

Contents

6	Kap 6. Relativistische QM	2
6.0.1	QM eines freien Teilchens	3
6.0.2	Wahrscheinlichkeitserhaltung	4
6.1	Dirac Gleichung	6
6.1.1	Wahrscheinlichkeitsstrom	6
6.1.2	Elektromagnetische Wechselwirkung	7
6.1.3	Relativistische Korrekturen	9
6.1.4	Dirac Gleichung und Pauli Gl incl. relativistische Korrekturen	9
6.2	Hamilton Op. für Pauli Gl mit rel. Korrekturen	10
6.2.1	Korrekturen zum Wasserstoff spektrum	10
6.2.2	Ebene Wellen als Lösungen der freien Dirac Gl	11
6.2.3	Lösung für Impuls ungleich 0	11
6.2.4	Lorentz Transformation	11
6.2.5	Kovarianz der Dirac Gleichung	12

Chapter 6

Kap 6. Relativistische QM

Notation: Vierer-Vektoren

$$x^\mu = ct, x, y, z = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{r})$$

invariante Länge $\sqrt{x^2}$

$$x^2 = x \cdot x = x^\mu x_\mu = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu$$

Einsteinsche Summenkonvention: $\sum_{\mu=0}^3$ für jedes Paar von oberen und unteren Index
Metrischer Tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -\vec{r})$$

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu = g^{\mu\nu} x^\nu = g^\nu_\nu x^\nu$$

$$g^\nu_\nu = \delta^\nu_\nu = \begin{cases} 1, & \mu = \nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} \rightarrow g^{\mu\nu} = [g_{\mu\nu}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vierer-Impuls: $p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p})$ $E = \sqrt{(mc^2)^2 + (\vec{p}c)^2}$

$$p^2 = p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = \frac{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2$$

Vierer-Potential: LT $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$

$$A^\mu = (\frac{\phi}{c}, \vec{A}) \rightarrow A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x)$$

Strom: $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$ in E und M

Skalarprodukt für a^μ, b^μ : $a \cdot b = a^\mu b_\mu = a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$

Ableitung nach x^ν

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla})$$

ist kovarianter Vektor unter Index wg: $\partial_\mu a \cdot x = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(a_\nu x^\nu) = a_\mu$

Entsprechend $\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu = (\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla})$

d'Alebert Operator

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$$

6.0 QM eines freien Teilchens

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$$

$$p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p}) \rightarrow (i\hbar \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar \vec{\nabla}) = i\hbar \partial^\mu$$

Schrödinger Gl. für NR freies Teilchens

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \psi(\vec{x}, t)$$

Relativistischer Fall

- 1) $E = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2} \rightarrow$ nichtlokalen Operator
- 2) $\frac{E^2}{c^2} = m^2 c^2 + \vec{p}^2 \rightarrow -\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = m^2 c^2 \psi - \hbar^2 \vec{\nabla}^2 \psi$

$$\Leftrightarrow 0 = m^2 c^2 \psi + \hbar^2 \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \psi = m^2 c^2 \psi + \hbar^2 \square \psi$$

Klein Gordon Gl.

$$(\square + (\frac{mc}{\hbar})^2) \psi(x) = 0$$

Anwendbar auf skalare Teilchen (Spin 0) wie π^+ , π^- , π^0 , K , H

Lösungen der KG-Gl. durch ebene Wellen

$$\psi_p(x) = N e^{-ip \cdot x / \hbar} = N e^{-iEt/\hbar} e^{+i\vec{p} \cdot \vec{x} / \hbar}$$

mit $p \cdot x = p^\mu x_\mu = Et - \vec{p} \cdot \vec{x}$

$$\square \psi_p(x) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi_p(x) = N \left(-\frac{i}{\hbar} p_\mu \right) \left(-\frac{i}{\hbar} p^\mu \right) e^{-ip \cdot x / \hbar} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \psi_p$$

KG:

$$\Rightarrow \left(-\frac{p^2}{\hbar^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi_p(x) = 0 \Leftrightarrow p^2 = m^2 c^2; \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2$$

$$\rightarrow E = \pm c \sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2}$$

Lösungen mit Negativer Energie und das Energiespektrum ist nach unten nicht beschränkt.

6.0 Wahrscheinlichkeitserhaltung

Kontin.Gl $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu j^\mu = 0$ mit $j^\mu = (\rho c, \vec{j})$.

Gibt es einen erhaltenen 4-Strom für die Lösung der KG-Gleichung?

$$\psi^* (\square + (\frac{mc}{\hbar})^2) \psi(x) - \psi (\square + (\frac{mc}{\hbar})^2) \psi^*(x) = 0$$

$$\psi^* (\partial_\mu \partial^\mu \psi) - \psi (\partial_\mu \partial^\mu \psi^*) = 0$$

$$\partial_\mu \underbrace{(\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*)}_{\propto j^\mu} = 0$$

$$j^\mu \propto (\psi^* \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \psi^*, -(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*))$$

Kandidat für Wahrscheinlichkeits Strom $\frac{2im}{\hbar} \vec{j}$ in Schrödinger Gl

$$j^\mu = \frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*)$$

$$\rightarrow j^0 = \rho c = \frac{i\hbar}{2mc} (\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t})$$

Anwendung auf stationäre Lösung: $\psi_E(x) = e^{-iEt/\hbar} \psi_E(\vec{x})$

$$\frac{\partial \psi_E}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} \psi_E, \frac{\partial \psi_E^*}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} \psi_E^* \Rightarrow \rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} |\psi_E(\vec{x})|^2 \frac{-2iE}{\hbar} = \frac{E}{mc^2} |\psi_E(x)|^2$$

$\rho < 0$ für Zustände mit $E < 0$

\Rightarrow Keine mögliche Wahrscheinlichkeitsdichte. (Ok für Zustände mit positiver Energie)

Interpretation: Zustände mit $E > 0 \Leftrightarrow$ z.B. π^+ und $E < 0 \Leftrightarrow$ z.B. π^- (Antiteilchen zum π^+)

$\rho > 0$: π^+ dominieren $\rho < 0$: π^- dominieren

$\rho \propto$ elektromagn. Ladungsdichte

$$j^\mu = |e| \frac{i\hbar}{2mc} (\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*)$$

Elektronen: Spin

\rightarrow Wellenfunktion $\psi(x)$ hat ≥ 2 Komponenten

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \dots \\ \psi_N(x) \end{pmatrix}$$

Möglichkeit: Matrixstruktur für \hat{H}

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = \hat{H} \psi(x)$$

$$\text{Ansatz: } i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi \text{ mit } \psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \dots \\ \psi_N(x) \end{pmatrix}$$

und Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho = \sum_{i=1}^N |\psi_i|^2$

$$\Rightarrow \hat{H} \propto \frac{\partial}{\partial x^i} \propto \hat{p}_i$$

Ansatz für \hat{H}

$$\hat{H} = c(\alpha_x \hat{p}_x + \alpha_y \hat{p}_y) + \beta mc^2 = c \sum_{i=1}^3 \alpha_i \hat{p}_i + \beta mc^2$$

Ebene Wellenlösung für freie Teilchen

$$\psi(x) = e^{-px/\hbar} \psi(p)$$

mit $p^2 = m^2 c^2$

$$\Rightarrow E\psi(p) = [c \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta mc^2] \psi(p)$$

$$E^2 \psi(p) = (m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2) \psi(p)$$

$$Ec(\vec{\alpha} \vec{p} + \beta mc) \psi(p) = c^2 (\vec{\alpha} \vec{p} + \beta mc)^2 \psi(p)$$

$$= c^2 \left(\sum_{i,j=1}^3 \alpha_i \alpha_j p_i p_j + \sum_{i=1}^3 (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i mc + \beta^2 m^2 c^2 \right) \psi(p)$$

Koeffizientenvergleich: $\beta^2 = 1$; Antikommutator:

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0$$

- $\boxed{\beta^2 = 1}$
- Antikommutator: $\boxed{\{\alpha_i, \beta\} = 0}$
- $i \neq j$: z.B. $p_x p_y \{\alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x\}$; $\{\alpha_i, \alpha_j\} = 0$
- $i = j$: $\alpha_x^2 p_x^2 + \alpha_y^2 p_y^2 + \alpha_z^2 p_z^2 = \vec{p}^2 \Rightarrow \alpha_i^2 = 1$

$$\Rightarrow \boxed{\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}}$$

1) \hat{p}_i, \hat{H} hermitesch $\Rightarrow \vec{\alpha}, \beta$ hermitesch

2) $\alpha_i^2 = 1, \beta^2 = 1 \Rightarrow$ Eigenwerte von α_i, β

3) $\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \quad | \cdot \beta$

$$\Rightarrow \alpha_i = -\beta \alpha_i \beta \Rightarrow Tr[\alpha_i] = -Tr[\beta \alpha_i \beta] = -Tr[\alpha_i \beta^2] = -Tr[\alpha_i]$$

- Anzahl; N - Dimension der Matrix

EW +1 = # EW -1

$\Rightarrow N$ gerade ($N = 2, 4, \dots$)

$N = 2 \Rightarrow 3$ Pauli Matrizen als Kandidaten benötigt: 4 Matrizen $\Rightarrow N \geq 4 : N = 4$ funktioniert

$N = 4$: Dirac Basis: β diagonal

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

α_i hermitesch + $\{\alpha_i, \beta\} = 0$

$$\alpha = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A & -B \\ C & -D \end{pmatrix}$$

$$A = D = 0, C = B^\dagger$$

$$\beta\alpha = \begin{pmatrix} A & B \\ -C & -D \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \tau_i \\ \tau_i^\dagger & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \Leftrightarrow \tau_i \tau_j^\dagger + \tau_j \tau_i^\dagger = 2\delta_{ij}$$

Lösung $\tau_i = \sigma_i =$ Pauli Matrizen

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}; \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}}$$

6.1 Dirac Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = c(\vec{\alpha} \cdot \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \beta mc) \psi(x) \quad | \cdot \frac{\beta}{\hbar c}$$

Alternativ: kovariante Form

$$\Rightarrow i\beta \underbrace{\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t}}_{\frac{\partial}{\partial x^0}} \psi + i \underbrace{\beta \vec{\alpha}_i}_{\gamma^i} \cdot \underbrace{\vec{\nabla}_i}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \psi - \frac{mc}{\hbar} \psi = 0$$

$$\Rightarrow (i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{mc}{\hbar}) \psi = 0$$

$$\gamma^0 = \beta; \gamma^i = \beta \alpha_i$$

$$\boxed{\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right) \psi = 0}$$

Kovariante Form der Dirac Gleichung mit $\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1}_4$
 z.B. $\{\gamma^i, \gamma^j\} = \beta \underbrace{\alpha_i \alpha_j}_{-\beta \alpha_i} + \beta \underbrace{\alpha_j \alpha_i}_{-\beta \alpha_j} = -\{\alpha_i, \alpha_j\} = -2\delta_{ij}$

6.1 Wahrscheinlichkeitsstrom

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi + \beta mc^2 \psi$$

adjungierte Dirac Gleichung:

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i} (\vec{\nabla} \psi^\dagger) \vec{\alpha} + \beta mc^2 \psi^\dagger \quad | \cdot \psi$$

Differenz der beiden Gleichungen:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) = \frac{\hbar c}{i} (\psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi + (\vec{\nabla} \psi^\dagger) \vec{\alpha} \psi)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) = -c \vec{\nabla} (\psi^\dagger \vec{\alpha} \psi)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\psi^\dagger \psi)}_\rho + \vec{\nabla} \cdot \underbrace{(c\psi^\dagger \vec{\alpha} \psi)}_{\vec{j}}$$

$$\rho = \psi^\dagger \psi = \sum_i |\psi_i|^2 \geq 0$$

ρ ist positiv definierte Wahrscheinlichkeitsdichte
Kovariante Form des W-Stroms

$$j^\mu = (c\psi^\dagger \psi, c\psi^\dagger \vec{\alpha} \psi) \quad (6.1)$$

$$= (c\psi^\dagger \beta \gamma^0 \psi, c\psi^\dagger \beta \vec{\gamma} \psi) \quad (6.2)$$

$$= c\psi^\dagger \beta \gamma^\mu \psi = c\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (6.3)$$

wobei $\bar{\psi} = \psi^\dagger \beta = \psi^\dagger \gamma^0$ der Pauli adjungierte Spinor ist.

6.1 Elektromagnetische Wechselwirkung

externe \vec{E}, \vec{B} Fleder $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$$\rightarrow A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A}\right)$$

minimale Substitution:

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - eA^\mu \quad QM \rightarrow i\hbar \partial^\mu - eA^\mu = i\hbar(\partial^\mu + \frac{ie}{\hbar} A^\mu) = i\hbar D^\mu$$

Komponenten der Kovarianten Ableitung D^μ

$$i\hbar D^\mu = (i\hbar \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{c} \phi, \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - e\vec{A})$$

$$= (\frac{i}{c} (c\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi), \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - e\vec{A})$$

Ersetze in freier Dirac-Gl ∂

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = c\vec{\alpha} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - e\vec{A} \right) \psi + \beta mc^2 \psi + e\phi \psi}$$

oder

$$\boxed{(i\gamma^\mu D_\mu - \frac{mc}{\hbar}) \psi = 0}$$

beschreibt WW eines Elektrons der Ladung e mit dem elektromagnetischen Feld.

Notation: $\vec{\alpha} \vec{p} \psi = \frac{\hbar}{i} \vec{\alpha} \vec{\nabla} \psi$

$$\text{mit } A = 1 \dots 4 \quad [\vec{\alpha} \vec{p} \psi]_A = \sum_{j=1}^3 \sum_{B=1}^4 \alpha_{jAB} \frac{\hbar}{i} \nabla_j \psi_B(\vec{x}, t) = \left[\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \vec{p} \\ \vec{\sigma} \vec{p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \right]_A$$

Nichtrel. Grenzfall: $E = mc^2 + E_S$

Ansatz:

$$\psi(\vec{x}, t) = e^{i \frac{mc^2}{\hbar} t} \begin{pmatrix} \phi(\vec{x}, t) \\ \chi(\vec{x}, t) \end{pmatrix} = e^{i \frac{mc^2}{\hbar} t} e^{i \frac{E_S}{\hbar} t} \begin{pmatrix} \phi_E(\vec{x}, t) \\ \chi_E(\vec{x}, t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow i\hbar \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\chi} \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \vec{p} i \vec{\chi} \\ \vec{\sigma} \vec{p} i \phi \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \phi \\ -\chi \end{pmatrix} + e\phi \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \vec{\pi} = \vec{p} - e\vec{A} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - e\vec{A} = \frac{\hbar}{i} \vec{D}$$

$$\Rightarrow \chi : 2mc^2 \chi + i\hbar \dot{\chi} - e\phi \chi = c\vec{\sigma} \vec{\pi} \phi$$

$$\Rightarrow i\hbar \dot{\phi} = c\vec{\sigma} \vec{\pi} \chi + e\phi \phi$$

$$\chi \approx \frac{1}{2mc^2} c\vec{\sigma} \vec{\pi} \phi \approx \frac{mv}{2mc} \phi = \frac{1}{2} \frac{v}{c} \phi$$

($\chi = \frac{1}{2mc^2 + E_S - V} c\vec{\sigma} \vec{\pi} \phi$) χ ist kleine Komponente des Dirac Spinors. Einsetzen von χ :

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{c^2 (\vec{\sigma} \vec{\pi})^2}{2mc^2} \phi + V\phi \quad (V = e\Phi)$$

Berechnung von $(\vec{\sigma} \vec{\pi})^2 = -\hbar^2 \underbrace{\sigma_i \sigma_j}_{\frac{1}{2} [\sigma_i, \sigma_j] + \frac{1}{2} \{\sigma_i, \sigma_j\}} D_i D_j$ mit $[\sigma_i, \sigma_j] = i\hbar^2 \epsilon_{ijk} \sigma_k$ und σ_{ij}

$$(\vec{\sigma} \vec{\pi})^2 = \vec{\pi}^2 - i\hbar^2 \epsilon_{ijk} \sigma_k \underbrace{D_i D_j}_{\frac{1}{2} [D_i, D_j]}$$

$$[D_i, D_j] = [\nabla_i - \frac{i}{\hbar} e A_i, \nabla_j - \frac{i}{\hbar} e A_j] = -\frac{i}{\hbar} e \underbrace{((\nabla_i A_j) - (\nabla_j A_i))}_{\vec{\nabla} \times \vec{A}}$$

$$\Rightarrow (\vec{\sigma} \vec{\pi})^2 = \vec{\pi}^2 - \frac{1}{2} \hbar e \vec{\sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) 2 = \vec{\pi}^2 - 2e \vec{S} \vec{B} \quad (\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma})$$

$$\rightarrow i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\pi^2}{2m} \phi - \frac{e}{2m} 2\vec{S} \vec{B} \phi + V\phi$$

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} \phi - \frac{e}{2m} 2\vec{S} \vec{B} \phi + V\phi} \quad \text{Pauli Gleichung}$$

Schwaches homogenes B -Feld: $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$

$$\frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} \approx \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e}{2m} \vec{B} \vec{L}$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\vec{p}^2}{2m} \phi - \frac{e}{2m} \vec{B} (\vec{L} + 2\vec{S}) \phi + V\phi$$

Magnetisches Moment des Elektrons: $\vec{\mu} = \frac{e}{2m} (\vec{L} + 2\vec{S})$ $g = 2$ für geladenes Dirac-Fermion

6.1 Relativistische Korrekturen

Energieeigenzustände: $\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}(\vec{x}, t) = e^{-E_s t/\hbar} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}(\vec{x}, t)$

Dirac Gleichung ist äquivalent zu

$$(2mc^2 + E_S - V)\chi = c\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi$$

$$E_S\phi = c\vec{\sigma}\vec{\pi}\chi + V\phi$$

$$\Rightarrow \chi = \frac{1}{2mc^2 + E_S - V} c\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi \quad (6.4)$$

$$= \frac{1}{2mc} \frac{1}{1 + \frac{E_S - V}{2mc^2}} \vec{\sigma}\vec{\pi}\phi \quad (6.5)$$

$$\approx \frac{1}{2mc} \left(1 - \frac{E_S - V}{2mc^2} + \dots\right) \vec{\sigma}\vec{\pi}\phi \quad (6.6)$$

$$(E_S - V)\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi = \vec{\sigma}\vec{\pi}(E_S - V)\phi + \underbrace{\vec{\sigma}[E_S - V, \vec{\pi}]}_{[\vec{\pi}, V] = \frac{\hbar}{i}(\vec{\nabla}V)}\phi$$

Einsetzen in $E_S\phi = \dots$

$$(E_S - V)\phi = \frac{(\vec{\sigma}\vec{\pi})^2}{2m}\phi - \frac{\vec{\sigma}\vec{\pi}}{4m^2c^2} \left(\frac{(\vec{\sigma}\vec{\pi})^3}{2m} + \vec{\sigma}\frac{\hbar}{i}(\vec{\nabla}V) \right)\phi$$

Spezialfall:

- $V = V(r)$ sphärisch symmetrisch $\Rightarrow \vec{\nabla}V = \vec{r}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}$
- $\vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{\pi} = \vec{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \Rightarrow (\vec{\sigma}\vec{\pi})^2 = \vec{p}^2$

$$\Rightarrow E_S\phi = \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + V \right)\phi - \frac{\hbar}{i} \frac{1}{4m^2c^2} \underbrace{\sigma_i\sigma_j}_{i\epsilon_{ijk}\pi_k + \sigma_{ij}} p_i r_j \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \phi$$

$$E_S\phi = \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + V \right)\phi - \hbar \frac{1}{4m^2c^2} \vec{\sigma}(\vec{r} \times \vec{p}) \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \phi + \frac{\hbar^2}{4m^2c^2} \left((\nabla^2 V) + \underbrace{(\vec{\nabla}) \cdot \vec{\nabla}}_{\text{nicht selbst adjungiert}} \right) \phi$$

Interpretation:

- $-\frac{p^4}{8m^3c^2}$ relativistischer Beitrag zur kin. Energie
- $E = \sqrt{(mc^2)^2 + p^2c^2} = mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{(mc)^2}} = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m^2c^2} - \frac{1}{8} \frac{p^4}{m^4c^4} + \dots\right) = mc^2 - \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{8} \frac{p^4}{m^3c^2}$
- $\hbar \frac{1}{4m^2c^2} \vec{\sigma}(\vec{r} \times \vec{p}) \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \phi = \frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \vec{L}\vec{S}\phi = H_{LS}$ Korrekte Spin-Bahn Kopplung, inclusive Thomas Präzessionsfaktor $\frac{1}{2}$

6.1 Dirac Gleichung und Pauli Gl incl. relativistische Korrekturen

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} H_\phi \phi$$

mit

$$H_\phi = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V + H_r + H_{LS} + \tilde{H}_D$$

$$H_r = -\frac{1}{8m} \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} \right)^2$$

$$H_{LC} = \frac{1}{2m^2 c^2} \frac{1}{\gamma} \frac{dV}{d\gamma} \vec{L} \cdot \vec{S}$$

$$\tilde{H}_D = \frac{\hbar^2}{4m^2 c^2} ((\nabla^2 V) + (\vec{\nabla} V) \cdot \vec{\nabla})$$

$\cdot \vec{\nabla})$ nicht hermitesch

Problem: Wahrscheinlichkeits-Dichte ist

$$\rho = \frac{j^0}{c} = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi = \sum_{i=1} |\psi_i|^2 \quad (6.7)$$

$$= |\phi|^2 + |\chi|^2 \quad (6.8)$$

$$= |\phi|^2 + \left| \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{2mc} \phi \right|^2 \quad (6.9)$$

$$= |\phi|^2 + \phi^\dagger \frac{\vec{p}^2}{4m^2 c^2} \phi \approx \underbrace{\left| \left(1 + \frac{\vec{p}^2}{8m^2 c^2} \right) \phi \right|^2}_{\phi} \quad (6.10)$$

Übergang zu

$$\phi = \Omega \phi = \left(1 + \frac{\vec{p}^2}{8m^2 c^2} + \dots \right) \phi$$

Foldy-Wouthuysen Transformation. (Details: Bjorken-Drell relativ. QM)

Ersetze $E_S \phi = H_\phi \phi$ durch $E_S \phi = \underbrace{\Omega H_\phi \Omega^{-1}}_H \underbrace{\Omega \phi}_\phi$

$$H = \left(1 + \frac{\vec{p}^2}{8m^2 c^2} \right) H_\phi \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{8m^2 c^2} \right) \quad (6.11)$$

$$= H_\phi + \left[\frac{\vec{p}^2}{2m^2 c^2}, H_\phi \right] + \dots = H_\phi + \left[-\frac{\vec{p}^2}{2m^2 c^2}, V \right] + \dots \quad (6.12)$$

$$\text{NR: } \left[\frac{\vec{p}^2}{2m^2 c^2}, V \right] = -\frac{\hbar^2}{8m^2 c^2} \underbrace{\left[\nabla_i \nabla_i, V \right]}_{\nabla_i \underbrace{[\nabla_i, V]}_{(\nabla_i V)} + \underbrace{[\nabla_i, V]}_{(\nabla_i V)} \nabla_i} = [(\nabla^2 V) + 2(\nabla, V) \nabla_i]$$

6.2 Hamilton Op. für Pauli Gl mit rel. Korrekturen

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V + H_r + H_{LS} + H_D$$

mit Darwin-Term $H_D = \frac{\hbar^2}{8m^2 c^2} (\nabla^2 V)$

6.2 Korrekturen zum Wasserstoff spektrum

$$E_n^{(0)} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2a_0 n^2}$$

$$\Delta E_n^{(1)} = \alpha^2 E_n^{(0)} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right)$$

Aufspaltung von $2p_{\frac{1}{2}}$ $2p_{\frac{3}{2}}$
gleiche Energie für $2s_{\frac{1}{2}}$ $2p_{\frac{1}{2}}$

6.2 Ebene Wellen als Lösungen der freien Dirac Gl

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) = 0$$

Ebene Welle als Ansatz $\psi = e^{-px/\hbar}w(p)$ mit $w(p)$ -Spinor im Impulsraum

$$i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi(x) = i\gamma^\mu \left(-\frac{ip_\mu}{\hbar}\right)\psi(x) \quad (6.13)$$

$$= \frac{1}{\hbar} \gamma^\mu p_\mu \psi(x) = \frac{mc}{\hbar} \psi(x) \quad (6.14)$$

Notation: $\gamma^\mu p_\mu = \not{p}$

$$\boxed{(\not{p} - mc)w(p) = 0}$$

Spezialfall: Teilchen in Ruhe

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{0}\right)$$

$$\rightarrow \not{p} = \frac{E}{c} \gamma^0 = \frac{E}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{E}{c} - mc & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{c} - m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E}{c} - mc & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{E}{c} - mc \end{pmatrix} w(\vec{p}) = 0$$

4 Lösungen zu 2EW

$$E = +mc^2 : w_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$E = -mc^2 : w_3(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_4(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow Lösungen mit negativer Energie \rightarrow Existenz von Positronen.

6.2 Lösung für Impuls ungleich 0

1) Matrixgl. $\not{p}w = mcw$ lösen

2) Lorenztransformation von Inertialsystem IS (Teilchen in Ruhe) in IS' ($\vec{p} \neq 0$)

6.2 Lorentz Transformation

$$x' = \Lambda x \text{ mit } x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

Bsp: Boost in z-Richtung: $z' = \gamma(z - vt)$, $t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}z)$, $x' = x$, $y' = y$

LT erhält relativ. Länge

$$x'x' = g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu = \underbrace{\Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma g_{\mu\nu}}_{g_{\rho\sigma}} x^\rho x^\sigma = x \cdot c = x^\rho x^\sigma g_{\rho\sigma}$$

Def. Eigenschaft einer LT

$$\Lambda^\rho_\mu \Lambda^\mu_\sigma = g^\rho_\sigma = \delta^\rho_\sigma$$

oder $(\Lambda^{-1})^\rho_\mu = \Lambda^\rho_\mu$

$\Rightarrow \det \Lambda = \pm 1$ (verallgemeinerung von orthogonalen Transf)

infinitesimale LT

Mit w^ρ_μ infinitesimal

$$\Lambda^\rho_\mu = g^\rho_\mu + w^\rho_\mu$$

$$\Lambda^\rho_\mu \Lambda^\mu_\sigma = (g^\rho_\mu + w^\rho_\mu)(g^\mu_\sigma + w^\mu_\sigma) \quad (6.15)$$

$$g^\rho_\sigma = g^\rho_\sigma + \underbrace{w^\rho_\sigma + w^\rho_\sigma + \dots}_{=0} \quad (6.16)$$

$$\rightarrow w_{\sigma\rho} + w_{\rho\sigma} = 0, \quad \begin{pmatrix} 0 & w_{01} & w_{02} & w_{03} \\ -w_{01} & 0 & w_{12} & w_{13} \\ & & 0 & w_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6 reelle freie Parameter \Rightarrow 6 Generatoren

\vec{J} (Drehungen) 3 w_{ij} \vec{K} (Boosts) 3 w_{oi}

6.2 Kovarianz der Dirac Gleichung

inertialsystem:

$$\begin{array}{cc} \text{IS} & \text{IS}' \\ x^\mu & x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \\ (i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{mc}{\hbar})\psi(x) = 0 & (i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - \frac{mc}{\hbar})\psi'(x) = 0 \end{array}$$

Zu zeigen: Es gibt zu jeder LT Λ eine lineare Abbildung $S(\Lambda)$ der Spinoren: $\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x')$

Die Menge $\{S(\Lambda)\}$ bilden Darstellung der Lorenzgruppe

$$S(\Lambda_1\Lambda_2) = S(\Lambda_1)S(\Lambda_2) \Rightarrow S(\mathbb{1}) = \mathbb{1}, \quad S(\Lambda^{-1}) = (S(\Lambda))^{-1}$$

$$\psi(x) = S(\Lambda^{-1})\psi'(x')$$

$$S(\Lambda_1)(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{mc}{\hbar})S(\Lambda^{-1})\psi'(x') = 0$$

$$\Leftrightarrow iS(\Lambda_1)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1}) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^\mu}}_{\Lambda^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}} - \frac{mc}{\hbar})\psi'(x') = 0$$

NR:

$$\begin{aligned} x'^\nu &= \Lambda^\nu_\rho x^\rho \\ \frac{\partial}{\partial x^\mu} &= \underbrace{\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}}_{\Lambda^\nu_\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \dots \end{aligned}$$

ist äquivalent zur Dirac Gl in IS'

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1})\Lambda^\nu_\mu = \gamma^\nu$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Lambda^\nu_\mu \gamma^\mu = S(\Lambda^{-1})\gamma^\nu S(\Lambda^{-1})}^*$$

Betrachte infinitesimalen Fall:

$$\Lambda^\nu_\mu = g^\nu_\mu + \omega^\nu_\mu$$

$$S(\Lambda) = \mathbb{1} - \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}$$

mit 4x4 Matrizen $\sigma_{\alpha\beta} = -\sigma_{\beta\alpha}$ (6 Matrizen)

$$S(\Lambda^{-1}) = \mathbb{1} - \frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}$$

Einsetzen in *: Term linear in $\omega^{\mu\nu}$ gilt für alle $\omega^{\alpha\beta} = -\omega^{\beta\alpha}$

$$\underbrace{\omega^{\nu}_{\mu} \gamma^{\mu}}_{\omega^{\alpha\beta} \frac{1}{2} (g^{\nu}_{\alpha} \gamma_{\beta} - g^{\nu}_{\beta} \gamma_{\alpha})} = -\frac{i}{4} \omega^{\alpha\beta} (\gamma^{\nu} \sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta} \gamma^{\nu})$$

$$\Rightarrow \boxed{[\gamma^{\nu}, \sigma_{\alpha\beta}] = 2i(g^{\nu}_{\alpha} \gamma_{\beta} - g^{\nu}_{\beta} \gamma_{\alpha})}$$

Lösung für $\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2} [\gamma_{\alpha}, \gamma_{\beta}]$

Bew:

$$\frac{2}{i} [\gamma^{\nu}, \sigma_{\alpha\beta}] = \gamma^{\nu} (\gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} - \gamma_{\beta} \gamma_{\alpha}) - (\gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} - \gamma_{\beta} \gamma_{\alpha}) \gamma^{\nu} + \gamma_{\alpha} \gamma^{\nu} \gamma_{\beta} - \gamma_{\beta} \gamma^{\nu} \gamma_{\alpha} - \gamma_{\alpha} \gamma^{\nu} \gamma_{\beta} + \gamma_{\beta} \gamma^{\nu} \gamma_{\alpha} \quad (6.17)$$

$$= 2 \cdot 2g^{\nu}_{\alpha} \gamma_{\beta} - 2 \cdot 2g^{\nu}_{\beta} \gamma_{\alpha} \quad (6.18)$$

$$= \frac{2}{i} 2i(g^{\nu}_{\alpha} \gamma_{\beta} - g^{\nu}_{\beta} \gamma_{\alpha}) \quad (6.19)$$

$\Rightarrow \sigma_{\alpha\beta}$ sind Generatoren für Spinordarstellung der LG

$$S(g + \omega) = 1 + \frac{1}{8} [\gamma_{\nu}, \gamma_{\nu}] \omega^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu}}$$

mit $\omega^{\mu\nu}$ endlich

Frage: Ist $j^{\mu} = c \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi$ mit $\bar{\psi} = \psi^{\dagger} \gamma^0$ ein 4-Vektor?

Transformation von $\bar{\psi}$:

$$\psi'(x')^{\dagger} = (S(\Lambda) \psi(x))^{\dagger} = \psi^{\dagger}(x) S^{\dagger}(\Lambda) = \psi^{\dagger}(x) e^{+\frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu}^{\dagger} \omega^{\mu\nu}}$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{\dagger} = \frac{i}{2} [\gamma_{\alpha}, \gamma_{\beta}]^{\dagger} = -\frac{i}{2} [\gamma_{\beta}^{\dagger}, \gamma_{\alpha}^{\dagger}] = \frac{i}{2} [\gamma_{\alpha}^{\dagger}, \gamma_{\beta}^{\dagger}]$$

$$\gamma_0^{\dagger} = \gamma_0 = \gamma^0 \gamma_0 \gamma^0$$

$$\vec{\gamma}^{\dagger} = (\beta \vec{\alpha})^{\dagger} = \vec{\alpha} \beta = \beta \underbrace{(\beta \vec{\alpha})}_{\vec{\gamma}} \beta = \gamma^0 \vec{\gamma} \gamma^0$$

Durch eine Gleichung zusammenfassen:

$$(\gamma^{\mu})^{\dagger} = \gamma^0 \gamma^{\mu} \gamma^0$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{\dagger} = \frac{i}{2} [\gamma^0 \gamma_{\alpha} \gamma^0, \gamma^0 \gamma_{\beta} \gamma^0] = \gamma^0 \sigma_{\alpha\beta} \gamma^0$$

wegen $\gamma^0 = \mathbb{1}$

$$\Rightarrow S^\dagger(\Lambda) = e^{\gamma^0 A \gamma^0} \quad (6.20)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{(\gamma^0 A \gamma^0)^n}_{\gamma^0 A^n \gamma^0} \quad (6.21)$$

$$= \gamma^0 A \gamma^0 \quad (6.22)$$

$$= \gamma^0 e^{+\frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu}^{\dagger} \omega^{\mu\nu}} \gamma^0 \quad (6.23)$$

$$= \gamma^0 S(\Lambda)^{-1} \gamma^0 \quad (6.24)$$

mit $A = \frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}$

$$\boxed{S^\dagger(\Lambda) = \gamma^0 S(\Lambda^{-1}) \gamma^0}$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'(x') &= (\bar{\psi}'(x'))^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger(x) \psi^0 \psi^0 \S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \bar{\psi}(x) \overbrace{\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0}^{S(\Lambda^{-1})} \\ \text{LT von } j^\mu c \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \end{aligned}$$

$$j^{\mu'}(x') = c \bar{\psi}'(x') \gamma^{\mu'} \psi'(x') = c \bar{\psi}(x) \underbrace{S(\Lambda^{-1}) \gamma^\mu S(\Lambda)}_{\Lambda^\mu_\alpha \gamma^\alpha} \psi(x) \quad (6.25)$$

$$= \Lambda^\mu_\alpha (c \bar{\psi}'(x') \gamma^\alpha \psi(x)) = \Lambda^\mu_\alpha j^\alpha(x) \quad (6.26)$$

$\Rightarrow j^\mu(x)$ ist 4-Vektorfeld

$$j^\mu = (c\rho, \vec{j})$$

Kontinuitätsgleichung $\frac{1}{c} \frac{\partial(c\rho)}{\partial t} \vec{\nabla} \vec{j} = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu j^\mu = 0$
Andere Bilineare: z.B.

$$\rho(x) = \bar{\psi}(x) \psi(x) \rightarrow \psi'(x') = \bar{\psi}'(x') \psi'(x') = \bar{\psi}'(x') \gamma^0 \psi'(x') = \bar{\psi}'(x') S(\Lambda^{-1}) S(\Lambda) \psi'(x') = \bar{\psi}(x) \psi(x) = \rho(x)$$

$\Rightarrow \rho(x)$ ist ein Skalares Feld

Allgemeiner Fall: $\bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x)$ mit Γ 4x4 Matrix

Gute Basis der Γ :

$$\Gamma_S = \mathbb{1}, \quad \Gamma_\mu^\nu = \gamma_\mu, \quad \Gamma_{\mu\nu}^T = \sigma_{\mu\nu}$$

$$\Gamma_P = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \gamma^5 = \gamma_5, \quad \Gamma_\mu^A = \gamma_\mu \gamma_5$$