§75 Интегралы по множеству из $\mathbb{R}^n$

75.1. Измеримые по Лебегу и по Жордану множества

Напомним опр. границы ∂E мн-ва $E \subset \mathbb{R}^n$:

$$\partial E = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \forall U(\vec{x}) : \begin{cases} U(\vec{x}) \cap E \neq \varnothing, \\ U(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus E) \neq \varnothing. \end{cases}$$

в любой окр. $U(\vec{x})$ кажд. точки $\vec{x} \in \partial E$ должны сущ-ть точки, как принадлежащие, так и не принадл. E

Напомним, что мн-во E наз-ся счётным, если между его элементами и эл-ми мн-ва $\mathbb{N}$ всех нат. чисел можно установить взаимно однозначное соответствие.

Опр. 75.1 Мн-во $E \subset \mathbb{R}^n$ наз-ся мн-м меры ноль в смысле Лебега, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ покрытие мн-ва E не более чем счетной системой $\{ \Pi_\alpha, \alpha \in A \}$ брусов Π_α, т.что

$$\sum_{\alpha \in A} \mu(\Pi_\alpha) < \varepsilon.$$

Опр. 75.2 Мн-во наз-ся измеримым по Лебегу, если его граница имеет лебегову меру ноль

Теорема 75.1 (критерий Лебега для бруса)

Для инт-ти ф-ии $f: \Pi \to \mathbb{R}$ по брусу Π необходимо и дост., чтобы f была огр-й на Π, а мн-во всех ее точек разрыва имело лебегову меру 0, т.е., чтобы f была непр-й почти всюду на Π.

Опр. 75.3 Мн-во $E \subset \mathbb{R}^n$ наз-ся мн-м меры ноль в смысле Жордана, если $\forall \varepsilon > 0$ его можно покрыть конечной сист. брусов $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$, таких, что

$$\sum_{k=1}^{m} \mu(\Pi_k) < \varepsilon$$