Курс «Численные методы» Ч.2.

ВОЛКОВ Василий Михайлович, Минск, БГУ
v.volkov@tut.by

Минск, 5 марта 2018

Лекция 3.

3.1 Понятие о жестких системах. Методы Гира (дифференцирования назад).

.

Условие устойчивости численных методов решения задачи Коши для систем ОДУ

Рассмотрим метод Адамса для задачи Коши

$$\frac{du}{dt} = \lambda u, \quad \lambda \le 0, \quad u(0) = u_0$$

Условие устойчивости метода Эйлера $\boxed{\tau \le \frac{2}{|\lambda|}}$

Для системы уравнений

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{u}, \quad \mathbf{A} \le 0, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$$

$$\boxed{\tau \le \frac{2}{\|\mathbf{A}\|}} \qquad \boxed{\tau \le \frac{2}{\max|\lambda_A|}}$$

Сравнить с условием сходимости метода простой итерации

Определение жесткой линейной системы

Система дифференциальных уравнений

$$\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T, \quad \mathbf{A} \in R^{n \times n}.$$

*называется **жесткой**, если собственные значения матрицы А обладают следующими свойствами:*

1. система асимптотически устойчива*;*

$$\mathrm{Re}\{\lambda_k\} < 0, \quad k = \overline{1, n}$$

2.
$$s = \frac{\max |\mathrm{Re}\{\lambda_k\}|}{\min |\mathrm{Re}\{\lambda_k\}|} >> 1$$

*Число **s** называется числом жесткости системы (сравнить понятия числа жесткости и числа обусловленности.*

Жесткие системы общего вида

Система дифференциальных уравнений

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(\mathrm{t}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T,$$

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T.$$

называется ***жесткой****, если собственные значения матрицы Якоби* ***J*** *вектор - функции* ***f*** *обладает теми же свойствами, что и матрица жесткой линейной системы:*

$$\mathrm{Re}\{\lambda_k\} < 0, \quad k = \overline{1, n} \qquad s = \frac{\max|\mathrm{Re}\{\lambda_k\}|}{\min|\mathrm{Re}\{\lambda_k\}|} >> 1$$

Здесь λ_k *− собственные значения матрицы Якоби* ***J*** *вектор - функции* ***f***

Особенности поведения решений жестких систем

Если представить решение системы в виде разложения по собственным векторам матрицы, то компоненты, соответствующие большим отрицательным собственным значениям, быстро затухают и спустя 5-10 шагов перестают вносить вклад в невязку метода. С точки зрения точности, после «выгорания» быстрых компонент, решение задачи в целом замедляется и шаг сетки, казалось бы, можно увеличить. Однако с увеличением шага условно устойчивый численный метод может потерять устойчивость и быстрые компоненты устремятся в бесконечность, качественно искажая поведение решения в целом. Чтобы такого не произошло, при интегрировании жестких систем следует использовать по возможности абсолютно устойчивые методы или методы с достаточно большой областью устойчивости. Идеальным вариантом являются А-устойчивые методы.

Что известно об устойчивости многошаговых методов

Утверждение 1. Не существует явных А- устойчивых методов.

Утверждение 2 (теорема **Далквиста)**. Не существует линейных А-устойчивых методов выше второго порядка точности.

Метод Гира для решения жестких систем

Идея метода Гира состоит в использовании неявных многошаговых методов вида (сравните с методами Адамса):

$$\frac{a_0 y_k + a_1 y_{k-1} + \cdots + a_m y_{k-m}}{\tau} = b_0 f_k.$$

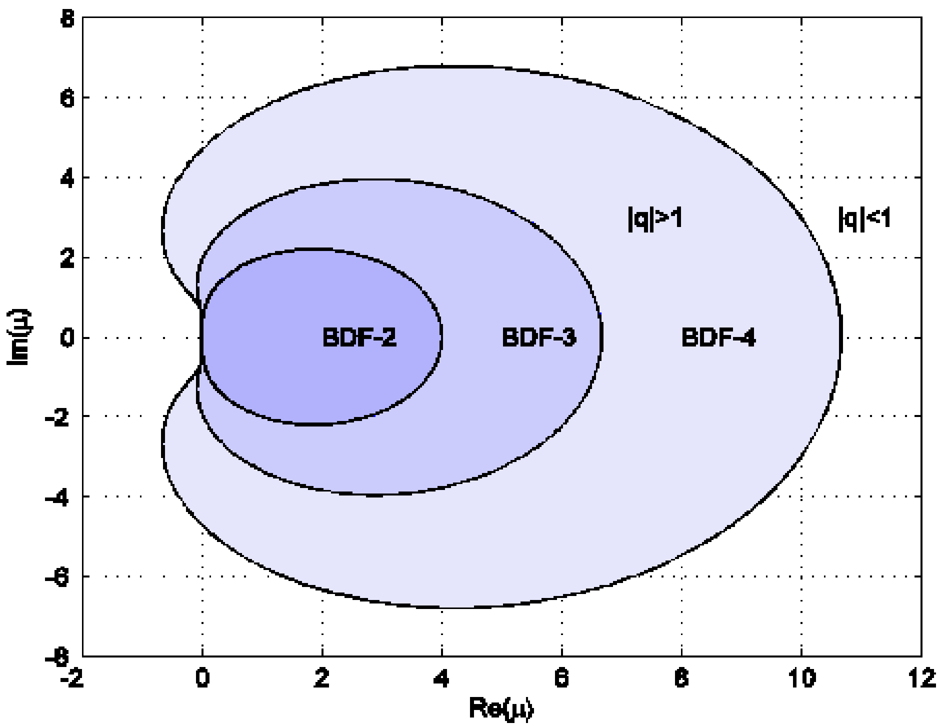
Коэффициенты a_k, k=0,1,…m вычисляются из условия максимального порядка аппроксимация (минимума невязки), что приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
&a_1 + 2a_2 + \ldots + m a_m = -1,\\
&a_1 + 2^2 a_2 + \ldots + m^2 a_m = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_1 + 2^m a_2 + \ldots + m^m a_m = 0.
\end{aligned}$$

$$a_0 = -\sum_{k=1}^{m} a_k$$

Коэффициенты и области устойчивости.

m	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	$\psi(\tau)$
1	1/2	–1/2				$O(\tau)$
2	3/2	–4 / 2	1/2			$O(\tau^2)$
3	11 / 6	–18/6	9/6	–2/6		$O(\tau^3)$
4	25/12	–48/12	36/12	–16/12	3/12	$O(\tau^4)$



Замечание: область устойчивости лежит вне снаружи границ закрашенных областей

Область устойчивости

Областью устойчивости многошагового метода называется множество значений μ, для которых выполняется *условие корней*. Для определения границы области устойчивости из характеристического полинома

$$\boxed{q^k = q^{k-1} + \tau\lambda \sum_{n=0}^{m} b_n q^{k-n}}$$

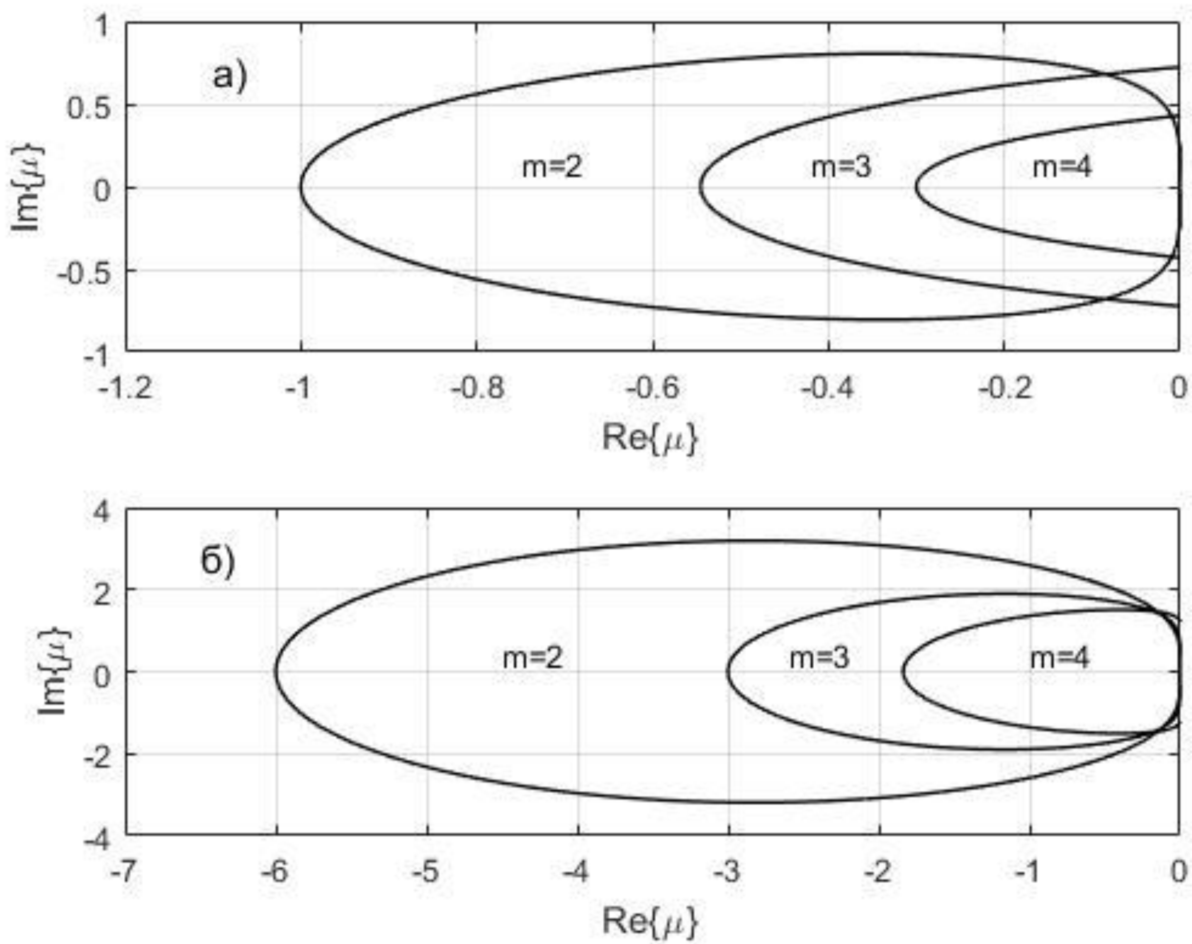
выразим **μ=τλ** **:**

$$\mu = \left(q^k - q^{k-1}\right)\left(\sum_{n=0}^{k} b_n q^{k-n}\right)^{-1}$$

Границе области устойчивости соответствует множество точек где

$$|q| \equiv 1: \quad q = \exp(i\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Границы устойчивости метода Адамса



Границы устойчивости явного (а) и неявного (б) методов Адамса различного порядка точности

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!