Contents

Chapter 7

Quantisierung des Strahlungsfeldes

Potentiale:

$$\vec{B} = \vec{v} \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Eichfreiheit für $\phi, \vec{A}$
Maxwell $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\vec{E} &= -\vec{\nabla}^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \cdot \vec{A} && (7.1) \\ &= \underbrace{(\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2)}_{\Box}\phi - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} && (7.2) \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Leftrightarrow$$

$$\Box \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}) = \mu_0 \vec{j}$$

Coulomb Eichung: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

$$\Rightarrow \phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}, t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Zunächst betrachte freier Fall $\rho = 0, \vec{j} = 0 \Rightarrow \phi = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\Box \vec{A} = 0}$$

vergleiche Klein-Gorddon-Gleichung
Lösung: ebene Wellen

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$$

$$\Box \vec{A} = 0 \Leftrightarrow -\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2 = 0 \Leftrightarrow \omega = c|\vec{k}|$$

Eichbed: $\nabla \vec{A} = 0 \Leftrightarrow i\vec{k}\vec{A}_0 = 0 \Rightarrow \vec{A}_0 \perp \vec{k} \Rightarrow$ transversale Wellen
Klassische Energie des Strahlungsfeldes

$$H_{rad} = \frac{1}{2}\int(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2)d^2\vec{x}$$

in endlichen Kasten mit periodischen Randbedingungen
Forderung:

$$\vec{A}(x_1 = -\frac{L}{2}, x_2, x_3, t) = \vec{A}(x_1 = +\frac{L}{2}, x_2, x_3, t)$$

usw.
Lösungen sind

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{f}_{r,\vec{k}}(\vec{x})e^{-i\omega t} = (\frac{1}{\sqrt{V}}\vec{\epsilon}_r(k)e^{i\vec{k}\vec{x}})e^{i\omega t}$$

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3) \neq 0 \qquad n_i \in \mathbb{Z}$$

Wähle $\vec{\epsilon}_r(\vec{k})$ so dass $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3, \hat{k} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ ein rechtshändiges Orthonormalsystem bilden.

$$\vec{\epsilon}_r(\vec{k}) \cdot \vec{\epsilon}_s(\vec{k}) = \delta_{rs}$$

$$\vec{\epsilon}_r(\vec{k}) \cdot \vec{k} = 0$$

$$\epsilon_1 \times \epsilon_2 = \hat{k} \qquad \text{und zyklisch}$$

$\vec{A}(\vec{x}, t)$ darstellbar als Fourierreihe

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{r,\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} \left[a_r(\vec{k})e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t} + a_r^*(\vec{k})e^{-i(\vec{k}\vec{x}-\omega t}\right] \vec{\epsilon}_r(\vec{k})$$

$\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}}$ Faktor damit $a_r(\vec{k})$ dimensionslos sind. Einheiten: $[\vec{A}] = [\vec{E} \cdot \text{Zeit}]0\frac{N}{c}s$

$$[\frac{\hbar}{\epsilon_0 V \omega}] = \frac{Nms}{(\frac{C^2}{Nm^2}m^3\frac{1}{s}} = \frac{N^2 s^2}{C^2} \qquad \checkmark$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{r,\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_k}} \left[\vec{f}_{r,\vec{k}}(\vec{x})a_r(\vec{k}, t) + \vec{f}_{r,-\vec{k}}(\vec{x})a_r^*(\vec{k}, t)\right]$$

mit $a_r(\vec{k}, t) = a_r(\vec{k})e^{-i\omega_k t}$
Im endlichen Kasten ($V = L^3$)

$$\int_V d^3\vec{x}\vec{f}_{r,\vec{k}}(\vec{x})\vec{f}^*_{r',\vec{k}'}(\vec{x}) = \delta_{\vec{k},\vec{k}'}\delta_{rs}$$

$$H_{rad} \approx \int(\vec{E}^2 + c^2\vec{B}^2)d^2\vec{x}$$

mit $\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \sum_{r,\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_k}}(-i\omega_k)\left[a_r(\vec{k}, t) - \delta_r a_r^*(-\vec{k}, t)\right] f_{r,\vec{k}}(\vec{x})$
mit $\delta_r = \pm 1$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \sum_{r,\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_k}} \left[a_r(\vec{k}, t) + \delta_r a_r^*(-\vec{k}, t)\right] i\vec{k} \times f_{r,\vec{k}}(\vec{x})$$

$$\int \vec{B}^2 d^3\vec{x} \approx \int (\underbrace{\vec{k} \times \vec{f}_{r,\vec{k}}(\vec{x}))(\vec{k}' \times \vec{f}^*_{r',\vec{k}'}(\vec{x})}_{\vec{k}^2 \vec{f}_{r,\vec{k}} \vec{f}^*_{r',\vec{k}'} - \vec{k}\vec{f}^*_{r',\vec{k}'}(\vec{x})\vec{k}'\vec{f}_{r,\vec{k}}(x)})d^3\vec{x} \tag{7.3}$$

$$= \delta_{\vec{k},\vec{k}'}(\vec{k}^2 \underbrace{\epsilon_r(\vec{k})\vec{\epsilon}_{r'}(\vec{k})}_{\delta_{r,r'}} - \underbrace{\vec{k}\vec{\epsilon}_{r'}(\vec{k})}_{0}\underbrace{\vec{k}\vec{\epsilon}_r(\vec{k})}_{0} \tag{7.4}$$

$$= |\vec{k}|^2 \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{rr'} \tag{7.5}$$

Einsetzen in H_{rad}

$$H_{rad} = \frac{\epsilon_0}{2} \sum_{r,\vec{k}} \{(a_r(\vec{k},t) - delta_r a^*_r r(-\vec{k},t))(\delta_r a_r(-\vec{k},t) - a^*_r(\vec{k},t))(-\omega_k^2) \tag{7.6}$$

$$+ (a_r(\vec{k},t) + \delta_r a_r(-\vec{k},t) + a^*_r(\vec{k},t)) \underbrace{(c\vec{k})^2}_{\omega_k^2}\} \tag{7.7}$$

$$= \epsilon_0 \sum_{r,\vec{k}} \frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_k} \omega_k^2 (a_r(\vec{k},t) a^*_r r(\vec{k},t) + a^*_r r(+\vec{k},t) a^*_r r(+\vec{k},t)) \tag{7.8}$$

$$= \sum_{r,\vec{k}} \hbar\omega_k \frac{1}{2} (a_r(\vec{k}) a^*_r(\vec{k}) + a^*_r(\vec{k}) a_r(\vec{k})) \tag{7.9}$$

vergleiche mit Harmonischen Oszillator $H = \hbar\omega\frac{1}{2}(a^\dagger a + aa^\dagger) \equiv \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$

7.0 Spektrum des quantisierten Strahlungsfeldes

Für jeden Mode $\vec{k}, r$
1 Phonton $E = \hbar\omega_k$ 2 Phonton $E = 2\hbar\omega_k$ $n(\vec{k}, r)$ Phonton $E = \hbar\omega_k n(\vec{k}, r)$
Quantisierungsbedingung für das Strahlungsfeld, $a_r(\vec{k}), a^\dagger_r(\vec{k})$ als Auf und Absteigeoperatoren:

$$[a_r(\vec{k}), \vec{a}^\dagger_s(\vec{k}')] = \delta_{rs}\delta_{\vec{k},\vec{k}'}$$

$$[a_r(\vec{k}), \vec{a}_s(\vec{k}')] = 0$$

$$H_{rad} = \sum_{r,\vec{k}} \hbar\omega_k (\underbrace{a^\dagger_r(\vec{k}) a_r(\vec{k})}_{N_r(\vec{k})} + \frac{1}{2})$$

Grundzustand : $|0\rangle$ mit $a_r(\vec{k})|0\rangle = 0$ hat Energie

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_{r,\vec{k}} \hbar\omega_k = \infty$$

Messe Energie relativ zum Grundzustand

$$H_{rad} = H_{rad} - E_0$$

$$H_{rad} = \sum_{r,\vec{k}} \hbar\omega_k (\underbrace{a^\dagger_r(\vec{k}) a_r(\vec{k})}_{N_r(\vec{k})})$$