Contents

Chapter 6

Kap 6. Relativistische QM

Notation: Vierer-Vektoren

$$x^\mu = ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{r})$$

invariante Lönge $\sqrt{x^2}$

$$x^2 = x \cdot x = x^\mu x_\mu = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu$$

Einsteinsche Summenkonvention: $\sum_{\mu=0}^{3}$ für jedes Paar von oberen und unteren Index
Metrischer Tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -\vec{r})$$

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu = g^{\mu\nu} x^\nu = g^\nu_\nu x^\nu$$

$$g^\nu_\nu = \delta^\nu_\nu = \begin{cases} 1, & \mu = \nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} \to g^{\mu\nu} = [g_{\mu\nu}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vierer-Impuls: $p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p})$ $E = \sqrt{(mc^2)^2 + (\vec{p}c)^2}$

$$p^2 = p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = \frac{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2c^2$$

Vierer-Potential: LT $x^{'\mu} = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$

$$A^\mu = (\frac{\phi}{c}, \vec{A} \qquad \to A^{'\mu}(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x)$$

Strom: $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$ in E und M
Skalarprodukt für a^μ, b^μ : $\qquad a \cdot b = a^\mu b_\mu = a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$
Ableitung nach x^ν

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla})$$

ist kovarianter Vektor unter Index wg: $\partial \mu a \cdot x = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(a_\nu x^\nu) = a_\mu$
Entsprechend $\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla})$
d'Alebert Operator

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$$

6.0 QM eines freien Teilchens

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$$

$$p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p}) \to (i\hbar\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar\vec{\nabla}) = i\hbar\partial^\mu$$

Schrödinger Gl. für NR freies Teilchens

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\psi(\vec{x}, t)$$

Relativistischer Fall

1) $E = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2} \to$ nichtlokalen Operator
2) $\frac{E^2}{c^2} = m^2c^2 + \vec{p}^2 \to -\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = m^2c^2\psi - \hbar^2\vec{\nabla}^2\psi$

$$\Leftrightarrow 0 = m^2c^2\psi + \hbar^2(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2 - \nabla^2)\psi = m^2c^2\psi + \hbar^2\Box\psi})$$

Klein Gordon Gl.

$$(\Box + (\frac{mc}{\hbar})^2)\psi(x) = 0$$

Anwendbar auf skalare Teilichen (Spin 0) wie $\pi^+, \pi^-, \pi^0, K, H$
Lösungen der KG-Gl. durch ebene Wellen

$$\psi_p(x) = Ne^{-ip\cdot x/\hbar} = Ne^{-iEt/\hbar}e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}$$

mit $p \cdot x = p^\mu x_\mu = Et - \vec{p}\cdot\vec{x}$

$$\Box\psi_p = (x) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi_p(x) = N(-\frac{i}{\hbar}p_\mu)(-\frac{i}{\hbar}p^\mu)e^{-ip\cdot x/\hbar} = -\frac{p^2}{\hbar^2}\psi_p$$

KG:

$$\Rightarrow (-\frac{p^2}{\hbar^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2})\psi_p(x) = 0 \Leftrightarrow p^2 = m^2c^2; \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2$$

$$\to E = \pm c\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2}$$

Lösungen mit Negativer Energie und das Energiespektrum ist nach unten nicht beschränkt.

6.0 Wahrscheinlichkeitserhaltung

Kontin.Gl $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu j^\mu = 0$ mit $j^\mu = (\rho c, \vec{j})$.
Gibt es einen erhaltenen 4-Strom für die lösung der KG-Gleichung?

$$\psi^*(\Box + (\frac{mc}{\hbar})^2)\psi(x) - \psi(\Box + (\frac{mc}{\hbar})^2)\psi^*(x) = 0$$

$$\psi^*(\partial_\mu \partial^\mu \psi) - \psi(\partial_\mu \partial^\mu \psi^*) = 0$$

$$\partial_\mu(\underbrace{\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*}_{\propto j^\mu}) = 0$$

$$j^\mu \propto (\psi^* \frac{i}{c}\frac{\propto}{\propto t}\psi - \psi \frac{i}{c}\frac{\propto}{\propto t}\psi^*, -(\psi^* \vec{\nabla}\psi - \psi \vec{\nabla}\psi^*))$$

Kandidat für Wahrscheinlichkeits Strom $\frac{2im}{\hbar}\vec{j}$ in Schrödinger Gl

$$j^\mu = \frac{i\hbar}{2m}(\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*)$$

$$\rightarrow j^0 = \rho c = \frac{i\hbar}{2mc}(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t})$$

Anwendung auf stationäre Lösung: $\psi_E(x) = e^{-iEt/\hbar}\psi_E(\vec{x})$

$$\frac{\partial \psi_E}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar}\psi_E, \frac{\partial \psi_E^*}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar}\psi_E^* \Rightarrow \rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}|\psi_E(\vec{x})|^2 \frac{-2iE}{\hbar} = \frac{E}{mc^2}|\psi_E(x)|^2$$

$\rho < 0$ für Zustände mit $E < 0$
$\Rightarrow$ Keine mögliche Wahrscheinlichkeitsdichte. (Ok für Zustände mit positiver Energie)
Interpretation: Zustände mit $E > 0 \Leftrightarrow$ z.B. π^+ und $E < 0 \Leftrightarrow$ z.B. π^-(Antiteilchen zum π^+)
$\rho > 0$: π^+ dominieren $\rho < 0$: π^- dominieren
$\rho \propto$ elektromagn. Ladungsdichte

$$j^\mu = |e|\frac{i\hbar}{2mc}(\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*)$$

Elektronen: Spin
$\rightarrow$ Wellenfunktion $\psi(x)$ hat ≥ 2 Komponenten

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ ... \\ \psi_N(x) \end{pmatrix}$$

Möglichkeit: Matrixstruktur für $\hat{H}$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = \hat{H}\psi(x)$$

Ansatz: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi$ mit $\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ ... \\ \psi_N(x) \end{pmatrix}$
und Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho = \sum_{i=1}^N |\psi_i|^2$

$$\Rightarrow \hat{H} \propto \frac{\partial}{\partial x^i} \propto \hat{p}_i$$

Ansatz für $\hat{H}$

$$\hat{H} = c(\alpha_x \hat{p}_x + \alpha_y \hat{p}_y) + \beta mc^2 = c\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \hat{p}_i + \beta mc^2$$

Ebene Wellenlösung für freie Teilchen

$$\psi(x) = e^{-px/\hbar}\psi(p)$$

mit $p^2 = m^2c^2$

$$\Rightarrow E\psi(p) = [c\sum_{i=1}^{3} \alpha_i p_i + \beta mc^2]\psi(p)$$

$$E^2\psi(p) = (m^2c^4 + \vec{p}^2c^2)\psi(p)$$
$$Ec(\vec{\alpha}\vec{p} + \beta mc)\psi(p) = c^2(\vec{\alpha}\vec{p} + \beta mc)^2\psi(p)$$

$$= c^2(\sum_{i,j=1}^{3} \alpha_i\alpha_j p_i p_j + \sum_{i=1}^{3}(\alpha_i\beta + \beta\alpha_i)p_i mc + \beta^2 m^2c^2)\psi(p)$$

Koeffizienfenvergleich: $\beta^2 = 1$; Antikommutator:

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0$$

- $\boxed{\beta^2 = 1}$
- Antikommutator: $\boxed{\{\alpha_i, \beta\} = 0}$
- $i \neq j$: z.B: $p_x p_y\{\alpha_x\alpha_y + \alpha_y\alpha_x\}$; $\{\alpha_i, \alpha_j\} = 0$
- $i = j$: $\alpha_x^2 p_x^2 + \alpha_y^2 p_y^2 + \alpha_z^2 p_z^2 = \vec{p}^2 \Rightarrow \alpha_i^2 = 1$

$$\Rightarrow \boxed{\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}}$$

1) $\hat{p}_i, \hat{H}$ hermitesch $\Rightarrow \vec{\alpha}, \beta$ hermitesch
2) $\alpha_i^2 = 1, \beta^2 = 1 \Rightarrow$ Eigenwerte von α_i, β
3) $\alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0 \qquad | \cdot \beta$

$$\Rightarrow \alpha_i = -\beta\alpha_i\beta \Rightarrow Tr[\alpha_i] = -Tr[\beta\alpha_i\beta] = -Tr[\alpha_i\beta^2] = -Tr[\alpha_i]$$

\# - Anzahl; N - Dimension der Matrix
\# EW +1 = # EW -1
$\Rightarrow N$ gerade ($N = 2, 4, ...$)
$N = 2 \Rightarrow 3$ Pauli Matrizen als Kandidaten benötigt: 4 Matrizen $\Rightarrow N \geq 4 : N = 4$ funktioniert
$N = 4$: Dirac Basis: β diagonal

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

α_i hermitesch + $\{\alpha_i, \beta\} = 0$

$$\alpha = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} A & -B \\ C & -D \end{pmatrix}$$

$A = D = 0$, $C = B^\dagger$

$$\beta\alpha = \begin{pmatrix} A & B \\ -C & -D \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \tau_i \\ \tau_i^\dagger & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \Leftrightarrow \tau_i\tau_j^\dagger + \tau_j\tau_i^\dagger = 2\delta_{ij}$$

Lösung $\tau_i = \sigma_i =$ Pauli Matrizen

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}; \qquad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}}$$

6.1 Dirac Gleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = c(\vec{\alpha}\cdot\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + \beta mc)\psi(x) \qquad |\cdot\frac{\beta}{\hbar c}$$

Alternativ: kovariante Form

$$\Rightarrow i\beta\underbrace{\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}}_{\frac{\partial}{\partial x^0}}\psi + i\underbrace{\beta\vec{\alpha}_i}_{\gamma^i}\cdot\underbrace{\vec{\nabla}_i}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\psi - \frac{mc}{\hbar}\psi = 0$$

$$\Rightarrow (i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{mc}{\hbar})\psi = 0$$

$\gamma^0 = \beta$; $\gamma^i = \beta\alpha_i$

$$\boxed{\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0}$$

Kovariante Form der Dirac Gleichung mit $\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}_4$
z.B. $\{\gamma^i, \gamma^j\} = \beta\underbrace{\alpha_I\beta}_{-\beta\alpha_i}\alpha_j + \beta\underbrace{\alpha_j\beta}_{-\beta\alpha_j}\alpha_i = -\{\alpha_i, \alpha_j\} = -2\delta_{ij}$

6.1 Wahrscheinlichkeitsstrom

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i}\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\psi + \beta mc^2\psi$$

adjungierte Dirac Gleichung:

$$-i\hbar\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i}(\vec{\nabla}\psi^\dagger)\vec{\alpha} + \beta mc^2\psi^\dagger \qquad |\cdot\psi$$

Differenz der beiden Gleichungen:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\psi^\dagger\psi) = \frac{\hbar c}{i}(\psi^\dagger\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\psi + (\vec{\nabla}\psi^\dagger)\vec{\alpha}\psi)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\psi^\dagger\psi) = -c\vec{\nabla}(\psi^\dagger\vec{\alpha}\psi)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{(\psi^\dagger\psi)}_{\rho}+\vec{\nabla}\cdot(\underbrace{c\psi^\dagger\vec{\alpha}\psi}_{\vec{j}})$$

$$\rho=\psi^\dagger\psi=\sum_i|\psi_i|^2\geq 0$$

ρ ist positiv definierte Warscheinlichkeitsdichte
Kovariante Form des W-Stroms

$$j^\mu = (c\psi^\dagger\psi, c\psi^\dagger\vec{\alpha}\psi) \tag{6.1}$$
$$= (c\psi^\dagger\beta\gamma^0\psi, c\psi^\dagger\beta\vec{\gamma}\psi) \tag{6.2}$$
$$= c\psi^\dagger\beta\gamma^\mu\psi = c\overline{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{6.3}$$

wobei $\overline{\psi}=\psi^\dagger\beta=\psi^\dagger\gamma^0$ der Pauli adungierte Spinor ist.

6.1 Elektromagnetische Wechselwirkung

externe $\vec{E},\vec{B}$ Fleder $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$, $\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

$$\rightarrow A^\mu=(\frac{\phi}{c},\vec{A})$$

minimale Subsittution:

$$p^\mu\rightarrow p^\mu-eA^\mu \quad QM\rightarrow i\hbar\partial^\mu-eA^\mu=i\hbar(\partial^\mu+\frac{ie}{\hbar}A^\mu)=i\hbar D^\mu$$

Komponenten der Kovarianten Ableitung D^μ

$$i\hbar D^\mu=(i\hbar\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{e}{c}\phi,\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}-e\vec{A})$$

$$=(\frac{i}{c}(c\hbar\frac{\partial}{\partial t}-e\phi),\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}-e\vec{A})$$

jErsetze in freier Dirac-Gl ∂

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x)=c\vec{\alpha}(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}-e\vec{A})\psi+\beta mc^2\psi+e\phi\psi}$$

oder

$$\boxed{(i\gamma^\mu D_\mu-\frac{mc}{\hbar})\psi=0}$$

beschreibt WW eines Elektrons der Ladung e mit dem elektromagnetischen Feld.