Курс «Численные методы»

ВОЛКОВ Василий Михайлович, Минск, БГУ
v.volkov@tut.by

Минск, 27 ноября 2019

Лекция 8.

1.8 РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

.

Нелинейное уравнение. Постановка задачи.

$$f(x) = 0, \quad x \in [a, b]$$

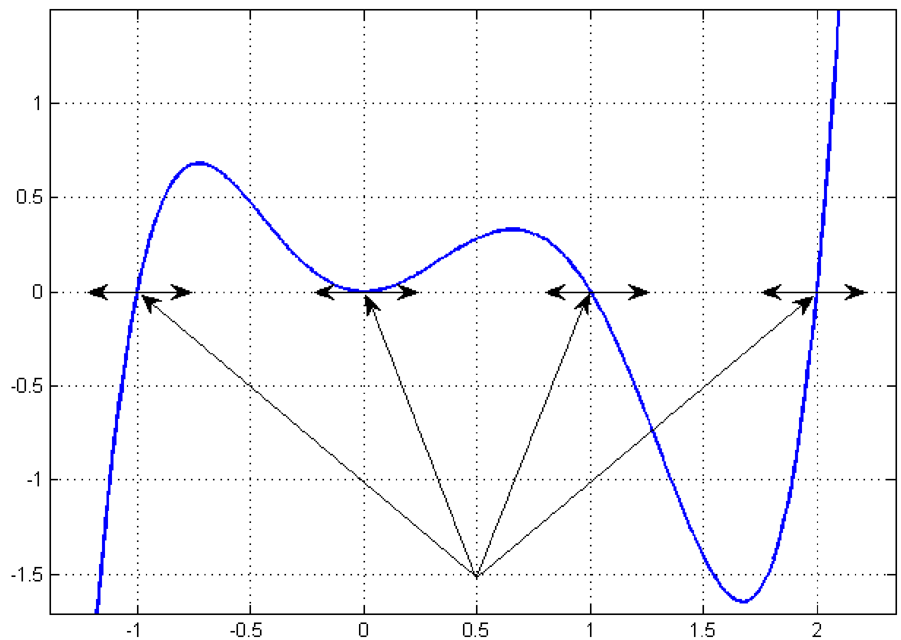
Задача состоит в отыскании нулей функции, т. е. значений переменной x, принадлежащих заданной области определения функции f(x), при которых она принимает нулевые значения.

Отделение корней.

Суть вопроса – сколько корней и где их искать?

Графический способ

$$P_5(x) = x^5 - 2x^4 - x^3 + 2x^2$$

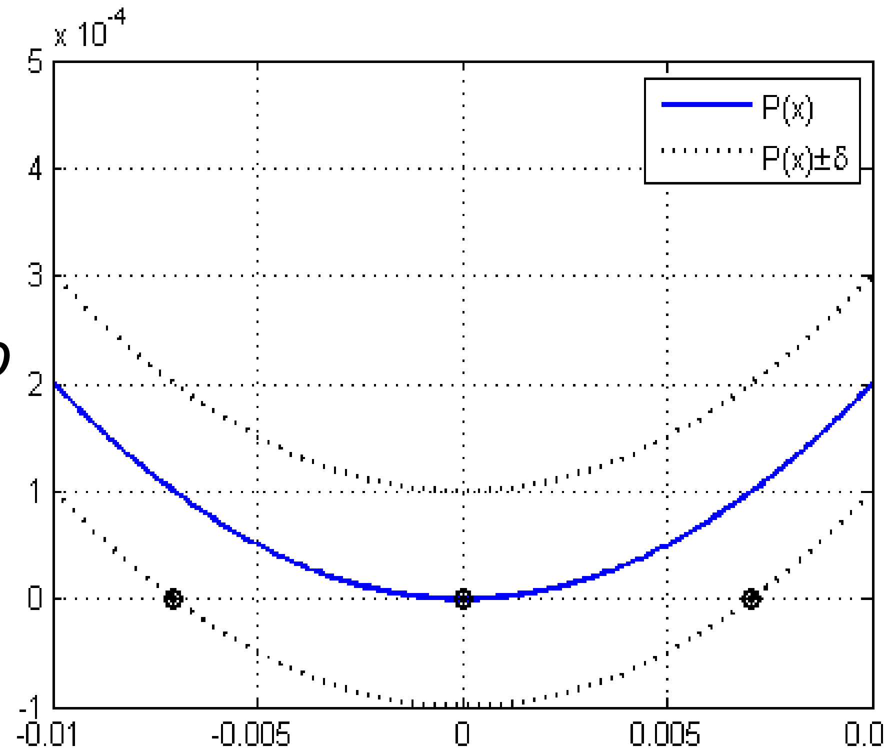


Неустойчивость кратных корней.

Значение $x = x^*$ называется корнем кратности *p*, если

$$f(x^*) \cdot (x - x^*)^{-(m-1)} = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, p$$

Слабые возмущения коэффициентов могут приводить к изменению количества корней



Нули непрерывной функции (Теорема Коши).

$$f(x)\in C[a,b],\quad f(a)\cdot f(b)\le 0\Rightarrow \exists c\in[a,b]:\ f(c)=0.$$

Метод деления отрезка пополам

1. пусть $f(a)f(b)\le 0,\quad f(a)<0,\quad f(b)>0$

2. вычислим $f(c_1),\quad c_1=\dfrac{a+b}{2}$

3. Переопределяем отрезок $f(c_1)<0,\ \Rightarrow a=c_1;$

$f(c_1)\ge 0,\ \Rightarrow b=c_1.$

Повторяем п.п. 2-3 до тех пор, пока $|b-a|\le\varepsilon$

<u>СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ</u>: $\boxed{|\delta_k|\le 2^{-k}|\delta_0|}$

Метод простой итерации (неподвижной точки)

Исходное уравнение $f(x)=0$ **приводится к виду:**

$$x=\varphi(x)$$

Функция φ(x) такова, что множество корней уравнений f(x)=0 и x=φ(x) ***<u>совпадают</u>***

Методом простой итерации (неподвижной точки) называется итерационный процесс вида:

$$\boxed{x^{(k+1)}=\varphi(x^{(k)})}$$

Метод релаксации (способ построения функции φ(x) :

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\tau f(x^{(k)})\Leftrightarrow\varphi(x)=x+\tau f(x)$$

Сходимость метода простой итерации

;

Теорема: *Пусть на отрезке* $R(a,r)=\{x: |x-a| < r\}$ *функция* $\varphi(x)$ *Липшиц-непрерывна,* $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \le q|x_1 - x_2|$, $0 < q < 1$, *и*

$$|\varphi(a) - a| \le (1-q)r.$$

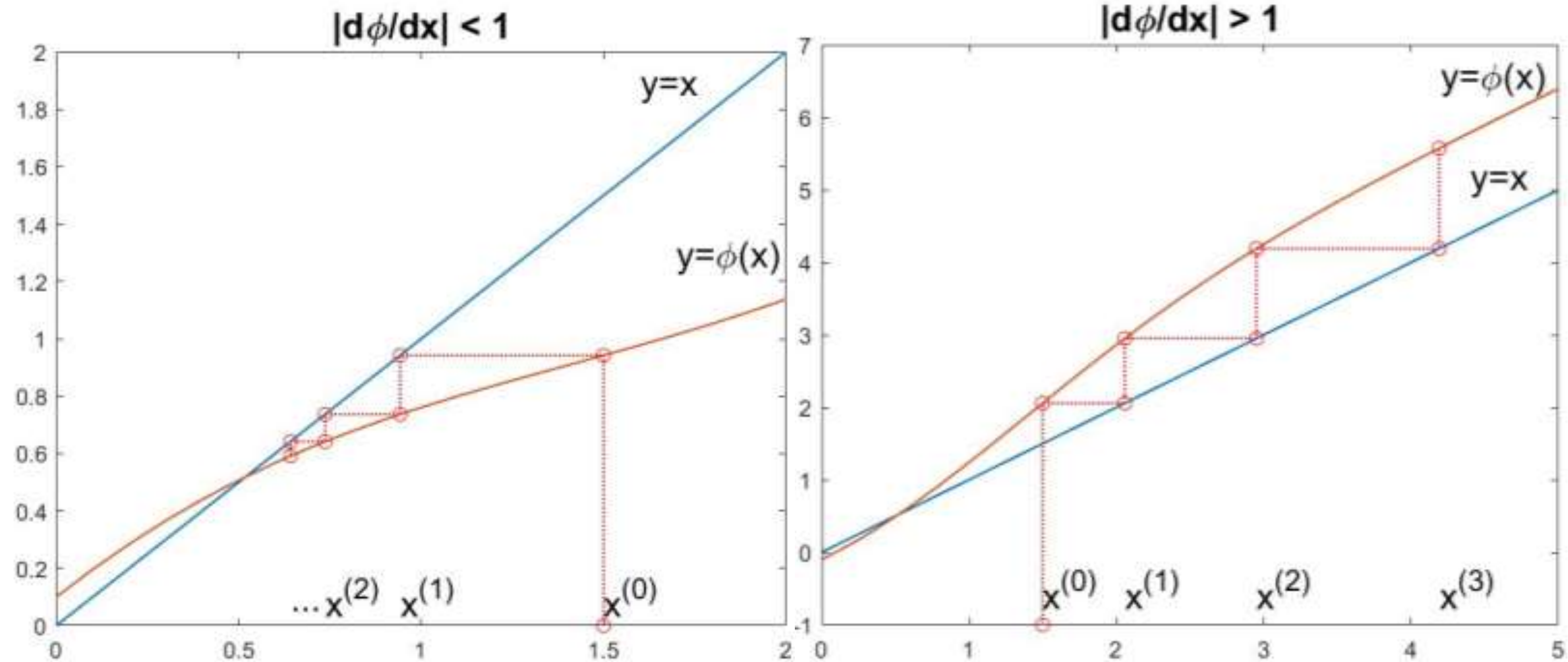
Тогда уравнение $x = \varphi(x)$ *имеет единственное решение* $x=x^*$, *к которому сходится метод простой итерации при любом начальном приближении* $x=x^{(0)}$, $|a-r| \le x^{(0)} \le |a+r|$, *и для погрешности* $\delta^{(k)} = x^{(k)} - x^*$ *выполняется оценка*

$$\left|x^{(k)} - x^*\right| \le q^k \left|x^{(0)} - x^*\right|.$$

Следствие: Для сходимости метода простой итерации условие Липшиц-непрерывности *функция* $\varphi(x)$ *можно заменить на условие*

$$|\varphi'(x)| \le q<1.$$

Геометрическая интерпретация



Оптимальный итерационный параметр.

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}) = x^{(k)} - \tau f(x^{(k)})$$

$$\left|\delta^{(k+1)}\right| = \left|x^{(k+1)} - x^*\right| \le q\left|\delta^{(k)}\right|.$$

$$q \le \left|\phi'(x)\right| \to \min$$

$$\left|\phi'(x^{(k)})\right| = \left|1 - \tau f'(x^{(k)})\right| = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{1}{f'(x^{(k)})}$$

$$\boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}}$$

Пример

Построить метод простой итерации для решения уравнения

$$f(x) = \sqrt[3]{x} - x^2 = 0.$$

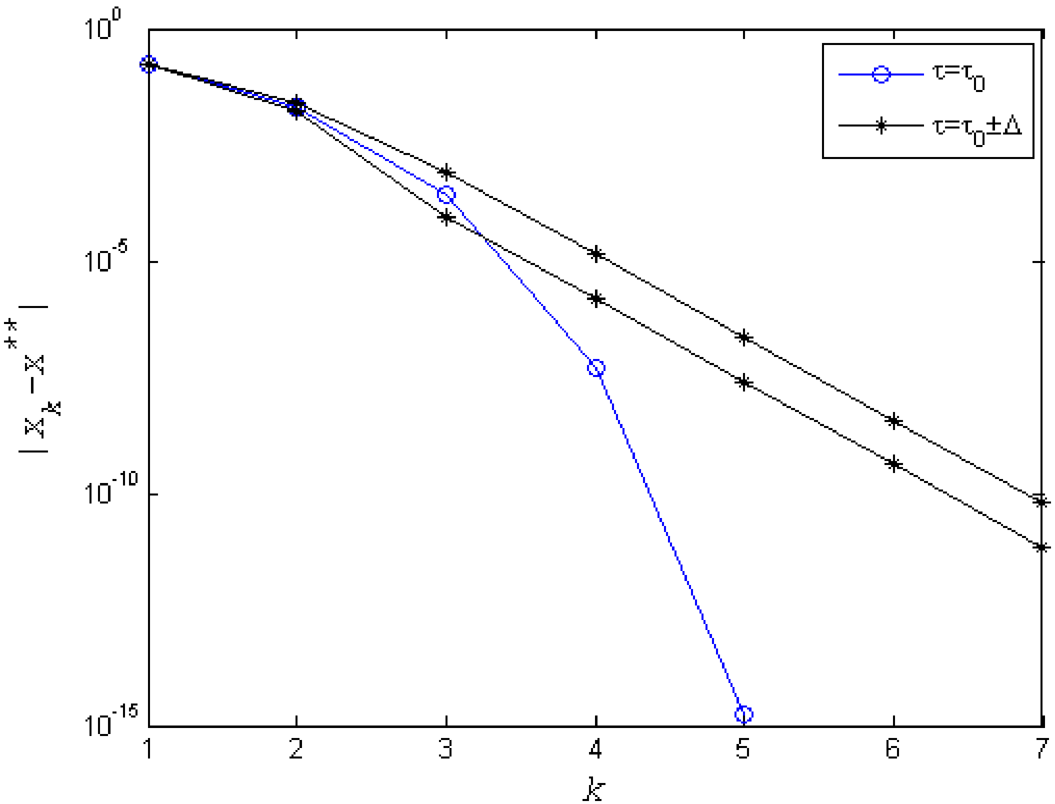
$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}) = x^{(k)} + \tau f(x^{(k)})$$

$$\phi'(x) = 1 - \tau\left(2x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$$

$$x = 1, \quad \phi'(1) = 1 - \tau\frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad 0 < \tau < \frac{6}{5}, \tau = \frac{3}{5} \Rightarrow \phi'(1) = 0$$

$$x = 0, \quad \forall\tau \quad \lim_{x\to 0}\phi'(x) = \infty$$

Результаты численного эксперимента



Сходимость метода простой итерации при различных значениях итерационного параметра: $\tau = \tau_0, \ \tau = \tau_0 \pm \delta, \ \tau_0 = 3/5, \ \delta = 10^{-10}$

Метод простой итерации для систем уравнений

$$\boxed{\mathbf{x}^{(k+1)} = \phi(\mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{x}^{(k)} + \tau\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_N(\mathbf{x}) \right)^T = (0,0,\ldots,0)^T,$$

$$\mathbf{x} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_N \right)^T.$$

Условие сходимости:

$$\left\| J(\mathbf{x}) \right\| \le q < 1, \qquad J(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_N}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\left\| \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^* \right\| \le q \left\| \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^* \right\|}$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!