Contents

Chapter 2

Unitäre OP, hermitesche OP und Generatoren

Unitärer Operator U, Observable H, es gilt

$$HU = UH$$
$$U^\dagger HU = H$$

$$\mathcal{T}(\vec{a})|\vec{r}\rangle = |\vec{r}+\vec{a}\rangle;$$

Allgemein: Impuls Operator ist Generatoro für Translation:

$$\mathcal{T}(\vec{a})|\vec{r}\rangle; = e^{-i/\hbar\vec{a}\vec{p}}$$

1-dim Fall: Translation der Wellenfunktion

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \psi(x-a) = e^{-\frac{i}{\hbar}a\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}}\psi(x)$$

$$\psi(x-a) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-a)^n\frac{d^n}{dx}\psi(x)$$

2.1 Drehungen

Drehung, Ursprung fest

$$\vec{r'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

R ist orthogonale 3x3 Matrix

$$RR^T = 1 = R^T R$$

Drehungen um z.Aschse Winekl ϕ

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} cos\phi & -sin\phi & 0 \\ sub\phi & cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gesucht: Generator für Drehung:

$$R_z(\phi) = e^{-iG_z\phi} = 1 - iG_z\phi + \dots \tag{2.1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\frac{\phi^2}{2} & -\phi & 0 \\ \phi & 1-\frac{\phi^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \dots \tag{2.2}$$

$$\Rightarrow G_z(\phi) = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i \frac{\partial}{\partial \phi} R_z(\phi) \Big|_{\phi=0}$$

Wegen $G_z^2 = Spur(1,1,0)$; $G_z^{2n+1} = G_z, G_z^{2n} \Rightarrow$

$$e^{-iG_z\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-iG_z\phi)^n = \begin{pmatrix} cos\phi & -sin\phi & 0 \\ sin\phi & cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Analog für Drehung um x-Achse

$$R_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\phi & -sin\phi \\ 0 & sin\phi & cos\phi \end{pmatrix} \to G_x(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

y-Achse

$$R_y(\phi) = \begin{pmatrix} cos\phi & 0 & sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\phi & 0 & cos\phi \end{pmatrix} \to G_y(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Drehungen kommutieren nicht! Explizite Rechnung:

$$[G_x, G_y] = iG_z \tag{2.3}$$

$$\text{und zyklisch } [G_i, G_j] = i\epsilon_{ijk} G_k \tag{2.4}$$

- Generatoren der Drehungen erfüllen die Drehimpulsalgebra
- Drehung um beliebige Achse $\vec{n}$ um Windel α

  $$R(\vec{\alpha} = \vec{\alpha}\vec{n}) = e^{-\vec{b}\vec{\alpha}}$$

  Drehmatrizen bilden eine Gruppe

  $$SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{(3,3)} | R^T R = \mathbb{1}, detR = 1\}$$

  S=(3) ist eine Gruppe, denn
  - abgeschlossen:R_1,$R_2 \in SO(3) \Rightarrow R^{-1} = R^T \in SO(3)$
  - Gruppenmultiplikation ist assoziativ (nicht kommutativ)

  SO(3= ist eine Lie-Gruppe. d.h. $R(\vec{\alpha})$ sind analytische Funktionen der α_x,α_y,α_z

  Wahl:$R(\vec{\alpha}) = \mathbb{1}$

  $\Rightarrow$Generator der Lie Gruppe ist

  $$G_j = i \frac{\partial}{\partial \alpha_i} R(\vec{\alpha}) \Big|_{\vec{\alpha}=0}$$

  Generatoren beschreiben alle Gruppenelemente.

  $$R(\vec{\alpha}) = e^{-i\vec{b}\vec{\alpha}}$$

2.1 Rotation eines QM Systems

System in Zustand $|\psi\rangle$ Betrachte Rotation des $\mathcal{R}^3$ mit $R(\vec{\alpha}) \in SO(3)$
System wird rotiert in Zustand

$$|\psi_R\rangle = \mathcal{D}(R)|\psi\rangle$$

mit unitärerm $\mathcal{D}(R)$, der geschrieben werden kann als

$$\mathcal{D}(R(\vec{\alpha})) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\alpha}\vec{J}}$$

Die Generatoren für infinitesimale Drehungen desQM Systems:

$$\vec{J} = (J_x, J_y, J_z) = (J_1, J_2, J_3)$$

heißen Drehimpulsoperatoren des Systems
Hintereinanderauführung von Drehungen

$$R_1 R_2 = R_3 \tag{2.5}$$
$$|\psi_{R_1 R_2}\rangle = \mathcal{D}(R_1)\mathcal{D}(R_2)|\psi\rangle \tag{2.6}$$
$$|\psi_{R_3}\rangle = \mathcal{D}(R_3)|\psi\rangle \tag{2.7}$$

Konsistenz verlangt

$$R(\vec{\alpha}_1)R(\vec{\alpha}_2) = R(\vec{\alpha}_3) \Leftrightarrow \mathcal{D}(\vec{\alpha}_1)\mathcal{D}(\vec{\alpha}_2) = \mathcal{D}(\vec{\alpha}_3)$$

betrachte Baker-Haussdorff: $e^A e^B = e^{A+B+1/2[A,B]+...}$

$$R : A = i\vec{\alpha}_i\vec{G} \qquad B = i\vec{\alpha}_2\vec{G} \tag{2.8}$$
$$\mathcal{D} : A = i\vec{\alpha}_i\vec{\eta} \qquad B = -\frac{i}{\hbar}\vec{\alpha}_2\vec{\eta} \tag{2.9}$$

$$A + B + 1/2[A, B] + ... + i\epsilon_{ijk}G_k$$

$$R : -i(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2)\vec{G} + \underbrace{\frac{(-i)^2}{2}\alpha_{1i}\alpha 2j[G_i, G_j]}_{-\frac{i}{2}(\vec{\alpha}_1 x\vec{\alpha}_2)_k G_k} \qquad = -i(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \frac{1}{2}\vec{\alpha}_1\vec{\alpha}_2 + ...)\vec{G}$$

$$D : -\frac{i}{\hbar}(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2)\vec{J} + \underbrace{(-\frac{i}{\hbar})^2\alpha_{1i}\alpha_{2j}[J_i, J_j]}_{(-\frac{i}{\hbar}\frac{1}{2}\epsilon ijk\alpha_{1i}\alpha_{2j}J_k} \tag{2.10}$$
$$= -\frac{i}{\hbar}\vec{\alpha}_1\vec{J} \tag{2.11}$$
$$\Rightarrow \boxed{[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon ijkJ_k} * \tag{2.12}$$

Realisierbar in vielen Weisen

1. $J_i = L_i = (\vec{r}\vec{p})_i$ Bahndrehimpuls
2. 3x3 Matrizen

   $$l_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; l_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; l_z = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

   erfüllen $[l_i, l_j] = i\epsilon ijkl_k$
   d.h. $\vec{J} = \hbar\vec{l}$ erfüllt *
3. Pauli Matrizen

   $$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

   Es gilt:

   $$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} \cdot 1 + i\epsilon_{ijk}\sigma_k = \frac{1}{2}[\sigma_i, p_i] + \frac{1}{2}\{\sigma_i, \sigma_j\}$$

   $$\Rightarrow [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \cdot 1$$

   $\Rightarrow \vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ erfüllen Drehimpulsalgebra *

Pauli Matrizen $[\sigma_i,\sigma_j]=2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$ Spin $\vec{S}=\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ erfüllt Drehimpulsalgebra

$$\mathcal{D}(\vec{\alpha})=e^{-i\vec{S}\vec{\alpha}/\hbar}$$

$$\sigma_i\sigma_j=i\epsilon_{ijk}\sigma_k+\delta_{ij}$$

$$\vec{\sigma}\vec{a}=a_1\sigma_1+a_2\sigma_2+a_3\sigma_3=a_i\sigma_i$$

$$\begin{pmatrix} a_3 & a_1-ia_2 \\ a_1+ia_2 & -a_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\sigma}\vec{a}\sigma\vec{b}=a_ib_i\underbrace{\sigma_i\sigma_j}_{\delta_ij+i\epsilon_{ijk}\sigma_k}=\vec{a}\vec{b}\infty+i(\vec{a}x\vec{b})\vec{\sigma}$$

$$\vec{\sigma}\vec{a})^2=\vec{a}^2\cdot 1$$

$$\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}(\vec{\alpha})=e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{S}\vec{\alpha}}=e^{-i\frac{\vec{\sigma}\vec{\alpha}}{2}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-i\frac{\alpha}{2})^n(\vec{\sigma}\vec{\alpha})^n=cos\frac{\alpha}{2}\pi-i\cdot sin\frac{\alpha}{2}\vec{\sigma}\alpha$$

Drehung um $\alpha=360Grad$

$$\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}(\vec{\alpha})=-1$$

Für Spin $\frac{1}{2}$ ergibt Drehung um 720 Einsabbildung
Mit $\vec{\alpha}=\vec{n}\alpha$

$$\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}(\vec{\alpha})=\begin{pmatrix} cos\frac{\alpha}{2}-in_zsin\frac{\alpha}{2} & (-in_x+n_y)sin\frac{\alpha}{2} \\ (-in_x-n_y)sin\frac{\alpha}{2} & cos\frac{\alpha}{2}+in_zsin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$$

$$det|\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}(\vec{\alpha})|=|a|^2+|b|^2=cos^2\frac{\alpha}{2}+\underbrace{n_z^2sin^2\frac{\alpha}{2}+sin^2\frac{\alpha}{2}(n_x^2+n_y^2)}_{sin^2\frac{\alpha}{2}\vec{n}^2}=1$$

Jede unitäre 2x2 Matrix U mit detU=1 kann geschrieben werden als $U=\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$ mit $|a|^2+|b|^2=1$

a,b heißen Cayley-Klein Parameter
Unitäre 2x2 Matrizen U mit det U=1 bilden eine Gruppe

$$SU(2)=\{U=\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix},detU=1 \tag{2.13}$$

$$=\{U\in\mathbb{C}^{2,2})|UU^\dagger=U^\dagger U=1,detU=1\} \tag{2.14}$$

$$=\{\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}(\vec{\alpha})|\vec{\alpha}\in\mathbb{R}^3\} \tag{2.15}$$

Generatoren für SU(2) sind $\frac{\sigma_i}{2}=G_1$, denn $U=e^{-i\frac{\vec{\sigma}}{2}\vec{\alpha}}$ Generatoralgebra ist

$$[G_i,G_j]=i\epsilon_{ijk}G_k$$

d.h. identisch für SU(2) und SO(3)
(Enge) Def. einer Algebra A:

- A ist Vektorraum über einen Körper $\mathbb{K}(=\mathbb{R},\mathbb{C})$
- Es gibt Produkt $A\times A\to A$ $(a,b)\in A\times A\to ab\in A$ Prokuukt ist assoziativ, d.h. $(ab)c=a(bc)=abc$ (Meistens nicht kommutativ)

Generatoralgebra ist Lie Algebra Vektorraum: $\vec{\alpha}\vec{J}=\sum_{i=1}^3\alpha_iJ_i\in A_L$ Produkt ist Kommutator: $[\vec{\alpha}_1\vec{J},\vec{\alpha}_2\vec{]}=i\hbar(\vec{\alpha}_1x\vec{\alpha}_2)\vec{J}$
nicht Kommutativ nichtassoziativ wegen Jacoby Identität

$$[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=0$$

2.2 Rotationsinvarianz

Beschreiben durch Hamiltonoperator

$$H = \mathcal{D}^{\dagger}(\vec{\alpha}) H \mathcal{D}(\vec{\alpha})$$

Beispiel:

$$H = H(\vec{p}, \vec{r}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(|\vec{r}|)$$

mit

$$\mathcal{D}(\vec{\alpha}) = e^{-i\frac{\vec{L}\vec{\alpha}}{\hbar}}$$

H rotationsinvariant $\Rightarrow$

$$H = (1 + i\frac{\vec{L}\vec{\alpha}}{\hbar})H(1 - i\frac{\vec{L}\vec{\alpha}}{\hbar} + ...) = H + i\frac{\alpha_i}{\hbar}[J_i, H] + ...$$

$\Rightarrow$

$$[H, J_i] = 0$$

$\Rightarrow$ Drehimpuls ist konstante der Bewegung, $i\hbar\frac{d\vec{J}}{dt} = 0$ Gleichzeitige Eigenzustände von H und Drehimpuls
Satz von kommutierenden Operatoren ist (z.B) $H, \vec{J}^2, J_z$
Eigenzustände von $\vec{J}^2, J_z$ sind

$$|jm\rangle : \vec{J}^2|jm\rangle\hbar^2 j(j+1)|jm\rangle$$

$$J_z|jm\rangle = \hbar m|jm\rangle$$

$2j + 1$ J_z Eigenzustände $|jm\rangle$ mit $m = j, j-1, ..., -j$ Auf-und Absteigeoperatoren

$$J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$$

$$J_{\pm}|jm\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}|jm \pm 1\rangle$$

Merkregel: $\sqrt{} = 0$ für $J_{\pm}|jm = \pm j\rangle$
Matrixelemente der J_x, J_y, J_z:

$$\langle j'm'|J_z|jm\rangle = \hbar m\sigma_{jj'}\langle j'm'|jm\rangle = \hbar m\sigma_{jj'}\sigma_{mm'}$$

$$\langle j'm'| \underbrace{J_z}_{\frac{1}{2}(J_+ + J_-)} |jm\rangle = \frac{1}{2}\langle j'm'|c_+(jm)|jm+1\rangle + \frac{1}{2}\langle j'm'|c_-(jm)|jm-1\rangle$$

$$\frac{\hbar}{2}\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\sigma_{jj'}\sigma_{m',m+1} + \frac{\hbar}{2i}\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\sigma_{jj'}\sigma_{m',m-1}$$

$$\langle j'm'|J_y|jm\rangle = \frac{1}{2i}\langle j'm'|J_+ - J_-|jm\rangle$$

Darstellung als Matrix

$$J_x = \hbar \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & \frac{1}{2} & & & & \\ & \frac{1}{2} & 0 & & & & \\ & & & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ & & & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \\ & & & & & & ... \end{pmatrix} \begin{matrix} |00\rangle \\ |\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{1}{-2}\rangle \\ |\frac{1}{1}\rangle \\ |\frac{1}{0}\rangle \\ |\frac{1}{-1}\rangle \\ |...\rangle \end{matrix}$$

$$J_y = \hbar \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & \frac{-i}{2} & & & & \\ & \frac{-i}{2} & 0 & & & & \\ & & & 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 & \\ & & & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & \\ & & & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \\ & & & & & & ... \end{pmatrix} \begin{matrix} |00\rangle \\ |\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{1}{-2}\rangle \\ |\frac{1}{1}\rangle \\ |\frac{1}{0}\rangle \\ |\frac{1}{-1}\rangle \\ |...\rangle \end{matrix}$$

- Block diagonale Form
- $j = \frac{1}{2} Block = \frac{\hbar}{2} *$ Pauli Matrix $j = 1 Block = \hbar l_x, \hbar l_y, \hbar l_z$

allgemein: Konstruktion von $2j + 1x2j + 1$ Matrizen $J_i^{(j)}(i = 1,2,3)$ mit $[J_k^{(j)}, J_l^{(j)}] = i\epsilon_{klm} J_n^{(j)}$ $\vec{J}^{(j)}$ bilden irreduzible Darstellung der Drehimpulsalgebra

2.2 Widerholung

J_x, J_y, J_z in $|jm\rangle$ Basis

$$(J_i^{(j)})_{mm'} = \langle jm|J_i|jm'\rangle$$

$J_i^{(j)}$ sind $(2j+1) \times (2j+1)$ Matrizen erfüllen Drehimpulsalgebra $[J_k^{(j)}, J_l^{(j)}] = i\hbar\epsilon_{kln} J_n^{(j)}$ $\vec{J}^{(j)}$ bilden Basis für irreduzible Darstellung der SU(2) Lie-Algebra

2.3 Darstellungstheorie für Gruppen

Gegeben ist eine Gruppe $G = \{g_i | i = 1,2,3,...\}$ Produkt in G mit

- $g_1, g_2 \in G \Rightarrow g_1, g_2 = g_3 \in G$
- Einselement $e \in G : eg = ge = g$ für das gild $g \in G$
- Es gibt ein Inverses g^{-1} für das gilt $g \in G : gg^{-1} = g^{-1}g = e$

Eine Darstellung r von G ist eine Abbildung auf komplexe Matrizen

$$r : G \to \mathbb{C}^{(n,n)}$$

$$r(g_i) = M_i$$

mit

- $r(\overbrace{g_1 g_2}^{g_3}) = r(g_1)r(g_2)$ und $M_3 = M_1 M_2$
- $r(e) = \mathbb{1}_r$
- $r(g_i) = M_i \Rightarrow r(g_1^{-1}) = M_i^{-1}$

2.3 Reduzible Darstellung

Eine Darstellung der Gruppe G heißt reduzibel , wenn es <u>eine</u> unitäre Matrix U gibt so dass

$$U^\dagger M_i U = \begin{pmatrix} M_i^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_i^2 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & M_i^k \end{pmatrix} \forall r(g_i) = M_i, g_i \in G$$

für alle $g_i \in M$ gleichzeitig; Gegenteil: irreduzibel
Drehmatrizen in $|jm\rangle$ $_x, Jy, J_z$ sind Block diagonal mit $(2j+1) \times (2j+1)$ dimension Blöcken
$\Rightarrow \vec{\alpha}\vec{J}$ ist Block diagonal $(\vec{\alpha}\vec{J})^n$ ist Block diagonal $e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\alpha}\vec{J}}$ ist Block diagonal
Jeder Block $e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\alpha}\vec{J}^{(j)}}$ ist eine irreduzible Darstellung der $SU(2)$

2.3 Wigner-funktionen

$\mathcal{D}$-Funktionen= Matrixelem. von $e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\alpha}\vec{J}^{(j)}}$ in $|jm\rangle$ Basis

$$\langle j'm'|\mathcal{D}(R)|jm\rangle = \delta_{jj'}\langle|e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\alpha}\vec{J}^{(j)}}|jm\rangle$$

$$= \delta_{jj'} \qquad \underbrace{\mathcal{D}^{(j)}_{m'm}(R)}_{2j+1 \text{ dim irred. Darst der SU(2)}}$$

Wigner-Funktionen beschreiben Drehungen eines beliebigen Systems! Gehe in $|jm\rangle$ Basis

$$\mathcal{D}(R)|jm\rangle = \sum_{j'm'_jp} |j'm'_jp\rangle \underbrace{\langle j'm'_jp|\mathcal{D}(R)|jm_jp'\rangle}_{\sigma_{pp'}\mathcal{D}^{(j)}_{m'm}\delta_{jj'}}$$

$$\sum_{m'} |j'm'_jp\rangle D^{(j)}_{m'm}(R)$$

Darstellung durch Euler Winkel

$$\mathcal{D}(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha J_z} e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_x} e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma J_z}$$

Explizite Form der $\mathcal{D}(\alpha,\beta,\gamma)$

$$\mathcal{D}^{(j)}_{m'm} = \langle jm'|e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha J_z} e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_x} e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma J_z}|jm\rangle$$

$$= e^{-i(m'\alpha+m\gamma)} \qquad \underbrace{\langle jm'|e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_y}|jm\rangle}_{\alpha^j_{mm'}(\beta)\leftarrow\text{reell da}J^{(j)}_y\text{rein imaginär}}$$

Beispiel: $j=\frac{1}{2}$: $\mathcal{D}^{(\frac{1}{2})}(\vec{\alpha}) = \mathbb{1}cos\frac{\alpha}{2} - i\vec{\sigma}\vec{\alpha}sin\frac{\alpha}{2}$; $\vec{\alpha} = \beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow d^{(\frac{1}{2})}(\beta) = \begin{pmatrix} cos\frac{\beta}{2} & -sin\frac{\beta}{2} \\ +sin\frac{\beta}{2} & cos\frac{\beta}{2}\end{pmatrix}$$

Wigner Fkt. für $j=\frac{1}{2}$

$$\mathcal{D}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\alpha+\gamma}{2}}cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i\frac{\alpha-\gamma}{2}}sin\frac{\beta}{2} \\ e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}}sin\frac{\beta}{2} & e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}cos\frac{\beta}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^*\end{pmatrix}$$

mit $|a|^2+|b|^2=1$

2.4 Addition von Drehimpulsen

Ein Beispielsystem von 2 Teilchen im Zentral-Kraft-Potential

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + V(r_1) + V(r_2)$$

Energie einenzustände

$$\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \psi_{\underbrace{E_1l_1m_1}_{\alpha_1}}(r,\theta,\phi)\psi_{\underbrace{E_2l_2m_2}_{\alpha_2}}(r_2,\theta_2,\phi_2)$$

Produktzustand

$$|\alpha\rangle = \sum_{\alpha_1,\alpha_2} |\alpha_1\rangle \otimes |\alpha_2\rangle$$

Generator für Drehungen

$$\begin{aligned}
\vec{M} &= \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 \\
&= \underbrace{\vec{L}_1 \otimes I_2}_{\vec{J}_1} + \underbrace{I_1 \otimes \vec{L}_2}_{\vec{J}_2} \\
[J_{1x}, J_{1y}] &= i\hbar J_{1z} \\
[J_{1x}, J_{2y}] &= 0
\end{aligned}$$

usw.
Beispiel 2: Spin $\frac{1}{2}$ Elektron e^-; $s_z = +\frac{1}{2}$;

$$\begin{aligned}
s_z &= +\frac{1}{2}\ \psi_+(\vec{r}) \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
s_z &= -\frac{1}{2}\ \psi_-(\vec{r}) \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{r}) \\ \psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Generator für Drehungen

$$\vec{J} = \vec{L}_1 \otimes I_2 + I_\infty \otimes \vec{S} = \vec{L} + \vec{S}$$

mit $[L_i, S_j] = 0$ (i,j=1,2,3)
Allgemein: System kann beschrieben werden durch

- Produktzustände $|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle = |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$ ist ein Eigenzustand von $J_1^2, J_2^2, J_{1z}, J_{2z}$
- Eigenzustände von J^2, J_z plus 2 weitere Drehimulsoperator (J_1^2, J_2^2)

2.5 Addition von Drehimpulsen

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$$

mit $[J_{1i}, J_{2j}] = 0$ und für die Komponenten J_2: $[J_{ij}, J_{2j}] = i\hbar\epsilon_{ijk} J_{ik}$
Beschreibung durch

- eigenzustände von $\vec{J}^2, \vec{J}^2, J_{1z}, J_{2z}$

  $$|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle = |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle$$

  Der von $|j_1 j_2; m_1 m_2\rangle$ aufgespannte Unterraum ist abgeschlossen unter Drehungen

$$\underbrace{\mathcal{D}(\vec{\alpha})}_{e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{J}\vec{\alpha}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{J}_1\vec{\alpha}} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{J}_2\vec{\alpha}}} \quad |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = \tag{2.16}$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{J}_1\vec{\alpha}} |j_1 m_1\rangle \otimes e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{J}_2\vec{\alpha}} |j_2 m_2\rangle \tag{2.17}$$

$$= \sum_{m_1'} \mathcal{D}^{(j_1)}_{m_1 m_1'} |j_1 m_1'\rangle \otimes \sum_{m_2'} \mathcal{D}^{(j_2)}_{m_2 m_2'} |j_2 m_2\rangle \tag{2.18}$$

$$= \sum_{m_1' m_2'} \mathcal{D}^{(j_1)}_{m_1 m_1'} \mathcal{D}^{(j_2)}_{m_2 m_2'} |j_1 j_2 m_1' m_2'\rangle \tag{2.19}$$

- Eigenzustände von $\vec{J}^2, J_z$ und $\vec{J}^2 = (\vec{J}_1 + \vec{J}_2)^2 = \vec{J}_1^2 + 2\vec{J}_1\vec{J}_2 + \vec{J}_2^2$

$$\Rightarrow [\vec{J}^2, \vec{J}_1^2] = [2\vec{J}_1\vec{J}_2, \vec{J}_1^2] = 2J_{2i}\underbrace{[J_{1i}, \vec{J}_1^2]}_{=0} = 0$$

und $[\vec{J}^2, \vec{J}_2^2] = 0$

$$[\vec{J}^2, J_{1z}] = [2\vec{J}_1\vec{J}_2, J_{1z}] = 2J_{2i}\underbrace{[J_{1i}, J_{13}]}_{=i\hbar\epsilon 13k J_{1k}} = 2i\hbar\epsilon_{3k1}J_{1k}J_{2i} = 2i\hbar(J_{1x}J_{2y} - J_{1y}J_{2x}) \neq 0$$

$$[\vec{J}^2, J_{2z}] == 2i\hbar(J_{2x}J_{1y} - J_{2y}J_{1x}) \neq 0$$

Nur $J_z = J_{1z} + J_{2z}$ kommutiert mit $\vec{J}^2 \rightarrow [J_z, \vec{J}_1^2] = [J_{1z} + J_{2z}, \vec{J}_1^2] = 0$
Eigenzustände von $\vec{J}_1^2, \vec{J}_2^2, \vec{J}^2, J_z$ sind $|j_1j_2; jm\rangle$. Die Basistransformation ist beschrieben durch die unitäre Transformation

$$|j_1j_2; jm\rangle = \sum_{m_1m_2} |j_1j_2; m_1m_2\rangle \underbrace{\langle j_1j_2; m_1m_2 \underbrace{|j_1j_2; jm\rangle}_{|jm\rangle}}_{\text{Glebsch-Gordan Koeffizienten}}$$

Anzahl von $|j_1j_2; m_1m_2\rangle$ Basiszustände $= (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$
Mögliche Werte von m

$$J_z|j_1j_2; m_1m_2\rangle = J_{1z} + J_{2z}|j_1j_2; m_1m_2\rangle = \hbar(m_1 + m_2)|j_1j_2; m_1m_2\rangle$$

$$J_z|jm\rangle = \hbar m|jm\rangle$$

$\Rightarrow \langle j_1j_2; m_1m_2|jm\rangle = 0$ falls $m_1 + m_2 \neq m$
Auswahlregel für CG-Koeffizienten d..h. $m_1 + m_2 = m$ Maximum von $m = j_1 + j_2 = j_{max}$ Minimum von $m = -(j_1 + j_2)$

$$\Rightarrow j \leq j_1 + j_2$$

Annahme: $j_1 \geq j_2$. Es werden nun m_1, m_2 Werte mit hilfe der j_1, j_2 variiert.

m	$\|m_1, m_2\rangle$	
$j_1 + j_2$	$\|j_1, j_2\rangle$	$\rightarrow j = j_1 + j_2$
$j_1 + j_2 - 1$	$\|j_1, j_2 - 1\rangle; \|j_1 - 1, j_2\rangle$	$\rightarrow j = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1$
$j_1 + j_2 - 2$	$\|j_1, j_2 - 2\rangle; \|j_1 - 1, j_2 - 1\rangle; \|j_1 - 2, j_2\rangle$	Es gibt vollständige multipletts mit $\rightarrow j = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1 ... j_1$
$j_1 - j_2$	$\|j_1, -j_2\rangle; \|j_1 - 1, -j_2 + 1\rangle ... \|j_1 - 2j_2, j_2\rangle$	
$j_1 - j_2 - 1$	$\|j_1 - 1, -j_2\rangle; ... \|j_1 - 2j_2 - 1, j_2\rangle$	
:		
:		
0	$\|j_2, -j_2\rangle ... \| - j_2, j_2\rangle$	

Auswahlregel für j:

$$j = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, ...|j_1 - j_2|$$

Anzahl der $|jm\rangle$ Basiszustände

$$d = \sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2} (2j + 1) = 2\frac{(j_1 + j_2)(j_1 + j_2 + 1)}{2} - \frac{(j_1 - j_2 - 1)(j_1 - j_2)}{2} + (j_1 + j_2) - (j_1 - j_2 - 1)$$

$$= 2j_1(j_2+1) + 2j_1j_2 + 2j_2 + 1 = 2j_1(2j_2+1) + (2j_2+1) = 2j_1(2j_2+1) + (2j_2+1) = (2j_1+1)(2j_2+1)$$

$$j_1 \otimes j_2 = j_1 + j_2 \otimes j_1 + j_2 - 1 \otimes ... \otimes |j_1 - j_2|$$

Konstruktion der $|jm\rangle$ mit:

$$\frac{1}{\hbar}J_-|jm\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}|j, m-1\rangle$$

$j = j_1 + j_2$, $m = j_1 + j_2$; $|jm\rangle = |m_1 = j_1, m_2 = j_2\rangle$

$$J_-|jm\rangle = \sqrt{2(j_1+j_2)}|j_1+j_2, m = j_1+j_2-1\rangle \tag{2.20}$$
$$= \frac{1}{\hbar}J_{1-}|m_1 = j_1, m_2 = j_2\rangle + \frac{1}{\hbar}J_{2-}|m_1 = j, m_2 = j_2\rangle \tag{2.21}$$
$$= \sqrt{2j_1}|j_1-1, j_2\rangle + \sqrt{2j_2}|j_1, j_2-1\rangle \tag{2.22}$$

$$\Rightarrow |j = j_1+j_2, m = j_1+j_2-1\rangle = \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}}|m_1 = j_1-1, m_2 = j_2\rangle + \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}}|m_1 = j_1, m_2 = j_2-1\rangle$$

$$|j = j_1+j_2-1, m = j\rangle = \underbrace{\sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}}}_{\langle j_1j2;j_1+j_2,j_1+j_2-1|j_1j_2;m_1=j_1m_2=j_2+1\rangle}|m_1 = j_1-1, m_2 = j_2\rangle + \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}}|m_1 = j_1, m_2 = j_2-1\rangle$$

Gordon-Shortley Konvention:
$\langle j_1j_2; jm = j|j_1j_2; m_1 = j_1, m_2 = j - j_1\rangle$ ist positiv
Bsp: $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1 \otimes 0$

$$|j_1, j_2; m_1m_2\rangle = \underbrace{|++\rangle}_{|m_1=+\frac{1}{2}m_2=+\frac{1}{2}\rangle}, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle$$

Höchses Gewicht hat : $|j_1 = 1, m = 1\rangle = |11\rangle = |++\rangle$

$$\frac{1}{\hbar}J_-|11\rangle = \sqrt{2}|10\rangle = \frac{1}{\hbar}J_-|++\rangle = |-+\rangle + |+-\rangle$$

$$\Rightarrow |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-+\rangle + |+-\rangle)$$

$$\Rightarrow |1,-1\rangle = |--\rangle$$

$|00\rangle$ orthogonal zu $|10\rangle$

$$\Rightarrow |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-+\rangle - |+-\rangle)$$

2.5 Wiederholung

Produkt von $|j_1m_1\rangle \otimes |j_2m_2\rangle$
$(2j_1+1)(2j_2+1)$- dimensionaler Unterraum Alternativ: eigenzust. von J_1^2, J_2^2, J^2, J_z
$|j_1, j_2, jm\rangle$ $2j+1$ Basiszustäande für festes J

$$\rightarrow |j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

Bew:

- Orthogonale Zustände für festes $m_1 + m_2$
- abgeschlossen unter Drehungen $\rightarrow$ alle $2j+1|jm\rangle$ Zustäande im Unterraum

2.6 Clebsch-Gordon Koeffizienten (CGK)

$$|j_1, j_2; jm\rangle = \sum_{m_1 m_2} |j_1, j_2; m_1 m_2\rangle \underbrace{\langle j_1, j_2; m_1 m_2 | jm\rangle}_{CGK}$$

Eigenschaften der CGK:

- CGK sind reell wegen Condon Shortley Konvention d.h. $\langle j_1, j_2; j - j_1 | jm = j\rangle$ positiv, reel
- Auswahlregeln: CGK $\neq 0$ nur falls

$$m = m_1 + m_2, |j_1 - j_2| \leq j_1 + j_2$$

- Orthogonalität

$$\sum_{m_1 m_2} \langle j_1, j_2; m_1 m_2 | jm\rangle \underbrace{\langle j_1, j_2; m_1 m_2 | j' m'\rangle}_{\langle jm | j_1, j_2; m_1 m_2\rangle} = \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

$$\sum_{jm} \langle j_1, j_2; m_1 m_2 | jm\rangle \langle j_1, j_2; m_1' m_2' | jm\rangle = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}$$

- Rekursionsformeln für CGK

$$\langle j_1, j_2; m_1 m_2 | J_\pm | jm = m_1 + m_2 \pm 1\rangle$$

$$= (\langle jm = m_1 + m_2 \pm 1 | J_{1\pm} + J_{2\pm} | j_1, j_2; m_1 m_2\rangle)^*$$

$$\Rightarrow \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \langle j_1, j_2; m_1 m_2 | j \underbrace{m = m_1 + m_2}_{m \pm 1}\rangle$$

$$= \sqrt{(j_1 \pm m_1)(j_1 \mp m_1 + 1)} \langle j_1, j_2; m_1 \pm 1 m_2 | jm = m_1 + m_2 \mp 1\rangle$$

$$+ \sqrt{(j_2 \pm m_2)(j_2 \mp m_2 + 1)} \langle j_1, j_2; m_1 m_2 \mp 1 | jm = m_1 + m_2 \mp 1\rangle$$

- Es gilt

$$\langle j_1, j_2; m_1 m_2 | jm\rangle = \langle j_1, j_2; -m_1 - m_2 | j - m\rangle (-1)^{j_1 + j_2 - j}$$

2.6 3j-Symbole von Wigner

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1 - j_2 + m}}{\sqrt{2j+1}} \langle j_1, j_2; m_1 m_2 | jm\rangle$$

Eigenschaften der:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} = (-1)^{j_1 + j_2 + j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_1 \\ m_1 & m_3 & m_1 \end{pmatrix}$$

Auswahlregeln: $m_1 + m_2 + m_3 = 0$, $|j_1 - j_2| \leq j_3 \leq j_1 + j_2$ und zyklisch

- Verschauschung zweier Spalten; Faktor $(-1)^{j_1 + j_2 + j_3}$ $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ invariant unter zyklischer Vertauschung der Spalten
- $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1 + j_2 + j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$

2.7 Bahndrehimpuls und Spin 1/2

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} : j_1 = l, j_2 = \frac{1}{2}$$

Fallunterscheidung: $l = 0 \Rightarrow j = \frac{1}{2}$ trivial $l \neq 0(l \geq 1)$; $j = l \pm \frac{1}{2}$
Herleitung der CGK:
höchstes Gewicht: $j = l + \frac{1}{2} = m|jm\rangle$

$$|jm\rangle = |l + \frac{1}{2}\rangle l + \frac{1}{2}\rangle = |ll_{m_l}\rangle|+\rangle$$

$$m = j_1 + j_2 - 1, j = l + \frac{1}{2} : |l + \frac{1}{2}l - \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2l}{2l+1}}|ll-1\rangle|+\rangle + \sqrt{\frac{1}{2l+1}}|ll\rangle|-\rangle$$

$$\frac{1}{\hbar}J_-|l + \frac{1}{2}l - \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{2l+2}|l + \frac{1}{2}l - \frac{1}{2}\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{2l}{2l+1}}\left\{\sqrt{(2l-1)2}|ll-2\rangle|+\rangle + |ll-1\rangle|-\rangle\right\} + \sqrt{\frac{1}{2l+1}}|ll-1\rangle|-\rangle$$

$$|l + \frac{1}{2}l - \frac{3}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2l-1}{2l+1}}|ll-2\rangle|+\rangle + \sqrt{\frac{2}{2l+1}}|ll-1\rangle|-\rangle$$

Allgemein:

$$|l + \frac{1}{2}m\rangle = \underbrace{\sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}+m}{2l+1}}}_{cos\alpha}|lm - \frac{1}{2}\rangle|+\rangle + \underbrace{\sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}-m}{2l+1}}}_{sin\alpha}|lm + \frac{1}{2}\rangle|-\rangle$$

$$|l - \frac{1}{2}, m\rangle = \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}-m}{2l+1}}|lm - \frac{1}{2}\rangle|+\rangle + \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}+m}{2l+1}}|lm + \frac{1}{2}\rangle|-\rangle$$

2.7 Orts/Spin Basis für $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$

$$\langle\vec{r}, \pm|\psi\rangle = \psi_\pm(\vec{r})$$

2 Komponentiger Spinor $\begin{pmatrix}\psi_+(\vec{r})\\ \psi_-(\vec{r})\end{pmatrix} = \psi_+\chi_+ + \psi_-\chi_-$
Ortswellenfunktionen für $|jm\rangle$ Spinoren (Spin-Kugelfunktionen)

$$y_l^{j=l\pm\frac{1}{2},m}(\theta,\phi) = \langle\hat{r},+|lm_l\rangle\chi_+ + \langle\hat{r},-|lm_l\rangle\chi_-$$

Bahndrehimpuls-Eigenzustand:

$$Y_l^{m_l}(\theta,\phi) = \langle\hat{r}|lm_l\rangle$$

$$= \pm\sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}\pm m}{2l+1}}Y_l^{m_l=m-\frac{1}{2}}(\theta,\phi)\chi_+\sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}\mp m}{2l+1}}Y_l^{m_l=m+\frac{1}{2}}(\theta,\phi)\chi_-$$

$$\Rightarrow y_l^{j=l\pm\frac{1}{2},m}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{2l+1}}\begin{pmatrix}\pm\sqrt{l+\frac{1}{2}\pm m}Y_l^{m-\frac{1}{2}}(\theta,\phi)\\ \sqrt{l+\frac{1}{2}\mp m}Y_l^{m+\frac{1}{2}}(\theta,\phi)\end{pmatrix}$$

$y_l^{j=l\pm\frac{1}{2},m}$ ist Eigenzustand von $\vec{J}^2, \vec{L}^2, J_z$

2.8 Tensor operatoren

Vektoroperator $\vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$ definiert durch Transformation unter Drehungen

$$\mathcal{D}^\dagger(R)V_i\mathcal{D}(R) = R_{ij}V_j = \mathcal{D}(R^{-1})V_i\mathcal{D}^\dagger(R^{-1}) = V_jR^{-1}_{ji}$$

$\mathcal{D}(R)V_i\mathcal{D}^\dagger(R)$ fixiert durch Kommutatoren $[J_i, V_j]$ Speziell: Ortsoperator

$$[L_i, r_j] = \epsilon_{imn}\underbrace{[r_mp_n, r_j]}_{r_m(-\delta_{nj}i\hbar)} = -i\hbar\epsilon_{imj}r_m = +i\hbar\epsilon_{ijk}r_k$$

$\vec{V}$ ist Vektoroperator ist genau dann wenn folgende Beziehung gilt:

$$[J_i, V_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}V_k$$

Bilde Linearkombinationen

$$V_m^{(1)} : V_{\pm1}^{(1)} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(V_1 \pm V_2), V_0^{(1)} = V_3$$

$$[J_z, V_{\pm1}^{(1)}] = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(\underbrace{[J_z, V_x]}_{i\hbar V_y} \pm i\underbrace{[J_z, V_y]}_{-i\hbar V_x})$$

$$= \mp\frac{i\hbar}{\sqrt{2}}V_y - \frac{\hbar}{\sqrt{2}}V_x$$

$$\pm\hbar(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}(V_x \pm iV_y))$$

$$= \pm\hbar V_{\pm1}^{(1)}$$

$$\Rightarrow [J_z, V_m^{(1)}] = \hbar m V_m^{(1)}$$

Ebenso:

$$[J_\pm, V_0^{(1)}] = [J_x \pm iJ_x, V_z] = -i\hbar V_y \pm \hbar V_x = \hbar\sqrt{2}(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}(V_x \pm iV_y)) = \hbar\sqrt{2}V_{\pm1}^{(1)}$$

Vergleich mit $J_z|lm\rangle = \hbar m|lm\rangle$ und $J_\pm|10\rangle = \hbar\sqrt{2}|1 \pm 1\rangle$

$$V_m^{(1)} \leftrightarrow |lm\rangle$$

$$[J_i, V_m^{(1)}] \leftrightarrow J_i|lm\rangle$$

$$\mathcal{D}(R)V_m^{(1)}\mathcal{D}^\dagger(R) = \sum_{m'} V_{m'}^{(1)}\mathcal{D}_{m'm}^{(1)} \leftrightarrow \mathcal{D}(R)|lm\rangle \leftrightarrow \mathcal{D}(R)|lm\rangle \rightarrow \sum_{m'}|lm'\rangle\mathcal{D}_{m'm}^{(1)}(R)$$

Def.: Ein irreduzibler sphärischer Tensoroperator von Rang j ist ein Satz von $2j + 2$ Operatoren $T_m^{(1)}$, $(m = -j, -j+1, ..., +j)$ mit

$$[J_z, T_m^{(j)}] = \hbar m T_m^{(j)}$$

$$[J_\pm, T_m^{(j)}] = \hbar\sqrt{(j \pm m)(j \pm m + 1)}T_{m\pm1}^{(j)}$$

Alternative definition

$$\mathcal{D}(R)V_m^{(j)}\mathcal{D}^\dagger(R) = \sum_{m'} T_{m'}^{(j)}\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(R)$$

Beispiel: $Y_l^m(\theta, \phi)\psi(\vec{r})$, $[L_i, Y_l^m] = (L_iY_l^m)$
Multiplikation mit Y_l^m entspricht Anw. des Tensoroperator $T_m^{(l)}$

2.8 Kartesische Tensoren

Geg: $\vec{U}, \vec{V}$ Vektoroperatoren, Betrachte Rang 2 Tensor

$$T_{ij} = U_i V_j$$

T_{ij} nicht irreduzibel unter
$\vec{U} \cdot \vec{V}$ trägt Spin 0, d.h. ist Skalar

$$[J_i, \vec{U} \cdot \vec{V}] = [J_i, U_j V_j] = U_j \underbrace{[J_i, V_j]}_{i\hbar\epsilon_{ijk}V_k} + \underbrace{[J_i, U_j]}_{i\hbar\epsilon_{ijk}U_k} V_j = i\hbar\epsilon_{ijk}(U_i V_k + U_k V_j) = 0$$

Zerlegung von T_{ij}

$$T_{ij} = \vec{U} \cdot \vec{V}\delta_{ij} + \frac{1}{2}(U_i V_j - U_j V_i) + \frac{1}{2}(U_i V_j + U_j V_i - \frac{2\vec{U} \cdot \vec{V}}{2}\delta_{ij})$$

$\vec{U} \cdot \vec{V}$ Skalar $(j = 0)$
$(U_i V_j - U_j V_i) = \epsilon_{ijk}(\vec{U} \times \vec{V})_k$ Vektoroperator $(j = 1)$
$U_i V_j + U_j V_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\vec{U} \cdot \vec{V}$ trägt Spin $(j = 2)$ (5 Kombinationen)

2.8 Matrixelemente von Tensoroperatoren

Betrachte $\langle \alpha j m | T^{(j_1)}_{m_1} | \beta j_2 m_2 \rangle$
z.B. für einen Ortsoperator: $\int d^3\vec{x}\psi^*_{nlm}(\vec{x})\vec{r}\psi_{n'l'm'}(\vec{x})$
$\langle \alpha j m | T^{(j_1)}_{m_1} | \beta j_2 m_2 \rangle$ verschwindet außer für $m = m_1 + m_2$

$$0 = \langle \alpha j m | \underbrace{[J_z, T^{(j_1)}_{m_1}]}_{(\hbar m - \hbar m_2 T^{(j_1)}_{m_1})} - \hbar m_1 T^{(j_1)}_{m_1} | \beta j_2 m_2 \rangle$$

$$= \hbar(m - m_2 - m_1)\langle \alpha j m | T^{(j_1)}_{m_1} | \beta j_2 m_2 \rangle$$

$\Rightarrow \langle \alpha j m | T^{(j_1)}_{m_1} | \beta j_2 m_2 \rangle = 0$ für $m - m_1 - m_2 \neq 0$

2.8 Widerholung

Tesnor Operator $T^{(k)}_q$,

$$[J_z, T^{(j)}_m] = \hbar_m T^{(j)}_m$$

$$[J_\pm, T^{(j)}_m] = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}T^{(j)}_{m\pm 1}$$

Matrix Elemente der $T^{(j)}_m$

$$\langle \alpha j m | T^{(j_1)}_{m_1} | \beta j_2 m_2 \rangle \neq 0$$

$$\Rightarrow m = m_1 + m_2$$

$$\langle \alpha j m | T^{(j_1)}_{m_{\pm 1}} | \beta j_2 m_2 \rangle \hbar\sqrt{(j_1 \mp m_1)(j_1 \pm m_1 + 1)}$$

$$= \langle \alpha j m | [J_\mp, T^{(j_1)}_{m_1}] | \beta j_2 m_2 \rangle$$

$$= \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\langle \alpha j m \pm 1 | T^{(j_1)}_{m_1} | \beta j_2 m_2 \rangle$$

$$-\hbar\sqrt{(j_2 \mp m_2)(j_2 \pm m_2 + 1)}\langle \alpha jm|T^{(j_1)}_{m_1}|\beta j_2 m_2 \pm 1\rangle$$

Rekursionsformel für CGK

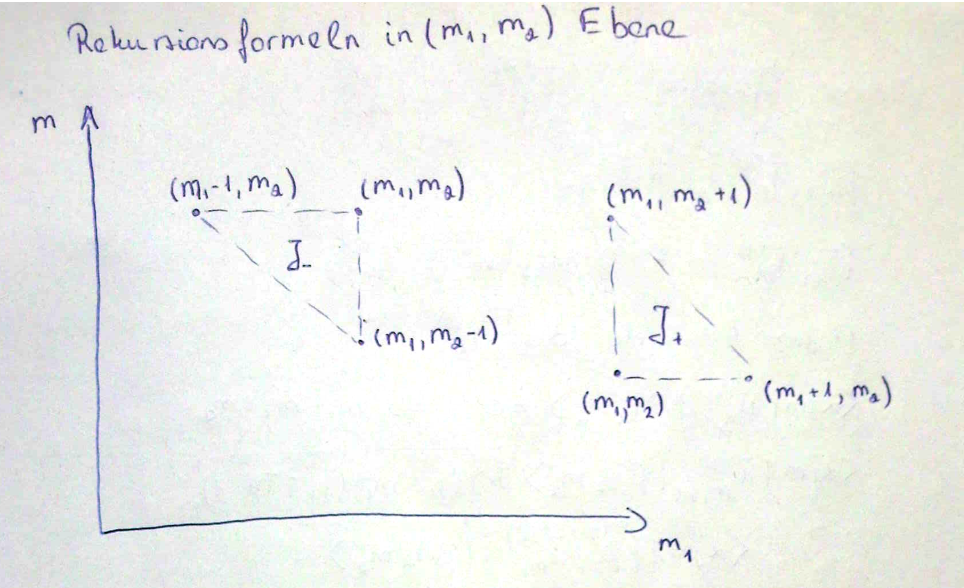
$$\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\langle j_1 j_2, m_1 m_2|jm \pm 1\rangle$$

$$= \sqrt{(j_1 \mp m_1)(j_1 \pm m_1 + 1)}\langle j_1 j_2, m_1 m_2|jm\rangle + \sqrt{(j_2 \mp m_2)(j_2 \pm m_2 + 1)}\langle j_1 j_2, m_1 m_2 \pm 1|jm\rangle$$

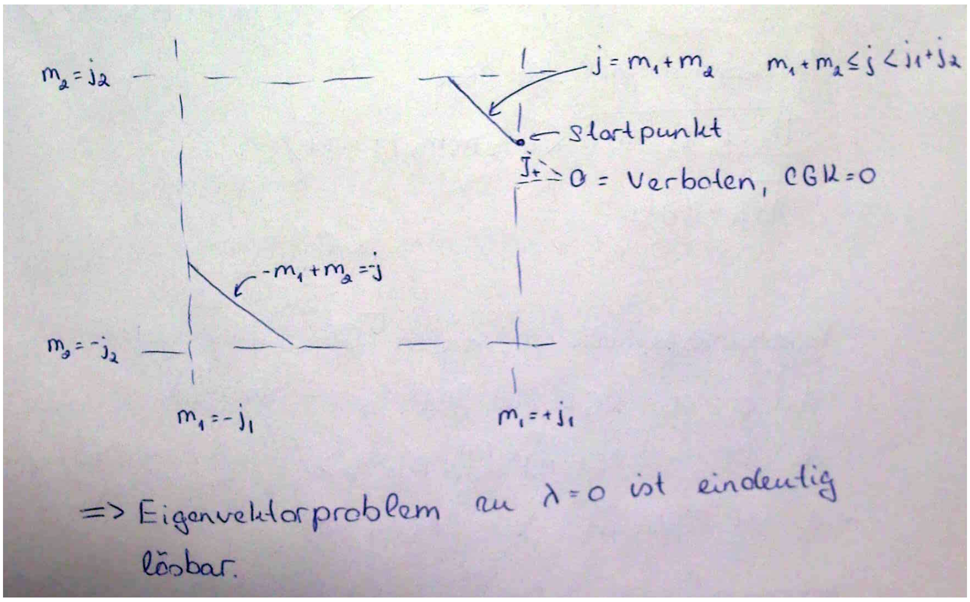
Rekursionsformeln definieren ein Gelichungssystem
$Ax = 0$ $x_i = CGK$ für festes j, i = (m_1, m_2) $Ay = 0$ $y_i \langle \alpha jm|T^{(j_1)}_{m\pm 1}|\beta j_2 m_2\rangle$ für festes j, i = (m_1, m_2)

- A hat Eigenwert $\lambda = 0$ ($CGK \neq 0$)
- Eigenwert 0 ist nicht entartet d.h. der Eigenvektor z zu $\lambda = 0$ ist eindeutig bis auf einen Normierungsfaktor.

Rekursionsformel in (m_1, m_2) Ebenge



pic 1



pic 2

$\Rightarrow$ Eigenvektorproblem zu $\lambda = 0$ ist eindeutig lösbar $x = c_1 z$, $y = c_2 = z$: $y = c_2 \frac{x}{c_1} = \frac{c_2}{c} x$

$$y_i = \langle \alpha jm|T^{(j_1)}_{m_1}|\beta j_2 m_2\rangle = \frac{c_2}{c_2}\langle j_1 j_2, m_1 m_2|jm\rangle$$

Schreibweise für $\frac{c_2}{c_2}$

$$\frac{c_2}{c_2} = \frac{\langle \alpha j || T^{(j_1)} || \beta j_2 \rangle}{\sqrt{2j_2+1}}$$

$\frac{c_2}{c_2}$ ist unabhängig von m_1, m_2, m !

2.8 Wigner-Eckart Theorem

$\langle \alpha j || T^{(j_1)} || \beta j_2 \rangle$ heißt reduziertes Matrixelement.
a) Auswahlregel: $\langle \alpha jm | T^{(j_1)}_{m_1} | \beta j_2 m_2 \rangle \neq 0 \Rightarrow m = m_1 + m_2$; $j_1 + j_2 \geq j \geq |j_1 - j_2|$
Beispiel: Ortsoperator $\vec{r}$ (Dipolübergänge) trägt $j_1 = 1$
$\Rightarrow \langle \alpha jm | \vec{r} | \beta j_2 m_2 \rangle \neq 0 \Rightarrow j = j_2, j_2 \pm 1 (j_2 \neq 0)$
b) Auswahlregel $\langle \alpha' j = 0, m = 0 | T^{(1)}_m | \beta j = 0 m = 0 \rangle = 0$ kein $j = 0 \rightarrow j = 0$ Übergang durch Dipolübergang

2.8 Projektionstheorem für Vektoroperatoren

Sie $V_q (q = \pm 1, 0)$ ein Vektrooperator, Dann gilt:

$$\langle \alpha' jm' | V_q | \alpha jm \rangle = \frac{\langle \alpha jm | \vec{J} \cdot \vec{V} | \alpha jm \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} \langle jm' | J_q | jm \rangle$$

mit $J_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (J_x \pm J_y) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} J_\pm$, $J_0 = J_z$
Beweis: Betrachtej$\langle \alpha jm | \underbrace{\vec{J} \cdot \vec{V}}_{J_0 V_0 - J_{+1} V_{-1} - J_{-1} V_{+1}} | \alpha jm \rangle$ mit $J_0 V_0 - \underbrace{J_{+1}}_{-\frac{1}{\sqrt{2}} J_+} V_{-1} - \underbrace{J_{-1}}_{\frac{1}{\sqrt{2}} J_-} V_{+1}$

$$= \left(\langle \alpha' jm | \hbar m V_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \hbar \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \rangle \alpha' jm - 1 | V_{-1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \hbar \sqrt{(j-m)(jm+1)} \rangle \alpha' jm + 1 | V_{+1} \right) | \alpha jm$$

$$= c(j,m) \langle \alpha' j || V || \alpha j \rangle$$

$\vec{J} \cdot \vec{V}$ ist Skalar, d.h. hat $j_1 = 0$

$$\Rightarrow \langle \alpha jm | \vec{J} \cdot \vec{V} | \alpha jm \rangle = \underbrace{\langle j0; m0 | jm \langle}_{1} \frac{\langle \alpha' j || \vec{J} \cdot \vec{V} | \alpha j \rangle}{\hbar^2 j(j+1)}$$

$\Rightarrow c(\underbrace{j}_{c_j}, m)$ hängt nicht von m ab! und nicht von V_q, α, α
Wähle $V_q = J_q$ um c_j zu berechnen

$$c_j \langle \alpha j || J || \alpha j \rangle = \langle \alpha jm | \underbrace{\vec{J}^2}_{\hbar^2 j(j+1)} | \alpha jm \rangle = \hbar^2 j(j+1)$$

Wigner Eckart Theorem

$$\langle \alpha' jm' | V_q | \alpha jm \rangle = \underbrace{\frac{\langle jm' | \overbrace{jj}^{?}; mq \rangle}{\sqrt{2j+1}}}_{(*)} \langle \alpha' j || V || \alpha j \rangle$$

$$(*) \frac{\langle jm' | \overbrace{jj}^{?}; mq \rangle}{\sqrt{2j+1}} = \frac{\langle \alpha jm' | J_q | \alpha jm \rangle}{\langle \alpha j || J || \alpha j \rangle} \cdot \frac{\langle \alpha' jm | \vec{J} \cdot \vec{V} | \alpha jm \rangle}{c_j}$$

$$= \langle \alpha' jm | \vec{J} \cdot \vec{V} | \alpha jm \rangle \langle jm' | J_q | \alpha jm \rangle \frac{1}{\hbar^2 j(j+1)} \qquad q.e.d$$

Matrixelemente von J_q

$$\langle \alpha j m' | \underbrace{J_0}_{=J_z} | \alpha j m \rangle = \hbar m \delta_{mm'}$$

$$\langle \alpha j m' | \underbrace{J_{\pm 1}}_{\mp \frac{1}{\sqrt{2}} J_\pm} | \alpha j m \rangle = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \hbar \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \delta_{m', m \pm 1}$$