Chapter 4

Identische Teilchen

4.0 Fermionen & Bosonen

1 Teilchenzustand $|K'\rangle$ K als kollektiver Index
2 Teilchenzustand $|K'\rangle|K''\rangle$ oder $|K''\rangle|K'\rangle$
$|K'\rangle \neq |K''\rangle$ Orthogonal $\Rightarrow |K'\rangle|K''\rangle \perp |K''\rangle|K'\rangle$ beschreiben gleiche Situation $\rightarrow$ Austausch-Entartung
Lösung: Permutationssymmetrie unter Austausch identischer Teilchen. Permutationsoperator P_{ij}
$|K'\rangle|K''\rangle...|K^{(n)}\rangle$ oder $|1\rangle|2\rangle...|n\rangle$

$$P_{ij}|K'\rangle...|K\rangle|K^{(i+1)}\rangle...|K^{(j)}\rangle... = |K'\rangle...|K^{i-1}\rangle|K^{(i)}\rangle|K^{(i+1)}\rangle...|K^{(j)}\rangle... \tag{4.1}$$

$$S_n = \{P_\pi = \pi_{\{ij\}} P_{ij}\}$$

$n!$ Permutationen von n Elementen $\rightarrow dim S_n = n!$
Eigenschaften: $P_{ij}^2 = 1$, S_n nichtkommutativ für $n \geq 3$

$$P_{12}P_{23}|K'\rangle|K''\rangle|K'''\rangle = P_{12}|K'\rangle|K'''\rangle|K''\rangle = |K'''\rangle|K'\rangle|K''\rangle$$

$$P_{21}P_{12}|K'\rangle|K''\rangle|K'''\rangle = P_{23}|K''\rangle|K'\rangle|K'''\rangle = |K''\rangle|K'''\rangle|K'\rangle$$

P_{ij} und Observablen

$$A_1|a'\rangle|a''\rangle = a'|a'\rangle|a''\rangle$$

$$A_2|a'\rangle|a''\rangle = a''|a'\rangle|a''\rangle$$

Was ist $P_{12}A_1P_{12}^{-1}$

$$P_{12}A_1P_{12}^{-1}|a'\rangle|a''\rangle = P_{12}A_1|a''\rangle|a'\rangle = P_{12}a''|a''\rangle|a'\rangle = a''P_{12}|a''\rangle|a'\rangle = a''|a'\rangle|a''\rangle$$

$P_{12}A_1P_{12}^{-1} = A_2$, $P_{ij}A_jP_{ij}^{-1} = A_i$
Pamiltonoperator invariant unter Permutation identischer Teilchen

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + V(\vec{x}_1) + V(\vec{x}_2) + V_{pair}(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$$

$$\Rightarrow P_{12}HP_{12}^{-1} = H \Leftrightarrow [H, P_{12}] = 0$$

$\Rightarrow$ Es gibt simultane Eigenzustände zu P_{12}, H
P_{12} hat Eigenwerte ± 1

$$+1 : |K'K''\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K'\rangle|K''\rangle + |K''\rangle|K'\rangle)$$

$$-1 : |K'K''\rangle_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K'\rangle|K''\rangle - |K''\rangle|K'\rangle)$$

Verallgemeinerung auf n Teilchen: irreduzible Darstellung der S_n. S_n hat 2 1-dimensionale Darstellungen.

a) Symmetrische Darstellung $\pi \to 1$

$$|K'...K'''\rangle_+ = N \sum_{\pi \in S_n} 1 \cdot P_\pi |K'\rangle |K''\rangle ... |K^{(n)}\rangle$$

Bosonen

b) Antisymmetische Darstellung $\pi \to \delta = \begin{cases} +1 & \pi \text{ gerade,} \\ -1 & \pi \text{ ungerade.} \end{cases}$

$$|K'...K'''\rangle_- = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi \in S_n} \delta_\pi \cdot P_\pi |K'\rangle |K''\rangle ... |K^{(n)}\rangle$$

Fermionen