

Contents

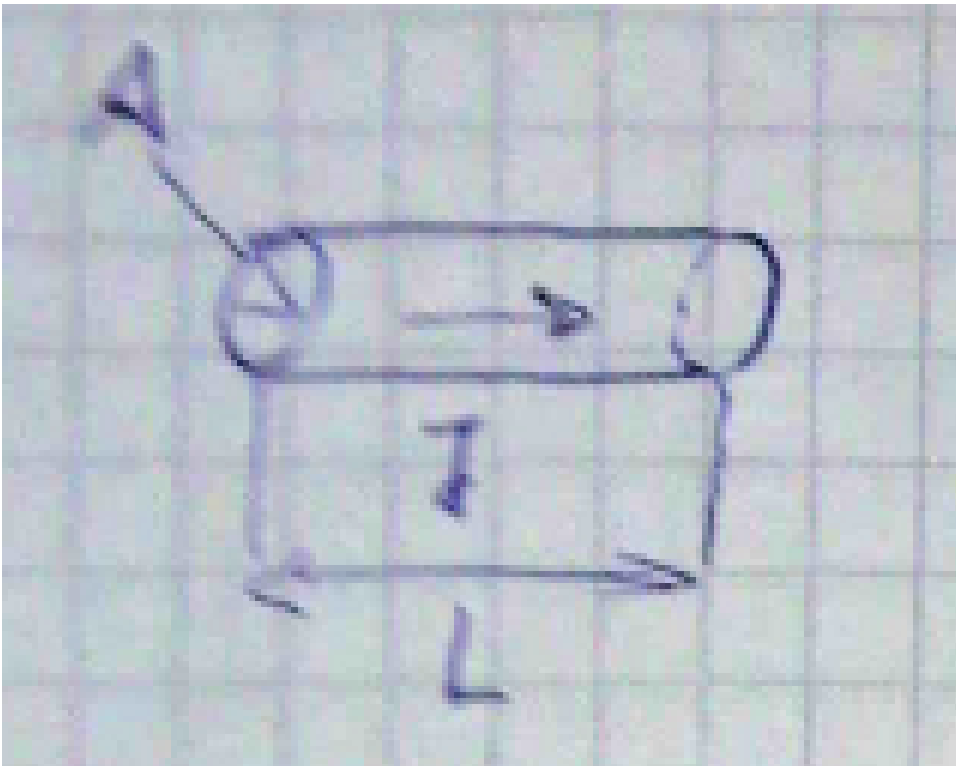
8	Fermi-Gas freier Elektronen	2
8.1	Klassisches Drude Modell	2
8.1.1	Impuls Relaxation	3
8.1.2	Wechselstromleitfähigkeit	5
8.2	Sommerfeld-Theorie der Metalle	7
8.2.1	Spezifische Wärme	10

Chapter 8

Fermi-Gas freier Elektronen

8.1 Klassisches Drude Modell

1. e^- haben keine WW mit dem Gitterpotential
2. e^-e^- Wechselwirkung
3. äußere Felder wirken auf die e^-
4. $e^- \quad \frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}kT$
5. τ Stoßanzahl, Rekombinationszeit $\frac{1}{\tau} \frac{dt}{\tau} =$ Wahrscheinlichkeit für Stöße



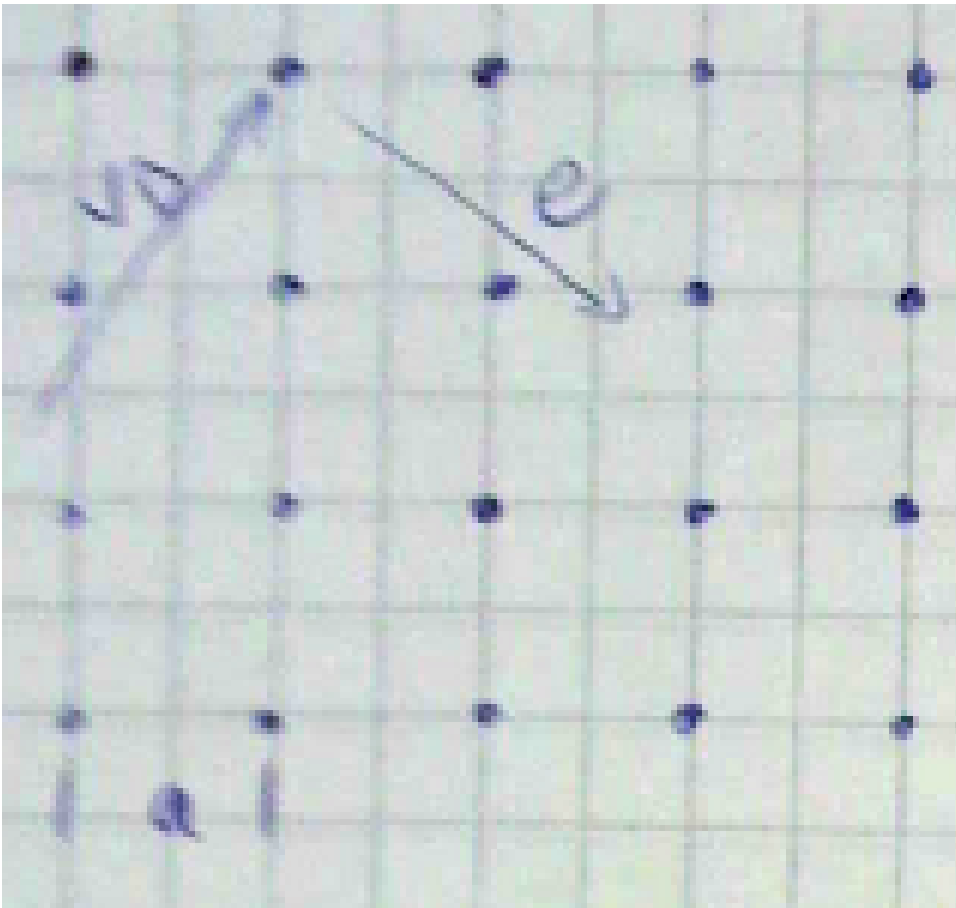
$$\vec{J} = \rho \vec{j}; j = \sigma \vec{E}; j = \frac{I}{A}; E = \frac{V}{L}; \Rightarrow V = RJ; \frac{\rho L}{A}$$

$$j = -ne\vec{v}_D$$

$$\vec{v}|_{t=t_1} = \vec{v}'_{t=t_0} - \frac{e\vec{E}t}{m}$$

$$\vec{v}_D = \langle \vec{v} \rangle = \langle v_0 \rangle - \frac{eE\tau}{m} \quad (8.1)$$

$$= \frac{eE\tau}{m} \quad (8.2)$$



$$\vec{j} = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E}; \sigma = \frac{ne^2\tau}{m}; \tau = \frac{m}{\rho ne^2}$$

$$a \approx 10^{-10}m; \tau = \frac{a}{\sqrt{\langle v \rangle}} \approx \frac{a}{\sqrt{\frac{3k_B T}{m}}} \Rightarrow \tau = 10^{-14}s$$

$$a|_{300K} = n10^{23}; \sigma = 10^5 \frac{1}{\Omega cm}$$

$$\sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \approx 10^5 \frac{m}{s}; l = \frac{\langle v^2 \rangle}{\tau} \approx 10 \cdot 10^{-10}m$$

$$l|_{4K} \approx 100\mu m$$

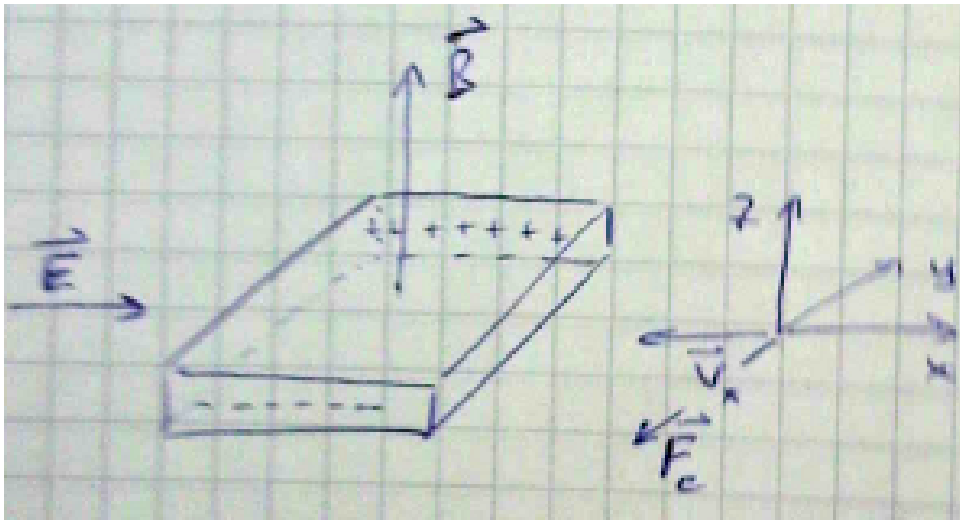
8.1 Impuls Reelaxation

$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} \Rightarrow \vec{j} = -\frac{ne\vec{p}}{m}$ Stoßwahrscheinlichkeit: $\frac{dt}{\tau}$ keine Stoßwahrscheinlichkeit $1 - \frac{dt}{\tau}$

$$p(t+dt) = (1 - \frac{dt}{\tau})[p(t) + F(t)dt + \mathcal{O}(dt^2)] \quad (8.3)$$

$$\approx p(t) - \frac{dt}{\tau}p(t) + F(t)dt + \mathcal{O}(dt^2) \quad (8.4)$$

$$\frac{dp(t)}{dt} = -\frac{p(t)}{\tau} + F(t)$$

Hall-Effekt

$$\vec{F} = -eE - e\vec{v} \times \vec{B}$$

$$E_y = v_x B_z = -\frac{1}{en} j_x B_z = R_H j_x B$$

$$R_H = -\frac{1}{en}$$

Kupfer Cu - $R_H = -5,3 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{c}$ Aluminium Al - $R_H = +9,9 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{c}$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -eE - \frac{e}{m} \vec{p} \times \vec{B} - \frac{\vec{p}}{\tau} = 0 \quad (8.5)$$

$$0 = -eE_x - \frac{e}{m} p_y B - \frac{p_x}{\tau} \quad (8.6)$$

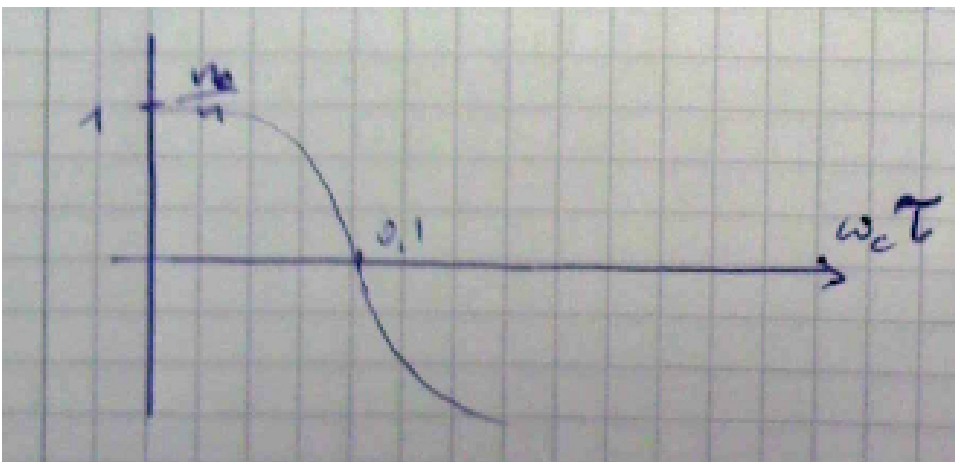
$$0 = -eE_y - \frac{e}{m} p_x B - \frac{p_y}{\tau} \quad (8.7)$$

$$\Rightarrow \sigma E_x = \omega_c \tau j_y + j_x$$

$$\Rightarrow \sigma E_y = -\omega_c \tau j_x + j_y$$

Zyklotronfrequenz

$$\omega_c = \frac{e}{m} B$$



Laut Drude sollte $\omega_c \tau \propto B$ sein, ist es aber nicht (warum, nicht kapito)

8.1 Wechselstromleitfähigkeit

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\vec{p}}{\tau} - e\vec{E}; E(t) = \text{Re}\{E(\omega)e^{-i\omega t}\}$$

Versuch der Lösung

$$p(t) = -\text{Re}\{p(\omega)e^{-i\omega t}\}$$

$$-i\omega\vec{p}(\omega) = -\frac{\vec{p}(\omega)}{\tau} - e\vec{E}; \vec{j} = -\frac{ne}{m}\vec{p} \Rightarrow j(t) = \text{Re}\{j(\omega)e^{-i\omega t}\}$$

$$j(\omega) = -\frac{ne}{m}p(\omega) = \frac{ne^2}{m} \frac{\vec{E}(\omega)}{\frac{1}{\tau} - i\omega} \equiv \sigma(\omega)\vec{E}(\omega)$$

$$\boxed{\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}}$$

Magnetfeld $H(\omega) \approx 0$; $\frac{v}{c} \ll 1$; $v_D \approx 10^{-3} \frac{m}{s}$

Maxwell-Gleichungen $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \gg e$ Ampersche Gesetz: $\vec{\nabla} \times \vec{H} = j + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\nabla^2 E = i\omega\mu_0\sigma\vec{E} - i\omega\epsilon_0\vec{E} \quad (8.8)$$

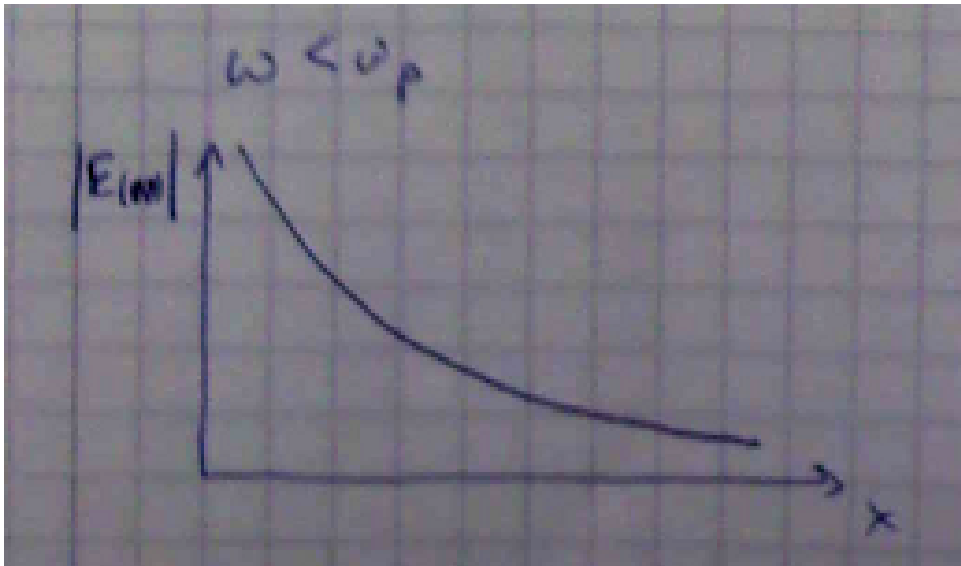
$$= \omega^2\epsilon_0\mu_0\epsilon(\omega)\vec{E} \quad (8.9)$$

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{i\sigma(\omega)}{\epsilon_0\omega}$$

1. hohe Frequenzen $\sigma(\omega) = \omega_0 \frac{1+i\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2} \approx \sigma_0 \frac{i}{\omega\tau}$; $\Rightarrow \epsilon(\omega) = 1 - \frac{\sigma_0}{\epsilon_0\tau\omega^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$

Die Plasmafrequenz, ist gerade die Frequenz wo die e^- dem Feld noch folgen können.

$$\omega_p = \frac{ne^2\tau}{m\epsilon_0\tau} = \frac{ne^2}{m\epsilon_0}$$



2. kleine Frequenzen $\omega\tau \ll 1$

$$\sigma(\omega) = \sigma_0 \frac{1 + i\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} = \sigma_0(1 + i\omega\tau)$$

$$\epsilon(\omega) = 1 + \sigma(mega) \frac{1}{\epsilon_0\omega} = 1 + \sigma_0 \left(\underbrace{\frac{i}{\epsilon_0\omega}}_{\epsilon_2} - \underbrace{\frac{\tau}{\epsilon_0}}_{\epsilon_1} \right)$$

$$\epsilon(\omega) = i\epsilon_2$$

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon(\omega)} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \omega}} \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{s}(1+i)$$

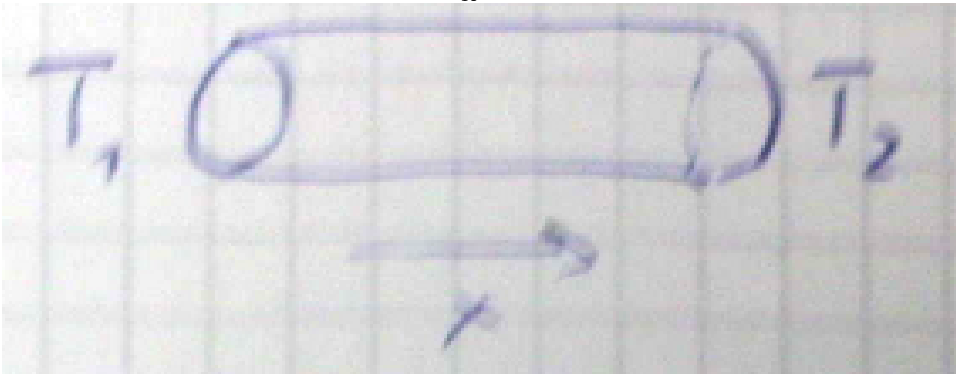
$$s = c \sqrt{\frac{2\epsilon_0}{\sigma_0 \omega}}$$

s ist der Skin oder Leitschichtdicke (Dimension Länge) oder der Skin-Effekt. Der Strom fließt nun noch an der Oberfläche des Leiters.

1853 Widemann-Franz. Die Wärmeleitfähigkeit und die Leitfähigkeit ist zur Temperatur proportional:

$$\frac{\kappa}{\sigma} = LT$$

L -Loreznzahl zwischen 2, $2 - 2,8 \cdot 10^{-3} \frac{\omega \Omega}{K^2}$



$$j^T = \kappa \nabla T$$

$$j_x^T = \left\langle \frac{1}{2} v_x [u_x(x - v\tau)i - u_c(x + v\tau)] \right\rangle \quad (8.10)$$

$$= n \langle v_x^2 \rangle \tau \frac{du_e}{dT} \left(-\frac{dT}{dx} \right) \quad (8.11)$$

$$c_v = n \frac{du}{dT}; \langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$$

$$j^T = \underbrace{\frac{1}{3} v^2 \tau c_v}_{\kappa = \frac{1}{3} v^2 \tau c_v = \frac{1}{3} l v c_v}$$

$$LT = \frac{\kappa}{\sigma} = \frac{c_v}{ne^2} \frac{mv^2}{3}$$

$$\Rightarrow c_v = \frac{3}{2} n k_B$$

$$L = \frac{\kappa}{\sigma} \frac{3}{2} n k_B \frac{k_B^2}{K^2} T = 1,1 \cdot 10^{-3} \frac{\omega \Omega}{K^2} \frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} k_B T$$

tatsächlich: c_v^2 Faktor 100 kleiner, v^2 ist ein Faktor 100 größer

8.2 Sommerfeld-Theorie der Metalle

Klassische, Ideales Gas Maxwell-Boltzmann Verteilung

$$f_{MG}(v) = n \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{k_B T}}$$

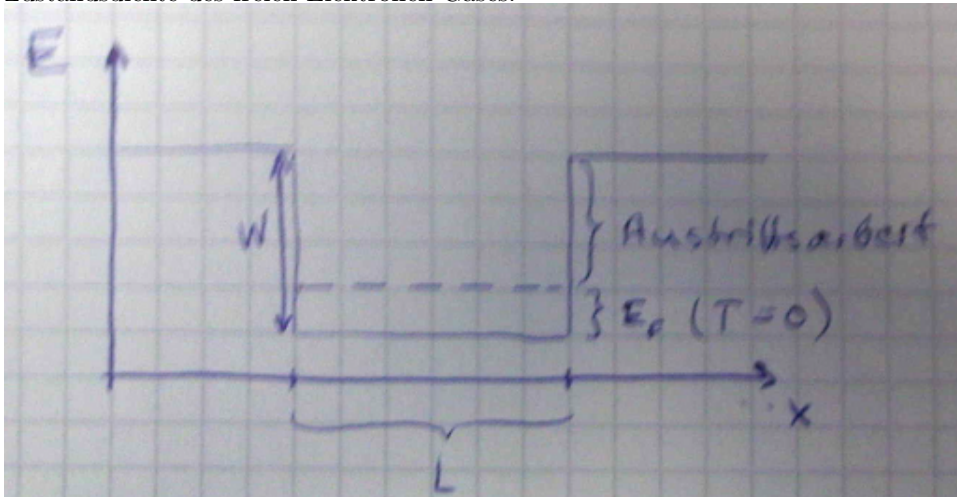
Pauliprinzip:

Fermi Dirac Verteilung

$$f_{FD} = f(v) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar} \right)^3 \frac{2}{e^{\frac{mv^2/2 - \mu}{k_B T}} + 1}$$

$$n = \int_V f(v) dV; k_B T_0 = \nu$$

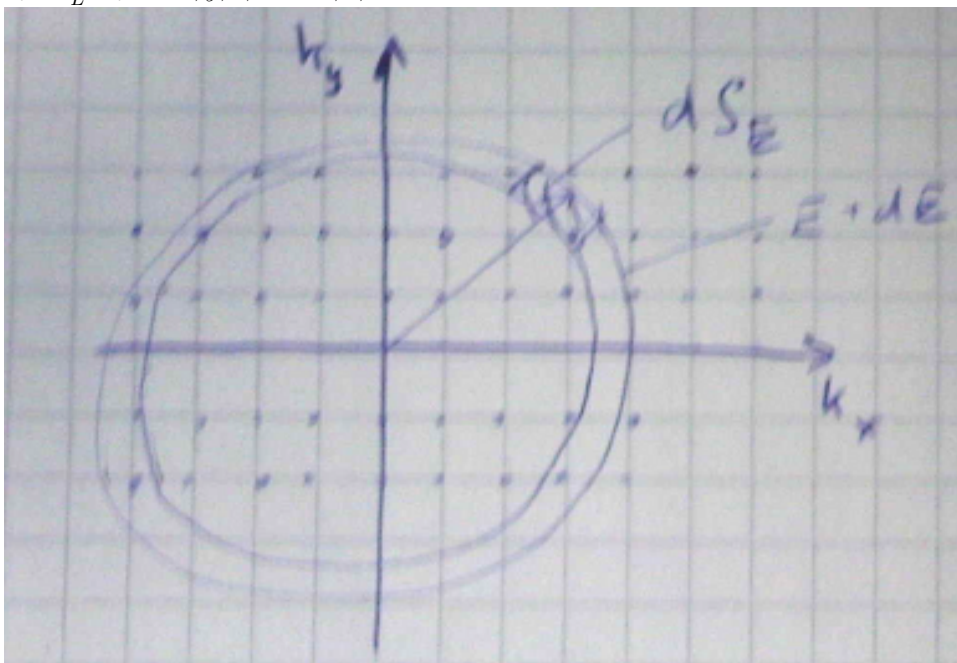
Zustandsdichte des freien Elektronen Gases:



N Elektronen SchrGl: $-\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}); \psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\vec{k}\vec{r}}; 1 = \int_V |\psi(\vec{r})|^2 dV; E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m};$

Periodizitätsbedingung: $\psi(x, y, z) = \psi(x + L, y, z)$

$$k_i = \frac{2\pi}{L} m_i \quad i = x, y, z; m = 1, 2, 3$$



$$\mathcal{D}(E) dE = \frac{V}{(2\pi)^3} \int_E^{E+dE} d^3k = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{1}{\hbar} \int_{E=\text{const.}} \frac{dS_E}{v_g}$$

$$\rho_x = \frac{V}{(2\pi)^3}$$

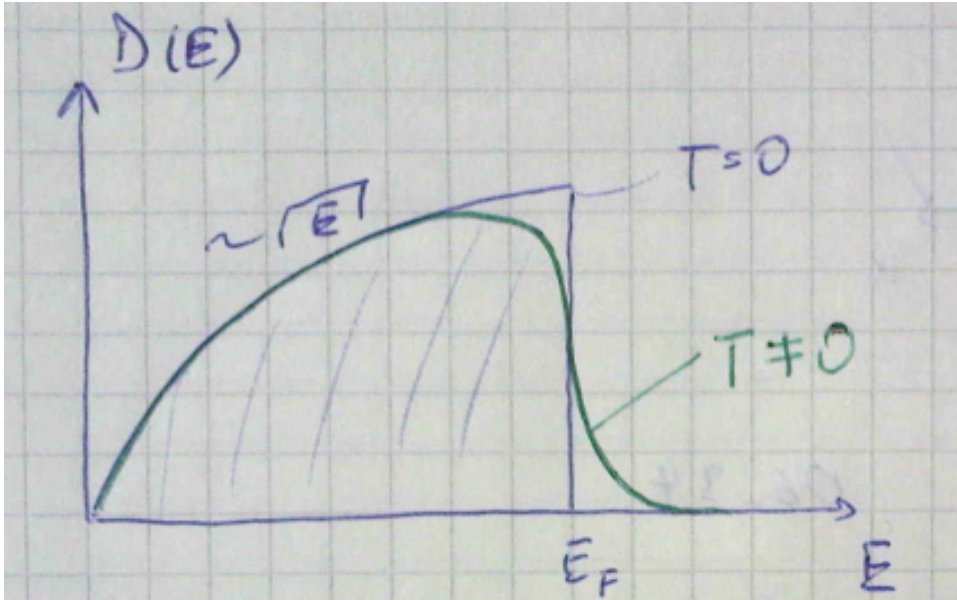
Gruppengeschwindigkeit: $v_g = \frac{\partial E}{\partial(\hbar k)} = \frac{\hbar k}{m}$

Randbemerkung: $\frac{1}{v_g} \int dS_E = \frac{1}{v_g} - 4\pi k^2$

$$\mathcal{D}_{\uparrow}(E) = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{1}{\hbar} \frac{m}{\hbar k} 4\pi k^2 = \frac{(2m)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^2} V \sqrt{E}$$

Volumen normierte und mit $2 e^-$ besetzte Zustandsdichte:

$$\mathcal{D}(E) = \frac{1}{V} (\mathcal{D}_{\uparrow} + \mathcal{D}_{\downarrow}) = \frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^2} \sqrt{E}$$

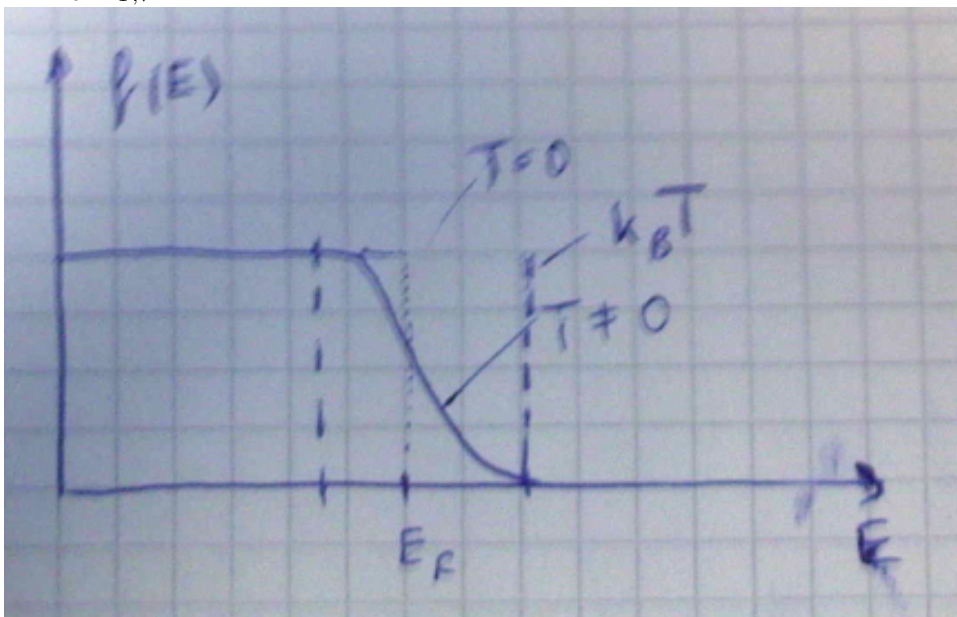


$$\rho_k^{\infty} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^{\infty}$$

$$D^{2D} = \frac{m}{\pi \hbar^2}; D^{1D}(E) = \frac{1}{\pi \hbar} \sqrt{\frac{2}{E}}$$

$$f(E, T=0) = \begin{cases} 1 & E < \mu \\ \frac{1}{2} & E = \mu \\ 0 & E > \mu \end{cases}$$

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} = E_F(T=0)$$



$$n = \frac{N}{V} = \int_0^{\infty} \mathcal{D}(E) f(E, 0) dE = \int_0^{E_F}$$

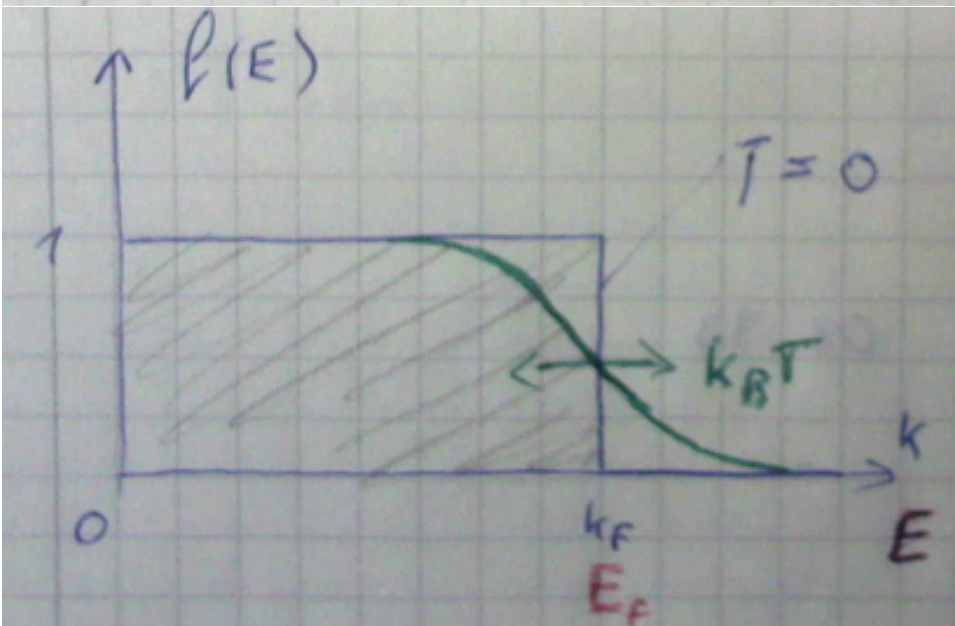
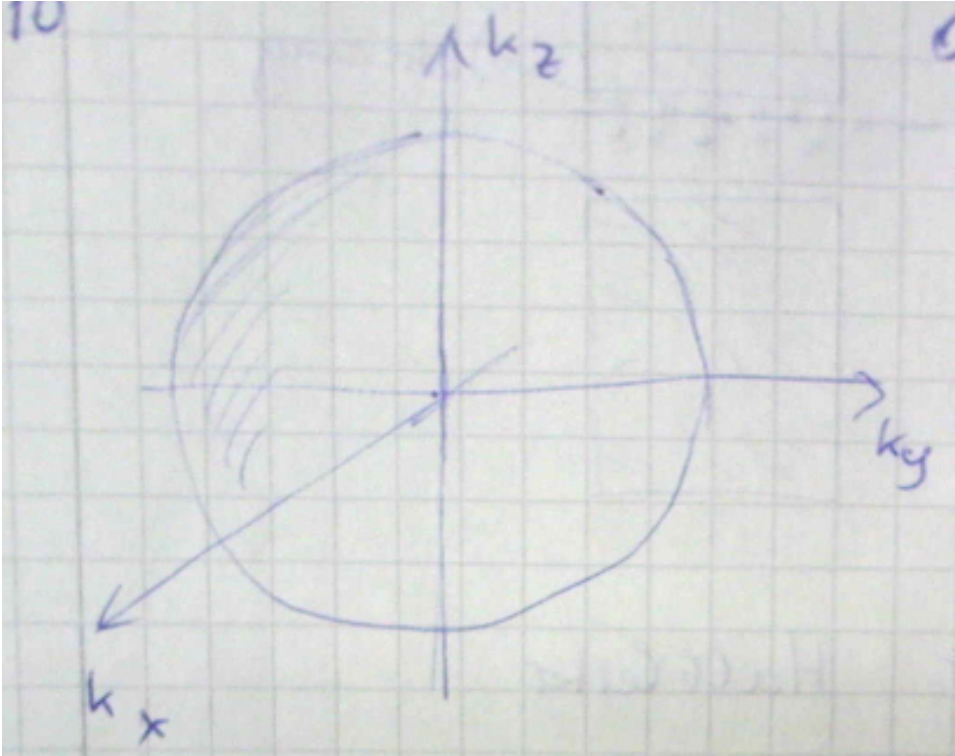
$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}$$

Fermi-Energie: $E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}$ mit Elektronendichte $n = \frac{N}{V}$ Fermi-Wellenvektor $k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$ Fermi Impuls: $p_F = \hbar k_F$ Fermi-Geschwindigkeit $v_F = \frac{\hbar}{m} (3\pi^2 n)^{1/3}$ Fermi Temperatur $T_F = \frac{E_F}{k_B}$

	$n/10^6 \text{ m}^{-3}$	$k_f/\text{\AA}^{-1}$	$v_F/10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	E_F/eV	T/T_F
Al	18,1	1,8	2,0	11,7	135000
Cu	8,5	1,4	1,6	7,0	82000
Ag	5,9	1,2	1,4	5,5	64000

$$\mu(T) \approx E_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right]$$

TODO Einleitende Abbildungen möglich am anfang von Sommerfeldtheorie einfügen



Kurze Einleitung was die Quantennatur der Theorie ist (Pauliprinzip, Besetzung in der Fermikugel, nur an der Fermikante befindliche elektronen sind relevant für verschiedene Effekte)

8.2 Spezifische Wärme

$c_V = \frac{\partial}{\partial T} U(T)$ mit U als innere Energie

$$c_V = \frac{\partial}{\partial T} U(T) \quad (8.12)$$

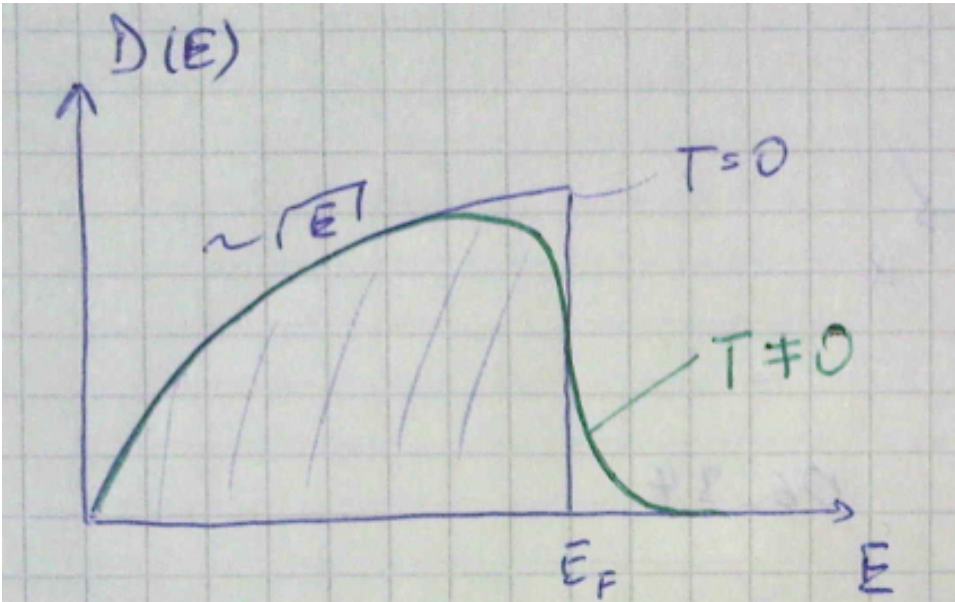
$$= \frac{\partial}{\partial T} \int_0^\infty E D(E) f(E, T) dE \quad (8.13)$$

$$= \frac{\partial}{\partial T} \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{E^{3/2} dE}{e^{\frac{E-\mu}{k_B T}} - 1} \quad (8.14)$$

$$D(E) = \frac{(2m)^{3/2} \sqrt{E}}{2\pi^2 \hbar^3} \quad (8.15)$$

$$= \frac{3}{2} n \sqrt{E} \left[\frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3} \right]^{-3/2} \quad (8.16)$$

$$= \frac{3}{2} \frac{n}{E_F} \left(\frac{E}{E_F} \right)^{1/2} \quad (8.17)$$



'grobe'-Rechnung:

$$U(0) = \int_0^{E_F} E D(E) dE \quad (8.18)$$

$$= \frac{3}{2} \frac{n}{E_F^{3/2}} \frac{2}{5} E_F^{5/2} \quad (8.19)$$

$$= \frac{3n}{5} E_F \quad (8.20)$$

$$= \frac{3n}{5} k_B T \quad (8.21)$$

Temperaturabhängige Anteil der inneren Energie:

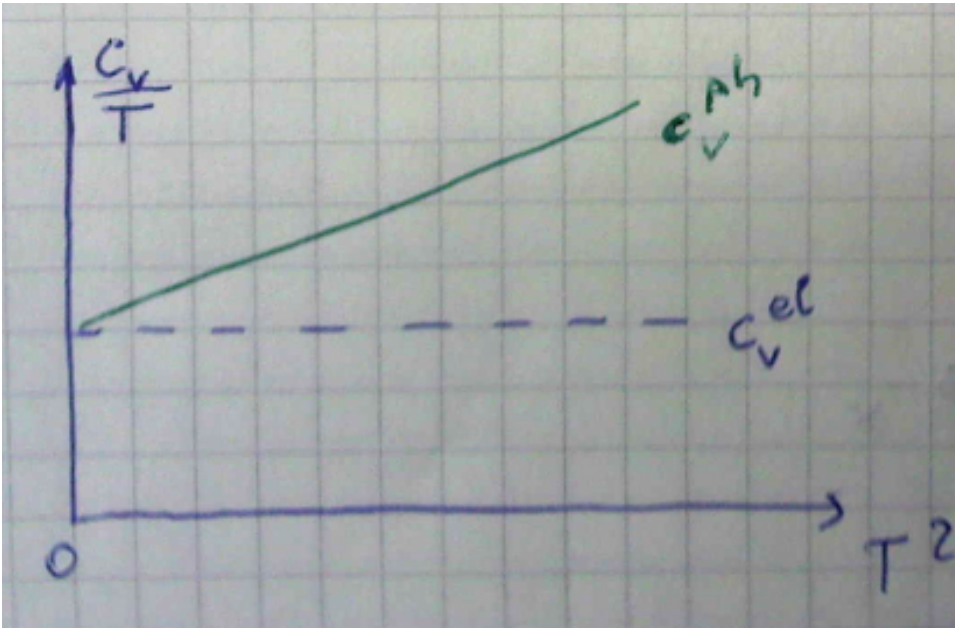
$$\delta U(T) = U(T) - U(0) \approx n k_B T \frac{T}{T_F} = n k_B \frac{T^2}{T_F}$$

$\frac{T^2}{T_F}$ der Bruchteil der Elektronen der die thermische Energie $k_B T$ pro Elektron aufnehmen kann

$c_V \approx \frac{\partial}{\partial T} [\delta U(T)] = \frac{2n k_B T}{T_F}$ ist um Faktor $\frac{T}{T_F}$ kleiner als mit einem klass. Gas.

exaktere Näherungslösung: $U(T) \approx U(0) + \frac{\pi^2}{6} D(E_F) (k_B T)^2$; $c_V = \gamma T$; mit Sommerfeldkonstanten $\gamma = \frac{\pi^2 3n k_B}{3T_F^2}$
Die gesamte spezifische Wärme:

$$c_V^{\text{ges}} = c_V^{\text{el}} + c_V^{\text{ph}} = \gamma T + \begin{cases} \beta T^3, & T \ll \theta_D \\ 3R = \text{const}, & T > \theta_D \end{cases}$$



Offene Fragen nach Sommerfeld-Modell:

1. Warum kollidieren e^- -nen nicht mit Ionen?
2. Warum teilen/unterscheiden wir zwischen Metalle, Halbleiter, Isolatoren?
3. Warum wechselwirken e^- -nen nicht mit einander?

Die ersten zwei Fragen sind von Bloch-Theorie beantwortet. Die dritte Frage - Fermi-Flüssigkeiten (komplizierte QM-Theorie)