Aufgabe 6: Translationsoperator

Untersuchen Sie den Translationsoperator

$$\mathcal{T}(\vec{l}) = exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{l}\right)$$

(a) Zeigen Sie für beliebige Funktionen F und G, die durch eine Potenzreihe darstellbar sind, aufgrund der fundamentalen Vertauschungsrelation zwischen Ort und Impuls die beiden Relationen

$$[x_i, G(\vec{p})] = i\hbar\frac{\partial G(\vec{p})}{\partial p_i}, [p_i, F(\vec{x})] = -i\hbar\frac{\partial F(\vec{x})}{\partial x_i}$$

(LSG)
Die Funktion $G(\vec{p})$ lässt sich, da $\vec{p}$ ein Vektor ist und dieser Funktion theoretisch alle mögliche mit dem Vektor passieren kann (in Sinne einer Potenzreihe), als eine Summe von Kombination von Potenzen aus den Komponenten p_i mit beliebigen konstanten vorfaktoren c darstellen:

$$G(\vec{p}) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} c_{\alpha\beta\gamma}p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\gamma$$

Nun setzen wir die Potenzreihe in den Kommutator und versuchen die Relatio in der Aufgabe zu bekommen. Wir kennen den Kommutator zwischen Ort und Impuls $[x_i, p_i] = i\hbar\delta_{ij}$ und weitere Beziehung erstmal ohne Beweiß $[x_i, p_i^k] = i\hbar k p_i^{(k-1)}$ ist für die Aufgabe nützlich:

$$[x_i, \sum_{\alpha,\beta,\gamma} c_{\alpha\beta\gamma}p_i^\alpha p_j^\beta p_k^\gamma] = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} c_{\alpha\beta\gamma}\underbrace{[x_i, p_i^\alpha]}_{i\hbar\alpha p_i^{\alpha-1}}p_j^\beta p_k^\gamma$$

$$= \sum_{\alpha,\beta,\gamma} c_{\alpha\beta\gamma}i\hbar\alpha p_i^{\alpha-1}p_j^\beta p_k^\gamma$$

Das sieht genau nach einer Ableitung von p_i nach α aus

$$\Rightarrow \sum_{\alpha,\beta,\gamma} c_{\alpha\beta\gamma}i\hbar\alpha p_i^{\alpha-1}p_j^\beta p_k^\gamma = i\hbar\frac{\partial G(\vec{p})}{\partial p_i} = [x_i, G(\vec{p})]$$

Beweiß der Beziehung $[x_i, p_i^k] = i\hbar k p_i^{(k-1)}$:
1. Beweiß durch Induktion Erster Schritt wähle $k = 1$, Einsetzen ergibt die bekannte Orts-Impuls Relation: $[x_i, p_i^k] = i\hbar k$; Zweiter Schritt:

$$\begin{aligned}
[x_i, p_i^{k+1}] &= x_i p_i^{k+1} - p_i^{k+1}x_i && (0.1)\\
&= x_i p_i^{k+1} - p_i \overbrace{(p_i^k x_i)}^{x_i p_i^k - i\hbar k p_i^{k-1}} && (0.2)\\
&= x_i p_i^{k+1} - p_i x_i p_i^k + i\hbar k p_i^k && (0.3)\\
&= x_i p_i p_i^k - p_i x_i p_i^k + i\hbar k p_i^k && (0.4)\\
&= (\overbrace{x_i p_i - p_i x_i}^{=[x_i,p_i]=i\hbar} + i\hbar k)p_i^k && (0.5)\\
&= i\hbar(k+1)p_i^k && (0.6)
\end{aligned}$$

2. Beweiß durch die Kommutatorbeziehung

$$\begin{aligned}
[A, BC] &= ABC - BCA - BAC + BAC && (0.7)\\
&= (AB - BA)C + B(AC - CA) && (0.8)\\
&= [A, B]C + B[A, C] && (0.9)
\end{aligned}$$

Hier sei zur Vereinfachung $x_i = x$ und $p_i = p$ angenommen:

$$
\begin{aligned}
[x, p^k] &= [x, p \cdot p^{k-1}] && (0.10)\\
&= [x, p]p^{k-1} + p[x, p^{k-1}] && (0.11)\\
&= [x, p]p^{k-1} + p[x, p \cdot p^{k-2}] && (0.12)\\
&= [x, p]p^{k-1} + p([x, p]p^{k-2} + p[x, p^{k-2}]) && (0.13)\\
&= [x, p]p^{k-1} + [x, p]p^{k-1} + p^2[x, p^{k-2}]) && (0.14)\\
&= \underbrace{[x, p]p^{k-1} + [x, p]p^{k-1} + ... + [x, p]p^{k-1}}_{=\times k} + \underbrace{p^k[x, p^0]}_{[x,1]=0} && (0.15)\\
&= k[x, p]p^{k-1} && (0.16)\\
&= i\hbar k p^{k-1} && (0.17)
\end{aligned}
$$