

Contents

5	Elastische Eigenschaften	2
5.1	Elastische Konstanten für kubische Kristalle	2
5.2	Konstanten für kubische Kristalle	3
5.3	Schallwellen	3

Chapter 5

Eleastische Eigenschaften

\vec{r} nach Deformation $\rightarrow \vec{r} + \vec{U}(\vec{r})$ mit \vec{U} -Verformung. Die Freie Energie:

$$\mathcal{F} = \int_V d\vec{r} \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \underbrace{E_{\alpha\beta\gamma\delta}}_{\text{Tensor}} \frac{\partial U_{\alpha}(\vec{r})}{\partial r_{\beta}} \cdot \frac{\partial U_{\gamma}(\vec{r})}{\partial r_{\gamma}}$$

$E_{\alpha\beta\gamma\delta} \rightarrow 81 = 3^4$ Komponenten: Symmetrie mit 45 unabhängigen Komponenten $\alpha\beta \leftrightarrow \gamma\delta$ ändert sich nicht unter Drehung von nicht deformierte Festk.

$E_{\alpha\beta\gamma\delta} - E_{\beta\alpha\gamma\delta} + E_{\alpha\beta\delta\gamma} + E_{\beta\alpha\delta\gamma} = 0$; nur 21 Komponenten.

Dehnungstensor (strain tensor):

$$e_{\alpha\beta} = e^{\leftrightarrow} = [e] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_{\alpha}(\vec{r})}{\partial r_{\beta}} + \frac{\partial U_{\gamma}(\vec{r})}{\partial r_{\gamma}} \right]$$

Spannungstensor:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma^{\leftrightarrow} = [\sigma] = \sum_{\alpha\beta} \underbrace{C_{\alpha\beta\gamma\delta}}_{\text{elastizitätstensor}} e_{\gamma\delta}$$

$$\mathcal{F} = \sum_{\alpha\beta} \int \vec{r} \frac{1}{2} e_{\gamma\delta} \sigma_{\gamma\delta}$$

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{4} (E_{\alpha\beta\gamma\delta} + E_{\beta\alpha\gamma\delta} + E_{\alpha\beta\delta\gamma} + E_{\beta\alpha\delta\gamma})$$

Arbeit = Länge * Kraft

5.1 Elastische Konstanten für kubische Kristalle

$$C_{\alpha\alpha\alpha\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} C_{11}$$

$$C_{\alpha\alpha\beta\beta} \stackrel{\text{def}}{=} C_{12}$$

$$C_{\alpha\beta\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} C_{44}$$

für isotropen Materialien $C_{11} - C_{12} = 2C_{44}$ nur 2 unabhängige Komponenten

Lamé-Konstanten $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} C_{12}$; $\mu \stackrel{\text{def}}{=} C_{44}$

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} C_{11} (e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + \frac{1}{2} C_{44} (e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2) + C_{12} (e_{yy}^2 e_{zz}^2 + e_{zz}^2 e_{xx}^2 + e_{xx}^2 e_{yy}^2)$$

Volumen-Kompression: $e_{xx}^2 = e_{yy}^2 = e_{zz}^2 = \frac{1}{3} \delta$; $\mathcal{F} = \frac{1}{6} (C_{11} + C_{12}) \delta^2$;

Kompressionsmodul: $B \frac{C_{11} + 2C_{12}}{3} = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}$, $\mathcal{F} = \frac{1}{2} B \delta^2$

Kompressibilität: $\kappa = \frac{1}{B} = -\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp}$

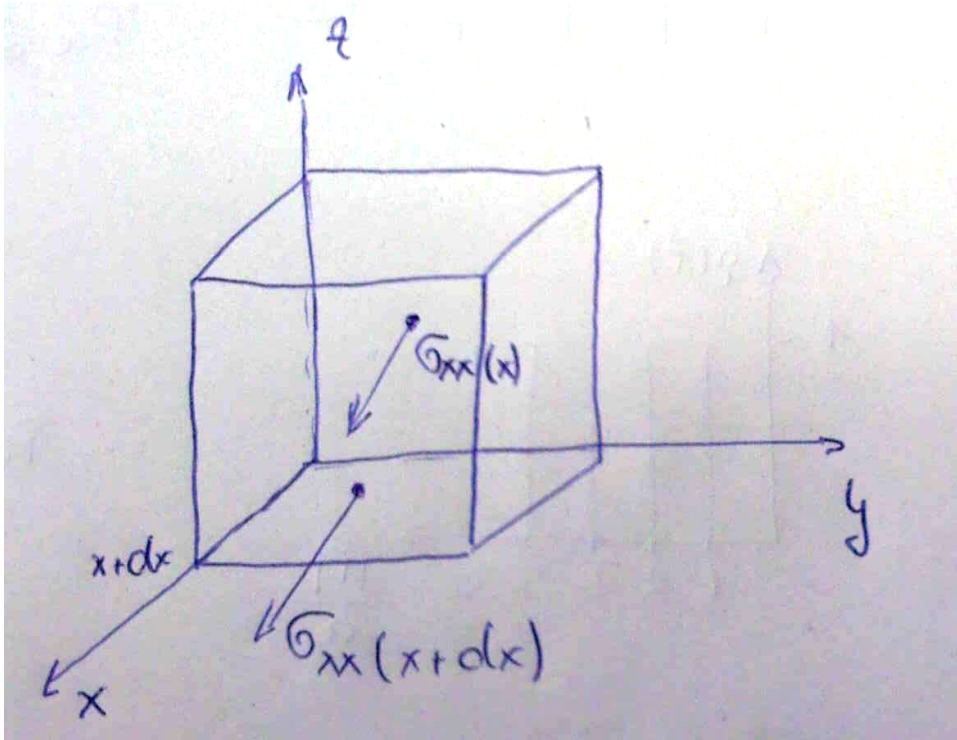
Elastizitätsmodul (Youngscher Modul) $E = \frac{\text{Spannung}}{\text{Dehnung}} \approx \frac{d\sigma}{de} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$

5.2 Konstanten für kubische Kristalle

Elastizitätskraft: $f_\alpha(\vec{r}) = \rho \ddot{u}_\alpha(\vec{r}) = \sum_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}(\vec{r})}{\partial r_\beta}$

5.3 Schallwellen

- longitudinale $\vec{q} \parallel \vec{u}$
- transversale $\vec{q} \perp \vec{u}$



$$df_x = \sigma_{xx}(x+dx) - \sigma_{xx}(x) dx dz = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dy dz$$

$$\rho \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}$$

$$\sigma_{xx} = O_{11} e_{xx} = C_{11} \frac{\partial U_x}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} = C_{11} \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2}$$

allgemeine Form

$$\rho \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} = \sum_{\beta\gamma\delta} C_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial U_\delta}{\partial r_\beta \partial r_\gamma}$$

Lösung:

$$U_\alpha = U_{o\alpha} \exp(-i\omega t + i\vec{q} \cdot \vec{r})$$

f kubische Kristalle

$$\rho \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} = C_{11} \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + C_{44} \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \right) + (C_{12} + C_{44}) \left(\frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial z} \right)$$

Nach Symmetrie: zyklische Vertauschung $x, y, z \rightarrow$

$$\rho \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2} = \dots$$

$$\rho \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2} = \dots$$

Dispersionsrelation: $\omega_\alpha = v_\alpha \cdot q$, 3 Moden \forall Richtung 1 \parallel (Longitudinale) + 2 \perp (Transversale).
für isotropes Medium

$$\vec{u}_1 \parallel \vec{q}; v_{||} = \frac{\omega_{||}}{q} \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}} \text{ Elastizitätsmodul}$$

$$v_{\perp} = \frac{\omega_{\perp}}{q} \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} \begin{cases} \vec{u}_2 \perp \vec{q} \\ \vec{u}_3 \perp \vec{q} \end{cases} \text{ Schubmodul}$$

Messungen $[100] \rightarrow C_{11}, C_{44}$; $[110] C_{12}$

Richtungsabh. von Schallgeschw.

