

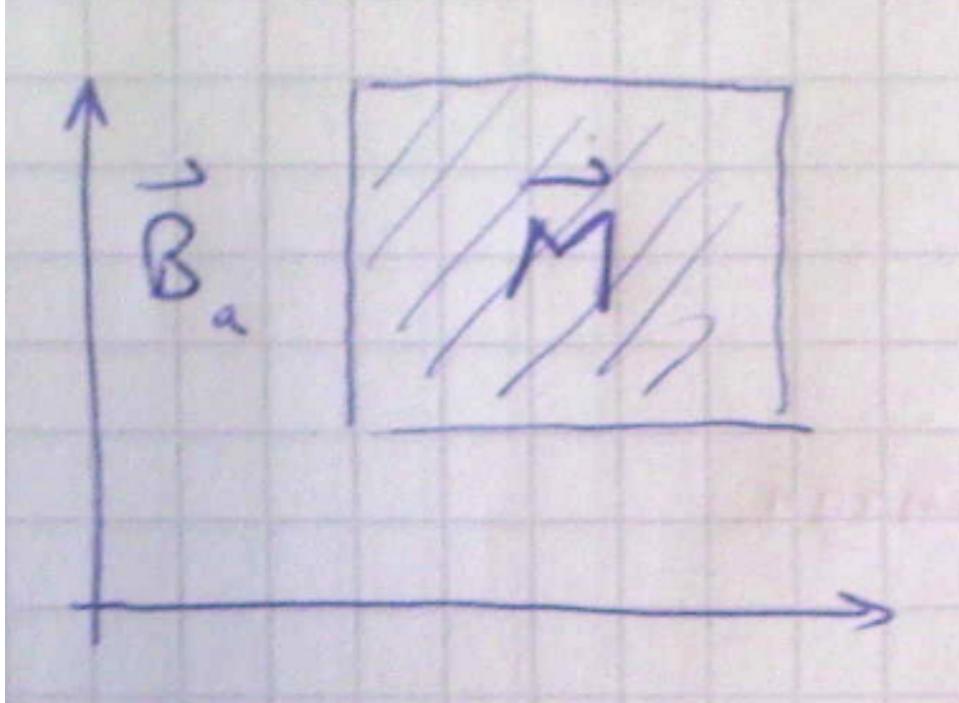
# Contents

<b>12 Magnetismus</b>	<b>2</b>
12.1 Diamagnetismus . . . . .	3
12.1.1 Diamagnetismus freier Elektronen: Landau-Diamagnetismus . . . . .	3
12.2 Paramagnetismus . . . . .	4
12.2.1 Paramagnetismus von Ionen . . . . .	4
12.3 Kühlung durch adiabatische Entmagnetisierung . . . . .	6
12.4 Ferrormagnetismus . . . . .	6

## Chapter 12

# Magnetismus

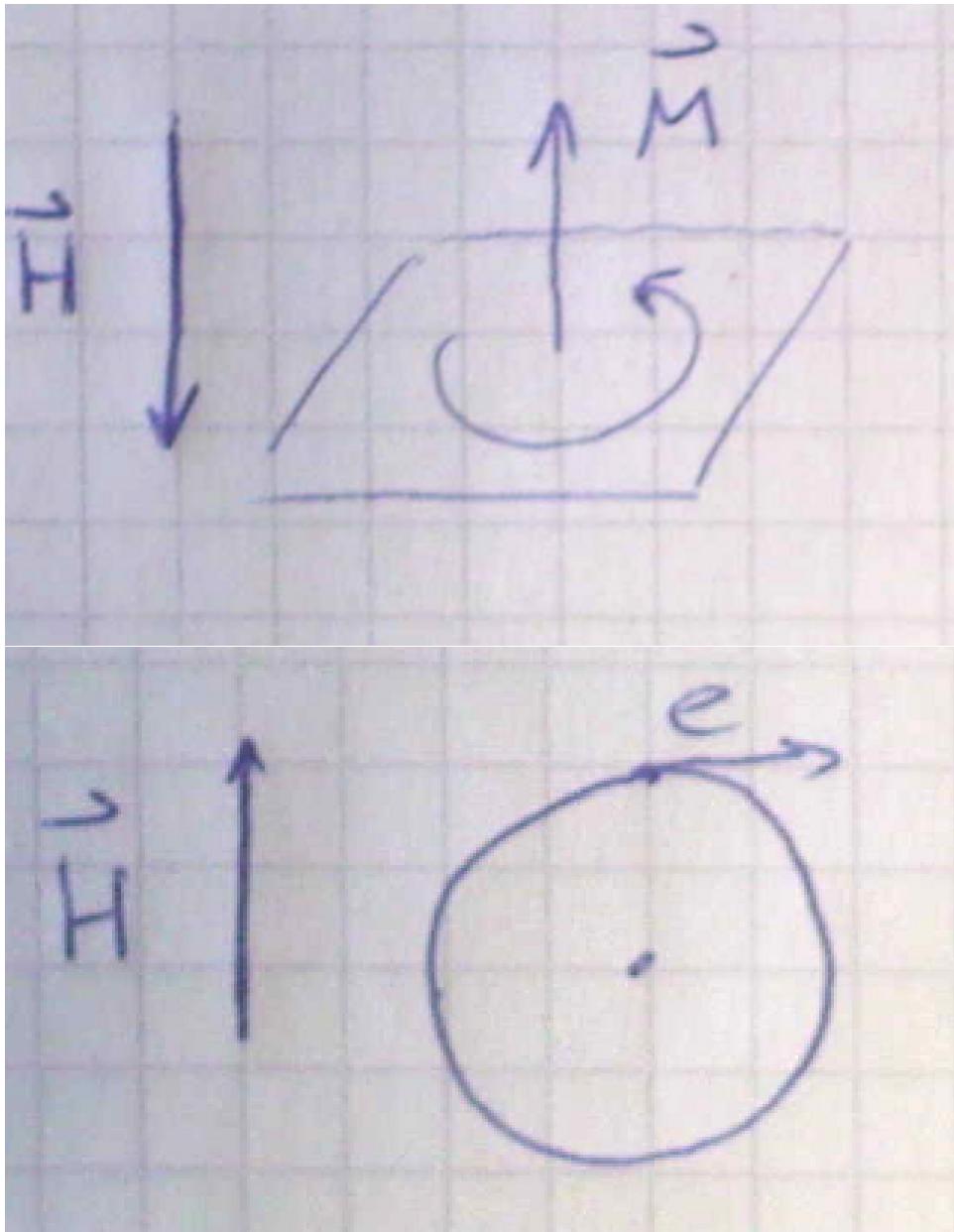
Die Magnetisierung  $\vec{M}$  ist das magnetische Moment pro Volumen.  $\vec{M} = n\vec{\mu}$ ;  $\mu$  ist mittleres Dipolmoment.



Magnetische Suszeptibilität:  $[\chi]$  Tensor

$$[\chi] \equiv \chi = \frac{\vec{M}}{\vec{H}} = \mu_0 \frac{\vec{M}}{\vec{B}}$$

Skalar (Vereinfacht)  $\chi = \frac{M}{H}$ ;  $\chi < 0$ : diamagnetische Festkörper;  $\chi > 0$ : paramagnetische Festkörper



$$\text{Lenz-Regel } I \propto \frac{d\phi}{dt}$$

## 12.1 Diamagnetismus

Diamagnetismus ist eine Schwächung des äußeren Feldes. Klassische (Langevin) und quantenmechanische Behandlung. Beide kommen zu gleichen Resultaten.

$$\chi_d|_{\text{Atome}} \propto 10^{-6} \text{ bis } 10^{-7}$$

$$\chi_a|_{\text{Atome}} = -\frac{\hbar\mu_0 e^2}{6m_e} Z \langle r^2 \rangle$$

mit  $Z$  Elektronenzahl und  $\langle r^2 \rangle$  mittlerer abstandsquadrat der e-nen

## 12.1 Diamagnetismus freier Elektronen: Landau-Diamagnetismus

1930 Landau-Quantisierung  $\frac{\hbar(k_x^2 + k_y^2)}{2m_e} = (l + \frac{1}{2})\hbar\omega_c; l = 0, 1, 2, 3, \dots$  B-Feld in z-Richtung.  
mit  $\chi = -\frac{\partial^2 F}{\partial H^2}$

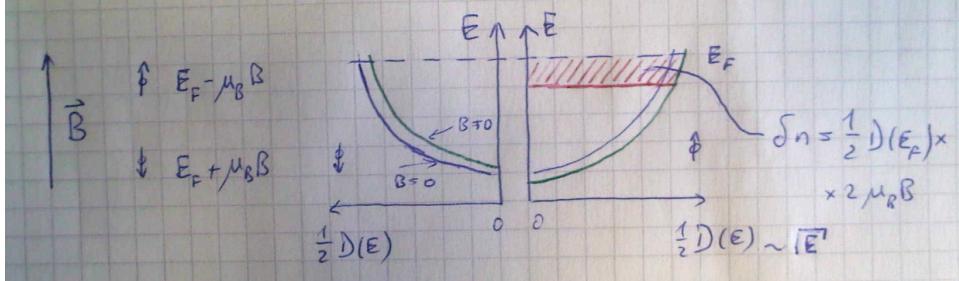
$$F = k_B T \ln \sum_{\text{alle Zustände}} e^{-\frac{iE}{k_B T}}$$

$$\chi_d|_{\text{Landau}} = -\frac{1}{3}\mu_B^2\mu_0 D(E_F) = -\frac{1}{3}\mu_B^2\mu_0 \frac{3}{2} \frac{n}{E_F} = -\frac{n}{2E_F}\mu_0\mu_B^2 \propto 2 \cdot 10^{-7}$$

mit dem Borsches Magneton  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$  und Zustandsdichte  $D(E_F)$

## 12.2 Paramagnetismus

Paramagnetismus freier e-nen ist allgemein bekannt als Paulische Spin Suszeptibilität.



Roter Bereich  $\delta n$  kommt dazu, es gibt insgesamt mehr Elektronen

$$\delta n = \frac{1}{2}D(E_F)2\mu_B B$$

$$M = \delta n \mu_B = \mu_B^2 B D(E_F)$$

$$\chi_P|_{\text{Pauli}} = \mu_B \frac{M}{B} = \mu_0 \mu_B^2 d(E_F) = -3\chi_d|_{\text{Landau}}$$

$$\boxed{\chi_P|_{\text{Landau}} = -\frac{1}{3}\chi_d|_{\text{Pauli}}}$$

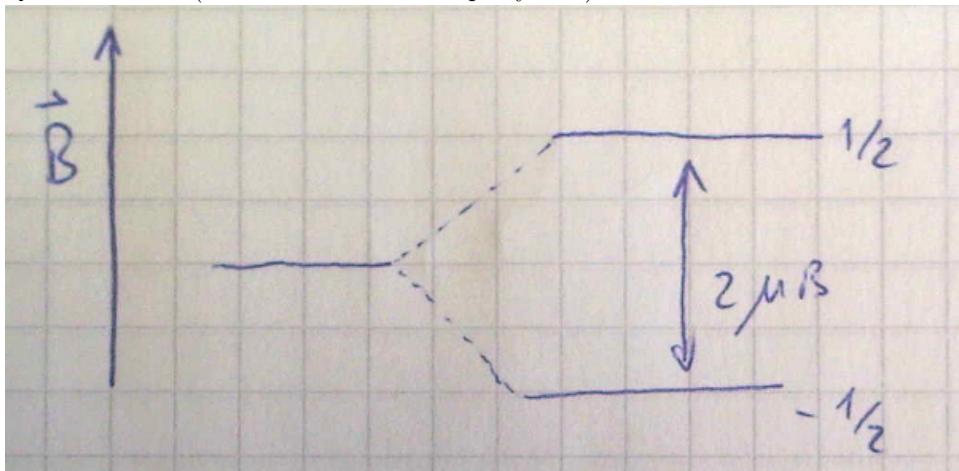
## 12.2 Paramagnetismus von Ionen

Aus der Atomphysik:  $\vec{\mu} = -g\mu_B \vec{J}'$  mit  $g$  Lande-Faktor  $\vec{J}'\hbar\vec{J}$  Gesamtdrehimpuls des Atoms

$$\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$$

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

$L$ -Bahndrehimpulsquantenzahl und  $S$ -Spinquantenzahl  
Quantentheorie ( nur für Zwei-Niveau-Spinsystem)



$$V = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \underbrace{m_J g \mu_B}_\mu B$$

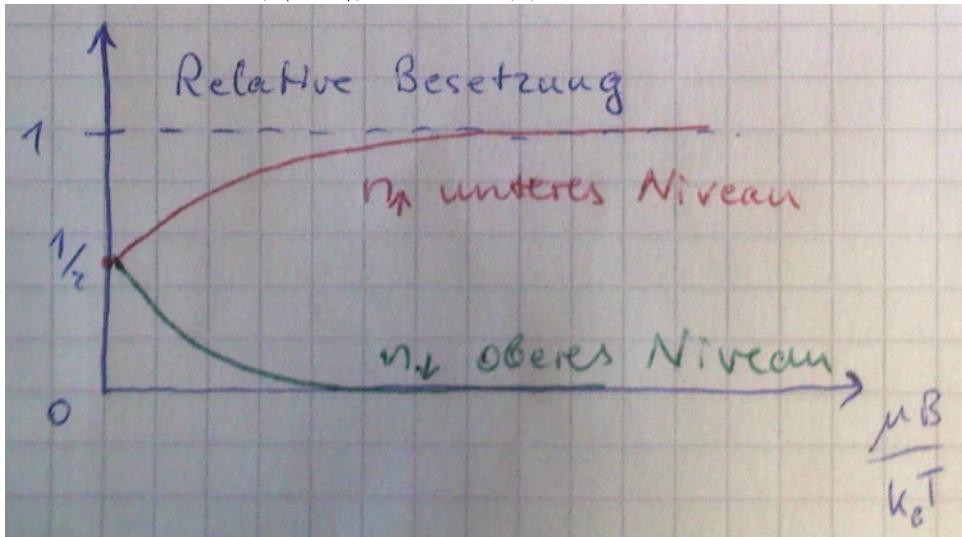
mit  $m_J = \pm \frac{1}{2}$ ;  $g = 2$ ;  $V = \pm \mu_B B$

Im Gleichgewicht für  $T \neq 0$ ; Faktor  $x = \frac{\mu B}{k_B T}$

$$\frac{n_\uparrow}{n} = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}$$

$$\frac{n_\downarrow}{n} = \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Magnetisierung  $M = (n_\uparrow - n_\downarrow)\mu = n\mu \tanh(x)$



für  $x \ll 1$  (hohe T)  $\tanh(x) \propto x$

$$M \approx n\mu \frac{\mu B}{k_B T}$$

Curie-Gesetz:

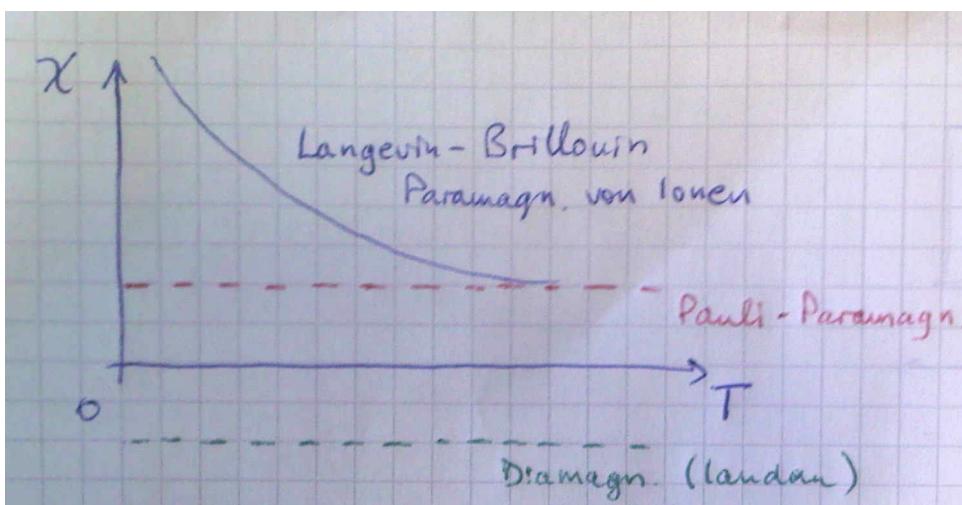
$$\chi_{pa} \approx \frac{n\mu^2}{k_B T} \mu_0 \approx \frac{1}{T}$$

Ein Atom mit Gesamtdrehimpulsquantenzahl  $J$  besitzt in einem Magnetfeld  $(2J+1)$  äquidistante Energieniveaus

$$M = ngJ\mu_B B_J(x)$$

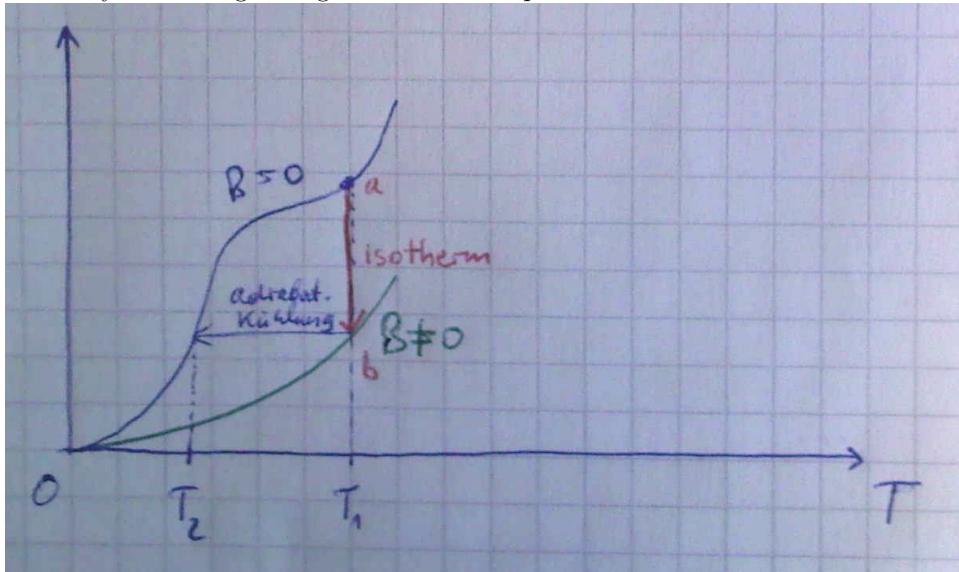
mit  $B_J(x)$  Brillouin-Funktion für  $x \ll 1$

$$\chi_{pi} = \mu_0 \frac{\mu}{B} = nJ(J+1) \frac{g^2 \mu_B}{3k_B T} \propto \frac{C}{T}$$



## 12.3 Kühlung durch adiabatische Entmagnetisierung

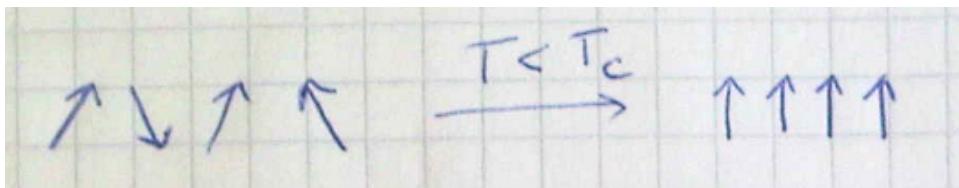
von Debye 1926 vorgeschlagen und 7 Jahre später realisiert.



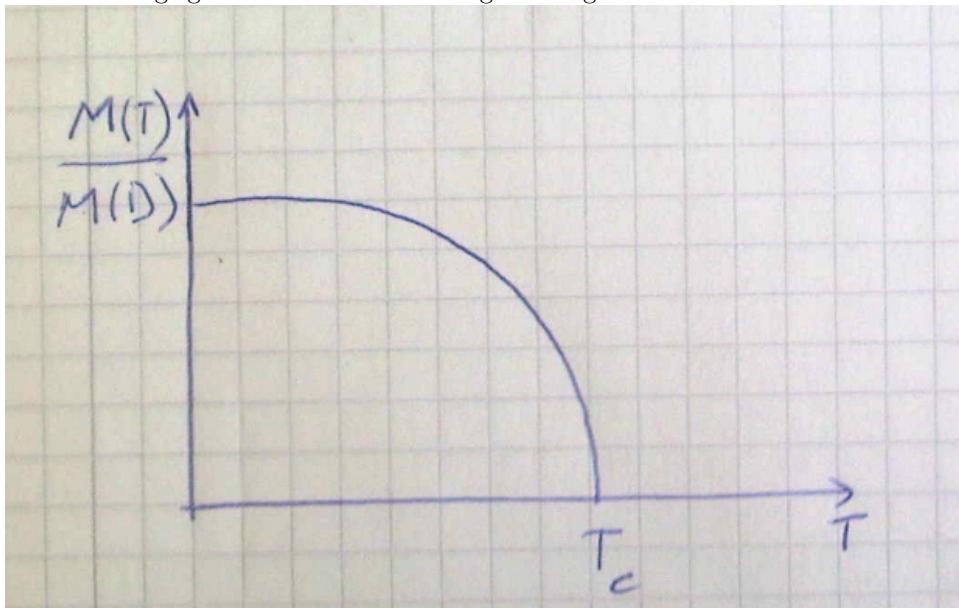
a - gute Wärmekontakt bis  $mK$  b - Probe von Umgebung isoliert  $\approx 10\mu K$  Bei Cu Kernentmagnetisierung

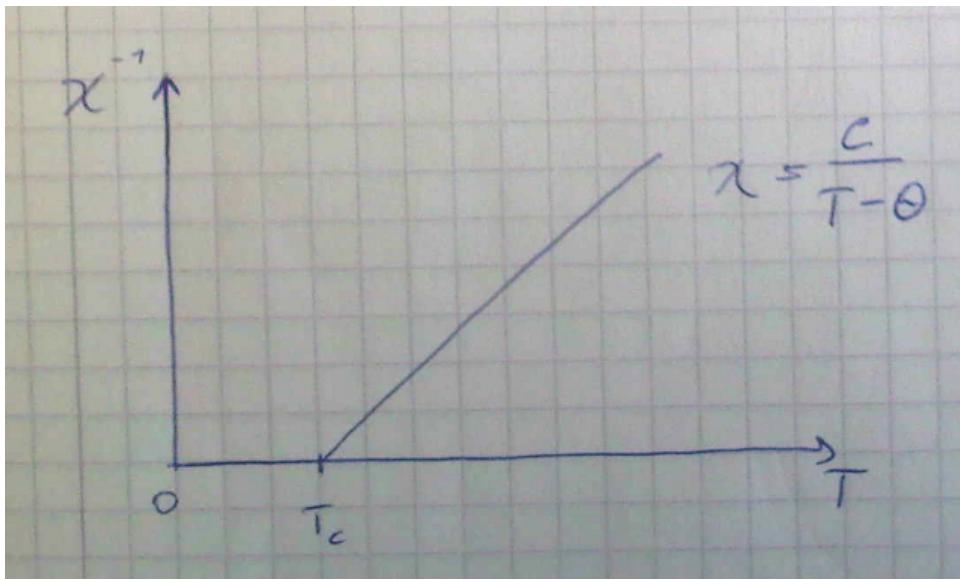
## 12.4 Ferrormagnetismus

- Spontane Magnetisierung unterhalb einer kritischen Temperatur  $T_C$



Grund: Energiegewinn durch Ausrichtung der magnetischen Momente





## 1) Molekularfeldänderung

$$B_{eff} = B_A + B_H = B_a + \lambda \mu_0 M$$

$\lambda$  ist die Molekularfeldkonstante mag WW für 2 Spins:  $\approx 0.1T$   $B_H \approx 1000T \Rightarrow$  nicht durch die mag WW der Spins

Magnetisierung wird durch Molekularfeld getrieben

$$M_S = n g \mu_B J B(x), \quad x = \frac{g \mu_B \lambda \mu_0 M_S}{k_B T}$$

Curie-Konstante

$$T_C = \frac{n g^2 J (J+1) \mu_B^2 \lambda}{k_B} = C \cdot \lambda$$

$$\Theta = \lambda \cdot C$$

mit  $\Theta$  paramagn Curie Temp.

$$\text{Fe: } \lambda \approx 5000, \quad M_S = 1,6 \cdot 10^6 \frac{A}{m} \quad B_M \approx 1000T$$

$$p^2 = g^2 s(s+1)$$

## 2) Austausch WW zwischen lokalen orten Elektronen

System 2 weiterer Ionen mit 2E (Isolator)

$$\psi(r_1, s_1; r_2, s_2) = \psi(r_1, r_2) \psi(s_1, s_2)$$

$$\psi_S = A[\psi_a(r_1)\psi_b(r_2) + \psi_b(r_1)\psi_a(r_2)]$$

Symmetrische Ortswellenfunktion  $\Rightarrow$  Spin Wellenfkt antisymmetrisch

$$\psi_A = A[\psi_a(r_1)\psi_b(r_2) - \psi_b(r_1)\psi_a(r_2)]$$

Antisymmetrische Ortswellenfunktion  $\Rightarrow$  Spin Wellenfkt symmetrisch  
WW Potential des Gesamtzustandes

$$V(r_1, r_2) = \tilde{V}(r_2, r_1)$$

Austauschkonst J

$$J = E_S - E_A \approx 4A^2 \int \psi_a^*(r_1) \psi_b^*(r_2) \tilde{V}(r_1, r_2) \psi_b(r_1) \psi_a(r_2) dV_1 dV_2$$

Kinetische Energie des e-trons wird vernachlässigt

- $J > 0$  - parallele Ausrichtung des Spins
- $J < 0$  - antiparallele Ausrichtung des Spins

$$|J| = \frac{3k_B\Theta}{zs(s+1)}$$

$$\tilde{V}_{el}(r_1, r_2) = \frac{e^2}{(4\pi\epsilon_0|r_1 - r_2|)}$$

Coulomb WW versucht die Spins auszurichten.  $V_i(r_1, V_i(r_2))$ , attraktiv, negative Beitrag zu J relative Größe entscheidet über Ausrichtung der Spins

Alternativ Pauliprinzip

$S_1, S_2$  Spinoperatoren der Elektronen

$$S = |s_1 + s_2|^2 = \frac{3}{2} + 2s_1s_2$$

$s_1s_2 = -\frac{3}{4}$   $S = 0$  Singulett Zustand  $s_1s_2 = -\frac{1}{4}$   $S = 1$  Tripletzt Zustand  
Hamilton Operator für Zustand Spin System

$$H_{\text{spin}} = \frac{1}{4}(E_S + 3E_A) - (E_S - E_A)s_1s_2 \quad (12.1)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4}(E_S + 3E_A)}_{=0 \text{ bei geeigneter Wahl des Nullpunktes}} - Js_1s_2 \quad (12.2)$$

$$= -J_{ij}s_i s_j \quad |\text{Heisenberg Modell des Ferrormagneten} \quad (12.3)$$

### 3) Austausch WW im freien Elektronen Gas

Freies Elektronengas → Übergang Ebener Wellen

$$\psi(r_1, r_2) = A [e^{ik_1 r_1} e^{ik_2 r_2} - e^{ik_1 r_2} e^{ik_2 r_1}] \quad (12.4)$$

$$= A e^{i(k_1 r_1 + k_2 r_2)} \left[ 1 - e^{i k (k_1 - k_2)(r_1 - r_2)} \right] \quad (12.5)$$

Aufenthaltswahrscheinlichkeit  $dV_1 dV_2$

$$|\psi(r_1, r_2)|^2 dV_1 dV_2 = |A|^2 [1 - \cos(k_1 - k_2)(r_1 - r_2)]$$

Die Wahrscheinlichkeit zwei Spins mit gleichen Spin am gleichen Ort zu finden verschwindet auch ohne Coulomb WW

Austauschloch

Wenn Spins ausgerichtet sind, verringern sich die Abschirmeffekte der Ionenrümpfe und die Aufelektronen werden daher stärker gebunden. Es führt zu einem Energiegewinn.

### 3) Spinwellen (Magnonen)

Niederenergetische Anregungen, ähnlich Phononen. Eine kollektive Anregung der Bewegung  
Spinflip kostet  $\delta E = 2zJs^2$ ;  $J \approx k_B T_C$

Magnonen haben  $E = \hbar\omega$

Ausrichtung in z-Richtung. Drehmoment  $\mu \times B_M = -g\mu_B S_M \times B_M$

$$\frac{dS}{dt} = -g\mu_B S \times B_M$$

zeitliche Ableitung des Drehimpulses  $\hbar S = \text{angreifenden Drehmoment}$ .

$$U_m = -JS_m(S_{m-1} + S_{m+1}) = \mu B_M = g\mu_B S_M B_M$$

$$\frac{dS_M}{dt} = \frac{J}{\hbar} S_M \times (S_{m-1} + S_{m+1})$$

$$S_{m,x} = A \cos(mqa - \omega t)$$

$$S_{m,y} = A \sin(mqa - \omega t)$$

$$S_{m,z} \sqrt{S^2 - A^2}$$

mit  $q = \frac{n\pi}{L}$  und  $L$  als die Länge der Kette  
Dispersionsrelation

$$\omega = \frac{2JS}{\hbar} [1 - \cos(qa)] = \frac{4JS}{\hbar} \sin^2\left(\frac{qa}{2}\right)$$

$$\omega = \frac{JS}{\hbar} a^2 q^2$$

