Курс «Численные методы»

ВОЛКОВ Василий Михайлович, Минск, БГУ
v.volkov@tut.by

Минск, 30 октября 2019

Лекция 5.

1.5 Проблема собственных значений и собственных векторов.

Постановка задачи

Число λ называется *собственным значением матрицы* ***A***, если существует такой ненулевой вектор **x ≠0**, удовлетворяющий равенству $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ $\quad A \in R^{N \times N}$

Ненулевой вектор *x*, являющийся решением данной системы, называется собственным вектором матрицы, соответствующим собственному значению λ

$$\boxed{\det(A - E\lambda) = 0}$$

Собственные значения — корни характеристического многочлена матрицы

$$P(\lambda) = \det(A - E\lambda) = \lambda^N + a_1\lambda^{N-1} + a_2\lambda^{N-2} + \ldots + a_{N-1}\lambda + a_N$$

Свойства собственных значений и собственных векторов.

- Собственными значениями положительно определенной симметричной матрицы являются действительные положительные числа, причем среди них отсутствуют кратные:

$$\forall A = A^T \in R^{N\times N} : (A\mathbf{x},\mathbf{x}) \geq \delta > 0 \Rightarrow \lambda_k \in R,\ k = \overline{1,N},\ 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_N$$

- Множество собственных векторов симметричной невырожденной матрицы $A \in R^{N\times N}$ образуют ортогональный базис в пространстве R^N.

- (свойство сдвига) Если λ– собственное значение матрицы А, то λ–α собственное значение матрицы А-αЕ.

Свойства собственных значений и собственных векторов (продолжение).

- Если $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{x}$ — собственное значение и собственный вектор матрицы A, то $\boldsymbol{\lambda^{-1}}$ и $\boldsymbol{x}$ — собственное значение и собственный вектор матрицы $\boldsymbol{A^{-1}}$ соответственно.

- Собственные значения диагональной и треугольной матрицы совпадают с элементами главной диагонали данной матрицы.

- собственные значения матриц AB и BA совпадают

- Теорема Гершгорина. *Все собственные значения произвольной матрицы* ***A*** *лежат на комплексной плоскости в объединении кругов*

$$\Lambda_k = \{z : |z - a_{kk}| \le R_k\},\ k = \overline{1, N}, \qquad R_k = \sum_{m \ne k} |a_{km}|$$

Преобразование подобия

- Для произвольной невырожденной матрицы ***P***, собственные значения матрицы ***A*** и матрицы ***B***= $P^{-1}AP$ совпадают. Матрицы **A** и **B** в этом случае называются *подобными*, а преобразования вида ***B***= $P^{-1}AP$ называются *преобразованиями подобия*.

- *Если существует невырожденная матрица **P**, такая, что **B**= $P^{-1}AP = D$ и матрица **D** − диагональная, то матрица **A** называется матрицей простой структуры.*

- *Матрица **A** подобна диагональной матрице тогда и только тогда, когда она имеет систему линейно независимых собственных векторов.*

Каноническая форма Фробениуса.

Под канонической формой Фробениуса понимают матрицу вида

$$\Phi = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & & \dots & p_n \\ 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Примечательно то, что элементы первой строки матрицы Фробениуса совпадают с коэффициентами ее характеристического многочлена

$$\det(\Phi - \lambda E) = (-1)^N \left(\lambda^N - p_1 \lambda^{N-1} - \dots - p_k \lambda^{N-k} - \dots - p_N \right)$$

Метод Данилевского.

Произвольную матрицу можно примести к канонической форме Фробениуса с помощью специальных преобразований подобия. Для преобразования последней строки матрицы ***A*** к канонической форме Фробениуса с помощь преобразования подобия с матрицей

$$M_{N-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ -\dfrac{a_{N,1}}{a_{N,N-1}} & -\dfrac{a_{N,2}}{a_{N,N-1}} & -\dfrac{a_{N,3}}{a_{N,N-1}} & \dots & \dfrac{1}{a_{N,N-1}} & -\dfrac{a_{N,N}}{a_{N,N-1}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$M_{N-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & a_{N,3} & \dots & a_{N,N-1} & a_{N,N} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Приведение матрицы к канонической форме Фробениуса

$$A^{(1)} = M_{N-1}^{-1} \cdot A \cdot M_{N-1};$$

$$A^{(2)} = M_{N-2}^{-1} \cdot A^{(1)} \cdot M_{N-2};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A^{(N-1)} = \underbrace{M_1^{-1} \cdots M_{N-2}^{-1} M_{N-1}^{-1}}_{S^{-1}} \cdot A \cdot \underbrace{M_{N-1} M_{N-2} \cdots M_1}_{S} = S^{-1} \cdot A \cdot S = \Phi.$$

Собственные векторы матрицы Фробениуса

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & \dots & p_N \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

$$y_{k-1} = \lambda y_k, \quad k = N, N-1, N-2, \dots, 2$$

$$\mathbf{y} = (\lambda^{N-1}, \lambda^{N-2}, \dots, \lambda, 1)^T$$

$$\Phi \mathbf{y} = S^{-1} \cdot A \cdot S\mathbf{y} = \lambda \mathbf{y} \quad \Rightarrow \quad A \cdot S\mathbf{y} = \lambda S\mathbf{y} \Rightarrow A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x},$$

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

```
A = pascal(N)
M3 = eye(N);
M3_In = eye(N);
M3_In(3,:)=A(4,:)
L = -A(4,:)/A(4,3);
L(3) =1/A(4,3);
M3(3,:) = L;
A1=M3_In*A*M3
```

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/10 & -2/5 & 1/10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} AM = \begin{bmatrix} 9/10 & 3/5 & 1/10 & -1 \\ 7/10 & 4/5 & 3/10 & -2 \\ 77/10 & 49/5 & 273/10 & -29 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!