



Численные методы

Курс «Численные методы»

ВОЛКОВ Василий Михайлович, Минск, БГУ
v.volkov@tut.by

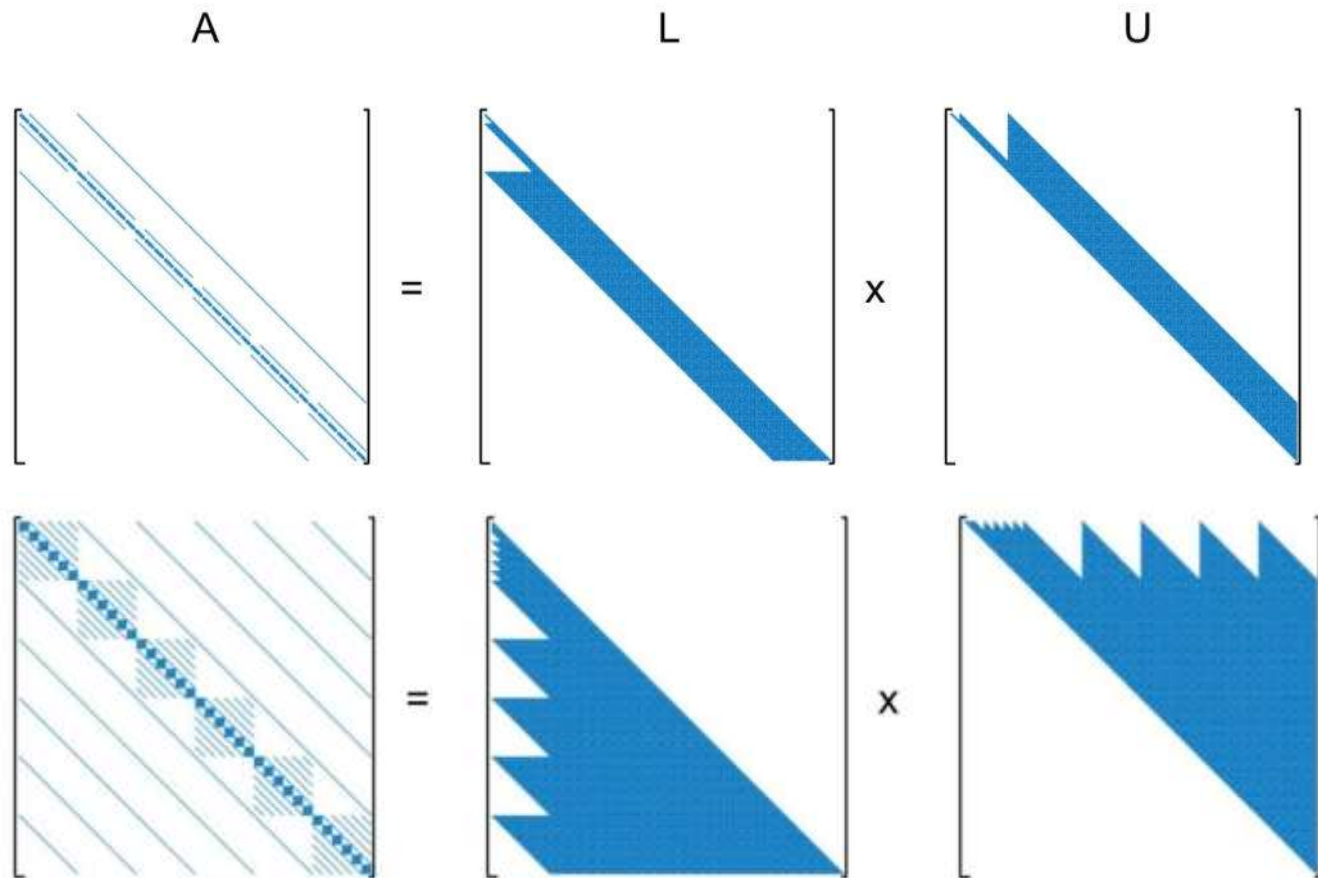
Минск, 2 октября 2019



Лекция 3.

1.3 Итерационные методы решения систем ЛАУ.

Зачем нужны итерационные методы?



Компоненты LU разложения **разреженных** матриц теряют свойство разреженности и вычислительная сложность обращения таких матриц сравнима со случаем обращения полных матриц : $O(N^3)$

Общий вид явного линейного итерационного метода

Для решения системы ЛАУ $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = S\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

S – матрица итерационного метода $N \times N$;

$\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{g}$ – векторы.

$\mathbf{x}^{(0)}$ – начальное приближение

Важно чтобы было так:

- 1) последовательность векторов $\mathbf{x}^{(k)}$ сходится;
- 2) предел данной последовательности является решением рассматриваемой системы уравнений.

Сходимость итерационного процесса

Теорема 1. Пусть $\|S\| \leq q < 1$. Тогда итерационный процесс сходится со скоростью геометрической прогрессии к вектору \mathbf{x} и для погрешности итерационного метода, $\delta^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}$, выполняется оценка

$$\|\delta^{(k+1)}\| \leq q^k \|\delta^{(0)}\|$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = S\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g},$$

$$\mathbf{x} = S\mathbf{x} + \mathbf{g},$$

$$\delta^{(k+1)} = S\delta^{(k)}, \quad \|\delta^{(k+1)}\| \leq \|S\| \cdot \|\delta^{(k)}\| \leq q \|\delta^{(k)}\|$$

Метод простой итерации (МПИ)

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \tau(A\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{f})$$

τ – итерационный параметр

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = S\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g},$$

$$S = E - \tau A, \quad \mathbf{g} = \tau \mathbf{f}$$

Теорема 2. Пусть $A^T = A > 0$
Тогда МПИ сходится при условии .

$$\tau < 2 \|A\|^{-1}$$



$r^{(k)}$

Оптимальное значение итерационного параметра. $\|S\| \rightarrow \min$.

Теорема 3. Пусть A – симметричная положительно определенная матрица: $A^T = A$, $\gamma_1 E \leq A \leq \gamma_2 E$, где γ_1 и γ_2 – минимальное и максимальное собственные значения матрицы соответственно. Оптимальное значение итерационного параметра, обеспечивающее максимальную скорость сходимости МПИ, есть величина, $\tau = \tau_0 = 2 / (\gamma_1 + \gamma_2)$ при этом

$$\|\delta^{(k+1)}\| \leq q \|\delta^{(k)}\|, \quad q = \frac{1 - \gamma_1 / \gamma_2}{1 + \gamma_1 / \gamma_2}, \quad \gamma_1 / \gamma_2 = K_A^{-1}$$

NB! Если K_A велико, то

$$q = \frac{1 - K_A^{-1}}{1 + K_A^{-1}} \rightarrow 1.$$

Критерий остановки итераций

Для оценки погрешности решения на текущей итерации используется невязка, $r^{(k)} = A\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{f}$, при этом

$$\|\delta^{(k)}\| = \|A^{-1}\mathbf{r}^{(k)}\| \leq \|A^{-1}\| \|\mathbf{r}^{(k)}\|$$

Последнее неравенство говорит, что погрешность решения *«пропорциональна невязке»*

Если рассматривать относительную норму невязки, $\|\mathbf{r}^{(k)}\| / \|\mathbf{f}\|$, то $\|\mathbf{r}^{(0)}\| / \|\mathbf{f}\| = 1$ при нулевом начальном приближении. Следовательно, отношение $\|\mathbf{r}^{(k)}\| / \|\mathbf{f}\|$ характеризует верхнюю границу относительной нормы погрешности $\|\mathbf{x}^{(k)}\| / \|\mathbf{x}\|$. В качестве критерия остановки итераций разумно использовать условие

$\|\mathbf{r}^{(k)}\| / \|\mathbf{f}\| \leq \varepsilon,$

 ε -- требуемая относительная точность

Количество итераций для достижения заданной точности

Поскольку $\| \delta^{(k)} \| / \| x \| \leq q^k \leq \varepsilon$, то,
логарифмируя последнее неравенство, будем иметь

$$\| S \|^k \leq \varepsilon \Rightarrow k \geq \frac{\log \varepsilon}{\log \| S \|}$$

При достаточно больших K_A величину $\log \| S \|$ можно оценить линейным приближением степенного ряда и тогда

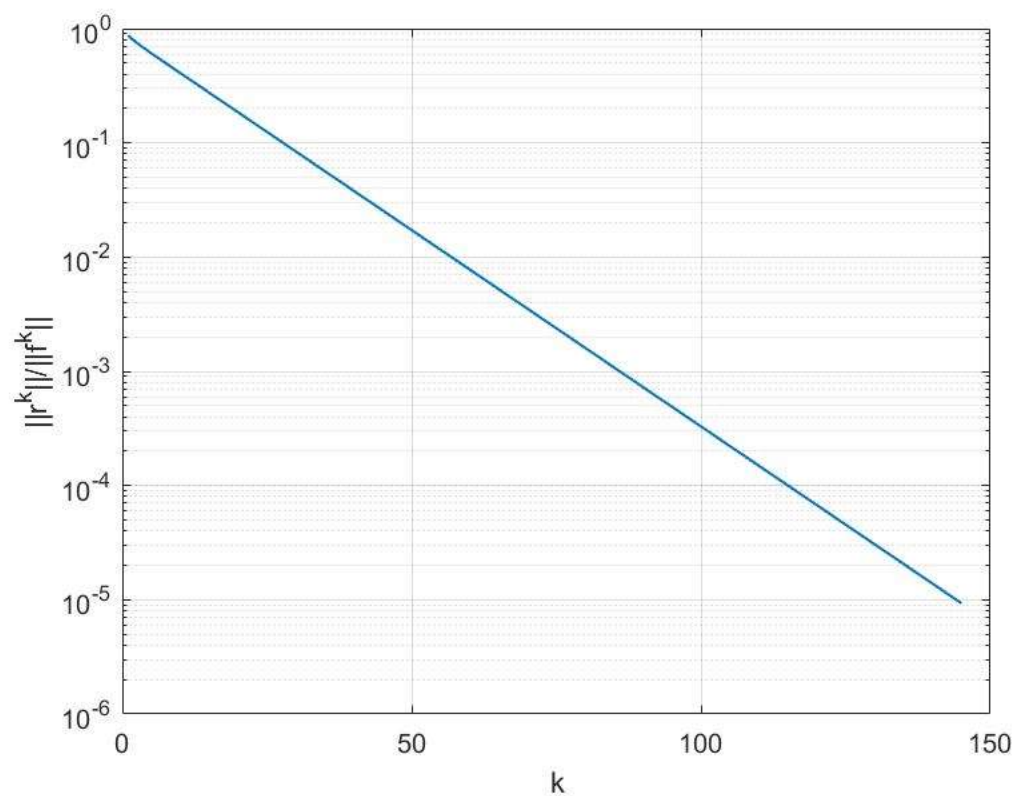
$$k \approx 2K_A |\log \varepsilon|$$

Реализация МПИ (Matlab)

```
clear
n = 7;    N = n^2;
% Матрица Пуассона
A = gallery('poisson',n);
% Оптим. Итер. Парам.
s = abs(eig(A));
L1 = min(s); L2 = max(s);
tau = 2/(L1+L2);
% прав. Часть и нач. пригл.
f = ones (N,1); x = zeros(N,1);
r = A*x - f; Eps = 1.e-5;
err = norm(r)/norm(f);
k = 0;
K_max = 1000;
```

```
% цикл итерационного метода
while (err > Eps & k < K_max)
    x = x - tau*r;
    r = A*x - f;
    err = norm(r)/norm(f);
    k = k+1;
    Err(k) = err;
end
%график убывания погрешн.
semilogy(1:k, Err);
xlabel('k')
ylabel('||r^{k}||/||f^{k}||')
grid
```

Динамика погрешности МПИ





СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!