Теорема 77.1 (Выр-е площади в криволин-х координатах)

Пусть Δ и D - квадр-мые обл-ти из $\mathbb{R}^2$ и отобр-е

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} : \Delta \to D \qquad (77.3)$$

есть биективное соотв-е, для к-го:

1. ф-ии $x(u, v)$ и $y(u, v)$ имеют в Δ непр част произв-е 1 порядка по всем перем

2. якобиан преобр-я (77.3) отличен от 0 почти всюду в обл. Δ:

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = J(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (u, v) \in \Delta,$$

тогда площадь $\mu(D)$ может быть выр-на след-м двойным инт-м

$$\mu(D) = \iint\limits_{\Delta} |J(u, v)| \, du\, dv \qquad (77.4)$$

77.2. Теорема о замене переменных в кратном интеграле

Исп-я выр-е площади плоск. обл-ти в крив. коорд., можно уст-ть след.

Теорема 77.2. (Замена переменных в двойном инт-ле)

Пусть Δ, D - квадр-е замкн. обл-ти из $\mathbb{R}^2$ и отображение (77.3)

биекти. соотв.

есть диффеоморфизм обл-ти Δ на D, т.е. биективное соотв-е, тогда для $\forall f(x, y)$ непрерывной в замыкании обл-ти D справедлива формула замены переменной в двойном инт-ле: