5) Для разбиения (T, ξ) сост. инт. сумму

$$\sigma(f, T, \xi) = \sum_{j=1}^{N} f(\vec{\xi}_j) \cdot \mu(U_j)$$

Опр. 73.1 Если сущ-т конеч. предел

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(f, T, \xi), \qquad 73.4$$

то ф-ия $f: \Pi \to \mathbb{R}$ наз-ся инт-й по Риману ~~на~~ Π, а сам этот предел наз-ся n-кратным инт-м по брусу Π

$$\int_{\Pi} f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int\limits_{\Pi}\!\!\dots\!\int f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\dots\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n =$$

$$= \int\limits_{\substack{a_1 \le x_1 \le b_1 \\ a_2 \le x_2 \le b_2 \\ a_n \le x_n \le b_n}}\!\!\dots\!\int f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n$$

Сущ-е конечного предела 73.4 понимается обычным обр-м:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \big(\forall (T, \xi): \lambda(T) < \delta \Rightarrow |\sigma(f, T, \xi) - J| < \varepsilon$$

Тот факт, что J интегр по брусу Π наз-ся инт-ю по Риману $f \in R(\Pi)$

§ 74 Условия сущ-я и осн. св-ва кратного интеграла по брусу

Если T - разбиение бруса Π и $U_1, U_2, \dots, U_n$ - ячейки разбиения, то верх и ниж суммы Дарбу для ф-ии $f: \Pi \to \mathbb{R}$ опр-ся обычным обр-м

$$\overline{S}(f, T) = \sum_{j=1}^{N} M_j \mu(U_j), \quad M_j = \sup_{\vec{x} \in U_j} f(\vec{x}),$$

$$\underline{S}(f, T) = \sum_{j=1}^{N} m_j \mu(U_j); \quad m_j = \inf_{\vec{x} \in U_j} f(\vec{x})$$

Эти суммы сохр-т свои св-ва и в одномерном случае.

1°. Суммы Дарбу не являются интегр-ми суммами (т.к. на U_j может не сущ-ть точек, где $\inf f$ и $\sup f$ достигаются)