Contents

Chapter 6

Relativistische QM

Notation: Vierer-Vektoren

$$x^\mu = (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{r})$$

invariante Länge $\sqrt{x^2}$

$$x^2 = x \cdot x = x^\mu x_\mu = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu$$

Einsteinsche Summenkonvention: $\sum_{\mu=0}^{3}$ für jedes Paar von oberen und unteren Index
Metrischer Tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -\vec{r})$$

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu = g^{\mu\nu} x^\nu = g^\nu{}_\nu x^\nu$$

$$g^\nu{}_\nu = \delta^\nu \ {}_\nu = \begin{cases} 1, & \mu = \nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} \to g^{\mu\nu} = [g_{\mu\nu}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vierer-Impuls: $p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p})$ mit $E = \sqrt{(mc^2)^2 + (\vec{p}c)^2}$

$$p^2 = p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = \frac{m^2c^4 + \vec{p}^2 c^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2c^2$$

Vierer-Potential: Lorenz-Transformation $x^{'\mu} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$

$$A^\mu = (\frac{\phi}{c}, \vec{A}) \qquad \to A^{'\mu}(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x)$$

Strom: $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$ in E und M
Skalarprodukt für a^μ, b^μ : $\qquad a \cdot b = a^\mu b_\mu = a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$
Ableitung nach x^ν

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla})$$

ist kovarianter Vektor (Index unten) wegen: $\partial_\mu a \cdot x = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(a_\nu x^\nu) = a_\mu$
Entsprechend $\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla})$
d'Alebert Operator

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$$

6.0.1 QM eines freien Teilchens

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$$

$$p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p}) \to (i\hbar\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar\vec{\nabla}) = i\hbar\partial^\mu$$

Schrödinger Gl. für nicht relativistisches freies Teilchen (ohne Potential)

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\psi(\vec{x}, t)$$

Relativistischer Fall

1) $E = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2} \to$ nichtlokaler Operator
2) $\frac{E^2}{c^2} = m^2c^2 + \vec{p}^2 \to -\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = m^2c^2\psi - \hbar^2\vec{\nabla}^2\psi$

$$-\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = m^2c^2\psi - \hbar^2\vec{\nabla}^2\psi$$

$$\Leftrightarrow 0 = m^2c^2\psi + \hbar^2\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\psi \tag{6.1}$$

$$0 = m^2c^2\psi + \hbar^2\Box\psi \tag{6.2}$$

Klein Gordon Gleichung:

$$\boxed{\left(\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)\psi(x) = 0}$$

Anwendbar auf skalare Teilichen (Spin 0) wie $\pi^+, \pi^-, \pi^0, K, H$
Lösungen der KG-Gl. durch ebene Wellen

$$\psi_p(x) = Ne^{-ip\cdot x/\hbar} = Ne^{-iEt/\hbar}e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}$$

mit $p \cdot x = p^\mu x_\mu = Et - \vec{p}\cdot\vec{x}$

$$\Box\psi_p(x) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi_p(x) = N(-\frac{i}{\hbar}p_\mu)(-\frac{i}{\hbar}p^\mu)e^{-ip\cdot x/\hbar} = -\frac{p^2}{\hbar^2}\psi_p$$

Klein Gordon Gleichung:

$$\Rightarrow \left(-\frac{p^2}{\hbar^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi_p(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow p^2 = m^2c^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2$$

$$\to E = \pm c\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2}$$

Lösungen mit Negativer Energie und das Energiespektrum ist nach unten nicht beschränkt.

6.0.2 Wahrscheinlichkeitserhaltung

Kontinuitäts-Gleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu j^\mu = 0$$

mit $j^\mu = (\rho c, \vec{j})$ und $\partial_\mu = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla})$.
Gibt es einen erhaltenen 4-Strom für die lösung der Klein-Gordon-Gleichung?

$$\psi^*(\Box + (\frac{mc}{\hbar})^2)\psi(x) - \psi(\Box + (\frac{mc}{\hbar})^2)\psi^*(x) = 0$$

$$\psi^*\Box\psi(x) + \psi^*(x)(\frac{mc}{\hbar})^2\psi(x) - \psi\Box\psi^*(x) - \psi(x)(\frac{mc}{\hbar})^2\psi^*(x) = 0$$

$$\psi^*\Box\psi(x) - \psi\Box\psi^*(x) + \cancel{|\psi(x)|^2(\frac{mc}{\hbar})^2} - \cancel{|\psi(x)|^2(\frac{mc}{\hbar})^2} = 0$$

mit $\Box\psi = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi$

$$\psi^*(\partial_\mu\partial^\mu\psi) - \psi(\partial_\mu\partial^\mu\psi^*) = 0$$

$$\partial_\mu(\underbrace{\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\psi^*}_{\propto j^\mu}) = 0$$

$$j^\mu \propto (\psi^*\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\psi - \psi\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\psi^*, -(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*))$$

Kandidat für Wahrscheinlichkeits Strom $\frac{2im}{\hbar}\vec{j}$ in Schrödinger Gl

$$j^\mu = \frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\psi^*)$$

$$\rightarrow j^0 = \rho c = \frac{i\hbar}{2mc}(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t})$$

Anwendung auf stationäre Lösung: $\psi_E(x) = e^{-iEt/\hbar}\psi_E(\vec{x})$

$$\frac{\partial\psi_E}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar}\psi_E, \frac{\partial\psi_E^*}{\partial t} = \frac{iE}{\hbar}\psi_E^*$$

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}(\psi_E^*\frac{\partial\psi_E}{\partial t} - \psi_E\frac{\partial\psi_E^*}{\partial t}) \tag{6.3}$$
$$= \frac{i\hbar}{2mc^2}(-\psi_E^*\frac{iE}{\hbar}\psi_E - \psi_E\frac{iE}{\hbar}\psi_E^*) \tag{6.4}$$
$$= \frac{i\hbar}{2mc^2}|\psi_E(\vec{x})|^2\frac{-2iE}{\hbar} \tag{6.5}$$
$$= \frac{E}{mc^2}|\psi_E(x)|^2 \tag{6.6}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho = \frac{E}{mc^2}|\psi_E(x)|^2}$$

$\rho < 0$ für Zustände mit $E < 0$
$\Rightarrow$ Keine mögliche Wahrscheinlichkeitsdichte. (Ok für Zustände mit positiver Energie)

Interpretation: Zustände mit $E > 0 \Leftrightarrow$ z.B. π^+ und $E < 0 \Leftrightarrow$ z.B. π^-(Antiteilchen zum π^+)

$\rho > 0$: π^+ dominieren $\rho < 0$: π^- dominieren

$\rho \propto$ elektromagn. Ladungsdichte

$$j^\mu = |e| \frac{i\hbar}{2mc} (\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*)$$

Elektronen: Spin
$\rightarrow$ Wellenfunktion $\psi(x)$ hat ≥ 2 Komponenten

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ ... \\ \psi_N(x) \end{pmatrix}$$

Möglichkeit: Matrixstruktur für $\hat{H}$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = \hat{H} \psi(x)$$

Ansatz: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi$ mit $\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ ... \\ \psi_N(x) \end{pmatrix}$
und Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho = \sum_{i=1}^N |\psi_i|^2$

$$\Rightarrow \hat{H} \propto \frac{\partial}{\partial x^i} \propto \hat{p}_i$$

Ansatz für $\hat{H}$

$$\hat{H} = c(\alpha_x \hat{p}_x + \alpha_y \hat{p}_y + \alpha_z \hat{p}_z) + \beta mc^2 = c \sum_{i=1}^3 \alpha_i \hat{p}_i + \beta mc^2$$

Ebene Wellenlösung für freie Teilchen

$$\psi(x) = e^{-px/\hbar} \psi(p)$$

mit $p^2 = m^2 c^2$

$$\Rightarrow E\psi(p) = [c \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta mc^2] \psi(p)$$

$$\begin{aligned}
E^2 \psi(p) &= E \cdot [c \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta mc^2] \psi(p) && (6.7) \\
&= [c \sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j + \beta mc^2] \cdot [c \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta mc^2] \psi(p) && (6.8) \\
&= c^2 [\sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j + \beta mc] \cdot [\sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta mc] \psi(p) && (6.9) \\
&= c^2 \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j \beta mc + \beta mc \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta^2 m^2 c^2 \right) \psi(p) && (6.10) \\
&= c^2 \left(\sum_{i,j=1}^3 \alpha_i \alpha_j p_i p_j + \sum_{i=1}^3 (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i mc + \beta^2 m^2 c^2 \right) \psi(p) && (6.11) \\
&\overset{!}{=} c^2 (m^2 c^2 + \vec{p}^2) \psi(p) && (6.12)
\end{aligned}$$

Koeffizienfenvergleich:

- $\boxed{\beta^2 = 1}$
- Antikommutator: $\boxed{\{\alpha_i, \beta\} = 0}$
- $i \neq j$: z.B: $p_x p_y \{\alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x\}$; $\{\alpha_i, \alpha_j\} = 0$
- $i = j$: $\alpha_x^2 p_x^2 + \alpha_y^2 p_y^2 + \alpha_z^2 p_z^2 = \vec{p}^2 \Rightarrow \alpha_i^2 = 1$

$$\Rightarrow \boxed{\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}}$$

1) $\hat{p}_i, \hat{H}$ hermitesch $\Rightarrow \vec{\alpha}, \beta$ hermitesch
2) $\alpha_i^2 = 1, \beta^2 = 1 \Rightarrow$ Eigenwerte von α_i, β sind ± 1
3) $\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \qquad | \cdot \beta$

$$\Rightarrow \alpha_i = -\beta \alpha_i \beta \Rightarrow Tr[\alpha_i] = -Tr[\beta \alpha_i \beta] = -Tr[\alpha_i \beta^2] = -Tr[\alpha_i]$$

(Info: # = Anzahl; N = Dimension der Matrix)

EW +1 = # EW -1

$\Rightarrow N$ gerade ($N = 2, 4, ...$)
$N = 2 \Rightarrow 3$ Pauli Matrizen. Als Kandidaten werden benötigt: 4x4 Matrizen $\Rightarrow N \geq 4 : N = 4$ funktioniert
$N = 4$: Dirac Basis: β diagonal

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

α_i hermitesch + $\{\alpha_i, \beta\} = 0$

$$\alpha = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$A = D = 0$, $C = B^\dagger$

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} A & -B \\ C & -D \end{pmatrix} \qquad \beta\alpha = \begin{pmatrix} A & B \\ -C & -D \end{pmatrix}$$

$$A = D = 0 \qquad C = B^\dagger$$

$$\Rightarrow \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \tau_i \\ \tau_i^\dagger & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \Leftrightarrow \tau_i \tau_j^\dagger + \tau_j \tau_i^\dagger = 2\delta_{ij}$$

Lösung $\tau_i = \sigma_i =$ Pauli Matrizen

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}; \qquad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}}$$

6.1 Dirac Gleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = c(\vec{\alpha}\cdot\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + \beta mc)\psi(x) \qquad |\cdot\frac{\beta}{\hbar c}$$

Alternativ: kovariante Form

$$\Rightarrow i\beta\underbrace{\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}}_{\frac{\partial}{\partial x^0}}\psi + i\underbrace{\beta\vec{\alpha}_i}_{\gamma^i}\cdot\underbrace{\vec{\nabla}_i}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\psi - \frac{mc}{\hbar}\psi = 0$$

$$\Rightarrow (i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{mc}{\hbar})\psi = 0$$

$\gamma^0 = \beta$; $\gamma^i = \beta\alpha_i$

$$\boxed{\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0}$$

Kovariante Form der Dirac Gleichung mit $\boxed{\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}_4$

z.B. $\{\gamma^i,\gamma^j\} = \beta\underbrace{\alpha_I\beta}_{-\beta\alpha_i}\alpha_j + \beta\underbrace{\alpha_j\beta}_{-\beta\alpha_j}\alpha_i = -\{\alpha_i,\alpha_j\} = -2\delta_{ij}$

6.1.1 Wahrscheinlichkeitsstrom

$$\psi^\dagger\cdot| \qquad i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i}\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\psi + \beta mc^2\psi \tag{6.13}$$

adjungierte Dirac Gleichung:

$$-i\hbar\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t} = -\frac{\hbar c}{i}(\vec{\nabla}\psi^\dagger)\vec{\alpha} + \beta mc^2\psi^\dagger \qquad |\cdot\psi \tag{6.14}$$

Differenz der beiden Gleichungen 6.13 − 6.14:

$$\underbrace{i\hbar(\frac{\partial}{\partial t}\psi^\dagger)\psi + i\hbar\psi^\dagger(\frac{\partial}{\partial t}\psi)}_{\text{Produktregel} \quad = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\psi^\dagger\psi)} = \underbrace{\frac{\hbar c}{i}(\psi^\dagger\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\psi + (\vec{\nabla}\psi^\dagger)\vec{\alpha}\psi)}_{\text{Produktregel} \quad = -c\vec{\nabla}(\psi^\dagger\vec{\alpha}\psi)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\psi^\dagger\psi) = -c\vec{\nabla}(\psi^\dagger\vec{\alpha}\psi)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{(\psi^\dagger\psi)}_{\rho} + \vec{\nabla}\cdot(\underbrace{c\psi^\dagger\vec{\alpha}\psi}_{\vec{j}}) = 0$$

$$\rho = \psi^\dagger\psi = \sum_i|\psi_i|^2 \geq 0$$

ρ ist positiv definierte Warscheinlichkeitsdichte
Kovariante Form des Warhscheinlichkeits-Stroms

$$\begin{aligned}
j^\mu &= (c\rho, \vec{j}) && (6.15)\\
&= (c\underbrace{\psi^\dagger\psi}_{\equiv\rho}, c\psi^\dagger\beta\beta\vec{\alpha}\psi) && (6.16)\\
&= (c\psi^\dagger\underbrace{\beta\gamma^0}_{\mathbb{1}}\psi, c\psi^\dagger\beta\vec{\gamma}\psi) && (6.17)\\
&= c\psi^\dagger\beta\gamma^\mu\psi && (6.18)\\
&= c\overline{\psi}\gamma^\mu\psi && (6.19)
\end{aligned}$$

wobei $\overline{\psi} = \psi^\dagger\beta = \psi^\dagger\gamma^0$ der Pauli adungierte Spinor ist.

6.1.2 Elektromagnetische Wechselwirkung

externe $\vec{E}, \vec{B}$ Fleder $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$$\rightarrow A^\mu = (\frac{\phi}{c}, \vec{A})$$

minimale Subsittution:

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - eA^\mu \quad \xrightarrow{QM} i\hbar\partial^\mu - eA^\mu = i\hbar(\partial^\mu + \frac{ie}{\hbar}A^\mu) = i\hbar D^\mu$$

Komponenten der Kovarianten Ableitung D^μ

$$i\hbar D^\mu = (i\hbar\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{c}\phi, \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e\vec{A}) \tag{6.20}$$

$$= (\frac{i}{c}(c\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\phi), \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e\vec{A}) \tag{6.21}$$

Einsetzen in die Dirac-Gleichung:

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = c\vec{\alpha}(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e\vec{A})\psi + \beta mc^2\psi + e\phi\psi} \tag{6.22}$$

oder ersetze in freier Dirac-Gleichung $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$

$$\boxed{(i\gamma^\mu D_\mu - \frac{mc}{\hbar})\psi = 0} \tag{6.23}$$

Diese Gleichung beschreibt Wechselwirkung eines Elektrons der Ladung e mit dem elektromagnetischen Feld.
Notation: $\vec{\alpha}\vec{p}\psi = \frac{\hbar}{i}\vec{\alpha}\vec{\nabla}\psi$

mit $A = 1...4$ $[\vec{\alpha}\vec{p}\psi]_A = \sum_{j=1}^{3}\sum_{B=1}^{4}\alpha_{jAB}\frac{\hbar}{i}\nabla_i\psi_B(\vec{x},t) = \left[\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\vec{p} \\ \vec{\sigma}\vec{p} & 0 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}\psi_1 \\ \psi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_3 \\ \psi_4\end{pmatrix}\right)\right]_A$

Nichtrelativistischer Grenzfall: $E = mc^2 + E_S$ mit E_S =als Schrödigner Energie.
Ansatz:

$$\psi(\vec{x},t) = e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t}\begin{pmatrix}\phi(\vec{x},t) \\ \chi(\vec{x},t)\end{pmatrix} = e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t}e^{i\frac{E_S}{\hbar}t}\begin{pmatrix}\phi_E(\vec{x}) \\ \chi_E(\vec{x})\end{pmatrix}$$

Einsetzen in die Dirac-Gleichung (6.22) für Teilchen im Elektromagnetischem Feld:

$$\Rightarrow i\hbar\begin{pmatrix}\dot{\phi} \\ \dot{\chi}\end{pmatrix} + mc^2\begin{pmatrix}\phi \\ \chi\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}\vec{\sigma}\vec{\pi}\vec{\chi} \\ \vec{\sigma}\vec{\pi}\phi\end{pmatrix} + mc^2\begin{pmatrix}\phi \\ -\chi\end{pmatrix} + e\Phi\begin{pmatrix}\phi \\ \chi\end{pmatrix}$$

mit $\vec{\pi} = \vec{p} - e\vec{A} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e\vec{A} = \frac{\hbar}{i}\vec{\mathcal{D}}$ und Φ als Skalares-Potential (ϕ)

$$\Rightarrow i\hbar\dot{\phi} = c\vec{\sigma}\vec{\pi}\chi + e\Phi\phi \tag{6.24}$$

$$\Rightarrow 2mc^2\chi + i\hbar\dot{\chi} - e\Phi\chi = c\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi \tag{6.25}$$

$$2mc^2\chi + \underbrace{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}}_{=E_S}\chi - \underbrace{e\Phi}_{V}\chi = c\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi \tag{6.26}$$

(6.26) vereinfacht ergibt:

$$\chi = \frac{1}{2mc^2 + E_S - V}c\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi \approx \frac{1}{2mc^2}c\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi \approx \frac{mv}{2mc}\phi = \frac{1}{2}\frac{v}{c}\phi$$

χ ist eine kleine Komponente des Dirac Spinors. Einsetzen von χ in (6.24):

$$i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{c^2(\vec{\sigma}\vec{\pi})^2}{2mc^2}\phi + V\phi \qquad (V = e\Phi)$$

Berechnung von $(\vec{\sigma}\vec{\pi})^2 = -\hbar^2\sigma_i\sigma_j D_i D_j$ mit $\sigma_i\sigma_j = \frac{1}{2}[\sigma_i, \sigma_j] + \frac{1}{2}\{\sigma_i, \sigma_j\} = i\hbar^2\epsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}$:

$$(\vec{\sigma}\vec{\pi})^2 = \vec{\pi}^2 - i\hbar^2\epsilon_{ijk}\sigma_k \underbrace{D_i D_j}_{\frac{1}{2}[D_i, D_j]}$$

$$[D_i, D_j] = [\nabla_i - \frac{i}{\hbar}eA_i, \nabla_j - \frac{i}{\hbar}eA_j] = -\frac{i}{\hbar}e(\underbrace{(\nabla_i A_j)}_{\vec{\nabla}\times\vec{A}}\underbrace{-(\nabla_j A_i)}_{\vec{\nabla}\times\vec{A}})$$

$$\Rightarrow (\vec{\sigma}\vec{\pi})^2 = \vec{\pi}^2 - \frac{1}{2}\hbar e\vec{\sigma}(\vec{\nabla}\times\vec{A})2 = \vec{\pi}^2 - 2e\vec{S}\vec{B} \qquad (\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma})$$

$$\rightarrow i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\pi^2}{2m}\phi - \frac{e}{2m}2\vec{S}\vec{B}\phi + V\phi$$

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m}\phi - \frac{e}{2m}2\vec{S}\vec{B}\phi + V\phi} \qquad \text{Pauli Gleichung}$$

Schwaches homogenes B-Feld: $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}$

$$\frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} \approx \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e}{2m}\vec{B}\vec{L}$$

$$\Rightarrow i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\vec{p}^2}{2m}\phi - \frac{e}{2m}\vec{B}(\vec{L} + 2\vec{S})\phi + V\phi$$

Magnetisches Moment des Elektrons: $\vec{\mu} = \frac{e}{2m}(\vec{L} + 2\vec{S})$ $g = 2$ für geladenes Dirac-Fermion

6.1.3 Relativistische Korrekturen

Energieeigenzustände: $\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}(\vec{x}, t) = e^{-E_s t/\hbar}\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}(\vec{x})$
Dirac Gleichung ist äquivalent zu

$$(2mc^2 + E_S - V)\chi = c\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi \tag{6.27}$$

$$E_S\phi = c\vec{\sigma}\vec{\pi}\chi + V\phi \tag{6.28}$$

χ wird Taylor-Entwickelt:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \chi &= \frac{1}{2mc^2 + E_S - V}c\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi && (6.29)\\
&= \frac{1}{2mc}\frac{1}{1 + \frac{E_S - V}{2mc^2}}\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi && (6.30)\\
&\approx \frac{1}{2mc}(1 - \frac{E_S - V}{2mc^2} + ...)\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi && (6.31)
\end{aligned}$$

Einsetzen von χ in (6.28):

$$E_S\phi = c\vec{\sigma}\vec{\pi}\frac{1}{2mc}(1-\frac{E_S-V}{2mc^2}+...)\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi + V\phi \tag{6.32}$$

$$(E_S-V)\phi = c\vec{\sigma}\vec{\pi}\frac{1}{2mc}(1-\frac{E_S-V}{2mc^2}+...)\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi \tag{6.33}$$

$$(E_S-V)\phi = \vec{\sigma}\vec{\pi}\frac{1}{2m}\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi - \vec{\sigma}\vec{\pi}\frac{1}{4m^2c^2}(E_S-V)\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi \tag{6.34}$$

Als Nebenrechnung:

$$(E_S-V)\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi = \vec{\sigma}\vec{\pi}(E_S-V)\phi + \vec{\sigma}\underbrace{[E_S-V,\vec{\pi}]}_{[\vec{\pi},V]=\frac{\hbar}{i}(\vec{\nabla}V)}\phi$$

Einsetzen:

$$(E_S-V)\phi = \vec{\sigma}\vec{\pi}\frac{1}{2m}\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi - \vec{\sigma}\vec{\pi}\frac{1}{4m^2c^2}\left(\vec{\sigma}\vec{\pi}(E_S-V)\phi + \vec{\sigma}\frac{\hbar}{i}(\vec{\nabla}V)\phi\right) \tag{6.35}$$

Mit dem Term $(E_S-V)\phi = \vec{\sigma}\vec{\pi}\frac{1}{2m}(1-...)\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi$ nur bis zur nullter Ordnung Taylor entwickelt eingesetzt:

$$(E_S-V)\phi = \vec{\sigma}\vec{\pi}\frac{1}{2m}\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi - \vec{\sigma}\vec{\pi}\frac{1}{4m^2c^2}\left(\vec{\sigma}\vec{\pi}\cdot\vec{\sigma}\vec{\pi}\frac{1}{2m}\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi + \vec{\sigma}\frac{\hbar}{i}(\vec{\nabla}V)\phi\right) \tag{6.36}$$

Und schlussendlich erhalten wir die erweiterte Pauli-Gleichung:

$$(E_S-V)\phi = \frac{(\vec{\sigma}\vec{\pi})^2}{2m}\phi - \frac{\vec{\sigma}\vec{\pi}}{4m^2c^2}\left(\frac{(\vec{\sigma}\vec{\pi})^3}{2m} + \vec{\sigma}\frac{\hbar}{i}(\vec{\nabla}V)\right)\phi$$

Spezialfall:

- $V = V(r)$ sphärisch symmetrisch $\Rightarrow \vec{\nabla}V = \vec{r}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}$
- $\vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{\pi} = \vec{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \Rightarrow (\vec{\sigma}\vec{\pi})^2 = \vec{p}^2$

$$\Rightarrow E_S\phi = (\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + V)\phi - \frac{\hbar}{i}\frac{1}{4m^2c^2}\underbrace{\sigma_i\sigma_j}_{i\epsilon_{ijk}\pi_k+\sigma_{ij}}p_i r_j\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\phi$$

$$E_S\phi = (\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + V)\phi - \hbar\frac{1}{4m^2c^2}\vec{\sigma}(\vec{r}\times\vec{p})\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\phi + \frac{\hbar^2}{4m^2c^2}\left((\nabla^2V) + \underbrace{(\vec{\nabla}V)\cdot\vec{\nabla}}_{\text{nicht selbst adjungiert}}\right)\phi$$

Interpretation:

- $-\frac{p^4}{8m^3c^2}$ relativistischer Beitrag zur kinetischen Energie
  $E = \sqrt{(mc^2)^2+p^2c^2} = mc^2\sqrt{1+\frac{p^2}{(mc)^2}} = mc^2(1+\frac{1}{2}\frac{p^2}{m^2c^2} - \frac{1}{8}\frac{p^4}{m^4c^4}+...) = mc^2 - \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{8}\frac{p^4}{m^3c^2}$
- $\hbar\frac{1}{4m^2c^2}\vec{\sigma}(\vec{r}\times\vec{p})\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\phi = \frac{1}{2m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\vec{L}\vec{S}\phi = H_{LS}$ Korrekte Spin-Bahn Kopplung, incluive Thomas Präzessionsfaktor von $\frac{1}{2}$.

$$i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = H_\phi\phi$$

mit

$$H_\phi = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V + H_r + H_{LS} + \tilde{H}_D$$

$$H_r = -\frac{1}{8m}\left(\frac{\vec{p}^2}{2m}\right)^2$$

$$H_{LS} = \frac{1}{2m^2c^2}\frac{1}{\gamma}\frac{dV}{d\gamma}\vec{L}\cdot\vec{S}$$

$$\tilde{H}_D = \frac{\hbar^2}{4m^2c^2}((\nabla^2 V) + (\vec{\nabla}V)\cdot\vec{\nabla})$$

Der Letze Term $(\vec{\nabla}V)\cdot\vec{\nabla}$ ist nicht hermitesch. Problem mit der Warhscheinlichkeits-Dichte:

$$\rho = \frac{j^0}{c} = \overline{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi = \sum_{i=1}|\psi_i|^2 \tag{6.37}$$
$$= |\phi|^2 + |\chi|^2 \tag{6.38}$$
$$= |\phi|^2 + |\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{2mc}\phi|^2 \tag{6.39}$$
$$= |\phi|^2 + \phi^\dagger\frac{\vec{p}^2}{4m^2c^2}\phi \tag{6.40}$$
$$\approx |\underbrace{(1+\frac{\vec{p}^2}{8m^2c^2})\phi}_{\varphi}|^2 \tag{6.41}$$

Übergang zu

$$\varphi = \Omega\phi = (1 + \frac{\vec{p}^2}{8m^2c^2} + ...)\phi$$

Foldy-Wouthuysen Transformation. (Details: Bjorken-Drell relativ. QM)
Ersetze $E_S\phi = H_\phi\phi$ durch $E_S\phi = \Omega E_S\phi = \underbrace{\Omega H_\phi\Omega^{-1}}_{H}\underbrace{\Omega\phi}_{\varphi}$

$$H = (1+\frac{\vec{p}^2}{8m^2c^2})H_\phi(1-\frac{\vec{p}^2}{8m^2c^2}) \tag{6.42}$$
$$= H_\phi + [\frac{\vec{p}^2}{2m^2c^2}, H_\phi] + ... \tag{6.43}$$
$$= H_\phi + [\frac{\vec{p}^2}{2m^2c^2}, V] + ... \tag{6.44}$$

NR: $[\frac{\vec{p}^2}{2m^2c^2}, V] = -\frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\underbrace{[\nabla_i\nabla_i, V]}_{\nabla_i\underbrace{[\nabla_i,V]}_{(\nabla_i V)}+\underbrace{[\nabla_i,V]}_{(\nabla_i V)}\nabla_i} = -\frac{\hbar^2}{8m^2c^2}((\nabla^2 V) + 2(\nabla V)\nabla_i)$

$$H = H_\phi - \frac{\hbar^2}{8m^2c^2}((\nabla^2 V) + 2(\nabla V)\nabla_i) \tag{6.45}$$
$$= (\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + V) - \hbar\frac{1}{2m^2c^2}\vec{L}\cdot\vec{S}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr} + \frac{\hbar^2}{4m^2c^2}\left((\nabla^2 V) + (\vec{\nabla}V)\cdot\vec{\nabla}\right) \tag{6.46}$$
$$- \frac{\hbar^2}{8m^2c^2}((\nabla^2 V) + 2(\nabla V)\nabla_i) \tag{6.47}$$
$$= \frac{\vec{p}^2}{2m} + V - \frac{p^4}{8m^3c^2} - \hbar\frac{1}{2m^2c^2}\vec{L}\cdot\vec{S}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr} + \underbrace{\frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\nabla^2 V}_{\text{Darwin-Term}} \tag{6.48}$$

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V + H_r + H_{LS} + H_D$$

mit dem Darwin-Term $H_D = \frac{\hbar^2}{8m^2c^2}(\nabla^2 V)$

6.1.3.1 Korrekturen zum Wasserstoff Spektrum

Spaltet man den Hamilton-Operator in H_0 und den V Term auf:

$$H\phi = (\underbrace{\frac{\vec{p}^2}{2m} + V}_{H_0} \underbrace{- \frac{p^4}{8m^3c^2} - \hbar\frac{1}{2m^2c^2}\vec{L}\cdot\vec{S}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr} + \frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\nabla^2 V}_{V})\phi$$

So lassen sich Energiekorrekturen (hier bis zu 1 Ordnung) berechnen:

$$E_n^{(0)} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2a_0n^2}$$

$$\Delta E_n^{(1)} = \alpha^2 E_n^{(0)}\frac{1}{n}(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n})$$

Feinstruktur-Aufspaltung für $2p_{\frac{1}{2}}$ $2p_{\frac{3}{2}}$
Entartung bleibt für $2s_{\frac{1}{2}}$ $2p_{\frac{1}{2}}$ (d.h. gleiche Energie)

6.1.4 Ebene Wellen als Lösungen der freien Dirac Gleichung

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) = \frac{mc}{\hbar}\psi(x)$$

Ebene Welle als Ansatz $\psi(x) = e^{-px/\hbar}w(p)$ mit $w(p)$-Spinor im Impulsraum

$$i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi(x) = i\gamma^\mu(-\frac{ip_\mu}{\hbar})\psi(x) \tag{6.49}$$
$$= \frac{1}{\hbar}\gamma^\mu p_\mu\psi(x) \stackrel{!}{=} \frac{mc}{\hbar}\psi(x) \tag{6.50}$$

Notation: $\gamma^\mu p_\mu = \not{p}$

$$\boxed{(\not{p} - mc)w(p) = 0} \tag{6.51}$$

6.1.4.1 Spezialfall: Teilchen in Ruhe

$$p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{0})$$

$$\rightarrow \not{p} = \frac{E}{c}\gamma^0 = \frac{E}{c}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Eingesetzt in (6.51) ergibt

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{E}{c} - mc & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{c} - mc & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E}{c} - mc & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{E}{c} - mc \end{pmatrix} w(\vec{p}) = 0$$

4 Lösungen zu 2 Eigenwerten:

$$E = +mc^2 : w_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$E = -mc^2$: $w_3(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_4(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Lösungen mit negativer Energie $\rightarrow$ Existenz von Positronen (bzw. Antiteilchen).
z.B. für ein Elektron mit Spin $\uparrow$

$$\psi(x) = e^{-px/\hbar} w_1(0)$$

z.B. für ein Positron mit Spin $\downarrow$

$$\psi(x) = e^{-px/\hbar} w_4(0)$$

6.1.4.2 Lösung für Impuls ungleich 0

1) Matrixgl. $\not{p} w = mcw$ lösen
2) Lorenztransormation von Inertialsystem IS (Teilchen in Ruhe) in IS' ($\vec{p} \neq 0$)

6.1.5 Lorentz Transformation

$x' = \Lambda x$ mit $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$
Bsp: Boost in z-Richtung: $z' = \gamma(z - vt)$, $t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2} z)$, $x' = x$, $y' = y$ mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
Lorenztranformation erhält relative Länge:

$$x' \cdot x' = g_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu} = \underbrace{\Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} g_{\mu\nu}}_{g_{\rho\sigma}} x^{\rho} x^{\sigma} = x \cdot x = x^{\rho} x^{\sigma} g_{\sigma\rho}$$

Def. Eigenschaft einer Lorenztransformation

$$\Lambda_{\mu}{}^{\rho} \Lambda^{\mu}{}_{\sigma} = g^{\rho}{}_{\sigma} = \delta^{\rho}{}_{\sigma}$$

oder $(\Lambda^{-1})^{\rho}{}_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\rho}$
$\Rightarrow det\Lambda = \pm 1$ (Verallgemeinerung von orthogonalen Transformation)

6.1.5.1 Infinitesimale Lorenztransformation

Mit $w^{\rho}{}_{\mu}$ infinitesimal

$$\Lambda^{\rho}{}_{\mu} = g^{\rho}{}_{\mu} + w^{\rho}{}_{\mu}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mu}{}^{\rho} \Lambda^{\mu}{}_{\sigma} &= (g_{\mu}{}^{\rho} + w_{\mu}{}^{\rho})(g^{\mu}{}_{\sigma} + w^{\mu}{}_{\rho}) & (6.52) \\ &= g^{\rho}{}_{\sigma} + \underbrace{w_{\sigma}{}^{\rho} + w^{\rho}{}_{\sigma}}_{=0} + \ldots & (6.53) \\ &\overset{!}{=} g^{\rho}{}_{\sigma} & (6.54) \end{aligned}$$

$\rightarrow w_{\sigma\rho} + w_{\rho\sigma} = 0$

$$\rightarrow w = \begin{pmatrix} 0 & w_{01} & w_{02} & w_{03} \\ -w_{10} & 0 & w_{12} & w_{13} \\ -w_{20} & -w_{21} & 0 & w_{23} \\ -w_{30} & -w_{31} & -w_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

6 reelle freie Parameter $\Rightarrow$ 6 Generatoren
$\vec{J}$ (Drehungen) 3 w_{ij} $\vec{K}$ (Boosts) 3 w_{oi}

6.1.6 Kovarianz der Dirac Gleichung

Inertialsystem:

$$\begin{array}{c|c} \text{IS} & \text{IS'} \\ x^\mu & x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \\ (i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{mc}{\hbar})\psi(x) = 0 & (i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - \frac{mc}{\hbar})\psi'(x') = 0 \end{array}$$

Zu zeigen: Es gibt zu jeder LT Λ eine lineare Abbildung $S(\Lambda)$ der Spinoren:

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) \tag{6.55}$$
$$= S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x') \tag{6.56}$$

Die Menge $\{S(\Lambda)\}$ bilden Darstellung der Lorenzgruppe

$$\boxed{S(\Lambda_1\Lambda_2) = S(\Lambda_1)S(\Lambda_2) \Rightarrow S(\mathbb{1}) = \mathbb{1}, \quad S(\Lambda^{-1}) = (S(\Lambda))^{-1}}$$

$$(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{mc}{\hbar})\psi(x) = 0$$

Einsetzen von $\psi(x) = S(\Lambda^{-1})\psi'(x')$ und von links mit $S(\Lambda)$ multiplizieren:

$$S(\Lambda)(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{mc}{\hbar})S(\Lambda^{-1})\psi'(x') = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(iS(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1}) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^\mu}}_{\Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}} - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi'(x') = 0$$

NR: $x'^\nu = \Lambda^\nu{}_\rho x^\rho$ $\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \underbrace{\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}}_{\Lambda^\nu{}_\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu}$

$$\Leftrightarrow \left(iS(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1})\Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi'(x') = 0$$

ist äquivalent zur Dirac Gleichung im IS'

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1})\Lambda^\nu{}_\mu = \gamma^\nu$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu = S(\Lambda^{-1})\gamma^\nu S(\Lambda)} \tag{6.57}$$

Betrachte infinitesimalen Fall:

$$\Lambda^\nu{}_\mu = g^\nu{}_\mu + \omega^\nu{}_\mu$$

$$S(\Lambda) = \mathbb{1} - \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}$$

mit 4x4 Matrizen $\sigma_{\alpha\beta} = -\sigma_{\beta\alpha}$ (6 Matrizen)

$$S(\Lambda^{-1}) = \mathbb{1} + \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}w^{\alpha\beta}$$

Einsetzen in (6.57): Term linear in $\omega^{\mu\nu}$ gilt für alle $\omega^{\alpha\beta} = -\omega^{\beta\alpha}$

$$\underbrace{\omega^{\nu}{}_{\mu}\gamma^{\mu}}_{\omega^{\alpha\beta}\frac{1}{2}(g^{\nu}{}_{\alpha}\gamma_{\beta}-g^{\nu}{}_{\beta}\gamma_{\alpha})} = -\frac{i}{4}\omega^{\alpha\beta}(\gamma^{\nu}\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}\alpha^{\nu})$$

$$\Rightarrow \boxed{[\gamma^{\nu}, \sigma_{\alpha\beta}] = 2i(g^{\nu}{}_{\alpha}\gamma_{\beta} - g^{\nu}{}_{\beta}\gamma_{\alpha})}$$

Lösung für $\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]$
Bew:

$$\frac{2}{i}[\gamma^{\nu}, \sigma_{\alpha\beta}] = \gamma^{\nu}(\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma_\alpha) - (\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma_\alpha)\gamma^{\nu} \tag{6.58}$$
$$= \gamma_\alpha\gamma^{\nu}\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma^{\nu}\gamma_\alpha - \gamma_\alpha\gamma^{\nu}\gamma_\beta + \gamma_\beta\gamma^{\nu}\gamma_\alpha \tag{6.59}$$
$$= 2\cdot 2g^{\nu}{}_{\alpha}\gamma_\beta - 2\cdot 2g^{\nu}{}_{\beta}\gamma_\alpha \tag{6.60}$$
$$= \frac{2}{i}2i(g^{\nu}{}_{\alpha}\gamma_\beta - g^{\nu}{}_{\beta}\gamma_\alpha) \tag{6.61}$$

$\Rightarrow \sigma_{\alpha\beta}$ sind Generatoren für Spinordastellung der Lorenz-Gruppe

$$S(g+\omega) = 1 + \frac{1}{8}[\gamma_\nu, \gamma_\nu]\omega^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}$$

mit $\omega^{\mu\nu}$ endlich
Frage: Ist $j^\mu = c\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ mit $\overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ ein 4-Vektor?
Transformation von $\overline{\psi}$:

$$\psi'(x')^\dagger = (S(\Lambda)\psi(x))^\dagger = \psi^\dagger(x)S^\dagger(\Lambda) = \psi^\dagger(x)e^{+\frac{i}{4}\sigma^\dagger_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}$$

$$\sigma^\dagger_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]^\dagger = -\frac{i}{2}[\gamma^\dagger_\beta, \gamma^\dagger_\alpha] = \frac{i}{2}[\gamma^\dagger_\alpha, \gamma^\dagger_\beta]$$

$$\gamma_0^\dagger = \gamma_0 = \gamma^0\gamma_0\gamma^0$$

$$\vec{\gamma}^\dagger = (\beta\vec{\alpha})^\dagger = \vec{\alpha}\beta = \beta\underbrace{(\beta\vec{\alpha})}_{\vec{\gamma}}\beta = \gamma^0\vec{\gamma}\gamma^0$$

Durch eine Gleichung zusammenfassen:

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$$

$$\sigma^\dagger_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}[\gamma^0\gamma_\alpha\gamma^0, \gamma^0\gamma_\beta\gamma^0] = \gamma^0\sigma_{\alpha\beta}\gamma^0$$

wegen $\gamma^0\cdot\gamma^0 = \mathbb{1}$

$$\Rightarrow S^\dagger(\Lambda) = e^{\gamma^0 A\gamma^0} \tag{6.62}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\underbrace{(\gamma^0 A\gamma^0)^n}_{\gamma^0 A^n\gamma^0} \tag{6.63}$$
$$= \gamma^0 e^A\gamma^0 \tag{6.64}$$
$$= \gamma^0 e^{+\frac{i}{4}\sigma^\dagger_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}\gamma^0 \tag{6.65}$$
$$= \gamma^0 S(\Lambda)^{-1}\gamma^0 \tag{6.66}$$

mit $A = \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}$

$$\boxed{S^\dagger(\Lambda) = \gamma^0 S(\Lambda^{-1})\gamma^0}$$

$$\overline{\psi}'(x') = (\psi'(x'))^\dagger\gamma^0 = (S(\Lambda)\psi(x))^\dagger\gamma^0 = \psi(x)^\dagger S(\Lambda)^\dagger\gamma^0 \tag{6.67}$$
$$= \psi(x)^\dagger \mathbb{1} S(\Lambda)^\dagger\gamma^0 \tag{6.68}$$
$$= \psi(x)^\dagger\gamma^0\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger\gamma^0 \tag{6.69}$$
$$= \overline{\psi}(x)\underbrace{\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0}_{S(\Lambda^{-1})} \tag{6.70}$$
$$\tag{6.71}$$

LT von $j^\mu = c\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ mit Zuhilfenahme der Gleichung von (6.57)

$$j^{\mu'}(x') = c\overline{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = c\overline{\psi}(x)\underbrace{S(\Lambda^{-1})\gamma^\mu S(\Lambda)}_{\Lambda^\mu{}_\alpha\gamma^\alpha}\psi(x) \tag{6.72}$$
$$= c\overline{\psi}(x)\Lambda^\mu{}_\alpha\gamma^\alpha\psi(x) \tag{6.73}$$
$$= \Lambda^\mu{}_\alpha(c\overline{\psi}(x)\gamma^\alpha\psi(x)) \tag{6.74}$$
$$= \Lambda^\mu{}_\alpha j^\alpha(x) \tag{6.75}$$

$\Rightarrow j^\mu(x)$ ist 4-Vektorfeld

$$j^\mu = (c\rho, \vec{j})$$

Kontinuitätsgleichung $\frac{1}{c}\frac{\partial(c\rho)}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{j} = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu j^\mu = 0$
Andere Bilineare: z.B.

$$\rho(x) = \overline{\psi}(x)\psi(x)$$
$$\to \rho'(x') = \overline{\psi}'(x')\psi'(x') = \overline{\psi}'(x')\mathbb{1}\psi'(x') = \overline{\psi}'(x')S(\Lambda^{-1})S(\Lambda)\psi'(x') = \overline{\psi}(x)\psi(x) = \rho(x)$$

$\Rightarrow \rho(x)$ ist ein Skalares Feld
Allgemeiner Fall: $\overline{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$ mit Γ 4x4 Matrix

6.2 16 unabhängige Fermion-Bilineare

Gute Basis der Γ:

$$\Gamma_S = \mathbb{1}, \quad \Gamma^\nu_\mu = \gamma_\mu, \quad \Gamma^T_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu}$$

$$\Gamma_p = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^5 = \gamma_5, \quad \Gamma^A_\mu = \gamma_\mu\gamma_5$$

$$\overline{\psi}(x) = \Gamma\psi(x)$$

Γ große Gamma Matrizen, 16 lin. unabh. 4x4-Matrizen

$$T^{\mu\nu} = \overline{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)$$

$$T'^{\mu\nu} = \overline{\psi}(x)\underbrace{S^{-1}(\Lambda)\frac{i}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]S(\Lambda)}_{=\frac{i}{2}[\underbrace{S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)}_{\Lambda^\mu{}_\rho\gamma^\rho},\underbrace{S^{-1}(\Lambda)\gamma^\nu S(\Lambda)}_{\Lambda^\nu{}_\sigma\gamma^\sigma}]}\psi(x) \tag{6.76}$$
$$= \Lambda^\mu{}_\rho\gamma^\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\gamma^\sigma\overline{\psi}\sigma^{\rho\sigma}\psi \tag{6.77}$$
$$= \Lambda^\mu{}_\rho\gamma^\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\gamma^\sigma T^{\rho\sigma} \tag{6.78}$$

→ Trasformiert sich wie ein Tensor
Was ist mit γ_5 - Termen?
verwende $\gamma_5\gamma^\mu = -i\gamma^2\gamma^0\gamma^1\gamma^3\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma_5$
z.B. $\gamma_5\gamma^2 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^2 = -i\gamma^2\gamma^0\gamma^1\gamma^3 = -\gamma^2\gamma_5$

$$\Rightarrow \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$$

$$\Rightarrow [\gamma_5, \sigma^{\mu\nu}] = 0 \Rightarrow [\gamma_5, S(\Lambda)] = 0$$

$\overline{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$ Transformiert sich wie ein Skalar: $\overline{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x') = \overline{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\gamma_5 S(\Lambda)\psi(x) = \overline{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$
$\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)$ Transformiert sich wie ein Vektor:

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}'(x')\gamma^\mu\gamma_5\psi'(x') &= \overline{\psi}(x)S(\Lambda^{-1})\gamma^\mu\gamma_5 S(\Lambda)\psi(x) && (6.79)\\
&= \overline{\psi}(x)\underbrace{S(\Lambda^{-1})\gamma^\mu S(\Lambda)}_{\Lambda^\mu{}_\alpha\gamma^\alpha}\gamma_5\psi(x) && (6.80)\\
&= \overline{\psi}(x)\Lambda^\mu{}_\alpha\gamma^\alpha\gamma_5\psi(x) && (6.81)\\
&= \Lambda^\mu{}_\alpha[\overline{\psi}(x)\gamma^\alpha\gamma_5\psi(x)] && (6.82)
\end{aligned}$$

Pseudo-/Axial wegen <u>Paritätstransformation</u> (spezielle Lorenztrasformation)

$$x' = \Lambda x \qquad x = (ct, \vec{x}) = x^\mu \qquad x' = (ct, -\vec{x}) = x_\mu$$

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{\mu\nu}$$

Transformation von Spinoren: brauchen 4x4 Matrix P

$$P^{-1}\gamma^\nu P = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu = \gamma_\nu$$

Bei Spinoren:

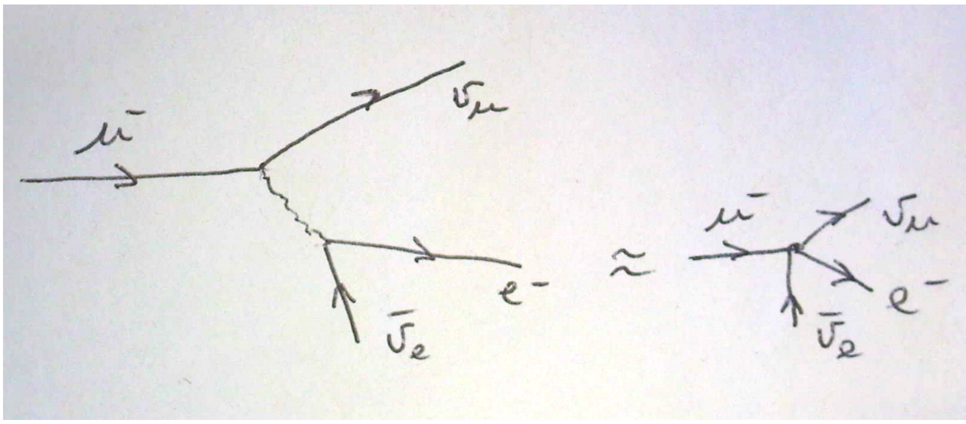
$$\psi'(x') = P\psi(x) = \gamma^0\psi(x)$$
$$\overline{\psi}'(x') = \overline{\psi}(x)P^{-1} = \overline{\psi}(x)\gamma^0$$

$$\Rightarrow P^{-1}\gamma_5 P = \gamma^0\gamma_5\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^0\gamma_5 = -\gamma_5$$

$\Rightarrow \overline{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$ ist ungerade unter Permutation.

<u>Anwendung</u>: Paritätsverletzung in der schwachen Wechselwirkung. ⇒ z.B. μ^--Zerfall

$$\mu^-(P) \to \nu_\mu(P_i) + e^-(k_1) + \overline{\nu}_e(k_2)$$



$$T = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \underbrace{\overline{\psi}(p_2)\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi(p_1)}_{J^{\text{myon}}} \underbrace{\overline{\psi}(k_1)\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi(k_2)}_{J^{\text{elektron}}}$$

$J^{\text{myon}} \cdot J^{\text{elektron}}$ = Lorenz-Skalar? $\rightarrow$ Parität:

$$T \rightarrow T' = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \overline{\psi}'(p_2')\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi'(p_1')\overline{\psi}'(k_1')\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi'(k_2') \tag{6.83}$$

$$= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \overline{\psi}(p_2) \underbrace{P^{-1}\gamma^\mu(1-\gamma_5)P}_{\gamma^\mu(1+\gamma_5)} \psi(p_1)\overline{\psi}(k_1) \underbrace{P^{-1}\gamma^\mu(1-\gamma_5)P}_{\gamma_\mu(1+\gamma_5)} \psi(k_2) \tag{6.84}$$

$$= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \overline{\psi}(p_2)\gamma^\mu(1+\gamma_5)\psi(p_1)\overline{\psi}(k_1)\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi(k_2) \tag{6.85}$$

$$\neq T \tag{6.86}$$

$$\tag{6.87}$$

β-Zerfall: sehr ähnlich, jedoch Koeffizienten c_μ, c_λ für Nukleonen

6.3 Die Bedeutung der omega Parameter

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}(\omega^{12}\sigma_{12}+\omega^{21}\sigma_{21})} = e^{-\frac{i}{2}\omega^{12}\sigma_{12}}$$

$$\frac{1}{2}\sigma_{12} = \frac{1}{2}\frac{i}{2}[\gamma_1, \gamma_2] = \frac{i}{4} \underbrace{\left[\begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \right]}_{= \begin{pmatrix} -[\sigma_1,\sigma_2] & 0 \\ 0 & -[\sigma_1,\sigma_2] \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_3}{2} \end{pmatrix} = \frac{S_z}{\hbar}$$

mit $\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ allgemeiner:

$$\frac{1}{2} \sum_k = \frac{S_k}{\hbar} = \frac{1}{4}\epsilon^{ijk}\sigma_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_5\alpha_k$$

ω_1 und ω_3 sind EZ von S_z zu $+\frac{\hbar}{2}$; ω_2 und ω_4 sind EZ von S_z zu $-\frac{\hbar}{2}$;

Jetzt boost in Bezugssystem mit Geschwindigkeit $\vec{v}$

Dazu

$$\omega^{\mu\nu} = \omega \cdot \begin{pmatrix} 0 & +n_1 & +n_2 & +n_3 \\ -n_1 & 0 & 0 & 0 \\ -n_2 & 0 & 0 & 0 \\ -n_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{n}^2 = 1$$

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}} = e^{-\frac{i}{2}\sum_j \omega^{0j}\sigma_{0j}} = e^{-\frac{1}{2}\omega\vec{n}\vec{\alpha}}$$

mit $\sum_j \omega^{0j}\sigma_{0j} = \omega\vec{n}\frac{i}{2}\underbrace{[\beta, -\beta\vec{\alpha}]}_{-2\vec{\alpha}}$

Verschiebung von $\omega^{\mu\nu}$ und $\vec{v}$

$$\Lambda^\mu{}_\nu : \qquad \Lambda = \lim_{N\to\infty}(g + \frac{\omega}{N})^N = exp\left\{ \omega \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -n_1 & -n_2 & -n_3 \\ -n_1 & 0 & 0 & 0 \\ -n_2 & 0 & 0 & 0 \\ -n_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{I} \right\}$$

Spezialfall $n_1 = 1, n_2 = n_3 = 0$

$$I^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad I = I^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad etc.$$

mit $e^x = \frac{e^x}{2} + \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} - \frac{e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \cosh(x) + \sinh(x)$

$$\Lambda = e^{\omega I} = \cosh(I\omega) + \sinh(I\omega) \tag{6.88}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega I)^{2k}}{(2k!)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega I)^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{6.89}$$

$$= \omega^0 I^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\omega I)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega I)^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{6.90}$$

$$= \omega^0 I^0 + I^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega^{2k}}{(2k)!} + I \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{6.91}$$

$$= \omega^0 I^0 + I^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega^{2k}}{(2k)!} + \frac{\omega^0}{(0)!} - \frac{\omega^0}{(0)!} \right) + I \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{6.92}$$

$$= \omega^0 I^0 + I^2 \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^{2k}}{(2k)!}}_{cosh(\omega)} - \frac{\omega^0}{(0)!} \right) + I \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{sinh(\omega)} \tag{6.93}$$

$$= \mathbb{1} + I^2 (\cosh(\omega) - 1) + I \cdot \sinh(\omega) \tag{6.94}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cosh(\omega) - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\omega) - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sinh(\omega) & 0 & 0 \\ -\sinh(\omega) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.95}$$

$$= \begin{pmatrix} cosh\omega & -sinh\omega & 0 & 0 \\ -sinh\omega & cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.96}$$

vergleiche $x^{'\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu x^\mu$

$$x^{0'} = cosh(\omega)(x^0 - tanh(\omega)x^1) = \gamma(ct - \frac{v}{c^2}x)$$

$$x^{1'} = cosh(\omega)(x^1 - tanh(\omega)x^0) = \gamma(x - \frac{v}{c}ct)$$

$$\Rightarrow tanh\omega = \frac{v}{c} = \frac{|\vec{p}|^2}{E}$$

$$cosh\omega = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E}{mc^2}$$

$\Rightarrow$ Allgemeiner Fall $\vec{n} = \hat{v}$; $tanh\omega = \frac{v}{c}$
Rapidität $= \frac{1}{2} ln \frac{E + |\vec{p}|c}{E - |\vec{p}|c} = \frac{1}{2} ln \frac{1 + tanh\omega}{1 - tanh\omega} = \frac{1}{2} ln \frac{cosh\omega + sinh\omega}{cosh\omega - sinh\omega} = \frac{1}{2} ln \frac{e^\omega}{e^{-\omega}} = \omega$

6.3.1 Ebene-Wellen-Lösung zu allg. Impuls

$$(i\not{\partial} - \frac{mc}{\hbar})\psi(x) = 0$$

Lösung mit $\psi(x) = e^{-i\frac{px}{\hbar}}\omega(\vec{p})$
$\vec{p}$ in Ruhe

$$E = +mc^2 \qquad \omega_1(0) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad \omega_2(0) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$E = -mc^2 \qquad \omega_3(0) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \omega_4(0) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Besser für Teilchenwellenfunktionen immer $E > 0$, d.h.

$$p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p}) = (+\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2}, \vec{p})$$

Lsg pos. Energie $\psi(x) = e^{-i\frac{px}{\hbar}}\omega_i(\vec{p})$ mit i=1,2
Lsg neg. Energie $\psi(x) = e^{+i\frac{px}{\hbar}}\omega_i(\vec{p})$ mit i=3,4

$$\Rightarrow (\not{p} - mc)\omega_i(\vec{p}) = 0 \qquad i = 1, 2$$

$$\Rightarrow (\not{p} + mc)\omega_i(\vec{p}) = 0 \qquad i = 3, 4$$

Jetzt $\omega_i(\vec{p})$ durch boost von $\omega_i(0)$ entlang der $\vec{p}$- Richtung:
ungestricheltes System = Ruhesystem des Teilchens gesticheltes System = Teilchen bewegt sich in $\vec{p}$-Richtung
$\Rightarrow$ boost in $-\vec{p}$-Richtung um Teilchen in Bewegung zu setzen

$$\Rightarrow \omega_\nu(\vec{p}) = S(\Lambda)\omega_\nu(0) = e^{\frac{1}{2}\omega\hat{p}\vec{\alpha}}\omega_\nu(0)$$

Diese $\omega_\nu(\vec{p})$ ist der Spinor der Elektornen mit Impuls $\vec{p}$ und Spin in Ruhesystem in $\pm z$-Richtung beschreibt

$$\hat{p}\vec{\alpha} = \begin{pmatrix}0 & \hat{p}\vec{\sigma}\\ \hat{p}\vec{\sigma} & 0\end{pmatrix}$$

$$(\hat{p}\vec{\alpha})^2 = \begin{pmatrix}(\hat{p}\vec{\sigma})^2 & 0\\ 0 & (\hat{p}\vec{\sigma})^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbb{1}_2 & 0\\ 0 & \mathbb{1}_2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{2}\omega\hat{p}\vec{\alpha}} = cosh\frac{\omega}{2}\mathbb{1} + sinh(\frac{\omega}{2})(\hat{p}\vec{\alpha})$$

$$cosh\frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{1 + cosh\omega}{2}} = \sqrt{\frac{1 + E/mc^2}{2}} = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}}$$

$$sinh\frac{\omega}{2} = \sqrt{cosh^2\frac{\omega}{2} - 1} = \sqrt{\frac{E - mc^2}{2mc^2}} = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}\frac{(E - mc^2)(E + mc^2)}{(E + mc^2)}} = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}}\frac{|\vec{p}|c}{E + mc^2}$$

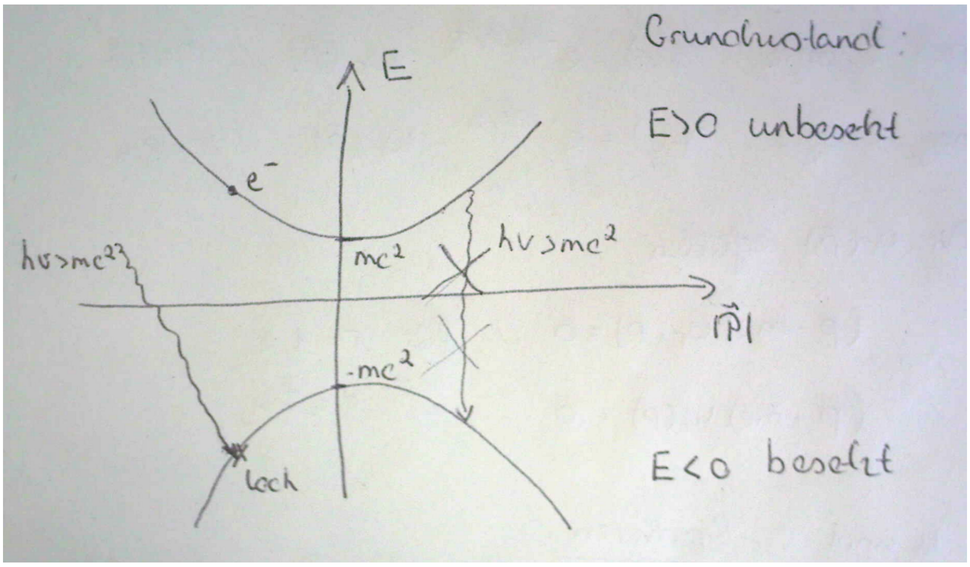
$$S(\Lambda) = e^{\frac{1}{2}\omega\hat{p}\vec{\alpha}} = cosh\frac{\omega}{2}(\mathbb{1} + \frac{c\hat{p}\vec{\alpha}}{E + mc^2}) \tag{6.97}$$

$$= \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{cp_+}{E+mc^2} & \frac{cp_-}{E+mc^2}\\ 0 & 1 & \frac{cp_+}{E-mc^2} & -\frac{cp_+}{E+mc^2}\\ \frac{cp_z}{E+mc^2} & \frac{c(p_x-ip_y)}{E+mc^2} & 1 & 1\\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} & -\frac{cp_z}{E+mc^2} & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{6.98}$$

$$= (\omega_1(\vec{p}), \omega_2(\vec{p}), \omega_3(\vec{p}), \omega_4(\vec{p})) \tag{6.99}$$

mit $p_\pm = p_x \pm ip_y$

6.4 Der Diracsee



Grundzustand:

$E > 0$ unbesetzt
$E < 0$ alle besetzt $\Rightarrow$ Pauli Prinzip verbietet Übergänge von $E > 0 \rightarrow E < 0$

Elektron: Zustand mit $E > mc^2$, Ladung $-|e|$, Spin S_z

Loch: es fehlt Elektron mit $E < 0$

Gegenüber Grundzustand: Energieerhöhung um $-E = +\sqrt{m^2c^4 + (\vec{p}c)^2}$

Ladung $+|e|$ Spin $-S_z$

$\rightarrow$Positronen mit positiver Ladung $E > 0$
Lösungen der Dirac Gl: $E = cp^0 = +\sqrt{m^2c^4 + (\vec{p}c^2)}$

positive Energie: $\psi(x) = e^{-ipx/\hbar}w_r(\vec{p})$ mit $r = 1, 2$
negative Energie: $\psi(x) = e^{+ipx/\hbar}w_r(\vec{p})$ mit $r = 3, 4$

Die $w_r(\vec{p})$ erfüllen

$$(\not{p} - mc)w_r(\vec{p}) = 0 \qquad \text{für } r = 1, 2$$

$$(\not{p} + mc)w_r(\vec{p}) = 0 \qquad \text{für } r = 3, 4$$

u und v Spinoren
Ruhesystem des $e^{\pm}$:

$\overline{p}^\mu = (mc, \vec{0})$ 4 Impuls

$\overline{S}^\mu = (0, \vec{S}) \qquad |\vec{S}|^2 = 1 \qquad \vec{S}$ Spinquantisierungs-Achse

Boost in IS in dem $p^0 = +\sqrt{(mc^2)^2 + (\vec{p}c)^2}$

$$p^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \overline{p}^\nu, \qquad s^\nu = \Lambda^\mu{}_\nu \overline{s}^\nu$$

$$\Rightarrow p^2 = m^2c^2, \quad p \cdot s = \overline{p} \cdot \overline{s} = 0, \quad s^2 = -1$$

$e^- : \quad \psi(x) = e^{-ipx/\hbar}u(p, \pm s)$

$e^+: \quad \psi(x) = e^{+ipx/\hbar} v(p, \pm s)$
Für $\vec{S} = \hat{z}$:
Elektron:

$$w_1(\vec{p}) = u(p, +s)$$

$$w_2(\vec{p}) = u(p, -s)$$

Positron:

$$w_3(\vec{p}) = v(p, -s)$$

$$w_4(\vec{p}) = v(p, +s)$$

Normierung der u, v $\epsilon, \epsilon' = \pm 1$

$$\overline{u}(p, \epsilon s) u(p, \epsilon' s) \stackrel{L.I.}{=} \overline{u}(\overline{p}, \epsilon \overline{s}) u(\overline{p}, \epsilon' \overline{s}) = w^+_{r(\epsilon)}(\vec{0}) \gamma^0 w_{r'(\epsilon')}(0) = \delta_{\epsilon\epsilon'}$$

$$\overline{u}(p, \epsilon s) v(p, \epsilon' s) = 0$$

$$\overline{v}(p, \epsilon s) v(p, \epsilon' s) = -\delta_{\epsilon'\epsilon} \qquad \text{wegen } \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>Vollständigkeit</u>
Jeder Spinor kann als Linearkombination von $u(p, s), u(p - s), v(p, s), v(p, -s)$ geschrieben werden.

$$\Rightarrow \sum_{\epsilon'} u_A(p, \epsilon' s) \overline{u}_B(p, \epsilon' s) = \left(\frac{\not{p} + mc}{2mc} \right)_{AB} = (\Lambda_+(p))_{AB}$$

Bew: Angewendet auf u, v Spinoren, geben beide Matrizen gleiches Ergebnis

$$\frac{\not{p} + mc}{2mc} u(p, \epsilon s) = \frac{\not{p} - mc + 2mc}{2mc} u(p, \epsilon s) = u(p, \epsilon s)$$

$$\frac{\not{p} + mc}{2mc} v(p, \epsilon s) = 0$$

Andererseits

$$\sum_{\epsilon'} u(p, \epsilon' s) \underbrace{\overline{u}(p, \epsilon s) u(p, \epsilon s)}_{\delta_{\epsilon'\epsilon}} = u(p, \epsilon s)$$

$$\sum_{\epsilon} u(p, \epsilon' s) \underbrace{\overline{u}(p, \epsilon' s) v(p, \epsilon s)}_{=0} = 0$$

Analog für v Spinoren

$$\sum_{\epsilon'} u_A(p, \epsilon' s) \overline{u}_B(p, \epsilon' s) = \left(\frac{\not{p} - mc}{2mc} \right)_{AB}$$

denn $\sum_{\epsilon'} v(p, \epsilon' s) \underbrace{\overline{v}(p, \epsilon' s) v(p, \epsilon s)}_{-\delta_{\epsilon'\epsilon}} = -v(p, \epsilon s)$

$$\left(\frac{\overbrace{\not{p}}^{-mc} - mc}{2mc} \right) v(p, \epsilon s) = -v(p, \epsilon s)$$

$\Lambda_+(p)$ ist Projektor auf Zustände pos. Energie e^-
$\Lambda_-(p)$ ist Projektor auf Zustände neg. Energie e^+
Beweis: z.Z: $\Lambda_\pm^2 = \Lambda_\mp$, $\quad \Lambda_+\Lambda_- = 0$, $\quad \Lambda_+ + \Lambda_- = \mathbb{1}$ mit $\not{p}^2 = p^2$

$$\Lambda_\pm = \frac{mc \pm \not{p}}{2mc} \Rightarrow \Lambda_\pm^2 = \frac{m^2c^2 \pm 2mc\not{p} + p^2}{(2mc)^2} = 2mc\frac{mc \pm \not{p}}{(2mc)^2} = \Lambda_\pm$$

$$\Lambda_+\Lambda_- = \frac{mc + \not{p}}{2mc}\frac{mc - \not{p}}{2mc} = \frac{(mc)^2 - p^2}{(2mc)^2} = 0$$

$$\Lambda_+ + \Lambda_- == \frac{mc + \not{p} + mc - \not{p}}{2mc} = \mathbb{1}$$

6.5 Ladungskonjugation

Dirac Gl. sollte auch für Positronen als Teilchen , Elektronen als Antiteilchen existieren. (mit Spinor ψ_C)

$$(i\hbar\not{\partial} \underbrace{+e\not{A}}_{-q_e\not{A}} - mc)\psi_C(x) = 0$$

($e < 0 =$ Ladungsvorzeichen e^-)
Ges. Beziehung zur Dirac Gl. für e^-

$$(i\hbar\not{\partial} - e\not{A} - mc)\psi(x) = 0$$

$$\Rightarrow [-(i\hbar\partial_\mu + eA_\mu)\gamma^{*\mu} - mc]\psi^*(x) = 0 \qquad | \cdot C\gamma^0$$

Transformation mit Matrix $C\gamma^0$

$$\Rightarrow [(i\hbar\partial_\mu + eA_\mu)(-C\gamma^0\gamma^{*\mu}(\gamma^0)^{-1}) - mc]C\gamma^0\psi^*(x) = 0$$

gesucht C mit $C\gamma^0\gamma^{*\mu}(C\gamma^0)^{-1} = -\gamma^\mu$!
Dann ist $\psi_C(x) = C\gamma^0\psi^*(x) = C(\gamma^0)^T(\psi^\dagger)^T = C(\psi^\dagger\gamma^0)^T = C\overline{\psi}^T(x)$
die Matrix $C = i\gamma^2\gamma^0$ tut's !

$$\Rightarrow C\gamma^0 = i\gamma^2\gamma^0\gamma^0 = i\gamma^2 = (C\gamma^0)^{-1}, \qquad (\gamma^2)^2 = -\mathbb{1}, \quad (i\gamma^2)^2 = +\mathbb{1}$$

$$C\gamma^0(\gamma^\mu)^*(C\gamma^0)^{-1} = i\gamma^2\gamma^{*\mu}i\gamma^2 = -\gamma^2\gamma^{\mu *}\gamma^2 = \begin{cases} \mu = 2: & -\gamma^2(-\gamma^2)\gamma^2 = -\gamma^2 \\ \text{sonst} & -\gamma^2\underbrace{\gamma^\mu\gamma^2}_{-\gamma^2\gamma^\mu} = -\gamma^\mu \end{cases}$$

Es gilt auch

$$C\overline{u}^T(p,s) = v(p,s) \cdot e^{i\alpha}$$

$$C\overline{v}^T(p,s) = u(p,s) \cdot e^{i\alpha'}$$