Contents

Chapter 6

Kap 6. Relativistische QM

Notation: Vierer-Vektoren

$$x^\mu = ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{r})$$

invariante Lönge $\sqrt{x^2}$

$$x^2 = x \cdot x = x^\mu x_\mu = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu$$

Einsteinsche Summenkonvention: $\sum_{\mu=0}^{3}$ für jedes Paar von oberen und unteren Index
Metrischer Tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -\vec{r})$$

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu = g^{\mu\nu} x^\nu = g^\nu_\nu x^\nu$$

$$g^\nu_\nu = \delta^\nu_\nu = \begin{cases} 1, & \mu = \nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} \to g^{\mu\nu} = [g_{\mu\nu}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vierer-Impuls: $p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p})$ $E = \sqrt{(mc^2)^2 + (\vec{p}c)^2}$

$$p^2 = p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = \frac{m^2c^4 + \vec{p}^2 c^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2$$

Vierer-Potential: LT $x^{'\mu} = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$

$$A^\mu = (\frac{\phi}{c}, \vec{A} \qquad \to A^{'\mu}(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x)$$

Strom: $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$ in E und M
Skalarprodukt für a^μ, b^μ : $\qquad a \cdot b = a^\mu b_\mu = a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$
Ableitung nach x^ν

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla})$$

ist kovarianter Vektor unter Index wg: $\partial \mu a \cdot x = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(a_\nu x^\nu) = a_\mu$
Entsprechend $\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla})$
d'Alebert Operator

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$$

6.0 QM eines freien Teilchens

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$$

$$p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p}) \to (i\hbar\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar\vec{\nabla}) = i\hbar\partial^\mu$$

Schrödinger Gl. für NR freies Teilchens

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\psi(\vec{x}, t)$$

Relativistischer Fall

1) $E = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2} \to$ nichtlokalen Operator
2) $\frac{E^2}{c^2} = m^2c^2 + \vec{p}^2 \to -\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = m^2c^2\psi - \hbar^2\vec{\nabla}^2\psi$

$$\Leftrightarrow 0 = m^2c^2\psi + \hbar^2(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2 - \nabla^2)\psi = m^2c^2\psi + \hbar^2\Box\psi})$$

Klein Gordon Gl.

$$(\Box + (\frac{mc}{\hbar})^2)\psi(x) = 0$$

Anwendbar auf skalare Teilichen (Spin 0) wie $\pi^+, \pi^-, \pi^0, K, H$
Lösungen der KG-Gl. durch ebene Wellen

$$\psi_p(x) = Ne^{-ip\cdot x/\hbar} = Ne^{-iEt/\hbar}e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}$$

mit $p \cdot x = p^\mu x_\mu = Et - \vec{p}\cdot\vec{x}$

$$\Box\psi_p = (x) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi_p(x) = N(-\frac{i}{\hbar}p_\mu)(-\frac{i}{\hbar}p^\mu)e^{-ip\cdot x/\hbar} = -\frac{p^2}{\hbar^2}\psi_p$$

KG:

$$\Rightarrow (-\frac{p^2}{\hbar^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2})\psi_p(x) = 0 \Leftrightarrow p^2 = m^2c^2; \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2$$

$$\to E = \pm c\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2}$$

Lösungen mit Negativer Energie und das Energiespektrum ist nach unten nicht beschränkt.

6.0 Wahrscheinlichkeitserhaltung

Kontin.Gl $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu j^\mu = 0$ mit $j^\mu = (\rho c, \vec{j})$.
Gibt es einen erhaltenen 4-Strom für die lösung der KG-Gleichung?

$$\psi^*(\Box + (\frac{mc}{\hbar})^2)\psi(x) - \psi(\Box + (\frac{mc}{\hbar})^2)\psi^*(x) = 0$$

$$\psi^*(\partial_\mu\partial^\mu\psi) - \psi(\partial_\mu\partial^\mu\psi^*) = 0$$

$$\partial_\mu(\underbrace{\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\psi^*}_{\propto j^\mu}) = 0$$

$$j^\mu \propto (\psi^*\frac{i}{c}\frac{\propto}{\propto t}\psi - \psi\frac{i}{c}\frac{\propto}{\propto t}\psi^*, -(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*))$$

Kandidat für Wahrscheinlichkeits Strom $\frac{2im}{\hbar}\vec{j}$ in Schrödinger Gl

$$j^\mu = \frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\psi^*)$$

$$\to j^0 = \rho c = \frac{i\hbar}{2mc}(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t})$$

Anwendung auf stationäre Lösung: $\psi_E(x) = e^{-iEt/\hbar}\psi_E(\vec{x})$

$$\frac{\partial\psi_E}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar}\psi_E, \frac{\partial\psi_E^*}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar}\psi_E^* \Rightarrow \rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}|\psi_E(\vec{x})|^2\frac{-2iE}{\hbar} = \frac{E}{mc^2}|\psi_E(x)|^2$$

$\rho < 0$ für Zustände mit $E < 0$
$\Rightarrow$ Keine mögliche Wahrscheinlichkeitsdichte. (Ok für Zustände mit positiver Energie)
Interpretation: Zustände mit $E > 0 \Leftrightarrow$ z.B. π^+ und $E < 0 \Leftrightarrow$ z.B. π^-(Antiteilchen zum π^+)
$\rho > 0$: π^+ dominieren $\rho < 0$: π^- dominieren
$\rho \propto$ elektromagn. Ladungsdichte

$$j^\mu = |e|\frac{i\hbar}{2mc}(\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\psi^*)$$

Elektronen: Spin
$\to$ Wellenfunktion $\psi(x)$ hat ≥ 2 Komponenten

$$\psi(x) = \begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ ...\\ \psi_N(x)\end{pmatrix}$$

Möglichkeit: Matrixstruktur für $\hat{H}$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = \hat{H}\psi(x)$$

Ansatz: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi$ mit $\psi(x) = \begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ ...\\ \psi_N(x)\end{pmatrix}$
und Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho = \sum_{i=1}^N |\psi_i|^2$

$$\Rightarrow \hat{H} \propto \frac{\partial}{\partial x^i} \propto \hat{p}_i$$

Ansatz für $\hat{H}$

$$\hat{H} = c(\alpha_x \hat{p}_x + \alpha_y \hat{p}_y) + \beta mc^2 = c\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \hat{p}_i + \beta mc^2$$

Ebene Wellenlösung für freie Teilchen

$$\psi(x) = e^{-px/\hbar}\psi(p)$$

mit $p^2 = m^2c^2$

$$\Rightarrow E\psi(p) = [c\sum_{i=1}^{3} \alpha_i p_i + \beta mc^2]\psi(p)$$

$$E^2\psi(p) = (m^2c^4 + \vec{p}^2c^2)\psi(p)$$
$$Ec(\vec{\alpha}\vec{p} + \beta mc)\psi(p) = c^2(\vec{\alpha}\vec{p} + \beta mc)^2\psi(p)$$

$$= c^2(\sum_{i,j=1}^{3} \alpha_i\alpha_j p_i p_j + \sum_{i=1}^{3}(\alpha_i\beta + \beta\alpha_i)p_i mc + \beta^2m^2c^2)\psi(p)$$

Koeffizienfenvergleich: $\beta^2 = 1$; Antikommutator:

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0$$

- $\boxed{\beta^2 = 1}$
- Antikommutator: $\boxed{\{\alpha_i, \beta\} = 0}$
- $i \neq j$: z.B: $p_xp_y\{\alpha_x\alpha_y + \alpha_y\alpha_x\}$; $\{\alpha_i, \alpha_j\} = 0$
- $i = j$: $\alpha_x^2p_x^2 + \alpha_y^2p_y^2 + \alpha_z^2p_z^2 = \vec{p}^2 \Rightarrow \alpha_i^2 = 1$

$$\Rightarrow \boxed{\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}}$$

1) $\hat{p}_i, \hat{H}$ hermitesch $\Rightarrow \vec{\alpha}, \beta$ hermitesch
2) $\alpha_i^2 = 1, \beta^2 = 1 \Rightarrow$ Eigenwerte von α_i, β
3) $\alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0 \qquad | \cdot \beta$

$$\Rightarrow \alpha_i = -\beta\alpha_i\beta \Rightarrow Tr[\alpha_i] = -Tr[\beta\alpha_i\beta] = -Tr[\alpha_i\beta^2] = -Tr[\alpha_i]$$

\# - Anzahl; N - Dimension der Matrix
\# EW +1 = # EW -1
$\Rightarrow N$ gerade ($N = 2, 4, ...$)
$N = 2 \Rightarrow$ 3 Pauli Matrizen als Kandidaten benötigt: 4 Matrizen $\Rightarrow N \geq 4 : N = 4$ funktioniert
$N = 4$: Dirac Basis: β diagonal

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

α_i hermitesch + $\{\alpha_i, \beta\} = 0$

$$\alpha = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} A & -B \\ C & -D \end{pmatrix}$$

$A = D = 0$, $C = B^\dagger$

$$\beta\alpha = \begin{pmatrix} A & B \\ -C & -D \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \tau_i \\ \tau_i^\dagger & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \Leftrightarrow \tau_i\tau_j^\dagger + \tau_j\tau_i^\dagger = 2\delta_{ij}$$

Lösung $\tau_i = \sigma_i =$ Pauli Matrizen

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}; \qquad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}}$$

6.1 Dirac Gleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = c(\vec{\alpha}\cdot\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + \beta mc)\psi(x) \qquad |\cdot\frac{\beta}{\hbar c}$$

Alternativ: kovariante Form

$$\Rightarrow i\beta\underbrace{\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}}_{\frac{\partial}{\partial x^0}}\psi + i\underbrace{\beta\vec{\alpha}_i}_{\gamma^i}\cdot\underbrace{\vec{\nabla}_i}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\psi - \frac{mc}{\hbar}\psi = 0$$

$$\Rightarrow (i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{mc}{\hbar})\psi = 0$$

$\gamma^0 = \beta$; $\gamma^i = \beta\alpha_i$

$$\boxed{\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0}$$

Kovariante Form der Dirac Gleichung mit $\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}_4$

z.B. $\{\gamma^i, \gamma^j\} = \beta\underbrace{\alpha_I\beta}_{-\beta\alpha_i}\alpha_j + \beta\underbrace{\alpha_j\beta}_{-\beta\alpha_j}\alpha_i = -\{\alpha_i, \alpha_j\} = -2\delta_{ij}$

6.1 Wahrscheinlichkeitsstrom

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i}\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\psi + \beta mc^2\psi$$

adjungierte Dirac Gleichung:

$$-i\hbar\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i}(\vec{\nabla}\psi^\dagger)\vec{\alpha} + \beta mc^2\psi^\dagger \qquad |\cdot\psi$$

Differenz der beiden Gleichungen:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\psi^\dagger\psi) = \frac{\hbar c}{i}(\psi^\dagger\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\psi + (\vec{\nabla}\psi^\dagger)\vec{\alpha}\psi)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\psi^\dagger\psi) = -c\vec{\nabla}(\psi^\dagger\vec{\alpha}\psi)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{(\psi^\dagger\psi)}_{\rho}+\vec\nabla\cdot\underbrace{(c\psi^\dagger\vec\alpha\psi)}_{\vec j}$$

$$\rho=\psi^\dagger\psi=\sum_i|\psi_i|^2\geq 0$$

ρ ist positiv definierte Warscheinlichkeitsdichte
Kovariante Form des W-Stroms

$$\begin{aligned} j^\mu &= (c\psi^\dagger\psi, c\psi^\dagger\vec\alpha\psi) && (6.1)\\ &= (c\psi^\dagger\beta\gamma^0\psi, c\psi^\dagger\beta\vec\gamma\psi) && (6.2)\\ &= c\psi^\dagger\beta\gamma^\mu\psi = c\overline{\psi}\gamma^\mu\psi && (6.3)\end{aligned}$$

wobei $\overline{\psi}=\psi^\dagger\beta=\psi^\dagger\gamma^0$ der Pauli adungierte Spinor ist.

6.1 Elektromagnetische Wechselwirkung

externe $\vec E,\vec B$ Fleder $\vec B=\vec\nabla\times\vec A$, $\vec E=-\vec\nabla\phi-\frac{\partial\vec A}{\partial t}$

$$\to A^\mu=(\frac{\phi}{c},\vec A)$$

minimale Subsittution:

$$p^\mu\to p^\mu-eA^\mu\quad QM\to i\hbar\partial^\mu-eA^\mu=i\hbar(\partial^\mu+\frac{ie}{\hbar}A^\mu)=i\hbar D^\mu$$

Komponenten der Kovarianten Ableitung D^μ

$$i\hbar D^\mu=(i\hbar\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{e}{c}\phi,\frac{\hbar}{i}\vec\nabla-e\vec A)$$

$$=(\frac{i}{c}(c\hbar\frac{\partial}{\partial t}-e\phi),\frac{\hbar}{i}\vec\nabla-e\vec A)$$

jErsetze in freier Dirac-Gl ∂

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x)=c\vec\alpha(\frac{\hbar}{i}\vec\nabla-e\vec A)\psi+\beta mc^2\psi+e\phi\psi}$$

oder

$$\boxed{(i\gamma^\mu D_\mu-\frac{mc}{\hbar})\psi=0}$$

beschreibt WW eines Elektrons der Ladung e mit dem elektromagnetischen Feld.
Notation: $\vec\alpha\vec p\psi=\frac{\hbar}{i}\vec\alpha\vec\nabla\psi$

mit $A=1...4$ $[\vec\alpha\vec p\psi]_A=\sum_{j=1}^3\sum_{B=1}^4\alpha_{jAB}\frac{\hbar}{i}\nabla_i\psi_B(\vec x,t)=\left[\begin{pmatrix}0&\vec\sigma\vec p\\ \vec\sigma\vec p&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}\end{pmatrix}\right]_A$

Nichtrel. Grenzfall: $E=mc^2+E_S$
Ansatz:

$$\psi(\vec x,t)=e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t}\begin{pmatrix}\phi(\vec x,t)\\ \chi(\vec,t)\end{pmatrix}=e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t}e^{i\frac{E_S}{\hbar}t}\begin{pmatrix}\phi_E(\vec x,t)\\ \chi_E(\vec,t)\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow i\hbar \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\chi} \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\vec{p}i\vec{\chi} \\ \vec{\sigma}\vec{p}i\phi \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \phi \\ -\chi \end{pmatrix} + e\phi \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

mit $\vec{\pi} = \vec{p} - e\vec{A} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e\vec{A} = \frac{\hbar}{i}\vec{\mathcal{D}}$

$$\Rightarrow \chi : 2mc^2\chi + i\hbar\dot{\chi} - e\phi\chi = c\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi$$

$$\Rightarrow i\hbar\dot{\phi} = c\vec{\sigma}\vec{\pi}\chi + e\Phi\phi$$

$$\chi \approx \frac{1}{2mc^2} c\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi \approx \frac{mv}{2mc}\phi = \frac{1}{2}\frac{v}{c}\phi$$

($\chi = \frac{1}{2mc^2+E_S-V}c\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi$) χ ist kleine Komponente des Dirac Spinors. Einsetzen von χ:

$$i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{c^2(\vec{\sigma}\vec{\pi})^2}{2mc^2}\phi + V\phi \qquad (V = e\Phi)$$

Berechnung von $(\vec{\sigma}\vec{\pi})^2 = -\hbar^2 \underbrace{\sigma_i\sigma_j}_{\frac{1}{2}[\sigma_i,\sigma_j]+\frac{1}{2}\{\sigma_i,\sigma_j\}} D_iD_j$ mit $[\sigma_i, \sigma_j] = i\hbar^2\epsilon_{ijk}\sigma_k$ und σ_{ij}

$$(\vec{\sigma}\vec{\pi})^2 = \vec{\pi}^2 - i\hbar^2\epsilon_{ijk}\sigma_k \underbrace{D_iD_j}_{\frac{1}{2}[D_i,D_j]}$$

$$[D_i, D_j] = [\nabla_i - \frac{i}{\hbar}eA_i, \nabla_j - \frac{i}{\hbar}eA_j] = -\frac{i}{\hbar}e(\underbrace{(\nabla_iA_j)}_{\vec{\nabla}\times\vec{A}}\underbrace{-(\nabla_jA_i)}_{\vec{\nabla}\times\vec{A}})$$

$$\Rightarrow (\vec{\sigma}\vec{\pi})^2 = \vec{\pi}^2 - \frac{1}{2}\hbar e\vec{\sigma}(\vec{\nabla}\times\vec{A})2 = \vec{\pi}^2 - 2e\vec{S}\vec{B} \qquad (\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$$

$$\rightarrow i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\pi^2}{2m}\phi - \frac{e}{2m}2\vec{S}\vec{B}\phi + V\phi$$

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{(\vec{p}-e\vec{A})^2}{2m}\phi - \frac{e}{2m}2\vec{S}\vec{B}\phi + V\phi} \qquad \text{Pauli Gleichung}$$

Schwaches homogenes B-Feld: $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}$

$$\frac{(\vec{p}-e\vec{A})^2}{2m} \approx \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e}{2m}\vec{B}\vec{L}$$

$$\Rightarrow i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\vec{p}^2}{2m}\phi - \frac{e}{2m}\vec{B}(\vec{L}+2\vec{S})\phi + V\phi$$

Magnetisches Moment des Elektrons: $\vec{\mu} = \frac{e}{2m}(\vec{L}+2\vec{S})$ $g = 2$ für geladenes Dirac-Fermion

6.1 Relativistische Korrekturen

Energieeigenzustände: $\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}(\vec{x},t) = e^{-E_s t/\hbar}\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}(\vec{x},t)$
Dirac Gleichung ist äquivalent zu

$$(2mc^2 + E_S - V)\chi = c\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi$$

$$E_S\phi = c\vec{\sigma}\vec{\pi}\chi + V\phi$$

$$\Rightarrow \chi = \frac{1}{2mc^2 + E_S - V}c\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi \tag{6.4}$$

$$= \frac{1}{2mc}\frac{1}{1+\frac{E_S-V}{2mc^2}}\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi \tag{6.5}$$

$$\approx \frac{1}{2mc}(1 - \frac{E_S - V}{2mc^2} + ...)\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi \tag{6.6}$$

$$(E_S - V)\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi = \vec{\sigma}\vec{\pi}(E_S - V)\phi + \vec{\sigma}\underbrace{[E_S - V, \vec{\pi}]}_{[\vec{\pi},V]=\frac{\hbar}{i}(\vec{\nabla}V)}\phi$$

Einsetzen in $E_S\phi = ...$

$$(E_S - V)\phi = \frac{(\vec{\sigma}\vec{\pi})^2}{2m}\phi - \frac{\vec{\sigma}\vec{\pi}}{4m^2c^2}\left(\frac{(\vec{\sigma}\vec{\pi})^3}{2m} + \vec{\sigma}\frac{\hbar}{i}(\vec{\nabla}V)\right)\phi$$

Spezialfall:

- $V = V(r)$ sphärisch symmetrisch $\Rightarrow \vec{\nabla}V = \vec{r}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}$
- $\vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{\pi} = \vec{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \Rightarrow (\vec{\sigma}\vec{\pi})^2 = \vec{p}^2$

$$\Rightarrow E_S\phi = (\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + V)\phi - \frac{\hbar}{i}\frac{1}{4m^2c^2}\underbrace{\sigma_i\sigma_j}_{i\epsilon_{ijk}\pi_k+\sigma_{ij}}p_i r_j\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\phi$$

$$E_S\phi = (\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + V)\phi - \hbar\frac{1}{4m^2c^2}\vec{\sigma}(\vec{r}\times\vec{p})\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\phi + \frac{\hbar^2}{4m^2c^2}\left((\nabla^2V) + \underbrace{(\vec{\nabla})\cdot\vec{\nabla}}_{\text{nicht selbst adjungiert}}\right)\phi$$

Interpretation:

- $-\frac{p^4}{8m^3c^2}$ relativistischer Beitrag zur kin. Energie
  $E = \sqrt{(mc^2)^2 + p^2c^2} = mc^2\sqrt{1+\frac{p^2}{(mc)^2}} = mc^2(1 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{m^2c^2} - \frac{1}{8}\frac{p^4}{m^4c^4} + ...) = mc^2 - \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{8}\frac{p^4}{m^3c^2}$
- $\hbar\frac{1}{4m^2c^2}\vec{\sigma}(\vec{r}\times\vec{p})\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\phi = \frac{1}{2m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\vec{L}\vec{S}\phi = H_{LS}$ Korrekte Spin-Bahn Kopplung, incluive Thomas Präzessionsfaktor $\frac{1}{2}$

6.1 Dirac Gleichung und Pauli Gl incl. relativistische Korrekturen

$$i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t}H_\phi\phi$$

mit

$$H_\phi = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V + H_r + H_{LS} + \tilde{H}_D$$

$$H_r = -\frac{1}{8m}\left(\frac{\vec{p}^2}{2m}\right)^2$$

$$H_{LC} = \frac{1}{2m^2c^2}\frac{1}{\gamma}\frac{dV}{d\gamma}\vec{L}\cdot\vec{S}$$

$$\tilde{H}_D = \frac{\hbar^2}{4m^2c^2}((\nabla^2 V) + (\vec{\nabla}V)\cdot\vec{\nabla})$$

$\cdot\vec{\nabla})$ nicht hermitesch
Problem: Warhscheinlichkeits-Dichte ist

$$\rho = \frac{j^0}{c} = \overline{\psi}\gamma^0 psi = \psi^\dagger\psi = \sum_{i=1}|\psi_i|^2 \tag{6.7}$$
$$= |\phi|^2 + |\chi|^2 \tag{6.8}$$
$$= |\phi|^2 + |\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{2mc}\phi|^2 \tag{6.9}$$
$$= |\phi|^2 + \phi^\dagger\frac{\vec{p}^2}{4m^2c^2}\phi \qquad \approx |\underbrace{(1+\frac{\vec{p}^2}{8m^2c^2})\phi}_{\phi}|^2 \tag{6.10}$$

Übergang zu

$$\phi = \Omega\phi = (1 + \frac{\vec{p}^2}{8m^2c^2} + ...)\phi$$

Foldy-Wouthuysen Transformation. (Details: Bjorken-Drell relativ. QM)
Ersetze $E_S\phi = H_\phi\phi$ durch $E_S\phi = \Omega E_S\phi = \underbrace{\Omega H_\phi\Omega^{-1}}_{H}\underbrace{\Omega\phi}_{\phi}$

$$H = (1 + \frac{\vec{p}^2}{8m^2c^2})H_\phi(1 - \frac{\vec{p}^2}{8m^2c^2}) \tag{6.11}$$
$$= H_\phi + [\frac{\vec{p}^2}{2m^2c^2}, H_\phi] + ... \qquad = H_\phi + [\frac{\vec{p}^2}{2m^2c^2}, V] + ... \tag{6.12}$$

NR: $[\frac{\vec{p}^2}{2m^2c^2}, V] = -\frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\underbrace{[\nabla_i\nabla_i, V]}_{\nabla_i\underbrace{[\nabla_i,V]}_{(\nabla_i V)}+\underbrace{[\nabla_i,V]}_{(\nabla_i V)}\nabla_i} = [(\nabla^2 V) + 2(\nabla, V)\nabla_i]$

6.2 Hamilton Op. für Pauli Gl mit rel. Korrekturen

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V + H_r + H_{LS} + H_D$$

mit Darwin-Term $H_D = \frac{h^2}{8m^2c^2}(\nabla^2 V)$

6.2 Korrekturen zum Wasserstoff spektrum

$$E_n^{(0)} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2a_0n^2}$$

$$\Delta E_n^{(1)} = \alpha^2 E_n^{(0)}\frac{1}{n}(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n})$$

Aufspaltung von $2p_{\frac{1}{2}}$ $2p_{\frac{3}{2}}$
gleiche Energie für $2s_{\frac{1}{2}}$ $2p_{\frac{1}{2}}$

6.2 Ebene Wellen als Lösungen der freien Dirac Gl

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) = 0$$

Ebene Welle als Ansatz $\psi = e^{-px/\hbar} w(p)$ mit $w(p)$-Spinor im Impulsraum

$$i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\phi(x) = i\gamma^\mu(-\frac{ip_\mu}{\hbar})\psi(x) \tag{6.13}$$

$$= \frac{1}{\hbar}\gamma^\mu p_\mu \psi(x) = \frac{mc}{\hbar}\psi(x) \tag{6.14}$$

Notation: $\gamma^\mu p_\mu = \not{a}$

$$\boxed{(\not{p} - mc)w(p) = 0}$$

Spezialfall: Teilchen in Ruhe

$$p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{0})$$

$$\to \not{p} = \frac{E}{c}\gamma^0 = \frac{E}{c}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{E}{c} - mc & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{c} - m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E}{c} - mc & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{E}{c} - mc \end{pmatrix} w(\vec{p}) = 0$$

4 Lösungen zu 2EW

$E = +mc^2$: $w_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$E = -mc^2$: $w_3(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_4(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Lösungen mit negativer Energie $\to$ Existenz von Positronen.

6.2 Lösung für Impuls ungleich 0

1) Matrixgl. $\not{p}w = mcw$ lösen
2) Lorenztransormation von Inertialsystem IS (Teilchen in Ruhe) in IS' ($\vec{p} \neq 0$)

6.2 Lorentz Transformation

$x' = \Lambda x$ mit $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$
Bsp: Boost in z-Richtung: $z' = \gamma(z - vt)$, $t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}z)$, $x' = x$, $y' = y$
LT erhält relativ. Länge

$$x'x' = g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu = \underbrace{\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma g_{\mu\nu}}_{g_{\rho\sigma}} x^\rho x^\sigma = x \cdot c = x^\rho x^\sigma g_{\sigma\rho}$$

Def. Eigenschaft einer LT

$$\Lambda_\mu{}^\rho \Lambda^\mu{}_\sigma = g^\rho{}_\sigma = \delta^\rho{}_\sigma$$

oder $(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu = \Lambda_\mu{}^\rho$
$\Rightarrow det\Lambda = \pm 1$ (verallgemeinerung von orthogonalen Transf)

infinitesimale LT

Mit $w^\rho{}_\mu$ infinitesimal

$$\Lambda^\rho{}_\mu = g^\rho{}_\mu + w^\rho{}_\mu$$

$$\Lambda_\mu{}^\rho \Lambda^\mu{}_\sigma = (g_\mu{}^\rho + w_\mu{}^\rho)(g^\mu{}_\sigma + w^\mu{}_\rho) \tag{6.15}$$

$$g^\rho{}_\sigma = g^\rho{}_\sigma + \underbrace{w_\sigma{}^\rho + w^\rho{}_\sigma}_{=0} + \ldots \tag{6.16}$$

$\rightarrow w_{\sigma\rho} + w_{\rho\sigma} = 0, \begin{pmatrix} 0 & w_{01} & w_{02} & w_{03} \\ -w_{01} & 0 & w_{12} & w_{13} \\ & & 0 & w_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
6 reelle freie Parameter $\Rightarrow$ 6 Generatoren
$\vec{J}$ (Drehungen) 3 w_{ij} $\vec{K}$ (Boosts) 3 w_{oi}

6.2 Kovarianz der Dirac Gleichung

inertialsystem:

IS	IS'
x^μ	$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$
$(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{mc}{\hbar})\psi(x) = 0$	$(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - \frac{mc}{\hbar})\psi'(x) = 0$

Zu zeigen: Es gibt zu jeder LT Λ eine lineare Abbildung $S(\Lambda)$ der Spinoren: $\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x^1)$
Die Menge $\{S(\Lambda)\}$ bilden Darstellung der Lorenzgruppe

$$S(\Lambda_1\Lambda_2) = S(\Lambda_1)S(\Lambda_2) \Rightarrow S(\mathbb{1}) = \mathbb{1}, \quad S(\Lambda^{-1}) = (S(\Lambda))^{-1}$$

$$\psi(x) = S(\Lambda^{-1})\psi'(x')$$

$$S(\Lambda_1)(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{mc}{\hbar})S(\Lambda^{-1})\psi'(x') = 0$$

$$\Leftrightarrow iS(\Lambda_1)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1}) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^\mu}}_{\Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}} - \frac{mc}{\hbar})\psi'(x') = 0$$

NR:
$x'^\nu = \Lambda^\nu{}_\rho x^\rho$
$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \underbrace{\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}}_{\Lambda^\nu{}_\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu}$
ist äquivalent zur Dirac Gl in IS'

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1})\Lambda^\nu{}_\mu = \gamma^\nu$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu = S(\Lambda^{-1})\gamma^\nu S(\Lambda^{-1})} *$$

Betrachte infinitesimalen Fall:

$$\Lambda^\nu{}_\mu = g^\nu{}_\mu + \omega^\nu{}_\mu$$

$$S(\Lambda) = \mathbb{1} - \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}$$

mit 4x4 Matrizen $\sigma_{\alpha\beta} = -\sigma_{\beta\alpha}$ (6 Matrizen)

$$S(\Lambda^{-1}) = \mathbb{1} - \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta} w^{\alpha\beta}$$

Einsetzen in *: Term linear in $\omega^{\mu\nu}$ gilt für alle $\omega^{\alpha\beta} = -\omega^{\beta\alpha}$

$$\underbrace{\omega^{\nu}{}_{\mu}\gamma^{\mu}}_{\omega^{\alpha\beta}\frac{1}{2}(g^{\nu}{}_{\alpha}\gamma_{\beta} - g^{\nu}{}_{\beta}\gamma_{\alpha})} = -\frac{i}{4}\omega^{\alpha\beta}(\gamma^{\nu}\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}\alpha^{\nu}$$

$$\Rightarrow \boxed{[\gamma^{\nu}, \sigma_{\alpha\beta}] = 2i(g^{\nu}{}_{\alpha}\gamma_{\beta} - g^{\nu}{}_{\beta}\gamma_{\alpha})}$$

Lösung fir $\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}[\gamma_{\alpha}, \gamma_{\beta}]$
Bew:

$$\frac{2}{i}[\gamma^{\nu}, \sigma_{\alpha\beta} = \gamma^{\nu}(\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta} - \gamma_{\beta}\gamma_{\alpha}) - (\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta} - \gamma_{\beta}\gamma_{\alpha})\gamma^{\nu}] + \gamma_{\alpha}\gamma^{\nu}\gamma_{\beta} - \gamma_{\beta}\gamma^{\nu}\gamma_{\alpha} - \gamma_{\alpha}\gamma^{\nu}\gamma_{\beta} + \gamma_{\beta}\gamma^{\nu}\gamma_{\alpha} \tag{6.17}$$
$$= 2 \cdot 2g^{\nu}{}_{\alpha}\gamma_{\beta} - 2 \cdot 2g^{\nu}{}_{\beta}\gamma_{\alpha} \tag{6.18}$$
$$= \frac{2}{i}2i(g^{\nu}{}_{\alpha}\gamma_{\beta} - g^{\nu}{}_{\beta}\gamma_{\alpha}) \tag{6.19}$$

$\Rightarrow \sigma_{\alpha\beta}$ sind Generatoren für Spinordastellung der LG

$$S(g+\omega) = 1 + \frac{1}{8}[\gamma_{\nu}, \gamma_{\nu}]\omega^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}$$

mit $\omega^{\mu\nu}$ endlich
Frage: Ist $j^{\mu} = c\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi$ mit $\overline{\psi} = \psi^{\dagger}\gamma^{0}$ ein 4-Vektor?
Transformation von $\overline{\psi}$:

$$\psi'(x')^{\dagger} = (S(\Lambda)\psi(x))^{\dagger} = \psi^{\dagger}(x)S^{\dagger}(\Lambda) = \psi^{\dagger}(x)e^{+\frac{i}{4}\sigma^{\dagger}_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}$$

$$\sigma^{\dagger}_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}[\gamma_{\alpha}, \gamma_{\beta}]^{\dagger} = -\frac{i}{2}[\gamma^{\dagger}_{\beta}, \gamma^{\dagger}_{\alpha}] = \frac{i}{2}[\gamma^{\dagger}_{\alpha}, \gamma^{\dagger}_{\beta}]$$

$$\gamma^{\dagger}_{0} = \gamma_{0} = \gamma^{0}\gamma_{0}\gamma^{0}$$

$$\vec{\gamma}^{\dagger} = (\beta\vec{\alpha})^{\dagger} = \vec{\alpha}\beta = \beta\underbrace{(\beta\vec{\alpha})}_{\vec{\gamma}}\beta = \gamma^{0}\vec{\gamma}\gamma^{0}$$

Durch eine Gleichung zusammenfassen:

$$(\gamma^{\mu})^{\dagger} = \gamma^{0}\gamma^{\mu}\gamma^{0}$$

$$\sigma^{\dagger}_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}[\gamma^{0}\gamma_{\alpha}\gamma^{0}, \gamma^{0}\gamma_{\beta}\gamma^{0}] = \gamma^{0}\sigma_{\alpha\beta}\gamma^{0}$$

wegen $\gamma^{0} = \mathbb{1}$

$$\Rightarrow S^\dagger(\Lambda) = e^{\gamma^0 A \gamma^0} \tag{6.20}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{(\gamma^0 A \gamma^0)^n}_{\gamma^0 A^n \gamma^0} \tag{6.21}$$
$$= \gamma^0 A \gamma^0 \tag{6.22}$$
$$= \gamma^0 e^{+\frac{i}{4}\sigma^\dagger_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}} \gamma^0 \tag{6.23}$$
$$= \gamma^0 S(\Lambda)^{-1} \gamma^0 \tag{6.24}$$

mit $A = \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}$

$$\boxed{S^\dagger(\Lambda) = \gamma^0 S(\Lambda^{-1})\gamma^0}$$

$\overline{\psi}'(x') = (\overline{\psi}'(x'))^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger(x)\psi^0\psi^0\S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \overline{\psi}(x)\overbrace{\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0}^{S(\Lambda^{-1})}$
LT von $j^\mu c\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$

$$j^{\mu'}(x') = c\overline{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = c\overline{\psi}(x)\underbrace{S(\Lambda^{-1})\gamma^\mu S(\Lambda)}_{\Lambda^\mu{}_\alpha\gamma^\alpha}\psi(x) \tag{6.25}$$
$$= \Lambda^\mu{}_\alpha(c\overline{\psi}'(x')\gamma^\alpha\psi(x)) = \Lambda^\mu{}_\alpha j^\alpha(x) \tag{6.26}$$

$\Rightarrow j^\mu(x)$ ist 4-Vektorfeld

$$j^\mu = (c\rho, \vec{j})$$

Kontinuitätsgleichung $\frac{1}{c}\frac{\partial(c\rho)}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{j} = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu j^\mu = 0$
Andere Bilineare: z.B.

$$\rho(x) = \overline{\psi}(x)\psi(x) \to \psi'(x') = \overline{\psi}'(x')\psi'(x') = \overline{\psi}'(x')\infty\psi'(x') = \overline{\psi}'(x')S(\Lambda^{-1}S(\Lambda)\psi'(x') = \overline{\psi}(x)\psi(x) = \rho(x)$$

$\Rightarrow \rho(x)$ ist ein Skalares Feld
Allgemeiner Fall: $\overline{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$ mit Γ 4x4 Matrix
Gute Basis der Γ:

$$\Gamma_S = \mathbb{1}, \quad \Gamma^\nu_\mu = \gamma_\mu, \quad \Gamma^T_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu}$$

$$\Gamma_p = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^5 = \gamma_5, \quad \Gamma^A_\mu = \gamma_\mu\gamma_5$$