(0)})$$

Модификации метода Ньютона

*Если вычисление производной функции f(x) аналитически затруднено, значение f'(x) приближенно вычисляется по Форме конечных разностей (**метод секущих**):*

$$\boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})\left(x^{(k)} - x^{(k-1)}\right)}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}}$$

*Для расширения радиуса сходимости и вычисления кратных корней может быть использован итерационный **Метод Ньютона с параметром**:*

$$\boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} - p\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}}$$

Метод Ньютона для систем уравнений

$$\boxed{\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_N(\mathbf{x}) \right)^T, \quad \mathbf{x} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_N \right)^T.$$

$$\boxed{\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}),} \quad J(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_N}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

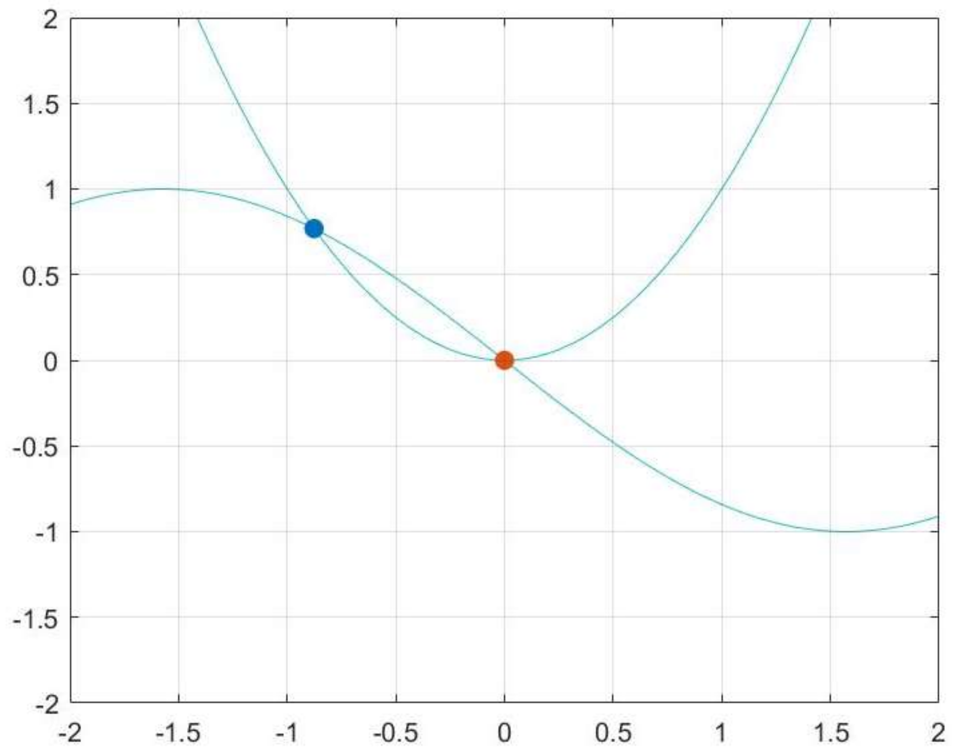
Реализация метода

$$\boxed{\mathbf{J}\mathbf{d}^{(k+1)} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}^{(k+1)}}$$

Пример

Решить систему уравнений методом Ньютона

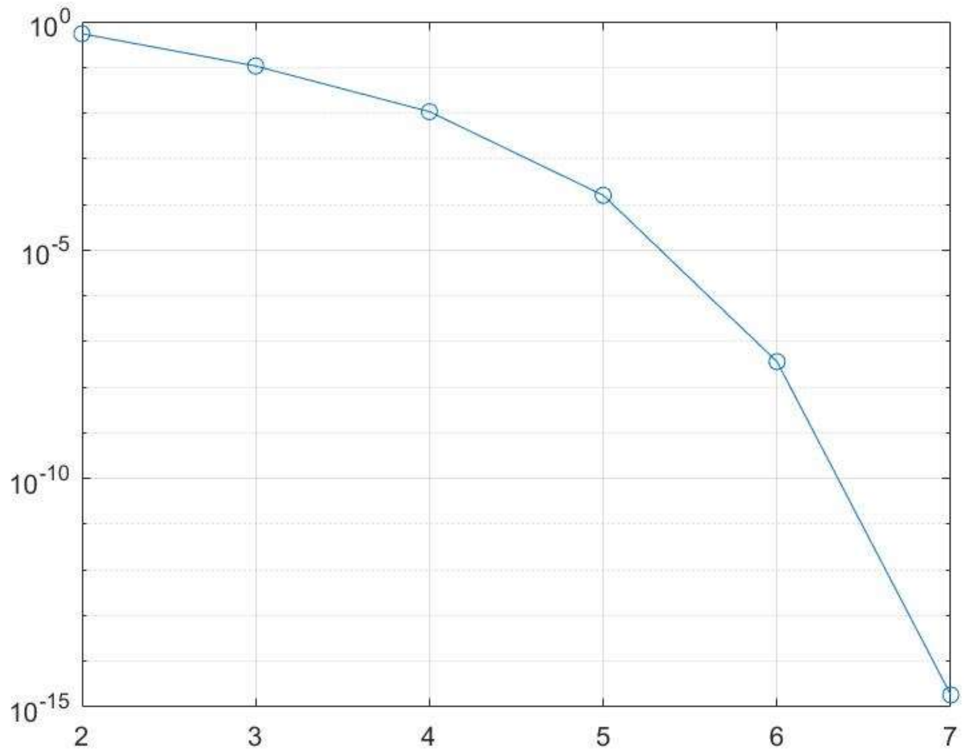
$$f_1(x,y) = x^2 - y = 0,$$
$$f_2(x,y) = \sin x + y = 0$$



Программная реализация

```
clear
f_1 = @(x,y) x.^2-y;
f_2 = @(x,y) sin(x)+y;
J = @(x,y) [2*x, -1; cos(x) 1];
F = @(x,y) [f_1(x,y); f_2(x,y)];
t = -2:0.05:2;
[X,Y]=ndgrid(t,t);
F1=f_1(X,Y);
F2=f_2(X,Y);
[C,d1]=contour(X,Y,F1,[0 0]);
hold on
[C,d2]=contour(X,Y,F2,[0 0]);
grid
 x = [-1; 0];
% x=[-0.2; -0.4];
err=1;
k=1;
while err > 1.e-9  &  k<30
       A = J(x(1),x(2));
       FF = F(x(1),x(2));
       d =-A\FF;
       x = x+d;
       k=k+1;
       err = norm(F(x(1),x(2)));
Err(k)=err;
end
plot(x(1),x(2),'.','MarkerSize',25)
figure
semilogy(Err)
```

Динамика сходимости



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!