Курс «Численные методы»

ВОЛКОВ Василий Михайлович, Минск, БГУ
v.volkov@tut.by

Минск, 4 сентября 2019

Лекция 2.

1.2 Прямые методы решения систем ЛАУ.

LU-факторизация

Теорема. *Если* $\det(A) \neq 0$ *, то существует матрица перестановок P такая, что имеет место разложение*

$$PA = LU,$$

где L– нижняя треугольная матрица с отличными от нуля диагональными элементами, U – верхняя треугольная матрица с единичной главной диагональю

Матрица U вычисляется как в методе Гаусса

$$U = L_{(N)} L_{(N-1)} \cdots L_{(1)} A$$

Умножая последнее равенство на $L_{(1)}^{-1} L_{(2)}^{-1} \cdots L_{(N)}^{-1}$, имеем

$$L_{(1)}^{-1} L_{(2)}^{-1} \cdots L_{(N)}^{-1} U = L_{(1)}^{-1} L_{(2)}^{-1} \cdots L_{(N)}^{-1} L_{(N)} L_{(N-1)} \cdots L_{(1)} A = A,$$

следовательно $L = L_{(1)}^{-1} L_{(2)}^{-1} \cdots L_{(N)}^{-1}$

LU-факторизация (продолжение)

Если матрица системы уравнений представлена в виде

$$A = LU,$$

То решение исходной системы

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = L U \mathbf{x} = \mathbf{f}.$$

Сводится к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами

$$L y = \mathbf{f}, \quad U x = y,$$

Учитывая, что решение систем с треугольной матрицей имеет на порядок меньшую вычислительную сложность, данный подход эффективен при решении нескольких систем с одинаковой матрицей и разными правыми частями.

Вычисление обратной матрицы

В отдельных случаях вычисление обратной матрицы реализуется просто. Например, в случае элементарной треугольной матрицы:

$$L_{(k)}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a_{k+1,k}/a_{kk} & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & -a_{N,k}/a_{kk} & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{k+1,k} & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & a_{N,k} & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В общем случае обратная матрица может быть вычислена путем решения системы матричных уравнений с помощью метода LU факторизации:

$$AX = LUX = E.$$

E – единичная матрица.

Разложение Холецкого

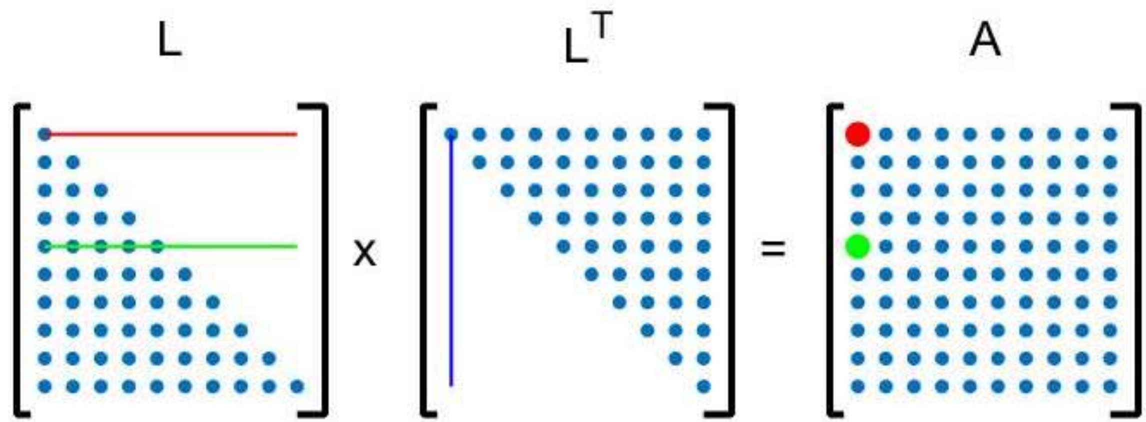
Симметричная матрица: $A = A^T, \quad \Leftrightarrow \quad a_{kn} = a_{nk}$

Симметричная положительно определенная матрица допускает представление :

$$A = LL^T.$$

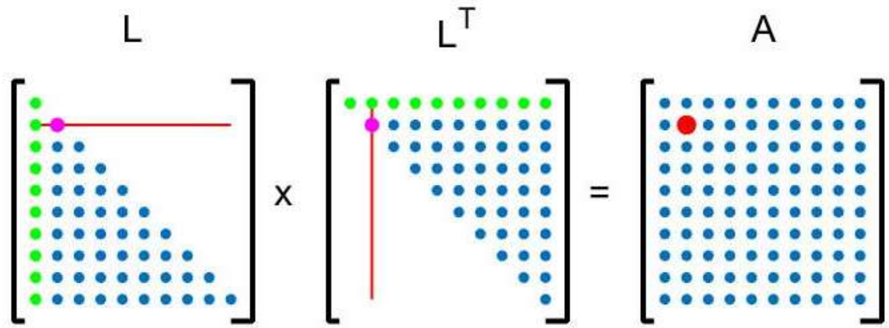
L – нижняя треугольная матрица

Вычисление элементов первого столбца

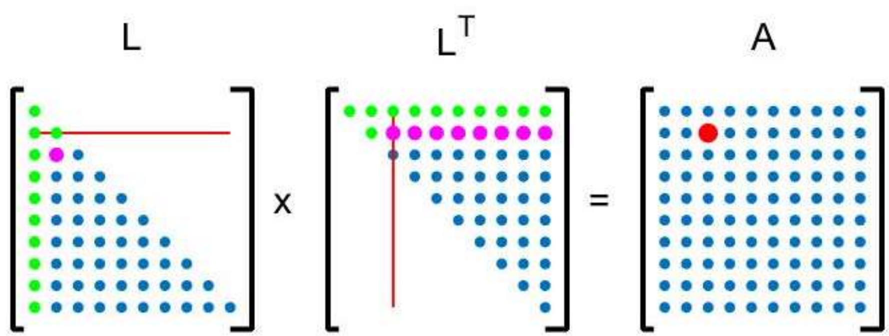


$$a_{m1} = l_{m1} l_{11} \Rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}},\, l_{m1} = a_{m1} / l_{11},\;\; m = 2, 3, \ldots, N.$$

Вычисление элементов второго столбца



$$a_{22} = l_{21}l_{12} + l_{22}^2 \quad \Rightarrow \quad l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}l_{12}}$$



$$a_{2,k>2} = l_{21}l_{1k} + l_{22}l_{2k} \Rightarrow l_{2k} = \left(a_{2k} - l_{21}l_{1k}\right)l_{kk}^{-1}$$

Вычисление остальных элементов

Как и в случае вычисления элементов второго столбца, вначале вычисляется диагональный элемент, а затем и остальные элементы столбца :

$$a_{mm} = \sum_{n=1}^{m} l_{mn} l_{nm} = \sum_{n=1}^{m} l_{mn}^2 \Rightarrow l_{mm} = \sqrt{a_{mm} - \sum_{n=1}^{m-1} l_{mn}^2}$$

$$a_{mk} = l_{mk} l_{kk} + \sum_{n=1}^{k-1} l_{mn} l_{nk} \Rightarrow l_{km} = l_{mk} = \left(a_{mk} - \sum_{n=1}^{k-1} l_{mn} l_{nk} \right) l_{kk}^{-1}$$

$$m = 2,3,\ldots,N, \quad k = m, m+1, \ldots, N.$$

Особенности

Алгоритм требует, чтобы значение подкоренного выражения было неотрицательным:

$$a_{mm} - \sum_{n=1}^{m-1} l_{mn}^2 \geq 0. \qquad m = 1, 3, \ldots, N.$$

Данное требование гарантированно выполняется для положительно определенных матриц с диагональным преобладание. В общем случае имеет место следующее Представление симметричной матрицы:

$$A = LDL^T.$$

L — нижняя треугольная матрица,

D — диагональная матрица, $d_{kk} = \pm 1$

Метод прогонки

Используется для ленточных матриц. Наиболее известен метод трехточечной прогонки для трехдиагональных матриц:

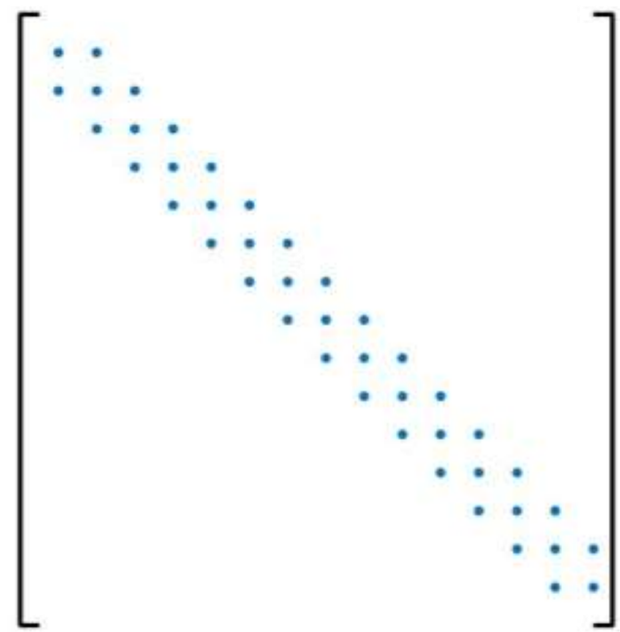
$$a_m x_{m-1} - c_m x_m + b_m x_{m+1} = f_m,$$

$$m = 2, \ldots, N-1,$$

$$x_1 = q_1 x_2 + g_1,$$

$$x_N = q_2 x_{N-1} + g_2.$$

A =



Формулы трехточечной прогонки

- Ищем решение в виде

$$x_m = \alpha_{m+1} x_{m+1} + \beta_{m+1}, \quad m = N-1, N-2, \ldots, 2$$

Тогда

$$x_{m-1} = \alpha_m x_m + \beta_m = \alpha_m(\alpha_{m+1} x_{m+1} + \beta_{m+1}) + \beta_m,$$

Подставляя эти выражения в уравнение для (m+1)-е уравнение имеем

$$\left[\alpha_{m+1}(a_m \alpha_m - c_m) + b_m\right] x_{m+1} +$$

$$\left[\beta_{m+1}(a_m \alpha_m - c_m) + a_m \beta_m - f_m\right] = 0$$

Формулы трехточечной прогонки

- Приравнивая к нулю выражения в квадратных скобках имеем рекуррентный формулы:

$$\alpha_{m+1} = \frac{b_m}{c_m - a_m \alpha_n}, \quad \beta_{m+1} = \frac{a_m \beta_n - f_m}{c_m - a_m \alpha_n}, \ m = 2, \ldots, N-1.$$

Из первого уравнения

$$x_1 = q_1 x_2 + g_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = q_1, \ \beta_2 = g_1$$

Из последнего уравнения

$$x_N = q_2 x_{N-1} + g_2 \quad \Rightarrow \quad x_N = \frac{g_2 + q_2 \beta_N}{1 - q_2 \alpha_N}.$$

$$x_m = \alpha_{m+1} x_{m+1} + \beta_{m+1}, \quad m = N-1, N-2, \ \ldots, 2$$

Особенности

Если коэффициенты $\alpha_{m+1} > 1$, то рекуррентные формулы прогонки неустойчивы.

Для устойчивости формул прогонки достаточно выполнения условий

$$a_m \neq 0, b_m \neq 0, \; |c_m| \geq |a_m| + |b_m|$$

$$m = \overline{2, N-1}, \quad |q_1| \leq 1, \quad |q_2| < 1$$

$$\Downarrow$$

$$|\alpha_{m+1}| = \left| \frac{b_m}{c_m - a_m \alpha_n} \right| \leq 1$$

Прямые методы для матриц специального вида

1. Для симметричных матриц: метод квадратного корня (факторизация Холецкогом $A = LL^T$.) Примерно в два раза эффективнее метода Гаусса.

2. Для циркулярных матриц: метод быстрого преобразования Фурье. Вычислительная сложность

$$O(N \log N) << O(N^3),$$

3. Для блочных матриц: блочный аналог метода Гаусса

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!