Aufgabe 13: Drehimpulse und Oszillatoren

Wir untersuchen ein System von zwei unabhängigen harmonischen Oszillatoren (im folgenden durch +,- benannt) mit Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a_\pm^\dagger, a_\pm$ die die üblichen Vertauschungsrelationen erfüllen. Damit definieren wir die Operatoren

$$J_\pm = \hbar a_\pm^\dagger a_\mp, \qquad J_z = \frac{\hbar}{2}(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-), \qquad N = N_+ + N_- = a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_-$$

Zeigen Sie, dass die $J_\pm, J_z$ eine Drehimpulsalgebra erfüllen, also

$$[J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm, \qquad [\vec{J}^2, J_z] = 0 \qquad [J_+, J_-] = 2\hbar J_z$$

Zeigen Sie weiterhin, dass

$$\vec{J}^2 = \hbar\frac{N}{2}(\frac{N}{2}+1), \qquad (vecJ^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2)$$

Damit müsste es also eine Zusammenhang zwischen der Besetzungszahldarstellung $|n_+, n_-\rangle$ und der Drehimpulsdarstellung $|j, m\rangle$ von Zuständen dieses Systems geben. Wie lautet dieser Zusammenhang und wie lassen sich damit Drehimpulse ganz allgemein deuten?

LSG

- (1) $[a, a^\dagger] = 1$ $a_\pm^\dagger a_\pm = N_\pm$
- (2) $[N, a^\dagger] = a^\dagger \to [N_+, a_+^\dagger a_-] = [N_+, a_+^\dagger]a_- = a_+^\dagger a_-$ $[N, a] = -a \to [N_+, a_-^\dagger a_+] = a_-^\dagger [N_+, a_+] = -a_-^\dagger a_+$ $\Rightarrow [N_+, a_\pm^\dagger a_\mp] = \pm a_\pm^\dagger a_\mp$
  $[N, a] = -a \to [N_-, a_+^\dagger a_-] = a_+^\dagger [N_-, a_-] = -a_+^\dagger a_-$ $[N, a^\dagger] = a^\dagger \to [N_-, a_-^\dagger a_+] = [N_-, a_-^\dagger]a_+ = a_-^\dagger a_+$ $\Rightarrow [N_-, a_\pm^\dagger a_\mp] = \mp a_\pm^\dagger a_\mp \Rightarrow -[N_-, a_\pm^\dagger a_\mp] = -\mp a_\pm^\dagger a_\mp = \pm a_\pm^\dagger a_\mp$
- (2) $a_\pm^\dagger a_\pm = N_\pm$
- (3) $[N_+, a_+^\dagger] = a_+^\dagger$
- (4)

$$\begin{aligned}
[J_z, J_\pm] &= [\frac{\hbar}{2}(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-), \hbar a_\pm^\dagger a_\mp] && (0.1)\\
&= \frac{\hbar^2}{2}\left([a_+^\dagger a_+, a_\pm^\dagger a_\mp] - [a_-^\dagger a_-, a_\pm^\dagger a_\mp]\right) && (0.2)\\
\overset{(1)}{=}& \frac{\hbar^2}{2}\left([N_+, a_\pm^\dagger a_\mp] - [N_-, a_\pm^\dagger a_\mp]\right) && (0.3)\\
\overset{(2)}{=}& \frac{\hbar^2}{2}\left(\pm a_\pm^\dagger a_\mp + \pm a_\pm^\dagger a_\mp\right) && (0.4)\\
&= \frac{\hbar^2}{2}\left(2 \pm a_\pm^\dagger a_\mp\right) && (0.5)\\
&= \hbar\left(\hbar \pm a_\pm^\dagger a_\mp\right) && (0.6)\\
&= \pm\hbar J_\pm && (0.7)
\end{aligned}$$

- (1) $J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$,$J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-)$ $J_z = \frac{\hbar}{2}(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-)$

$$\begin{aligned}
\vec{J}^2 &= J_x + J_y + J_z^2 && (0.8)\\
&= \frac{1}{4}(J_+ + J_-)^2 - \frac{1}{4}(J_+ - J_-)^2 + J_z^2 && (0.9)\\
&= \frac{1}{4}(J_+^2 + J_-^2 + J_+J_- + J_-J_+ - J_+^2 - J_-^2 + J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2 && (0.10)\\
&= \frac{1}{4}(J_+J_- + J_-J_+ + J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2 && (0.11)\\
&= \frac{1}{4}(2J_+J_- + 2J_-J_+) + J_z^2 && (0.12)\\
&= \frac{1}{2}J_+J_- + \frac{1}{2}J_-J_+ + J_z^2 && (0.13)\\
& && (0.14)
\end{aligned}$$

- (2) $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$
- (3) $[J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm$

$$\begin{aligned}
[\vec{J}^2, J_z] &\overset{(1)}{=} [\frac{1}{2}J_+J_- + \frac{1}{2}J_-J_+ + J_z^2, J_z] && (0.15)\\
&= [\frac{1}{2}J_+J_-, J_z] + [\frac{1}{2}J_-J_+, J_z] + \underbrace{[J_z^2, J_z]}_{=0} && (0.16)\\
&= \frac{1}{2}([J_+J_-, J_z] + [J_-J_+, J_z]) && (0.17)\\
&= \frac{1}{2}(-[J_z, J_+J_-] - [J_z, J_-J_+]) && (0.18)\\
\overset{(2)}{} &= \frac{1}{2}(-[J_z, J_+]J_- - J_+[J_z, J_-] - [J_z, J_-]J_+ - J_-[J_z, J_+]) && (0.19)\\
\overset{(3)}{} &= \frac{1}{2}(-\hbar J_+J_- + \hbar J_+J_- + \hbar J_-J_+ - \hbar J_-J_+) && (0.20)\\
&= \frac{\hbar}{2}(-J_+J_- + J_+J_- + J_-J_+ - J_-J_+) && (0.21)\\
&= 0 && (0.22)
\end{aligned}$$

- (1) $J_\pm = \hbar a_\pm^\dagger a_\mp$
- (2) $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$
- (3) $[a, a^\dagger] = 1$

$$\begin{aligned}
[J_+, J_-] &= [\hbar a_+^\dagger a_-, \hbar a_-^\dagger a_+] && (0.23)\\
&= \hbar^2([a_+^\dagger a_-, a_-^\dagger a_+]) && (0.24)\\
\overset{(2)}{} &= \hbar^2([a_+^\dagger a_-, a_-^\dagger]a_+ + a_-^\dagger[a_+^\dagger a_-, a_+]) && (0.25)\\
&= \hbar^2([a_-, a_-^\dagger]a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_-[a_+^\dagger, a_+]) && (0.26)\\
\overset{(3)}{} &= \hbar^2(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-) && (0.27)\\
&= 2\hbar(\frac{\hbar}{2}(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-)) && (0.28)\\
&= 2\hbar J_z && (0.29)
\end{aligned}$$

- (1) $[a, a^\dagger] = 1 = aa^\dagger - a^\dagger a \leftrightarrow aa^\dagger = 1 + a^\dagger a$

$$\vec{J}^2 = J_x + J_y + J_z^2 = \frac{1}{2}J_+J_- + \frac{1}{2}J_-J_+ + J_z^2 \tag{0.30}$$
$$= \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2 \tag{0.31}$$
$$= \frac{\hbar^2}{2}(a_+^\dagger a_- a_-^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_+ a_+^\dagger a_-) + \frac{\hbar^2}{4}(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-)^2 \tag{0.32}$$
$$= \frac{\hbar^2}{2}(a_+^\dagger a_+ a_- a_-^\dagger + a_-^\dagger a_- a_+ a_+^\dagger) + \frac{\hbar^2}{4}(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-)^2 \tag{0.33}$$
$$= \frac{\hbar^2}{2}(a_+^\dagger a_+(1 + a_-^\dagger a_-) + a_-^\dagger a_-(1 + a_+^\dagger a_+)) + \frac{\hbar^2}{4}(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-)^2 \tag{0.34}$$
$$= \frac{\hbar^2}{2}(N_+(1 + N_-) + N_-(1 + N_+)) + \frac{\hbar^2}{4}(N_+ - N_-)^2 \tag{0.35}$$
$$= \frac{\hbar^2}{4}(2N_+(1 + N_-) + 2N_-(1 + N_+) + N_+^2 - N_-^2 - N_+N_- - N_-N_+) \tag{0.36}$$
$$= \frac{\hbar^2}{4}(2N_+ + 2N_+N_- + 2N_- + 2N_-N_+ + N_+^2 - N_-^2 - N_+N_- - N_-N_+) \tag{0.37}$$
$$= \frac{\hbar^2}{4}(2N_+ + N_+N_- + 2N_- + N_-N_+ + N_+^2 - N_-^2) \tag{0.38}$$
$$= \frac{\hbar^2}{4}(2N_+ + 2N_- + N_+^2 - N_-^2 + N_+N_- + N_-N_+) \tag{0.39}$$
$$= \frac{\hbar^2}{4}(2N_+ + 2N_- + (N_+ + N_-)^2) \tag{0.40}$$
$$= \frac{\hbar^2}{4}(2N + (N)^2) \tag{0.41}$$
$$= \hbar^2(\frac{N^2}{2} + \frac{N}{2}) \tag{0.42}$$
$$\vec{J}^2 = \hbar^2\frac{N}{2}(\frac{N}{2} + 1) \tag{0.43}$$

Zusammenhang mit $|jm\rangle$
$\vec{J}^2 = \hbar^2 \frac{N}{2}(\frac{N}{2} + 1) \stackrel{!}{=} \hbar^2 j(j+1)$

$$\Rightarrow j = \frac{N_+ + N_-}{2}$$

$J_z = \frac{\hbar}{2}(N_+ - N_-) \stackrel{!}{=} \hbar m$

$$\Rightarrow m = \frac{N_+ - N_-}{2}$$