Курс «Численные методы»

ВОЛКОВ Василий Михайлович, Минск, БГУ
v.volkov@tut.by

Минск, 16 октября 2018

Лекция 4.

1.4 Выбор оптимальных итерационных параметров.

Метод простой итерации (МПИ)

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \tau(A\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{f}) \quad \text{– МПИ}$$

τ – итерационный параметр

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = S\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}, \quad S = E - \tau A, \quad \mathbf{g} = \tau\mathbf{f},$$

$$A^T = A > 0, \quad \gamma_1 E \le A \le \gamma_2 E.$$

Критерий оптимальности $\boxed{\| S \| \xrightarrow[\tau]{} \min.}$

:

Оптимальное значение итерационного параметра

$$\tau = \tau_0 = 2/(\gamma_1 + \gamma_2) \qquad \|S\| \le \frac{1 - \gamma_1/\gamma_2}{1 + \gamma_1/\gamma_2},$$

$$\gamma_1/\gamma_2 = K_A^{-1}$$

$$\| S \|^k \le \varepsilon \quad \Rightarrow \quad k \ge \frac{\log \varepsilon}{\log \| S \|} \simeq K_A \log \varepsilon$$

Метод минимальных невязок (ММН).

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \tau_{k+1}(A\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{f})$$

Критерий оптимальности : $\boxed{\| \delta^{(k+1)} \| = \| x^{(k+1)} - x \| \xrightarrow[\tau_k]{} \min}$

Задача для погрешности:

$$\delta^{(k+1)} = (E - \tau_{k+1} A)\delta^{(k)}$$

Умножим последнее равенство на матрицу ***A***, а полученное равенство умножим скалярно само на себя:

$$\left(A\delta^{(k+1)}, A\delta^{(k+1)}\right) = \| A\delta^{(k+1)} \|^2 =$$

$$\left((A - \tau_{k+1} AA)\delta^{(k)}, (A - \tau_{k+1} AA)\delta^{(k)}\right)$$

Оптимизация итерационного параметра в ММН.

$$\| A\delta^{(k+1)} \|^2 = \left(A\delta^{(k)}, A\delta^{(k)}\right) + \tau_{k+1}^2 \left(AA\delta^{(k)}, AA\delta^{(k)}\right) - 2\tau_{k+1}\left(AA\delta^{(k)}, A\delta^{(k)}\right)$$

Условие минимума нормы погрешности на k+1-й итерации:

$$\frac{d}{d\tau_{k+1}} \| A\delta^{(k+1)} \|^2 = 2\tau_{k+1}\left(AA\delta^{(k)}, AA\delta^{(k)}\right) - 2\left(AA\delta^{(k)}, A\delta^{(k)}\right) = 0,$$

$$\boxed{\tau_{k+1} = \left(AA\delta^{(k)}, A\delta^{(k)}\right) \Big/ \left(AA\delta^{(k)}, AA\delta^{(k)}\right)}$$

Поскольку $\delta^{(k)} = A^{-1} r^{(k)}, \quad r^{(k)} = Ax^{(k)} - f$ – невязка

$$\boxed{\tau_{k+1} = \frac{\left(Ar^{(k)}, r^{(k)}\right)}{\left(Ar^{(k)}, Ar^{(k)}\right)}}$$

Алгоритм ММН. Преимущества в сравнении с МПИ.

$$I. \quad r^{(k)} = A\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{f};$$

$$II. \quad \tau_{k+1} = \frac{\left(Ar^{(k)}, r^{(k)}\right)}{\left(Ar^{(k)}, Ar^{(k)}\right)};$$

$$III. \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \tau_k r^{(k)};$$

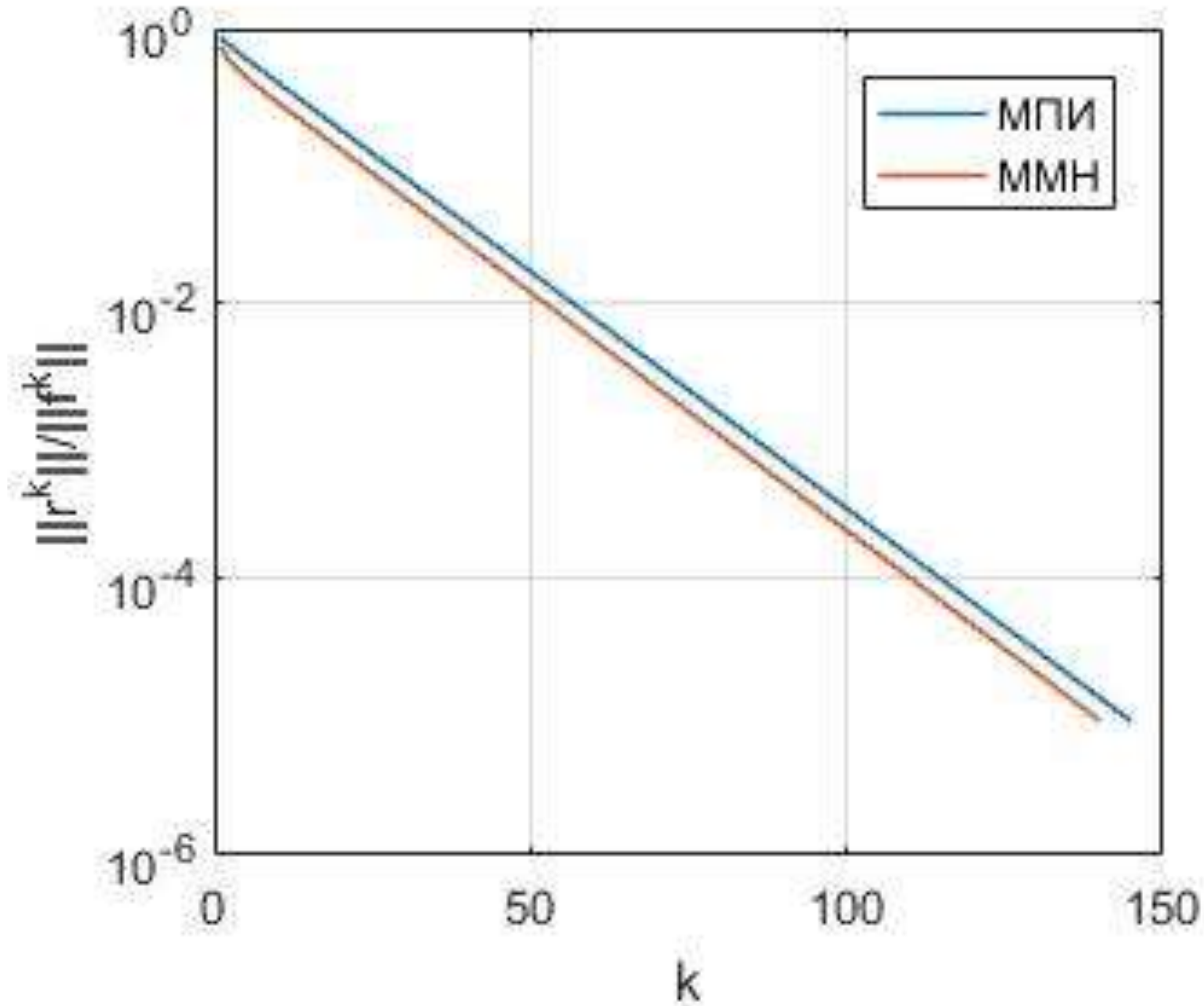
- Не требует знаний границ спектра матрицы ***A***;
- Не требует симметричности матрицы ***A:*** ***A=A^T***;
- Обеспечивает сравнимую с МПИ скорость сходимости при незначительных дополнительных вычислительных затратах:

$$\| r^{(k)} \| / \| f \| \le \varepsilon \quad \Rightarrow \quad k \sim K_A \log \varepsilon$$

Реализация ММН (Matlab)

```
clear
N = 7;      N = n^2;
% Матрица Пуассона
A = gallery('poisson',n);
% прав. Часть и нач. прибл.
f = ones (N,1);  x = zeros(N,1);
r = A*x - f;  Eps = 1.e-5;
err = norm(r)/norm(f);
% цикл итерационного метода
while (err > Eps & k < K_max)
      Ar=A*r;
      tau=(Ar.'*r)/(Ar.'*Ar); %!!!
      x = x - tau*r;
      r = A*x - f;
      err = norm(r)/norm(f);
      k = k+1;
      Err(k) = err;
end
%график убывания погрешн.
semilogy(1:k, Err);
xlabel('k')
ylabel('||r^{k}'||/||f^{k}'||)
grid
```

Динамика погрешности ММН vs МПИ



Метод наискорейшего спуска (МНС)

$$A\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad \Leftrightarrow \quad F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T A\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{f} + \mathbf{c} \xrightarrow[x]{} \min$$

$$A^T = A \Rightarrow \operatorname{grad}(F(\mathbf{x})) = \frac{1}{2}A\mathbf{x} + \frac{1}{2}A^T\mathbf{x} - \mathbf{f} = A\mathbf{x} - \mathbf{f} = \mathbf{r}.$$

$\times\, A \; - f$

$$\boxed{\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - \tau_{n+1}\mathbf{r}^{(n)},}$$

$$\frac{dF(\mathbf{x}^{(n+1)})}{d\tau} = \operatorname{grad}(F(\mathbf{x}^{(n+1)}))^T \frac{d}{d\tau}\mathbf{x}^{(n+1)} = -\mathbf{r}^{T(n+1)}\mathbf{r}^{(n)} = -(\mathbf{r}^{(n+1)}, \mathbf{r}^{(n)}) = 0.$$

$$A\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{f} = A\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{f} - \tau_{n+1}A\mathbf{r}^{(n)} \Rightarrow r^{(n)} \cdot \mathbf{r}^{(n+1)} = r^{(n)} \cdot \mathbf{r}^{(n)} - \tau_{n+1}A\mathbf{r}^{(n)} \cdot r^{(n)}$$

$$(\mathbf{r}^{(n)}, \mathbf{r}^{(n)}) - \tau_{n+1}(A\mathbf{r}^{(n)}, \mathbf{r}^{(n)}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_{n+1} = \frac{(\mathbf{r}^{(n)}, \mathbf{r}^{(n)})}{(A\mathbf{r}^{(n)}, \mathbf{r}^{(n)})}}$$

Оптимизация итерационных параметров по Чебышеву

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \tau_k (A\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{f})$$

$$A^T = A > 0, \quad \gamma_1 E \le A \le \gamma_2 E.$$

$$\delta^{(k+1)} = S_k \delta^{(k)}; \quad S_k = E - \tau_k A$$

$$\delta^{(k+1)} = S_k \cdot S_{k-1} \cdot \ldots \cdot S_0 \delta^{(0)}; \quad S_k = E - \tau_k A$$

$$S = (E - \tau_k A)(E - \tau_{k-1} A) \cdots (E - \tau_1 A) \xrightarrow[\tau_k]{} \min$$

$$\tau_m^{-1} = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \left(1 + \cos \frac{(2m-1)\pi}{2k} \right), \quad m = 1, 2, \ldots, k$$

Особенности Чебышевского набора оптимальных параметров.

$$\left\|\prod_{m=1}^{k} S_m\right\| = \left\|(E-\tau_k A)(E-\tau_{k-1}A)\cdots(E-\tau_1 A)\right\| \simeq \left(\frac{1-\sqrt{K_A^{-1}}}{1+\sqrt{K_A^{-1}}}\right)^k$$

$$\left\|\prod_{m=1}^{k} S_m\right\| = \left(\frac{1-\sqrt{K_A^{-1}}}{1+\sqrt{K_A^{-1}}}\right)^k \le \varepsilon \quad \Rightarrow \quad k \ge \sqrt{K_A}\log\varepsilon$$

NB!!! Среди итерационных параметров есть значения

$$\tau_k > 2/\gamma_2,$$

для которых $\|S_k\|>1$. Для избежания неустойчивости требуется упорядочения чебышевского набора параметров.

Неявные итерационные методы. Переобуславливатель.

$$B\left(\mathbf{x}^{(k+1)}-\mathbf{x}^{(k)}\right)=-\tau_k(A\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{f})$$

$$B\mathbf{x}^{(k+1)}=g_k,\quad g_k=B\mathbf{x}^{(k)}-\tau_k(A\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{f})$$

$$B^{-1}B\left(\mathbf{x}^{(k+1)}-\mathbf{x}^{(k)}\right)=-\tau_k(B^{-1}A\mathbf{x}^{(k)}-B^{-1}\mathbf{f})$$

$$\boxed{B\left(\mathbf{x}^{(k+1)}-\mathbf{x}^{(k)}\right)=-\tau_k(A\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{f})\Leftrightarrow\left(\mathbf{x}^{(k+1)}-\mathbf{x}^{(k)}\right)=-\tau_k(C\mathbf{x}^{(k)}-g)}$$

$$C=B^{-1}A,\quad g=B^{-1}\mathbf{f}.$$

B – **переобуславливатель**

Триединое правило выбора переобуславливателя

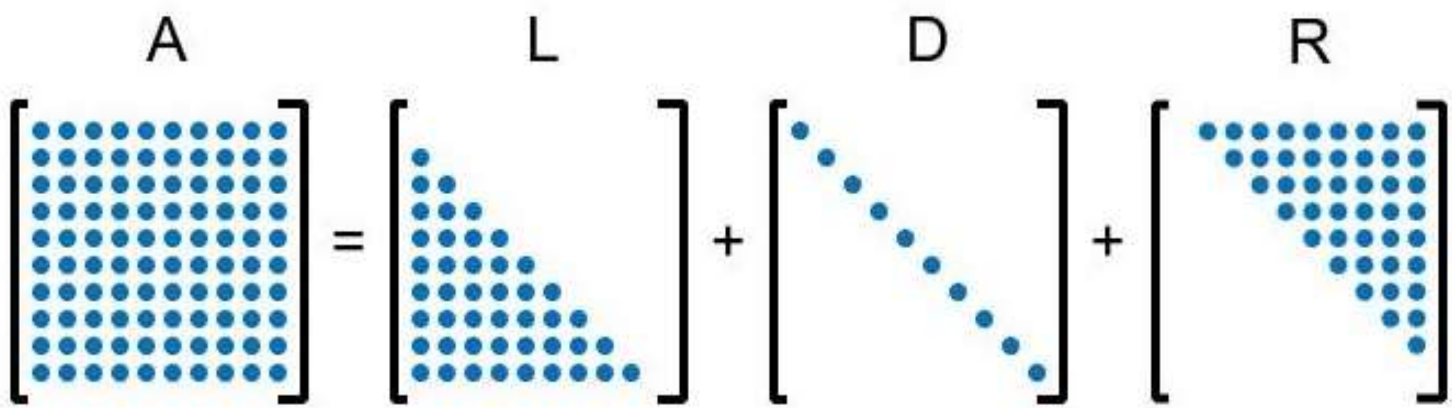
1. $\mathrm{cond}(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}) \ll \mathrm{cond}(\boldsymbol{A})$,

2. $\boldsymbol{B}$ – легко обратима в сравнении с $\boldsymbol{A}$,

3. Элементы $\boldsymbol{B}$ «определяются» элементами $\boldsymbol{A}$.

Три простейших переобуславливателя

$$A = L + D + R$$



Метод Якоби: ***B=D***;

Метод Зейделя: ***B=D+R***;

Метод Последовательной верхней релаксации:***B=D+ωR***;

Метод последовательной верхней релаксации

$$B\mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} - \omega(A\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{f}), \quad B = D + \omega R$$

Теорема. *В случае симметричной положительной матрицы* $A = A^T > 0$ *итерационный метод последовательной верхней релаксации сходится при* $0 < \omega < 2$

Оптимальное значение итерационного параметра, как правило, находится в интервале $1.5 < \omega < 2$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!