

# Contents

<b>6</b>	<b>Relativistische QM</b>	<b>2</b>
6.0.1	QM eines freien Teilchens . . . . .	3
6.0.2	Wahrscheinlichkeitserhaltung . . . . .	4
6.1	Dirac Gleichung . . . . .	7
6.1.1	Wahrscheinlichkeitsstrom . . . . .	7
6.1.2	Elektromagnetische Wechselwirkung . . . . .	8
6.1.3	Relativistische Korrekturen . . . . .	9
6.1.3.1	Korrekturen zum Wasserstoff Spektrum . . . . .	12
6.1.4	Ebene Wellen als Lösungen der freien Dirac Gleichung . . . . .	12
6.1.4.1	Spezialfall: Teilchen in Ruhe . . . . .	12
6.1.4.2	Lösung für Impuls ungleich 0 . . . . .	13
6.1.5	Lorentz Transformation . . . . .	13
6.1.5.1	Infinitesimale Lorenztransformation . . . . .	13
6.1.6	Kovarianz der Dirac Gleichung . . . . .	14
6.2	16 unabhängige Fermion-Bilineare . . . . .	16
6.3	Die Bedeutung der omega Parameter . . . . .	18
6.3.1	Ebene-Wellen-Lösung zu allg. Impuls . . . . .	19
6.4	Der Diracsee . . . . .	21
6.5	Ladungskonjugation . . . . .	23

## Chapter 6

# Relativistische QM

Notation: Vierer-Vektoren

$$x^\mu = (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{r})$$

invariante Länge  $\sqrt{x^2}$

$$x^2 = x \cdot x = x^\mu x_\mu = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu$$

Einsteinsche Summenkonvention:  $\sum_{\mu=0}^3$  für jedes Paar von oberen und unteren Index  
Metrischer Tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -\vec{r})$$

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu = g^{\mu\nu} x^\nu = g^\nu_\nu x^\nu$$

$$g^\nu_\nu = \delta^\nu_\nu = \begin{cases} 1, & \mu = \nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} \rightarrow g^{\mu\nu} = [g_{\mu\nu}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vierer-Impuls:  $p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p})$  mit  $E = \sqrt{(mc^2)^2 + (\vec{p}c)^2}$

$$p^2 = p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = \frac{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2$$

Vierer-Potential: Lorenz-Transformation  $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$

$$A^\mu = (\frac{\phi}{c}, \vec{A}) \rightarrow A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x)$$

Strom:  $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$  in E und M

Skalarprodukt für  $a^\mu, b^\mu$ :  $a \cdot b = a^\mu b_\mu = a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$

Ableitung nach  $x^\nu$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$$

ist kovarianter Vektor (Index unten) wegen:  $\partial_\mu a \cdot x = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(a_\nu x^\nu) = a_\mu$

Entsprechend  $\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right)$

d'Alebert Operator

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$$

### 6.0.1 QM eines freien Teilchens

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$$

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \rightarrow \left(i\hbar \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar \vec{\nabla}\right) = i\hbar \partial^\mu$$

Schrödinger Gl. für nicht relativistisches freies Teilchen (ohne Potential)

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \psi(\vec{x}, t)$$

Relativistischer Fall

- 1)  $E = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2} \rightarrow$  nichtlokaler Operator
- 2)  $\frac{E^2}{c^2} = m^2 c^2 + \vec{p}^2 \rightarrow -\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = m^2 c^2 \psi - \hbar^2 \vec{\nabla}^2 \psi$

$$-\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = m^2 c^2 \psi - \hbar^2 \vec{\nabla}^2 \psi$$

$$\Leftrightarrow 0 = m^2 c^2 \psi + \hbar^2 \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \psi \quad (6.1)$$

$$0 = m^2 c^2 \psi + \hbar^2 \square \psi \quad (6.2)$$

Klein Gordon Gleichung:

$$\left( \square + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \psi(x) = 0$$

Anwendbar auf skalare Teilchen (Spin 0) wie  $\pi^+, \pi^-, \pi^0, K, H$

Lösungen der KG-Gl. durch ebene Wellen

$$\psi_p(x) = N e^{-ip \cdot x / \hbar} = N e^{-iEt/\hbar} e^{+i\vec{p} \cdot \vec{x} / \hbar}$$

mit  $p \cdot x = p^\mu x_\mu = Et - \vec{p} \cdot \vec{x}$

$$\square \psi_p(x) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi_p(x) = N \left( -\frac{i}{\hbar} p_\mu \right) \left( -\frac{i}{\hbar} p^\mu \right) e^{-ip \cdot x / \hbar} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \psi_p$$

Klein Gordon Gleichung:

$$\Rightarrow \left( -\frac{p^2}{\hbar^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi_p(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow p^2 = m^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2$$

$$\rightarrow E = \pm c \sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2}$$

Lösungen mit Negativer Energie und das Energiespektrum ist nach unten nicht beschränkt.

## 6.0.2 Wahrscheinlichkeitserhaltung

Kontinuitäts-Gleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu j^\mu = 0$$

mit  $j^\mu = (\rho c, \vec{j})$  und  $\partial_\mu = (\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla})$ .

Gibt es einen erhaltenen 4-Strom für die Lösung der Klein-Gordon-Gleichung?

$$\psi^* (\square + (\frac{mc}{\hbar})^2) \psi(x) - \psi (\square + (\frac{mc}{\hbar})^2) \psi^*(x) = 0$$

$$\psi^* \square \psi(x) + \psi^*(x) (\frac{mc}{\hbar})^2 \psi(x) - \psi \square \psi^*(x) - \psi(x) (\frac{mc}{\hbar})^2 \psi^*(x) = 0$$

$$\psi^* \square \psi(x) - \psi \square \psi^*(x) + \cancel{|\psi(x)|^2 (\frac{mc}{\hbar})^2} - \cancel{|\psi(x)|^2 (\frac{mc}{\hbar})^2} = 0$$

mit  $\square \psi = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi$

$$\psi^* (\partial_\mu \partial^\mu \psi) - \psi (\partial_\mu \partial^\mu \psi^*) = 0$$

$$\partial_\mu \underbrace{(\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*)}_{\propto j^\mu} = 0$$

$$j^\mu \propto (\psi^* \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \psi^*, -(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*))$$

Kandidat für Wahrscheinlichkeits Strom  $\frac{2im}{\hbar} \vec{j}$  in Schrödinger Gl

$$j^\mu = \frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*)$$

$$\rightarrow j^0 = \rho c = \frac{i\hbar}{2mc} (\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t})$$

Anwendung auf stationäre Lösung:  $\psi_E(x) = e^{-iEt/\hbar} \psi_E(\vec{x})$

$$\frac{\partial \psi_E}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} \psi_E, \quad \frac{\partial \psi_E^*}{\partial t} = \frac{iE}{\hbar} \psi_E^*$$

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} (\psi_E^* \frac{\partial \psi_E}{\partial t} - \psi_E \frac{\partial \psi_E^*}{\partial t}) \tag{6.3}$$

$$= \frac{i\hbar}{2mc^2} (-\psi_E^* \frac{iE}{\hbar} \psi_E - \psi_E \frac{iE}{\hbar} \psi_E^*) \tag{6.4}$$

$$= \frac{i\hbar}{2mc^2} |\psi_E(\vec{x})|^2 \frac{-2iE}{\hbar} \tag{6.5}$$

$$= \frac{E}{mc^2} |\psi_E(x)|^2 \tag{6.6}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho = \frac{E}{mc^2} |\psi_E(x)|^2}$$

$\rho < 0$  für Zustände mit  $E < 0$

$\Rightarrow$  Keine mögliche Wahrscheinlichkeitsdichte. (Ok für Zustände mit positiver Energie)

Interpretation: Zustände mit  $E > 0 \Leftrightarrow$  z.B.  $\pi^+$  und  $E < 0 \Leftrightarrow$  z.B.  $\pi^-$  (Antiteilchen zum  $\pi^+$ )

$\rho > 0$ :  $\pi^+$  dominieren  $\rho < 0$ :  $\pi^-$  dominieren

$\rho \propto$  elektromagn. Ladungsdichte

$$j^\mu = |e| \frac{i\hbar}{2mc} (\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*)$$

Elektronen: Spin

$\rightarrow$  Wellenfunktion  $\psi(x)$  hat  $\geq 2$  Komponenten

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \dots \\ \psi_N(x) \end{pmatrix}$$

Möglichkeit: Matrixstruktur für  $\hat{H}$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = \hat{H} \psi(x)$$

Ansatz:  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi$  mit  $\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \dots \\ \psi_N(x) \end{pmatrix}$

und Wahrscheinlichkeitsdichte  $\rho = \sum_{i=1}^N |\psi_i|^2$

$$\Rightarrow \hat{H} \propto \frac{\partial}{\partial x^i} \propto \hat{p}_i$$

Ansatz für  $\hat{H}$

$$\hat{H} = c(\alpha_x \hat{p}_x + \alpha_y \hat{p}_y + \alpha_z \hat{p}_z) + \beta mc^2 = c \sum_{i=1}^3 \alpha_i \hat{p}_i + \beta mc^2$$

Ebene Wellenlösung für freie Teilchen

$$\psi(x) = e^{-px/\hbar} \psi(p)$$

mit  $p^2 = m^2 c^2$

$$\Rightarrow E\psi(p) = [c \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta mc^2] \psi(p)$$

$$E^2 \psi(p) = E \cdot [c \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta mc^2] \psi(p) \quad (6.7)$$

$$= [c \sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j + \beta mc^2] \cdot [c \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta mc^2] \psi(p) \quad (6.8)$$

$$= c^2 [\sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j + \beta mc] \cdot [\sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta mc] \psi(p) \quad (6.9)$$

$$= c^2 \left( \sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j \beta mc + \beta mc \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta^2 m^2 c^2 \right) \psi(p) \quad (6.10)$$

$$= c^2 \left( \sum_{i,j=1}^3 \alpha_i \alpha_j p_i p_j + \sum_{i=1}^3 (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i mc + \beta^2 m^2 c^2 \right) \psi(p) \quad (6.11)$$

$$\stackrel{!}{=} c^2 (m^2 c^2 + \vec{p}^2) \psi(p) \quad (6.12)$$

Koeffizientenvergleich:

- $\boxed{\beta^2 = 1}$
- Antikommutator:  $\boxed{\{\alpha_i, \beta\} = 0}$
- $i \neq j$ : z.B:  $p_x p_y \{\alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x\}; \{\alpha_i, \alpha_j\} = 0$
- $i = j$ :  $\alpha_x^2 p_x^2 + \alpha_y^2 p_y^2 + \alpha_z^2 p_z^2 = \vec{p}^2 \Rightarrow \alpha_i^2 = 1$

$$\Rightarrow \boxed{\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}}$$

- 1)  $\hat{p}_i, \hat{H}$  hermitesch  $\Rightarrow \vec{\alpha}, \beta$  hermitesch
- 2)  $\alpha_i^2 = 1, \beta^2 = 1 \Rightarrow$  Eigenwerte von  $\alpha_i, \beta$  sind  $\pm 1$
- 3)  $\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \quad | \cdot \beta$

$$\Rightarrow \alpha_i = -\beta \alpha_i \beta \Rightarrow \text{Tr}[\alpha_i] = -\text{Tr}[\beta \alpha_i \beta] = -\text{Tr}[\alpha_i \beta^2] = -\text{Tr}[\alpha_i]$$

(Info: # = Anzahl; N = Dimension der Matrix)

$$\# \text{ EW } +1 = \# \text{ EW } -1$$

$\Rightarrow N$  gerade ( $N = 2, 4, \dots$ )

$N = 2 \Rightarrow 3$  Pauli Matrizen. Als Kandidaten werden benötigt:  $4 \times 4$  Matrizen  $\Rightarrow N \geq 4 : N = 4$  funktioniert

$N = 4$  : Dirac Basis:  $\beta$  diagonal

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i \text{ hermitesch} + \{\alpha_i, \beta\} = 0$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$A = D = 0, C = B^\dagger$$

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} A & -B \\ C & -D \end{pmatrix} \quad \beta\alpha = \begin{pmatrix} A & B \\ -C & -D \end{pmatrix}$$

$$A = D = 0 \quad C = B^\dagger$$

$$\Rightarrow \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \tau_i \\ \tau_i^\dagger & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \Leftrightarrow \tau_i \tau_j^\dagger + \tau_j \tau_i^\dagger = 2\delta_{ij}$$

Lösung  $\tau_i = \sigma_i =$  Pauli Matrizen

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}; \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}}$$

## 6.1 Dirac Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = c(\vec{\alpha} \cdot \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \beta mc) \psi(x) \quad | \cdot \frac{\beta}{\hbar c}$$

Alternativ: kovariante Form

$$\Rightarrow i\beta \underbrace{\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t}}_{\frac{\partial}{\partial x^0}} \psi + i \underbrace{\beta \vec{\alpha}_i}_{\gamma^i} \cdot \underbrace{\vec{\nabla}_i}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \psi - \frac{mc}{\hbar} \psi = 0$$

$$\Rightarrow (i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{mc}{\hbar}) \psi = 0$$

$$\gamma^0 = \beta; \gamma^i = \beta \alpha_i$$

$$\boxed{\left( i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi = 0}$$

Kovariante Form der Dirac Gleichung mit  $\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1}_4$

$$\text{z.B. } \{\gamma^i, \gamma^j\} = \beta \underbrace{\alpha_i \beta}_{-\beta \alpha_i} \alpha_j + \beta \underbrace{\alpha_j \beta}_{-\beta \alpha_j} \alpha_i = -\{\alpha_i, \alpha_j\} = -2\delta_{ij}$$

### 6.1.1 Wahrscheinlichkeitsstrom

$$\psi^\dagger \cdot | \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi + \beta mc^2 \psi \quad (6.13)$$

adjungierte Dirac Gleichung:

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} = -\frac{\hbar c}{i} (\vec{\nabla} \psi^\dagger) \vec{\alpha} + \beta mc^2 \psi^\dagger \quad | \cdot \psi \quad (6.14)$$

Differenz der beiden Gleichungen 6.13 – 6.14:

$$\underbrace{i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi^\dagger \right) \psi + i\hbar \psi^\dagger \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi \right)}_{\text{Produktregel} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi)} = \underbrace{\frac{\hbar c}{i} (\psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi + (\vec{\nabla} \psi^\dagger) \vec{\alpha} \psi)}_{\text{Produktregel} = -c \vec{\nabla} (\psi^\dagger \vec{\alpha} \psi)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) = -c \vec{\nabla} (\psi^\dagger \vec{\alpha} \psi)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\psi^\dagger \psi)}_\rho + \vec{\nabla} \cdot \underbrace{(c \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi)}_{\vec{j}} = 0$$

$$\rho = \psi^\dagger \psi = \sum_i |\psi_i|^2 \geq 0$$

$\rho$  ist positiv definierte Wahrscheinlichkeitsdichte  
Kovariante Form des Wahrscheinlichkeits-Stroms

$$j^\mu = (c\rho, c\vec{j}) \quad (6.15)$$

$$= (c \underbrace{\psi^\dagger \psi}_{\equiv \rho}, c \psi^\dagger \beta \vec{\alpha} \psi) \quad (6.16)$$

$$= (c \psi^\dagger \underbrace{\beta \gamma^0}_{\mathbb{1}} \psi, c \psi^\dagger \beta \vec{\gamma} \psi) \quad (6.17)$$

$$= c \psi^\dagger \beta \gamma^\mu \psi \quad (6.18)$$

$$= c \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (6.19)$$

wobei  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \beta = \psi^\dagger \gamma^0$  der Pauli adjungierte Spinor ist.

### 6.1.2 Elektromagnetische Wechselwirkung

externe  $\vec{E}, \vec{B}$  Fleder  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ ,  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$$\rightarrow A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A}\right)$$

minimale Substitution:

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - eA^\mu \xrightarrow{QM} i\hbar\partial^\mu - eA^\mu = i\hbar(\partial^\mu + \frac{ie}{\hbar}A^\mu) = i\hbar D^\mu$$

Komponenten der Kovarianten Ableitung  $D^\mu$

$$i\hbar D^\mu = \left(i\hbar \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{c} \phi, \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - e\vec{A}\right) \quad (6.20)$$

$$= \left(\frac{i}{c} \left(\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi\right), \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - e\vec{A}\right) \quad (6.21)$$

Einsetzen in die Dirac-Gleichung:

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = c\vec{\alpha} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - e\vec{A}\right) \psi + \beta mc^2 \psi + e\phi \psi} \quad (6.22)$$

oder ersetze in freier Dirac-Gleichung  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$

$$\boxed{(i\gamma^\mu D_\mu - \frac{mc}{\hbar})\psi = 0} \quad (6.23)$$

Diese Gleichung beschreibt Wechselwirkung eines Elektrons der Ladung  $e$  mit dem elektromagnetischen Feld.

Notation:  $\vec{\alpha}\vec{p}\psi = \frac{\hbar}{i}\vec{\alpha}\vec{\nabla}\psi$

$$\text{mit } A = 1 \dots 4 \quad [\vec{\alpha}\vec{p}\psi]_A = \sum_{j=1}^3 \sum_{B=1}^4 \alpha_{jAB} \frac{\hbar}{i} \nabla_i \psi_B(\vec{x}, t) = \left[ \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\vec{p} \\ \vec{\sigma}\vec{p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \right]_A$$

Nichtrelativistischer Grenzfall:  $E = mc^2 + E_S$  mit  $E_S$  als Schrödinger Energie.

Ansatz:

$$\psi(\vec{x}, t) = e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} \phi(\vec{x}, t) \\ \chi(\vec{x}, t) \end{pmatrix} = e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t} e^{i\frac{E_S}{\hbar}t} \begin{pmatrix} \phi_E(\vec{x}) \\ \chi_E(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Einsetzen in die Dirac-Gleichung (6.22) für Teilchen im Elektromagnetischem Feld:

$$\Rightarrow i\hbar \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\chi} \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\vec{\pi}\vec{\chi} \\ \vec{\sigma}\vec{\pi}\phi \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \phi \\ -\chi \end{pmatrix} + e\Phi \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

mit  $\vec{\pi} = \vec{p} - e\vec{A} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e\vec{A} = \frac{\hbar}{i}\vec{D}$  und  $\Phi$  als Skalares-Potential ( $\phi$ )

$$\Rightarrow i\hbar \dot{\phi} = c\vec{\sigma}\vec{\pi}\chi + e\Phi\phi \quad (6.24)$$

$$\Rightarrow 2mc^2\chi + i\hbar\dot{\chi} - e\Phi\chi = c\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi \quad (6.25)$$

$$2mc^2\chi + i\hbar \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{=E_S} \chi - \underbrace{e\Phi}_V \chi = c\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi \quad (6.26)$$

(6.26) vereinfacht ergibt:

$$\chi = \frac{1}{2mc^2 + E_S - V} c\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi \approx \frac{1}{2mc^2} c\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi \approx \frac{mv}{2mc} \phi = \frac{1}{2} \frac{v}{c} \phi$$



$\chi$  ist eine kleine Komponente des Dirac Spinors. Einsetzen von  $\chi$  in (6.24):

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{c^2 (\vec{\sigma} \vec{\pi})^2}{2mc^2} \phi + V\phi \quad (V = e\Phi)$$

Berechnung von  $(\vec{\sigma} \vec{\pi})^2 = -\hbar^2 \sigma_i \sigma_j D_i D_j$  mit  $\sigma_i \sigma_j = \frac{1}{2} [\sigma_i, \sigma_j] + \frac{1}{2} \{\sigma_i, \sigma_j\} = i\hbar^2 \epsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij}$ :

$$(\vec{\sigma} \vec{\pi})^2 = \vec{\pi}^2 - i\hbar^2 \epsilon_{ijk} \sigma_k \underbrace{D_i D_j}_{\frac{1}{2} [D_i, D_j]}$$

$$[D_i, D_j] = [\nabla_i - \frac{i}{\hbar} e A_i, \nabla_j - \frac{i}{\hbar} e A_j] = -\frac{i}{\hbar} e (\underbrace{(\nabla_i A_j)}_{\vec{\nabla} \times \vec{A}} - \underbrace{(\nabla_j A_i)}_{\vec{\nabla} \times \vec{A}})$$

$$\Rightarrow (\vec{\sigma} \vec{\pi})^2 = \vec{\pi}^2 - \frac{1}{2} \hbar e \vec{\sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) 2 = \vec{\pi}^2 - 2e \vec{S} \vec{B} \quad (\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma})$$

$$\rightarrow i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\vec{p}^2}{2m} \phi - \frac{e}{2m} 2\vec{S} \vec{B} \phi + V\phi$$

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} \phi - \frac{e}{2m} 2\vec{S} \vec{B} \phi + V\phi} \quad \text{Pauli Gleichung}$$

Schwaches homogenes  $B$ -Feld:  $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$

$$\frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} \approx \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e}{2m} \vec{B} \vec{L}$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\vec{p}^2}{2m} \phi - \frac{e}{2m} \vec{B} (\vec{L} + 2\vec{S}) \phi + V\phi$$

Magnetisches Moment des Elektrons:  $\vec{\mu} = \frac{e}{2m} (\vec{L} + 2\vec{S}) \quad g = 2$  für geladenes Dirac-Fermion

### 6.1.3 Relativistische Korrekturen

Energieeigenzustände:  $\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} (\vec{x}, t) = e^{-E_s t / \hbar} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} (\vec{x})$

Dirac Gleichung ist äquivalent zu

$$(2mc^2 + E_S - V)\chi = c\vec{\sigma} \vec{\pi} \phi \quad (6.27)$$

$$E_S \phi = c\vec{\sigma} \vec{\pi} \chi + V\phi \quad (6.28)$$

$\chi$  wird Taylor-Entwickelt:

$$\Rightarrow \chi = \frac{1}{2mc^2 + E_S - V} c\vec{\sigma} \vec{\pi} \phi \quad (6.29)$$

$$= \frac{1}{2mc} \frac{1}{1 + \frac{E_S - V}{2mc^2}} \vec{\sigma} \vec{\pi} \phi \quad (6.30)$$

$$\approx \frac{1}{2mc} (1 - \frac{E_S - V}{2mc^2} + \dots) \vec{\sigma} \vec{\pi} \phi \quad (6.31)$$

Einsetzen von  $\chi$  in (6.28):

$$E_S \phi = c \vec{\sigma} \vec{\pi} \frac{1}{2mc} \left(1 - \frac{E_S - V}{2mc^2} + \dots\right) \vec{\sigma} \vec{\pi} \phi + V \phi \quad (6.32)$$

$$(E_S - V) \phi = c \vec{\sigma} \vec{\pi} \frac{1}{2mc} \left(1 - \frac{E_S - V}{2mc^2} + \dots\right) \vec{\sigma} \vec{\pi} \phi \quad (6.33)$$

$$(E_S - V) \phi = \vec{\sigma} \vec{\pi} \frac{1}{2m} \vec{\sigma} \vec{\pi} \phi - \vec{\sigma} \vec{\pi} \frac{1}{4m^2 c^2} (E_S - V) \vec{\sigma} \vec{\pi} \phi \quad (6.34)$$

Als Nebenrechnung:

$$(E_S - V) \vec{\sigma} \vec{\pi} \phi = \vec{\sigma} \vec{\pi} (E_S - V) \phi + \underbrace{\vec{\sigma} [E_S - V, \vec{\pi}]}_{[\vec{\pi}, V] = \frac{\hbar}{i} (\vec{\nabla} V)} \phi$$

Einsetzen:

$$(E_S - V) \phi = \vec{\sigma} \vec{\pi} \frac{1}{2m} \vec{\sigma} \vec{\pi} \phi - \vec{\sigma} \vec{\pi} \frac{1}{4m^2 c^2} \left( \vec{\sigma} \vec{\pi} (E_S - V) \phi + \vec{\sigma} \frac{\hbar}{i} (\vec{\nabla} V) \phi \right) \quad (6.35)$$

Mit dem Term  $(E_S - V) \phi = \vec{\sigma} \vec{\pi} \frac{1}{2m} (1 - \dots) \vec{\sigma} \vec{\pi} \phi$  nur bis zur nullter Ordnung Taylor entwickelt eingesetzt:

$$(E_S - V) \phi = \vec{\sigma} \vec{\pi} \frac{1}{2m} \vec{\sigma} \vec{\pi} \phi - \vec{\sigma} \vec{\pi} \frac{1}{4m^2 c^2} \left( \vec{\sigma} \vec{\pi} \cdot \vec{\sigma} \vec{\pi} \frac{1}{2m} \vec{\sigma} \vec{\pi} \phi + \vec{\sigma} \frac{\hbar}{i} (\vec{\nabla} V) \phi \right) \quad (6.36)$$

Und schlussendlich erhalten wir die erweiterte Pauli-Gleichung:

$$(E_S - V) \phi = \frac{(\vec{\sigma} \vec{\pi})^2}{2m} \phi - \frac{\vec{\sigma} \vec{\pi}}{4m^2 c^2} \left( \frac{(\vec{\sigma} \vec{\pi})^3}{2m} + \vec{\sigma} \frac{\hbar}{i} (\vec{\nabla} V) \right) \phi$$

Spezialfall:

- $V = V(r)$  sphärisch symmetrisch  $\Rightarrow \vec{\nabla} V = \vec{r} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}$
- $\vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{\pi} = \vec{p} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \Rightarrow (\vec{\sigma} \vec{\pi})^2 = \vec{p}^2$

$$\Rightarrow E_S \phi = \left( \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3 c^2} + V \right) \phi - \frac{\hbar}{i} \frac{1}{4m^2 c^2} \underbrace{\sigma_i \sigma_j}_{i \epsilon_{ijk} \pi_k + \sigma_{ij}} p_i r_j \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \phi$$

$$E_S \phi = \left( \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3 c^2} + V \right) \phi - \hbar \frac{1}{4m^2 c^2} \vec{\sigma} (\vec{r} \times \vec{p}) \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \phi + \frac{\hbar^2}{4m^2 c^2} \left( (\nabla^2 V) + \underbrace{(\vec{\nabla} V) \cdot \vec{\nabla}}_{\text{nicht selbst adjungiert}} \right) \phi$$

Interpretation:

- $-\frac{p^4}{8m^3 c^2}$  relativistischer Beitrag zur kinetischen Energie  
 $E = \sqrt{(mc^2)^2 + p^2 c^2} = mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{(mc)^2}} = mc^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m^2 c^2} - \frac{1}{8} \frac{p^4}{m^4 c^4} + \dots \right) = mc^2 - \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{8} \frac{p^4}{m^3 c^2}$
- $\hbar \frac{1}{4m^2 c^2} \vec{\sigma} (\vec{r} \times \vec{p}) \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \phi = \frac{1}{2m^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \vec{L} \vec{S} \phi = H_{LS}$  Korrekte Spin-Bahn Kopplung, inklusive Thomas Präzessionsfaktor von  $\frac{1}{2}$ .

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = H_\phi \phi$$

mit

$$H_\phi = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V + H_r + H_{LS} + \tilde{H}_D$$

$$H_r = -\frac{1}{8m} \left( \frac{\vec{p}^2}{2m} \right)^2$$

$$H_{LS} = \frac{1}{2m^2 c^2} \frac{1}{\gamma} \frac{dV}{d\gamma} \vec{L} \cdot \vec{S}$$

$$\tilde{H}_D = \frac{\hbar^2}{4m^2 c^2} ((\nabla^2 V) + (\vec{\nabla} V) \cdot \vec{\nabla})$$

Der Letzte Term  $(\vec{\nabla} V) \cdot \vec{\nabla}$  ist nicht hermitesch. Problem mit der Wahrscheinlichkeits-Dichte:

$$\rho = \frac{j^0}{c} = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi = \sum_{i=1} |\psi_i|^2 \quad (6.37)$$

$$= |\phi|^2 + |\chi|^2 \quad (6.38)$$

$$= |\phi|^2 + \left| \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{2mc} \phi \right|^2 \quad (6.39)$$

$$= |\phi|^2 + \phi^\dagger \frac{\vec{p}^2}{4m^2 c^2} \phi \quad (6.40)$$

$$\approx \underbrace{\left| \left( 1 + \frac{\vec{p}^2}{8m^2 c^2} \right) \phi \right|^2}_{\varphi} \quad (6.41)$$

Übergang zu

$$\varphi = \Omega \phi = \left( 1 + \frac{\vec{p}^2}{8m^2 c^2} + \dots \right) \phi$$

Foldy-Wouthuysen Transformation. (Details: Bjorken-Drell relativ. QM)

$$\text{Ersetze } E_S \phi = H_\phi \phi \text{ durch } E_S \phi = \underbrace{\Omega H_\phi \Omega^{-1}}_H \underbrace{\Omega \phi}_\varphi$$

$$H = \left( 1 + \frac{\vec{p}^2}{8m^2 c^2} \right) H_\phi \left( 1 - \frac{\vec{p}^2}{8m^2 c^2} \right) \quad (6.42)$$

$$= H_\phi + \left[ \frac{\vec{p}^2}{2m^2 c^2}, H_\phi \right] + \dots \quad (6.43)$$

$$= H_\phi + \left[ \frac{\vec{p}^2}{2m^2 c^2}, V \right] + \dots \quad (6.44)$$

$$\text{NR: } \left[ \frac{\vec{p}^2}{2m^2 c^2}, V \right] = -\frac{\hbar^2}{8m^2 c^2} \frac{\underbrace{[\nabla_i \nabla_i, V]}_{\nabla_i [\nabla_i, V] + [\nabla_i, V] \nabla_i}}{\underbrace{(\nabla_i V)}_{(\nabla_i V)}} = -\frac{\hbar^2}{8m^2 c^2} ((\nabla^2 V) + 2(\nabla V) \nabla_i)$$

$$H = H_\phi - \frac{\hbar^2}{8m^2 c^2} ((\nabla^2 V) + 2(\nabla V) \nabla_i) \quad (6.45)$$

$$= \left( \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3 c^2} + V \right) - \hbar \frac{1}{2m^2 c^2} \vec{L} \cdot \vec{S} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} + \frac{\hbar^2}{4m^2 c^2} ((\nabla^2 V) + (\vec{\nabla} V) \cdot \vec{\nabla}) \quad (6.46)$$

$$- \frac{\hbar^2}{8m^2 c^2} ((\nabla^2 V) + 2(\nabla V) \nabla_i) \quad (6.47)$$

$$= \frac{\vec{p}^2}{2m} + V - \frac{p^4}{8m^3 c^2} - \hbar \frac{1}{2m^2 c^2} \vec{L} \cdot \vec{S} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} + \underbrace{\frac{\hbar^2}{8m^2 c^2} \nabla^2 V}_{\text{Darwin-Term}} \quad (6.48)$$

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V + H_r + H_{LS} + H_D$$

mit dem Darwin-Term  $H_D = \frac{\hbar^2}{8m^2 c^2} (\nabla^2 V)$

### 6.1.3.1 Korrekturen zum Wasserstoff Spektrum

Spaltet man den Hamilton-Operator in  $H_0$  und den  $V$  Term auf:

$$H\phi = \underbrace{\left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + V - \frac{p^4}{8m^3c^2} - \hbar \frac{1}{2m^2c^2} \vec{L} \cdot \vec{S} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} + \frac{\hbar^2}{8m^2c^2} \nabla^2 V\right)}_V \phi$$

So lassen sich Energiekorrekturen (hier bis zu 1 Ordnung) berechnen:

$$E_n^{(0)} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2a_0 n^2}$$

$$\Delta E_n^{(1)} = \alpha^2 E_n^{(0)} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right)$$

**Feinstruktur-Aufspaltung** für  $2p_{\frac{1}{2}}$   $2p_{\frac{3}{2}}$

Entartung bleibt für  $2s_{\frac{1}{2}}$   $2p_{\frac{1}{2}}$  (d.h. gleiche Energie)

### 6.1.4 Ebene Wellen als Lösungen der freien Dirac Gleichung

$$\left( i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) = \frac{mc}{\hbar} \psi(x)$$

Ebene Welle als Ansatz  $\psi(x) = e^{-px/\hbar} w(p)$  mit  $w(p)$ -Spinor im Impulsraum

$$i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi(x) = i\gamma^\mu \left( -\frac{ip_\mu}{\hbar} \right) \psi(x) \quad (6.49)$$

$$= \frac{1}{\hbar} \gamma^\mu p_\mu \psi(x) \stackrel{!}{=} \frac{mc}{\hbar} \psi(x) \quad (6.50)$$

Notation:  $\gamma^\mu p_\mu = \not{p}$

$$\boxed{(\not{p} - mc)w(p) = 0} \quad (6.51)$$

#### 6.1.4.1 Spezialfall: Teilchen in Ruhe

$$p^\mu = \left( \frac{E}{c}, \vec{0} \right)$$

$$\rightarrow \not{p} = \frac{E}{c} \gamma^0 = \frac{E}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Eingesetzt in (6.51) ergibt

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{E}{c} - mc & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{c} - mc & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E}{c} - mc & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{E}{c} - mc \end{pmatrix} w(\vec{p}) = 0$$

4 Lösungen zu 2 Eigenwerten:

$$E = +mc^2 : w_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$E = -mc^2: w_3(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_4(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  Lösungen mit negativer Energie  $\rightarrow$  Existenz von Positronen (bzw. Antiteilchen).  
z.B. für ein Elektron mit Spin  $\uparrow$

$$\psi(x) = e^{-px/\hbar} w_1(0)$$

z.B. für ein Positron mit Spin  $\downarrow$

$$\psi(x) = e^{-px/\hbar} w_4(0)$$

#### 6.1.4.2 Lösung für Impuls ungleich 0

1) Matrixgl.  $\not{p}w = mcw$  lösen

2) Lorenztransformation von Inertialsystem IS (Teilchen in Ruhe) in IS' ( $\vec{p} \neq 0$ )

#### 6.1.5 Lorentz Transformation

$$x' = \Lambda x \text{ mit } x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

Bsp: Boost in z-Richtung:  $z' = \gamma(z - vt)$ ,  $t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}z)$ ,  $x' = x$ ,  $y' = y$  mit  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Lorenztransformation erhält relative Länge:

$$x' \cdot x' = g_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu} = \underbrace{\Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} g_{\mu\nu}}_{g_{\rho\sigma}} x^{\rho} x^{\sigma} = x \cdot x = x^{\rho} x^{\sigma} g_{\rho\sigma}$$

Def. Eigenschaft einer Lorenztransformation

$$\Lambda^{\rho}_{\mu} \Lambda^{\mu}_{\sigma} = g^{\rho}_{\sigma} = \delta^{\rho}_{\sigma}$$

$$\text{oder } (\Lambda^{-1})^{\rho}_{\mu} = \Lambda^{\rho}_{\mu}$$

$\Rightarrow \det \Lambda = \pm 1$  (Verallgemeinerung von orthogonalen Transformation)

#### 6.1.5.1 Infinitesimale Lorenztransformation

Mit  $w^{\rho}_{\mu}$  infinitesimal

$$\Lambda^{\rho}_{\mu} = g^{\rho}_{\mu} + w^{\rho}_{\mu}$$

$$\Lambda^{\rho}_{\mu} \Lambda^{\mu}_{\sigma} = (g^{\rho}_{\mu} + w^{\rho}_{\mu})(g^{\mu}_{\sigma} + w^{\mu}_{\sigma}) \quad (6.52)$$

$$= g^{\rho}_{\sigma} + \underbrace{w^{\rho}_{\sigma} + w^{\rho}_{\sigma}}_{=0} + \dots \quad (6.53)$$

$$\stackrel{!}{=} g^{\rho}_{\sigma} \quad (6.54)$$

$$\rightarrow w_{\sigma\rho} + w_{\rho\sigma} = 0$$

$$\rightarrow w = \begin{pmatrix} 0 & w_{01} & w_{02} & w_{03} \\ -w_{10} & 0 & w_{12} & w_{13} \\ -w_{20} & -w_{21} & 0 & w_{23} \\ -w_{30} & -w_{31} & -w_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

6 reelle freie Parameter  $\Rightarrow$  6 Generatoren

$\vec{J}$  (Drehungen) 3  $w_{ij}$   $\vec{K}$  (Booster) 3  $w_{oi}$

### 6.1.6 Kovarianz der Dirac Gleichung

Inertialsystem:

$$\left. \begin{array}{c} \text{IS} \\ x^\mu \\ (i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{mc}{\hbar})\psi(x) = 0 \end{array} \right| \left. \begin{array}{c} \text{IS}' \\ x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \\ (i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - \frac{mc}{\hbar})\psi'(x') = 0 \end{array} \right|$$

Zu zeigen: Es gibt zu jeder LT  $\Lambda$  eine lineare Abbildung  $S(\Lambda)$  der Spinoren:

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) \quad (6.55)$$

$$= S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x') \quad (6.56)$$

Die Menge  $\{S(\Lambda)\}$  bilden Darstellung der Lorenzgruppe

$$\boxed{S(\Lambda_1\Lambda_2) = S(\Lambda_1)S(\Lambda_2) \Rightarrow S(\mathbb{1}) = \mathbb{1}, \quad S(\Lambda^{-1}) = (S(\Lambda))^{-1}}$$

$$(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{mc}{\hbar})\psi(x) = 0$$

Einsetzen von  $\psi(x) = S(\Lambda^{-1})\psi'(x')$  und von links mit  $S(\Lambda)$  multiplizieren:

$$S(\Lambda)(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{mc}{\hbar})S(\Lambda^{-1})\psi'(x') = 0$$

$$\Leftrightarrow \left( iS(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1}) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^\mu}}_{\Lambda^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}} - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi'(x') = 0$$

$$\text{NR: } x'^\nu = \Lambda^\nu_\rho x^\rho \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \underbrace{\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}}_{\Lambda^\nu_\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu}$$

$$\Leftrightarrow \left( iS(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1})\Lambda^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi'(x') = 0$$

ist äquivalent zur Dirac Gleichung im IS'

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1})\Lambda^\nu_\mu = \gamma^\nu$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Lambda^\nu_\mu \gamma^\mu = S(\Lambda^{-1})\gamma^\nu S(\Lambda)} \quad (6.57)$$

Betrachte infinitesimalen Fall:

$$\Lambda^\nu_\mu = g^\nu_\mu + \omega^\nu_\mu$$

$$S(\Lambda) = \mathbb{1} - \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}$$

mit 4x4 Matrizen  $\sigma_{\alpha\beta} = -\sigma_{\beta\alpha}$  (6 Matrizen)

$$S(\Lambda^{-1}) = \mathbb{1} + \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}$$

Einsetzen in (6.57): Term linear in  $\omega^{\mu\nu}$  gilt für alle  $\omega^{\alpha\beta} = -\omega^{\beta\alpha}$

$$\underbrace{\omega^{\nu}_{\mu}\gamma^{\mu}}_{\omega^{\alpha\beta}\frac{1}{2}(g^{\nu}_{\alpha}\gamma_{\beta}-g^{\nu}_{\beta}\gamma_{\alpha})} = -\frac{i}{4}\omega^{\alpha\beta}(\gamma^{\nu}\sigma_{\alpha\beta}-\sigma_{\alpha\beta}\gamma^{\nu})$$

$$\Rightarrow \boxed{[\gamma^{\nu}, \sigma_{\alpha\beta}] = 2i(g^{\nu}_{\alpha}\gamma_{\beta} - g^{\nu}_{\beta}\gamma_{\alpha})}$$

Lösung für  $\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}[\gamma_{\alpha}, \gamma_{\beta}]$

Bew:

$$\frac{2}{i}[\gamma^{\nu}, \sigma_{\alpha\beta}] = \gamma^{\nu}(\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta} - \gamma_{\beta}\gamma_{\alpha}) - (\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta} - \gamma_{\beta}\gamma_{\alpha})\gamma^{\nu} \quad (6.58)$$

$$= \gamma_{\alpha}\gamma^{\nu}\gamma_{\beta} - \gamma_{\beta}\gamma^{\nu}\gamma_{\alpha} - \gamma_{\alpha}\gamma^{\nu}\gamma_{\beta} + \gamma_{\beta}\gamma^{\nu}\gamma_{\alpha} \quad (6.59)$$

$$= 2 \cdot 2g^{\nu}_{\alpha}\gamma_{\beta} - 2 \cdot 2g^{\nu}_{\beta}\gamma_{\alpha} \quad (6.60)$$

$$= \frac{2}{i}2i(g^{\nu}_{\alpha}\gamma_{\beta} - g^{\nu}_{\beta}\gamma_{\alpha}) \quad (6.61)$$

$\Rightarrow \sigma_{\alpha\beta}$  sind Generatoren für Spinordarstellung der Lorentz-Gruppe

$$S(g + \omega) = 1 + \frac{1}{8}[\gamma_{\nu}, \gamma_{\nu}]\omega^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}$$

mit  $\omega^{\mu\nu}$  endlich

Frage: Ist  $j^{\mu} = c\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$  mit  $\bar{\psi} = \psi^{\dagger}\gamma^0$  ein 4-Vektor?

Transformation von  $\bar{\psi}$ :

$$\psi'(x')^{\dagger} = (S(\Lambda)\psi(x))^{\dagger} = \psi^{\dagger}(x)S^{\dagger}(\Lambda) = \psi^{\dagger}(x)e^{+\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}^{\dagger}\omega^{\mu\nu}}$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{\dagger} = \frac{i}{2}[\gamma_{\alpha}, \gamma_{\beta}]^{\dagger} = -\frac{i}{2}[\gamma_{\beta}^{\dagger}, \gamma_{\alpha}^{\dagger}] = \frac{i}{2}[\gamma_{\alpha}^{\dagger}, \gamma_{\beta}^{\dagger}]$$

$$\gamma_0^{\dagger} = \gamma_0 = \gamma^0\gamma_0\gamma^0$$

$$\vec{\gamma}^{\dagger} = (\beta\vec{\alpha})^{\dagger} = \vec{\alpha}\beta = \beta \underbrace{(\beta\vec{\alpha})}_{\vec{\gamma}}\beta = \gamma^0\vec{\gamma}\gamma^0$$

Durch eine Gleichung zusammenfassen:

$$(\gamma^{\mu})^{\dagger} = \gamma^0\gamma^{\mu}\gamma^0$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{\dagger} = \frac{i}{2}[\gamma^0\gamma_{\alpha}\gamma^0, \gamma^0\gamma_{\beta}\gamma^0] = \gamma^0\sigma_{\alpha\beta}\gamma^0$$

wegen  $\gamma^0 \cdot \gamma^0 = \mathbb{1}$

$$\Rightarrow S^{\dagger}(\Lambda) = e^{\gamma^0 A \gamma^0} \quad (6.62)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{(\gamma^0 A \gamma^0)^n}_{\gamma^0 A^n \gamma^0} \quad (6.63)$$

$$= \gamma^0 e^A \gamma^0 \quad (6.64)$$

$$= \gamma^0 e^{+\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}^{\dagger}\omega^{\mu\nu}} \gamma^0 \quad (6.65)$$

$$= \gamma^0 S(\Lambda)^{-1} \gamma^0 \quad (6.66)$$

mit  $A = \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}$

$$S^\dagger(\Lambda) = \gamma^0 S(\Lambda^{-1}) \gamma^0$$

$$\bar{\psi}'(x') = (\psi'(x'))^\dagger \gamma^0 = (S(\Lambda)\psi(x))^\dagger \gamma^0 = \psi(x)^\dagger S(\Lambda)^\dagger \gamma^0 \quad (6.67)$$

$$= \psi(x)^\dagger \mathbb{1} S(\Lambda)^\dagger \gamma^0 \quad (6.68)$$

$$= \psi(x)^\dagger \gamma^0 \gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0 \quad (6.69)$$

$$= \bar{\psi}(x) \underbrace{\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0}_{S(\Lambda^{-1})} \quad (6.70)$$

$$(6.71)$$

LT von  $j^\mu = c\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$  mit Zuhilfenahme der Gleichung von (6.57)

$$j^{\mu'}(x') = c\bar{\psi}'(x')\gamma^{\mu'}\psi'(x') = c\bar{\psi}(x) \underbrace{S(\Lambda^{-1})\gamma^\mu S(\Lambda)}_{\Lambda^\mu_\alpha \gamma^\alpha} \psi(x) \quad (6.72)$$

$$= c\bar{\psi}(x)\Lambda^\mu_\alpha \gamma^\alpha \psi(x) \quad (6.73)$$

$$= \Lambda^\mu_\alpha (c\bar{\psi}(x)\gamma^\alpha \psi(x)) \quad (6.74)$$

$$= \Lambda^\mu_\alpha j^\alpha(x) \quad (6.75)$$

$\Rightarrow j^\mu(x)$  ist 4-Vektorfeld

$$j^\mu = (c\rho, \vec{j})$$

Kontinuitätsgleichung  $\frac{1}{c}\frac{\partial(c\rho)}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{j} = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu j^\mu = 0$

Andere Bilineare: z.B.

$$\rho(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x)$$

$$\rightarrow \rho'(x') = \bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}'(x')\mathbb{1}\psi'(x') = \bar{\psi}'(x')S(\Lambda^{-1})S(\Lambda)\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\psi(x) = \rho(x)$$

$\Rightarrow \rho(x)$  ist ein Skalares Feld

Allgemeiner Fall:  $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$  mit  $\Gamma$  4x4 Matrix

## 6.2 16 unabhängige Fermion-Bilineare

Gute Basis der  $\Gamma$ :

$$\Gamma_S = \mathbb{1}, \quad \Gamma_\mu^\nu = \gamma_\mu, \quad \Gamma_{\mu\nu}^T = \sigma_{\mu\nu}$$

$$\Gamma_P = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^5 = \gamma_5, \quad \Gamma_\mu^A = \gamma_\mu\gamma_5$$

$$\bar{\psi}(x) = \Gamma\psi(x)$$

$\Gamma$  große Gamma Matrizen, 16 lin. unabh. 4x4-Matrizen

$$T^{\mu\nu} = \bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)$$

$$T'^{\mu\nu} = \bar{\psi}(x) \underbrace{S^{-1}(\Lambda)\frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]S(\Lambda)}_{\Lambda^\mu_\rho \gamma^\rho} \psi(x) \quad (6.76)$$

$$= \frac{i}{2} \underbrace{[S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)]}_{\Lambda^\mu_\rho \gamma^\rho} \underbrace{[S^{-1}(\Lambda)\gamma^\nu S(\Lambda)]}_{\Lambda^\nu_\sigma \gamma^\sigma}$$

$$= \Lambda^\mu_\rho \gamma^\rho \Lambda^\nu_\sigma \gamma^\sigma \bar{\psi}\sigma^{\rho\sigma}\psi \quad (6.77)$$

$$= \Lambda^\mu_\rho \gamma^\rho \Lambda^\nu_\sigma \gamma^\sigma T^{\rho\sigma} \quad (6.78)$$



→ Transformiert sich wie ein Tensor

Was ist mit  $\gamma_5$  - Termen?

verwende  $\gamma_5 \gamma^\mu = -i \gamma^2 \gamma^0 \gamma^1 \gamma^3 \gamma^\mu = -\gamma^\mu \gamma_5$

z.B.  $\gamma_5 \gamma^2 = -i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^2 = -i \gamma^2 \gamma^0 \gamma^1 \gamma^3 = -\gamma^2 \gamma_5$

$$\Rightarrow \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$$

$$\Rightarrow [\gamma_5, \sigma^{\mu\nu}] = 0 \Rightarrow [\gamma_5, S(\Lambda)] = 0$$

$\bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x)$  Transformiert sich wie ein Skalar:  $\bar{\psi}'(x') \gamma_5 \psi'(x') = \bar{\psi}(x) S^{-1}(\Lambda) \gamma_5 S(\Lambda) \psi(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x)$

$\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma_5 \psi(x)$  Transformiert sich wie ein Vektor:

$$\bar{\psi}'(x') \gamma^\mu \gamma_5 \psi'(x') = \bar{\psi}(x) S(\Lambda^{-1}) \gamma^\mu \gamma_5 S(\Lambda) \psi(x) \quad (6.79)$$

$$= \bar{\psi}(x) \underbrace{S(\Lambda^{-1}) \gamma^\mu S(\Lambda)}_{\Lambda^\mu_\alpha \gamma^\alpha} \gamma_5 \psi(x) \quad (6.80)$$

$$= \bar{\psi}(x) \Lambda^\mu_\alpha \gamma^\alpha \gamma_5 \psi(x) \quad (6.81)$$

$$= \Lambda^\mu_\alpha [\bar{\psi}(x) \gamma^\alpha \gamma_5 \psi(x)] \quad (6.82)$$

Pseudo-/Axial wegen Paritätstransformation (spezielle Lorenztrasformation)

$$x' = \Lambda x \quad x = (ct, \vec{x}) = x^\mu \quad x' = (ct, -\vec{x}) = x_\mu$$

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{\mu\nu}$$

Transformation von Spinoren: brauchen 4x4 Matrix P

$$P^{-1} \gamma^\nu P = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu = \gamma_\mu$$

Bei Spinoren:

$$\psi'(x') = P \psi(x) = \gamma^0 \psi(x)$$

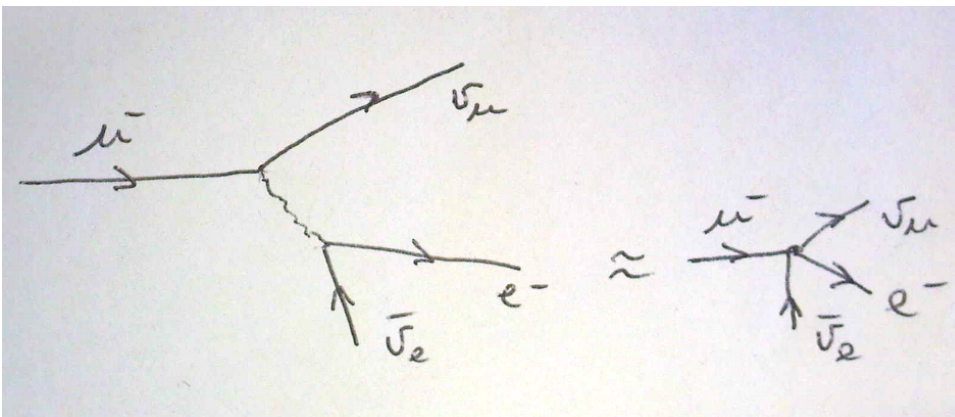
$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) P^{-1} = \bar{\psi}(x) \gamma^0$$

$$\Rightarrow P^{-1} \gamma_5 P = \gamma^0 \gamma_5 \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^0 \gamma_5 = -\gamma_5$$

$\Rightarrow \bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x)$  ist ungerade unter Permutation.

Anwendung: Paritätsverletzung in der schwachen Wechselwirkung.  $\Rightarrow$  z.B.  $\mu^-$ -Zerfall

$$\mu^-(P) \rightarrow \nu_\mu(P_i) + e^-(k_1) + \bar{\nu}_e(k_2)$$



$$T = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \underbrace{\bar{\psi}(p_2)\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi(p_1)}_{J^{\text{myon}}} \underbrace{\bar{\psi}(k_1)\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi(k_2)}_{J^{\text{elektron}}}$$

$J^{\text{myon}} \cdot J^{\text{elektron}} = \text{Lorenz-Skalar?} \rightarrow \text{Parität:}$

$$T \rightarrow T' = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\psi}'(p'_2)\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi'(p'_1)\bar{\psi}'(k'_1)\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi'(k'_2) \quad (6.83)$$

$$= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\psi}(p_2) \underbrace{P^{-1}\gamma^\mu(1-\gamma_5)P}_{\gamma^\mu(1+\gamma_5)} \psi(p_1) \bar{\psi}(k_1) \underbrace{P^{-1}\gamma^\mu(1-\gamma_5)P}_{\gamma_\mu(1+\gamma_5)} \psi(k_2) \quad (6.84)$$

$$= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\psi}(p_2)\gamma^\mu(1+\gamma_5)\psi(p_1)\bar{\psi}(k_1)\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi(k_2) \quad (6.85)$$

$$\neq T \quad (6.86)$$

$$(6.87)$$

$\beta$ -Zerfall: sehr ähnlich, jedoch Koeffizienten  $c_\mu, c_\lambda$  für Nukleonen

### 6.3 Die Bedeutung der omega Parameter

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}(\omega^{12}\sigma_{12} + \omega^{21}\sigma_{21})} = e^{-\frac{i}{2}\omega^{12}\sigma_{12}}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma_{12} &= \frac{1}{2} \frac{i}{2} [\gamma_1, \gamma_2] = \frac{i}{4} \underbrace{\left[ \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \right]}_{= \begin{pmatrix} -[\sigma_1, \sigma_2] & 0 \\ 0 & -[\sigma_1, \sigma_2] \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_3}{2} \end{pmatrix} = \frac{S_z}{\hbar} \end{aligned}$$

mit  $\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  allgemeiner:

$$\frac{1}{2} \sum_k = \frac{S_k}{\hbar} = \frac{1}{4} \epsilon^{ijk} \sigma_{ij} = \frac{1}{2} \gamma_5 \alpha_k$$

$\omega_1$  und  $\omega_3$  sind EZ von  $S_z$  zu  $+\frac{\hbar}{2}$ ;  $\omega_2$  und  $\omega_4$  sind EZ von  $S_z$  zu  $-\frac{\hbar}{2}$ ;

Jetzt boost in Bezugssystem mit Geschwindigkeit  $\vec{v}$

Dazu

$$\omega^{\mu\nu} = \omega \cdot \begin{pmatrix} 0 & +n_1 & +n_2 & +n_3 \\ -n_1 & 0 & 0 & 0 \\ -n_2 & 0 & 0 & 0 \\ -n_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}^2 = 1$$

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}} = e^{-\frac{i}{2}\sum_j \omega^{0j}\sigma_{0j}} = e^{-\frac{1}{2}\omega\vec{n}\vec{\alpha}}$$

$$\text{mit } \sum_j \omega^{0j}\sigma_{0j} = \omega \vec{n} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \beta \\ -\beta\vec{\alpha} \end{pmatrix}}_{-2\vec{\alpha}}$$

Verschiebung von  $\omega^{\mu\nu}$  und  $\vec{v}$

$$\Lambda_\nu^\mu : \quad \Lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(g + \frac{\omega}{N}\right)^N = \exp \left\{ \omega \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -n_1 & -n_2 & -n_3 \\ -n_1 & 0 & 0 & 0 \\ -n_2 & 0 & 0 & 0 \\ -n_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_I \right\}$$

Spezialfall  $n_1 = 1, n_2 = n_3 = 0$

$$I^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad I = I^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad etc.$$

$$\text{mit } e^x = \frac{e^x}{2} + \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} - \frac{e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \cosh(x) + \sinh(x)$$

$$\Lambda = e^{\omega I} = \cosh(I\omega) + \sinh(I\omega) \quad (6.88)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega I)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega I)^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (6.89)$$

$$= \omega^0 I^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\omega I)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega I)^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (6.90)$$

$$= \omega^0 I^0 + I^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega^{2k}}{(2k)!} + I \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (6.91)$$

$$= \omega^0 I^0 + I^2 \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega^{2k}}{(2k)!} + \frac{\omega^0}{(0)!} - \frac{\omega^0}{(0)!} \right) + I \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (6.92)$$

$$= \omega^0 I^0 + I^2 \left( \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^{2k}}{(2k)!}}_{\cosh(\omega)} - \frac{\omega^0}{(0)!} \right) + I \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\sinh(\omega)} \quad (6.93)$$

$$= \mathbb{1} + I^2 (\cosh(\omega) - 1) + I \cdot \sinh(\omega) \quad (6.94)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cosh(\omega) - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\omega) - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sinh(\omega) & 0 & 0 \\ -\sinh(\omega) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.95)$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh\omega & -\sinh\omega & 0 & 0 \\ -\sinh\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.96)$$

vergleiche  $x'^{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} x^{\mu}$

$$x^{0'} = \cosh(\omega)(x^0 - \tanh(\omega)x^1) = \gamma(ct - \frac{v}{c^2}x)$$

$$x^{1'} = \cosh(\omega)(x^1 - \tanh(\omega)x^0) = \gamma(x - \frac{v}{c}ct)$$

$$\Rightarrow \tanh\omega = \frac{v}{c} = \frac{|\vec{p}|^2}{E}$$

$$\cosh\omega = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E}{mc^2}$$

$\Rightarrow$  Allgemeiner Fall  $\vec{n} = \hat{v}$ ;  $\tanh\omega = \frac{v}{c}$

$$\text{Rapidity} = \frac{1}{2} \ln \frac{E + |\vec{p}|c}{E - |\vec{p}|c} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \tanh\omega}{1 - \tanh\omega} = \frac{1}{2} \ln \frac{\cosh\omega + \sinh\omega}{\cosh\omega - \sinh\omega} = \frac{1}{2} \ln \frac{e^{\omega}}{e^{-\omega}} = \omega$$

### 6.3.1 Ebene-Wellen-Lösung zu allg. Impuls

$$(i\cancel{\partial} - \frac{mc}{\hbar})\psi(x) = 0$$

Lösung mit  $\psi(x) = e^{-i\frac{p_x}{\hbar}} \omega(\vec{p})$   
 $\vec{p}$  in Ruhe

$$E = +mc^2 \quad \omega_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E = -mc^2 \quad \omega_3(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_4(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Besser für Teilchenwellenfunktionen immer  $E > 0$ , d.h.

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = (+\sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2}, \vec{p})$$

Lsg pos. Energie  $\psi(x) = e^{-i\frac{p_x}{\hbar}} \omega_i(\vec{p})$  mit  $i=1,2$

Lsg neg. Energie  $\psi(x) = e^{+i\frac{p_x}{\hbar}} \omega_i(\vec{p})$  mit  $i=3,4$

$$\Rightarrow (\not{p} - mc)\omega_i(\vec{p}) = 0 \quad i = 1, 2$$

$$\Rightarrow (\not{p} + mc)\omega_i(\vec{p}) = 0 \quad i = 3, 4$$

Jetzt  $\omega_i(\vec{p})$  durch boost von  $\omega_i(0)$  entlang der  $\vec{p}$ -Richtung:

ungestricheltes System = Ruhesystem des Teilchens gestricheltes System = Teilchen bewegt sich in  $\vec{p}$ -Richtung

$\Rightarrow$  boost in  $-\vec{p}$ -Richtung um Teilchen in Bewegung zu setzen

$$\Rightarrow \omega_\nu(\vec{p}) = S(\Lambda)\omega_\nu(0) = e^{\frac{1}{2}\omega\hat{p}\vec{\alpha}}\omega_\nu(0)$$

Diese  $\omega_\nu(\vec{p})$  ist der Spinor der Elektornen mit Impuls  $\vec{p}$  und Spin in Ruhesystem in  $\pm z$ -Richtung beschreibt

$$\hat{p}\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{p}\vec{\sigma} \\ \hat{p}\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\hat{p}\vec{\alpha})^2 = \begin{pmatrix} (\hat{p}\vec{\sigma})^2 & 0 \\ 0 & (\hat{p}\vec{\sigma})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{2}\omega\hat{p}\vec{\alpha}} = \cosh\frac{\omega}{2} \mathbb{1} + \sinh\left(\frac{\omega}{2}\right)(\hat{p}\vec{\alpha})$$

$$\cosh\frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cosh\omega}{2}} = \sqrt{\frac{1 + E/mc^2}{2}} = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}}$$

$$\sinh\frac{\omega}{2} = \sqrt{\cosh^2\frac{\omega}{2} - 1} = \sqrt{\frac{E - mc^2}{2mc^2}} = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2} \frac{(E - mc^2)(E + mc^2)}{(E + mc^2)}} = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \frac{|\vec{p}|c}{E + mc^2}$$

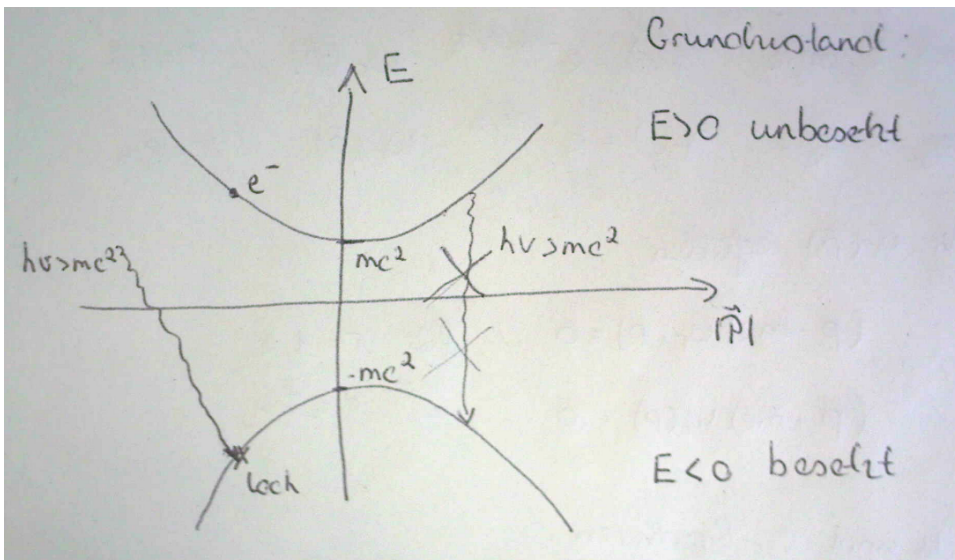
$$S(\Lambda) = e^{\frac{1}{2}\omega\hat{p}\vec{\alpha}} = \cosh\frac{\omega}{2} \left( \mathbb{1} + \frac{c\hat{p}\vec{\alpha}}{E + mc^2} \right) \quad (6.97)$$

$$= \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{cp_+}{E + mc^2} & -\frac{cp_-}{E + mc^2} \\ 0 & 1 & \frac{cp_+}{E - mc^2} & -\frac{cp_-}{E + mc^2} \\ \frac{cp_z}{E + mc^2} & \frac{c(p_x - ip_y)}{E + mc^2} & 1 & 1 \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{E + mc^2} & -\frac{cp_z}{E + mc^2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.98)$$

$$= (\omega_1(\vec{p}), \omega_2(\vec{p}), \omega_3(\vec{p}), \omega_4(\vec{p})) \quad (6.99)$$

mit  $p_\pm = p_x \pm ip_y$

## 6.4 Der Diracsee



Grundzustand:

$E > 0$  unbesetzt

$E < 0$  alle besetzt  $\Rightarrow$  Pauli Prinzip verbietet Übergänge von  $E > 0 \rightarrow E < 0$

Elektron: Zustand mit  $E > mc^2$ , Ladung  $-|e|$ , Spin  $S_z$

Loch: es fehlt Elektron mit  $E < 0$

Gegenüber Grundzustand: Energieerhöhung um  $-E = +\sqrt{m^2c^4 + (\vec{p}c)^2}$

Ladung  $+|e|$  Spin  $-S_z$

$\rightarrow$  Positronen mit positiver Ladung  $E > 0$

Lösungen der Dirac Gl:  $E = p^0 = +\sqrt{m^2c^4 + (\vec{p}c)^2}$

pos. Energie:  $\psi(x) = e^{-ipx/\hbar} w_r(\vec{p})$  mit  $r = 1, 2$

neg. Energie:  $\psi(x) = e^{+ipx/\hbar} w_r(\vec{p})$  mit  $r = 3, 4$

Die  $w_r(\vec{p})$  erfüllen

$$(\not{p} - mc)w_r(\vec{p}) = 0 \quad \text{für } r = 1, 2$$

$$(\not{p} + mc)w_r(\vec{p}) = 0 \quad \text{für } r = 3, 4$$

u und v Spinoren

Ruhesystem des  $e^\pm$ :  $\vec{p}^\mu = (mc, \vec{0})$  4 Impuls

$\vec{S}^\mu = (0, \vec{S})$  ( $\vec{S}^2 = 1$   $\vec{S}$  Quant. achse)

Boost in IS in dem  $p^0 = +\sqrt{(mc^2)^2 + (\vec{p}c)^2} \quad : \quad \Lambda_\nu^\mu$

$$p^\mu = \Lambda_\nu^\mu \bar{p}^\nu, \quad s^\nu = \Lambda_\nu^\mu \bar{s}^\nu$$

$$\Rightarrow p^2 = m^2c^2, \quad p \cdot s = \bar{p} \cdot \bar{s} = 0, \quad s^2 = -1$$

$$e^- : \quad \psi(x) = e^{-ipx/\hbar} u(p, \pm s)$$

$$e^+ : \quad \psi(x) = e^{+ipx/\hbar} v(p, \pm s)$$

Für  $\vec{S} = \hat{z}$ :

Elektron:

$$w_1(\vec{p}) = u(p, +s)$$

$$w_2(\vec{p}) = u(p, -s)$$

Positron:

$$w_3(\vec{p}) = v(p, -s)$$

$$w_4(\vec{p}) = v(p, +s)$$

Normierung der  $u, v$   $\epsilon, \epsilon' = \pm 1$

$$\bar{u}(p, \epsilon s) u(p, \epsilon' s) \stackrel{L.I.}{=} \bar{u}(\bar{p}, \epsilon \bar{s}) u(\bar{p}, \epsilon' \bar{s}) = w_{r(\epsilon)}^+(\vec{0}) \gamma^0 w_{r'(\epsilon')}(0) = \delta_{\epsilon \epsilon'}$$

$$\bar{u}(p, \epsilon s) v(p, \epsilon' s) = 0$$

$$\bar{v}(p, \epsilon s) v(p, \epsilon' s) = -\delta_{\epsilon' \epsilon} \quad \text{wegen } \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vollständigkeit

Jeder Spinor kann als Linearkombination von  $u(p, s), u(p, -s), v(p, s), v(p, -s)$  geschrieben werden.

$$\Rightarrow \sum_{\epsilon'} u_A(p, \epsilon' s) \bar{u}_B(p, \epsilon' s) = \left( \frac{\not{p} + mc}{2mc} \right)_{AB} = (\Lambda_+(p))_{AB}$$

Bew: Angewendet auf  $u, v$  Spinoren, geben beide Matrizen gleiches Ergebnis

$$\frac{\not{p} + mc}{2mc} u(p, \epsilon s) = \frac{\not{p} - mc + 2mc}{2mc} u(p, \epsilon s) = u(p, \epsilon s)$$

$$\frac{\not{p} + mc}{2mc} v(p, \epsilon s) = 0$$

Andererseits

$$\sum_{\epsilon'} u(p, \epsilon' s) \underbrace{\bar{u}(p, \epsilon s) u(p, \epsilon s)}_{\delta_{\epsilon' \epsilon}} = u(p, \epsilon s)$$

$$\sum_{\epsilon} u(p, \epsilon' s) \underbrace{\bar{u}(p, \epsilon' s) v(p, \epsilon s)}_{=0} = 0$$

Analog für  $v$  Spinoren

$$\sum_{\epsilon'} u_A(p, \epsilon' s) \bar{u}_B(p, \epsilon' s) = \left( \frac{\not{p} - mc}{2mc} \right)_{AB}$$

$$\text{denn } \sum_{\epsilon'} v(p, \epsilon' s) \underbrace{\bar{v}(p, \epsilon' s) v(p, \epsilon s)}_{-\delta_{\epsilon' \epsilon}} = -v(p, \epsilon s)$$

$$\left( \frac{\overbrace{\not{p}}^{-mc} - mc}{2mc} \right) v(p, \epsilon s) = -v(p, \epsilon s)$$

$\Lambda_+(p)$  ist Projektor auf Zustände pos. Energie  $e^-$

$\Lambda_-(p)$  ist Projektor auf Zustände neg. Energie  $e^+$

Beweis: z.Z:  $\Lambda_{\pm}^2 = \Lambda_{\pm}$ ,  $\Lambda_+ \Lambda_- = 0$ ,  $\Lambda_+ + \Lambda_- = \mathbb{1}$  mit  $\not{p}^2 = p^2$

$$\Lambda_{\pm} = \frac{mc \pm \not{p}}{2mc} \Rightarrow \Lambda_{\pm}^2 = \frac{m^2 c^2 \pm 2mc \not{p} + p^2}{(2mc)^2} = 2mc \frac{mc \pm \not{p}}{(2mc)^2} = \Lambda_{\pm}$$

$$\Lambda_+ \Lambda_- = \frac{mc + \not{p}}{2mc} \frac{mc - \not{p}}{2mc} = \frac{(mc)^2 - p^2}{(2mc)^2} = 0$$

$$\Lambda_+ + \Lambda_- = \frac{mc + \not{p} + mc - \not{p}}{2mc} = \mathbb{1}$$

## 6.5 Ladungskonjugation

Dirac Gl. sollte auch für Positronen als Teilchen, Elektronen als Antiteilchen existieren. (mit Spinor  $\psi_C$ )

$$(i\hbar \not{\partial} + \underbrace{e\cancel{A}}_{-q_e + \cancel{A}} - mc)\psi_C(x) = 0$$

( $e$  = Ladungsvorzeichen  $e^-$ )

Ges. Beziehung zur Dirac Gl. für  $e^-$

$$i\hbar \not{\partial} - e\cancel{A} - mc)\psi(x) = 0$$

$$\Rightarrow [-(i\hbar \partial_\mu + eA_\mu)\gamma^{*\mu} - mc]\psi^*(x) = 0 \quad | \cdot C\gamma^0$$

Transformation mit Matrix  $C\gamma^0$

$$\Rightarrow [(i\hbar \partial_\mu + eA_\mu)(-C\gamma^0\gamma^{*\mu}((\gamma^0)^{-1} - mc)C\gamma^0\psi^*(x) = 0$$

gesucht  $C$  mit  $C\gamma^0\gamma^{*\mu}(C\gamma^0)^{-1} = -\gamma^\mu$  !

Dann ist  $\psi_C(x) = C\gamma^0\psi^*(x) = C(\gamma^0)^T(\psi^\dagger)^T = C(\psi^\dagger\gamma^0)^T = C\bar{\psi}^T(x)$

die Matrix  $C = i\gamma^2\gamma^0$  tut's !

$$\Rightarrow C\gamma^0 = i\gamma^2\gamma^0\gamma^0 = i\gamma^2 = (C\gamma^0)^{-1}, \quad (\gamma^2)^2 = -\mathbb{1}, \quad (i\gamma^2)^2 = +\mathbb{1}$$

$$C\gamma^0(\gamma^\mu)^*(C\gamma^0)^{-1} = i\gamma^2\gamma^{*\mu}i\gamma^2 = -\gamma^2\gamma^{*\mu}\gamma^2 = \begin{cases} \mu = 2 : & -\gamma^2(-\gamma^2)\gamma^2 = -\gamma^2 \\ \text{sonst} & -\gamma^2 \underbrace{\gamma^\mu\gamma^2}_{-\gamma^2\gamma^\mu} = -\gamma^\mu \end{cases}$$

Es gilt auch

$$C\bar{u}^T(p, s) = v(p, s) \cdot e^{i\alpha}$$

$$C\bar{v}^T(p, s) = u(p, s) \cdot e^{i\alpha'}$$