

## Aufgabe 33: Permutation und Spin

Ein System zweier Elektronen werde von einem spinunabhängigen Hamiltonoperator  $H$  beschrieben.

- (a) Durch welche Eigenzustände wird das System charakterisiert? Zeigen Sie, dass diese Eigenzustände gleichzeitig Eigenzustände des Zweivertauschungsoperators  $P_{12}$  mit den Eigenwerten  $\pm 1$  sind. Es gilt  $P_{12}|a\rangle^{(1)}|b\rangle^{(2)} = |b\rangle^{(1)}|a\rangle^{(2)}$ .
- (b) Zeigen Sie, dass  $P_{12}$  in der Form

$$P_{12} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{4}{\hbar^2} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \right)$$

durch die Spins  $\vec{S}_1, \vec{S}_2$  der zwei Elektronen ausgedrückt werden kann.

- (c) Wie muss die Gesamtortswellenfunktion also für die verschiedenen Eigenzustände von  $P_{12}$  durch die Wellenfunktionen der Einzelelektronen ausgedrückt werden? Berechnen Sie die Energiekorrekturen  $\Delta E$  durch ein Potential  $U(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$  in erster Ordnung Störungstheorie.

### LSG a)

Stillschweigend werden hier (nehme ich an) zwei Elektronen in einem zwei Protonen Potential (beispielsweise ein Heliumatom) angenommen. Die potentielle elektrische Energie bezüglich der Kraft ergibt sich zur Erinnerung aus dem Wegintegral über die Kraft:

$$U = \int \vec{F} d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r} + C \quad F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \quad \text{und } C = 0$$

Potential auf ein Elektron und  $Z$  Protonen mit der Ladung  $q_1 = +Ze$ -Proton und  $q_2 = -e$ -Elektron, ist:

$$U_{+e,-e} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z \cdot e \cdot (-e)}{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}$$

Es gibt dann noch ein Potential das die Elektronen aufeinander ausüben, das dann später als Störung betrachtet wird:

$$V = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 |r_1 - r_2|}$$

Weiterhin besteht der Gesamthamilton aus einer Summe separater Hamiltonoperatoren der einzelnen Teilchen weil Zeitunabhängigkeit von  $H$  angenommen wird.

$$H = \underbrace{H(1) + H(2)}_{H_0} + V \quad H(i) = \frac{\vec{p}^2(i)}{2m_i} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

Spinunabhängiger Hamiltonoperator, heißt (vermutlich) soviel wie dass die Interaktion der Elektronen untereinander (Spinbahnkopplung) und andere Effekte (screening) vernachlässigt werden. Mathematisch ausgedrückt sehe das so aus:

$$[H, S^2] = 0, \quad [H, S_z] = 0$$

Deswegen ist die Wellenfunktion als Produkt der Orts- und Spinfunktion anzusetzen:

$$|\psi\rangle \otimes |\chi\rangle = |\psi\rangle |\chi\rangle$$

Zu untersuchen ist nun einmal die Wirkung des Vertauschungsoperators  $P_{12}$  auf  $|\psi\rangle$  und auf  $|\chi\rangle$  (Obwohl es in der Aufgabe auf das System, also gesamte Wellenfunktion anzuwenden ist, welche dann nur noch für Fermionen den Eigenwert  $-1$  liefert).

Wir wissen dass  $|\chi\rangle$  in der Basis  $S, M$  3 Triplet und 1 Singulet Zustände ergeben (siehe Clebschgordan-Koeffizienten):

$$|S, M\rangle = \sum_{m_1} \sum_{m_2} \langle s_1, s_2; m_1, m_2 | S, M \rangle |s_1, s_2; m_1, m_2\rangle$$

$$|1, -1\rangle = \underbrace{\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} -\frac{1}{2} | 11 \rangle}_{=1} | \frac{1}{2} \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle \equiv | - - \rangle$$

$$|1, 0\rangle = \underbrace{\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2}; \frac{1}{2} -\frac{1}{2} | 10 \rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} | \frac{1}{2} \frac{1}{2}; \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle + \underbrace{\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \frac{1}{2} | 10 \rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} | \frac{1}{2} \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(| + - \rangle + | - + \rangle)$$

$$|1, 1\rangle = \underbrace{\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \frac{1}{2} | 11 \rangle}_{=1} | \frac{1}{2} \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle \equiv | + + \rangle$$

$$|0, 0\rangle = \underbrace{\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2}; \frac{1}{2} -\frac{1}{2} | 00 \rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} | \frac{1}{2} \frac{1}{2}; \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle + \underbrace{\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \frac{1}{2} | 00 \rangle}_{-\frac{1}{\sqrt{2}}} | \frac{1}{2} \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(| + - \rangle - | - + \rangle)$$

Darauf den Permutationsoperator angewandt, gibt es 3 mal Eigenwert +1 ( $\equiv$  symmetrisch) :

$$P_{12}|1, -1\rangle = P_{12}| - - \rangle = | - - \rangle \quad \rightarrow EW = +1$$

$$P_{12}|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(P_{12}| + - \rangle + P_{12}| - + \rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(| - + \rangle + | + - \rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(| + - \rangle + | - + \rangle) \quad \rightarrow EW = +1$$

$$P_{12}|1, 1\rangle = P_{12}| + + \rangle = | + + \rangle \quad \rightarrow EW = +1$$

und 1 mal den Eigenwert -1 ( $\equiv$  antisymmetrisch)

$$P_{12}|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(P_{12}| + - \rangle - P_{12}| - + \rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(| - + \rangle - | + - \rangle) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(| + - \rangle - | - + \rangle) \quad \rightarrow EW = -1$$

Der Spinanteil  $|\chi\rangle$  ändert sich nicht beim Anwenden des Permutationsoperators, deswegen sind das Eigenzustände zu den Eigenwerten  $\pm 1$ .

Die Wellenfunktion  $|\psi\rangle$  ist zunächst die Summe/Differenz von beiden möglichen vertauschten Zuständen:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle|\psi_2\rangle \pm |\psi_2\rangle|\psi_1\rangle)$$

In der Ortsdarstellung:

$$P_{12}\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(P_{12}\psi_1(\vec{r}_1)\psi_2(\vec{r}_2) \pm P_{12}\psi_1(\vec{r}_2)\psi_2(\vec{r}_1)) \quad (0.1)$$

$$= p \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(\vec{r}_2)\psi_2(\vec{r}_1) \pm \psi_1(\vec{r}_1)\psi_2(\vec{r}_2)) \quad (0.2)$$

Mit den Eigenwerten des Vertauschungsoperators  $p = \pm 1$ . Da wir zwei Elektronen haben, muss die gesamte Wellenfunktion antisymmetrisch sein. Wir wissen dass die Spinwellenfunktion symmetrisch oder antisymmetrisch sein kann, deshalb gibt es zwei Fälle:

|   |
|---|
| $\Psi_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} [\psi_1(\vec{r}_2)\psi_2(\vec{r}_1) - \psi_1(\vec{r}_1)\psi_2(\vec{r}_2)]\chi_{sym} & \text{Triplett} \\ [\psi_1(\vec{r}_2)\psi_2(\vec{r}_1) + \psi_1(\vec{r}_1)\psi_2(\vec{r}_2)]\chi_{antisym} & \text{Singulett} \end{cases}$ |
|---|

## LSG b)

Zu zeigen dass die Eigenwerte von  $P_{12} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{4}{\hbar^2} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \right)$  angewandt auf das  $|SM\rangle$  Zustand  $\pm 1$  sind.  
Drücke die  $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$  durch die Operatoren  $S^2, S_1^2, S_2^2$  mit bekanten Eigenwerten zu den  $|SM\rangle$  Zustand.

$$S^2 = (S_1 + S_2)^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2$$

$$\Leftrightarrow \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{2}(S^2 - S_1^2 - S_2^2)$$

Einsetzen in den Permutationsoperator und anwenden auf den Zustand  $|SM\rangle \propto |\frac{1}{2}m_1\rangle |\frac{1}{2}m_2\rangle$ :

$$P_{12}|SM\rangle = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2}{\hbar^2}(S^2 - S_1^2 - S_2^2) \right) |SM\rangle \quad (0.3)$$

$$= \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\hbar^2}S^2 - \frac{1}{\hbar^2}S_1^2 - \frac{1}{\hbar^2}S_2^2 \right) |SM\rangle \quad (0.4)$$

$$= \frac{1}{2}|SM\rangle + \frac{1}{\hbar^2}S^2|SM\rangle - \frac{1}{\hbar^2}S_1^2|\frac{1}{2}m_1\rangle|\frac{1}{2}m_2\rangle - \frac{1}{\hbar^2}S_2^2|\frac{1}{2}m_1\rangle|\frac{1}{2}m_2\rangle \quad (0.5)$$

$$= \frac{1}{2}|SM\rangle + S(S+1)|SM\rangle - \frac{3}{4}|\frac{1}{2}m_1\rangle|\frac{1}{2}m_2\rangle - \frac{3}{4}|\frac{1}{2}m_1\rangle|\frac{1}{2}m_2\rangle \quad (0.6)$$

$$= \left( \frac{1}{2} + S(S+1) - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right) |SM\rangle \quad (0.7)$$

$$= (S(S+1) - 1)|SM\rangle \quad (0.8)$$

D.h. wenn der Gesamtspin  $S = 1$  ist, dann der Eigenwert  $+1$  und für  $S = 0$  der Eigenwert  $-1$ .

## LSG c)