Aufgabe 14: SU(2) und SO(3)

a) Zeigen Sie, dass jede hermitesche, spurlose 2×2-Matrix P als $P = \vec{p} \cdot \vec{\sigma}$ geschrieben werden kann. Darin sind σ_i die Pauli-Matrizen und $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$

LSG

P sei hermitesche 2×2 Matrix mit $Spur(P) = 0$ und $P^\dagger = P$;

$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ und $a = -d$ und $b^* = c$

Pauli Matritzen: $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$,$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & x+iy \\ x-iy & -a \end{pmatrix}$; mit $b = x + iy$

$\Rightarrow P = a \cdot \sigma_3 + \begin{pmatrix} 0 & x+iy \\ x-iy & 0 \end{pmatrix} = a \cdot \sigma_3 + x \cdot \sigma_1 - y \cdot \sigma_2 = a \cdot \sigma_3 + x \cdot \sigma_1 + y' \cdot \sigma_2$

setze $a = z$ $P = \begin{pmatrix} z & x+iy \\ x-iy & -z \end{pmatrix}$ mit $x, y, z \in \mathbb{R}$

Da P hermitesch ist $a = z \in \mathbb{R}$

b) Solch eine Matrix werde nun mit einer unitären Matrix $U \in SU(2)$ trasformiert, $P' = U^{-1}PU$. Zeigen Sie, dass $P' = (\vec{p})' \cdot \vec{\sigma}$ mit $(\vec{p})' \in \mathbb{R}^3$ und berechnen Sie $detP$ sowie $detP'$. Begründen Sie aus Ihren Ergebnissen, dass sich $\vec{p}$ wie ein dreidimensionaler Vektor unter Drehungen transformiert.

LSG

zu Zeigen: det P = det P' weil U unitär ist ($detU = \frac{1}{detU^{-1}}$), weiterhin Sp(P)=Sp(P')=0 wegen a)

$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \Rightarrow U^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix}$

$$P' = U^\dagger PU = U^\dagger \vec{p}\vec{\sigma}U$$

$$Sp(P') = \sum_k U^\dagger_{ki} p_n \sigma_{ij} U_{jk} = \sum_j \underbrace{U_{jk} U^\dagger_{ki}}_{=1} p_n \sigma_{ij} = Sp(P) = 0$$

$$\begin{aligned}
P' = U^\dagger PU &= \begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & x+iy \\ x-iy & -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} && (0.1) \\
&= \begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} az - b^*(x+iy) & bz + a^*(x+iy) \\ a(x-iy) + b^*z & b(x-iy) - a^*z \end{pmatrix} && (0.2) \\
&= \begin{pmatrix} a^*az - a^*b^*(x+iy) - ba(x-iy) - bb^*z & a^*bz + a^*a^*(x+iy) - b^2(x-iy) + ba^*z \\ b^*az - b^*b^*(x+iy) + a^2(x-iy) + ab^*z & b^*bz + b^*a^*(x+iy) + ab(x-iy) - aa^*z \end{pmatrix} && (0.3) \\
&\equiv \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2^* & -p_1 \end{pmatrix} = p_1\sigma_3 + Re\{p_2\}\sigma_1 + Im\{p_2\}\sigma_2 && (0.4)
\end{aligned}$$

$detP = -z^2 - ((x+iy)(x-iy)) = -(x^2 + y^2 + z^2) \equiv -||\vec{p}||^2$

$$\begin{aligned}
detP' &= -||(\vec{p})'||^2 && (0.5) \\
&= det(U^\dagger PU) && (0.6) \\
&= det(U^\dagger) \cdot det(P) \cdot det(U) && (0.7) \\
&= det(U^\dagger) \cdot det(U) \cdot det(P) && (0.8) \\
&= det(U^\dagger U) \cdot det(P) && (0.9) \\
&= \underbrace{det(U^\dagger U)}_{=1} \cdot det(P) && (0.10) \\
&= det(P) = -||\vec{p}||^2 && (0.11)
\end{aligned}$$

Also kann die Unitäre Transformation in SU(2) eine Drehung in SO(3) sein, weil sich die Länge des Vektors nicht verändert.

$$\Rightarrow ||\vec{p}||^2 = ||(\vec{p})'||^2$$

Es ist möglich jedes Element aus SO(3) mit einem Element aus SU(2) eindeutig zuzuordnen (surjektiv???). Wenn wir U durch $-U \in SU(2)$ ersetzen, folg:

$$P'' = (-U)^\dagger P(-U) = U^\dagger PU = P'$$

Somit wird $-U \in SU(2)$ genau das gleiche $R \in SO(3)$ wi auch $U \in SU(2)$ zugeordnet.

c) Wenn nun also U für $\vec{p}$ eine 'gewöhnliche' Drehung R induziert, also $p'_i = R_{ij}p_j$, dann sollte es einen Zusammenhang zwischen R und U geben. Drücken Sie die Matrixelemente R_{ij} mit Hilfe der Pauli-Matrizen durch U aus. Ist diese Zuordnung eindeutig?

LSG

first try: Mit der Darstellung $P = \vec{p}\vec{\sigma}$ wird mit der U aus SU(2) Trasformiert und danach als eine 3D Rotationsmatrix dargestellt wie folgt: $\vec{p} = 3DMatrix \cdot (\vec{p})'$

schreibe $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $(\vec{p})' = \begin{pmatrix} Re\{p_2\} \\ Im\{p_2\} \\ p1 \end{pmatrix}$; TODO $(\vec{p})' = R \cdot \vec{p}$

$p_1 = a^*az - a^*b^*(x+iy) - ba(x-iy) - bb^*z$, $p_2 = a^*bz + (a^*)^2(x+iy) - b^2(x-iy) + ba^*z$

$$\begin{aligned} Re\{p_2\} &= (a^*bz + (a^*)^2(x+iy) - b^2(x-iy) + ba^*z)(a^*bz + (a^*)^2(x+iy) - b^2(x-iy) + ba^*z)^* && (0.12) \\ &= (a^*bz + (a^*)^2(x+iy) - b^2(x-iy) + ba^*z)(ab^*z + (a)^2(x-iy) - (b^*)^2(x+iy) + b^*az) && (0.13) \\ &= (aa^*bb^*z^2 ... && (0.14) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} Re\{p_2\} \\ Im\{p_2\} \\ p1 \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (0.15)$$

$$(0.16)$$

$$\begin{pmatrix} Re\{p_2\} \\ Im\{p_2\} \\ p1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ (a^*)^2 - b^2 & i(a^*)^2 + ib^2 & a^*b + ba^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (0.17)$$

$$(0.18)$$

$(x+iy)(x+iy) = x^2 - y^2 + 2ixy$

second try:

$$\begin{aligned} Up_j\sigma_jU^\dagger &= p'_k\sigma_k && (0.19) \\ U\sigma_jU^\dagger p_j &= p'_k\sigma_k \qquad | \cdot \sigma_i && (0.20) \\ U\sigma_jU^\dagger p_j \cdot \sigma_i &= p'_k\sigma_k \cdot \sigma_i && (0.21) \end{aligned}$$

mit $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$; $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i + 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$; $\sigma_j\sigma_i = \mathbb{1} \cdot \delta_{ji} + 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$

$$U\sigma_j U^\dagger p_j \cdot \sigma_i = p'_k \mathbb{1}\delta_{ki} + 2\epsilon_{kip}\sigma_p \tag{0.22}$$
$$U\sigma_j U^\dagger p_j \cdot \sigma_i = p'_k \mathbb{1}\delta_{ki} + p'_k 2\epsilon_{kip}\sigma_p \tag{0.23}$$
$$U\sigma_j U^\dagger p_j \cdot \sigma_i = p'_i \mathbb{1} + p'_k 2\epsilon_{kip}\sigma_p \tag{0.24}$$
$$Sp(U\sigma_j U^\dagger p_j \cdot \sigma_i) = Sp(p'_i \mathbb{1} + p'_k 2\epsilon_{kip}\sigma_p) \tag{0.25}$$
$$Sp(U\sigma_j U^\dagger \sigma_i)p_j = p'_i \underbrace{Sp(\mathbb{1})}_{=2} + p'_k 2\epsilon_{kip} \underbrace{Sp(\sigma_p)}_{=0} \tag{0.26}$$
$$\tag{0.27}$$

$$\Leftrightarrow p'_i = \underbrace{\frac{Sp(U\sigma_j U^\dagger \sigma_i)}{2}}_{R_{ij}} p_j$$

——————– Spur: $Sp(A) = \sum_n \langle n|A|n\rangle$;

$$Sp(AB) = \sum_n \langle n|A \cdot B|n\rangle = \sum_n \langle n|A \cdot \mathbb{1} \cdot B|n\rangle \tag{0.28}$$
$$= \sum_n \langle n|A|m\rangle\langle m|B|n\rangle \tag{0.29}$$
$$\equiv \sum_m \langle m|B|n\rangle\langle n|A|m\rangle \tag{0.30}$$
$$= Sp(BA) \tag{0.31}$$

$$Sp(ABC) = \sum_k \langle k|A \cdot B \cdot C|k\rangle = \sum_k \langle k|A \cdot \mathbb{1} \cdot C \cdot \mathbb{1} \cdot B|k\rangle \tag{0.32}$$
$$= \sum_k \langle k|A|i\rangle\langle i|C|j\rangle\langle j|B|k\rangle \tag{0.33}$$
$$= \sum_j \langle j|B|k\rangle\langle k|A|i\rangle\langle i|C|j\rangle \tag{0.34}$$
$$= Sp(CAB) \tag{0.35}$$
$$= Sp(BCA) \tag{0.36}$$

mit $Sp(\sigma_i) = 0 \rightarrow Sp(P) = \sum_j p_i\sigma_{jj} = p_i \sum_j \sigma_{jj} = 0$