

Aufgabe 16: Wigner-Matrizen

Die Wigner-Matrizen $d_{m'm}^j(\beta)$ lassen sich für beliebiges j sukzessiv aus den $d_{m'm}^{\frac{1}{2}}(\beta)$ und den Clebsch-Gordan-Koeffizienten (CGKs) berechnen. Bestimmen Sie so die gesamte Wigner Matrix für $j = 1$ aus der Matrix für $j = \frac{1}{2}$,

$$d_{m'm}^{\frac{1}{2}}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & -\sin \frac{\beta}{2} \\ \sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

und den dazugehörigen CGKs.

LSG

Ein paar einleitende Worte (ausführlich in Zettil:Quantum Mechanics) die man auf die Wigner-Matrix kommt. Der Rotationsoperator $\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma)$ kann in der Basis $|j, m\rangle$ des Drehimpulses \vec{J} dargestellt werden. Der Rotationsoperator in exponentialform lautet:

$$\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha J_z} e^{-\frac{i}{\hbar} \beta J_y} e^{-\frac{i}{\hbar} \gamma J_z}$$

Unter Ausnutzung des Kommutators $[\vec{J}^2, \hat{R}(\alpha, \beta, \gamma)] = 0$, sieht man dass \vec{J}^2 den Zustand unter beliebiger Rotation nicht verändert:

$$\vec{J}^2 \hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) |j, m\rangle = \hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) \vec{J}^2 |j, m\rangle = j(j+1) \hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) |j, m\rangle$$

In den meisten Fällen verändert der Rotationsoperator den Zustandsvektor, weil sich die z-Komponente sich verändert (solange nicht um z-Achse rotiert wird) verändert sich auch $m \rightarrow m'$. Allgemein lässt sich das so aufschreiben:

$$\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) |j, m\rangle = \mathbb{1} \cdot \hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) |j, m\rangle \quad (0.1)$$

$$= \sum_{m'=-j}^j |j, m'\rangle \langle j, m' | \hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) |j, m\rangle \quad (0.2)$$

$$= \sum_{m'=-j}^j \langle j, m' | \hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) |j, m\rangle |j, m'\rangle \quad (0.3)$$

$$= \sum_{m'=-j}^j D_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) |j, m'\rangle \quad (0.4)$$

$D_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma)$ sind die Matricelemente des Rotationsoperators. Da der Rotationsoperator in der Exponentialdarstellung zweimal den J_z Operator hat und $|j, m\rangle$ auch seine Eigenzustandsvektoren sind kann die D matrix weiter vereinfacht werden:

$$D_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i(m'\alpha + m\gamma)} \underbrace{\langle j, m' | e^{-\frac{i}{\hbar} \beta J_y} |j, m\rangle}_{d_{m'm}^j(\beta)}$$

Wobei $d_{m'm}^j(\beta)$ die Wigner-Matrix ist. Schlussendlich muss noch eine Beziehung her zwischen $j = 1$ und $j_1, j_2 = \frac{1}{2}$.

$|j, m\rangle = \sum_{m_1 m_2} \langle j, j_2; m_1, m_2 | j, m \rangle |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle$, $\langle j, m' | = \sum_{m'_1 m'_2} \langle j, j_2; m'_1, m'_2 | j, m' \rangle \langle j_1, j_2; m_1, m_2 |$ und $d_{m'm}^j(\beta) = \langle j, m' | e^{-\frac{i}{\hbar} \beta J_y} |j, m\rangle$ ineinander einsetzen:

$$d_{m'm}^j(\beta) = \sum_{m_1 m_2} \sum_{m'_1 m'_2} \langle j, j_2; m_1, m_2 | j, m \rangle \langle j, j_2; m'_1, m'_2 | j, m' \rangle \quad (0.5)$$

$$\times \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | e^{-\frac{i}{\hbar} \beta J_y} |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \quad (0.6)$$

Da einzelne Drehimpulse aus verschiedenen Räumen bestehen: $J_y = J_{1y} + J_{2y}$ und $|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle = |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$ lässt sich das ganze weiter schreiben:

$$d_{m'm}^j(\beta) = \sum_{m_1 m_2} \sum_{m'_1 m'_2} \langle j_j, j_2; m_1, m_2 | j, m \rangle \langle j_j, j_2; m'_1, m'_2 | j, m' \rangle \quad (0.7)$$

$$\times \underbrace{\langle j_1, m'_1 | e^{-\frac{i}{\hbar} \beta J_{1y}} | j_1, m_1 \rangle}_{d_{m'_1 m_1}^{j_1}} \underbrace{\langle j_2, m'_2 | e^{-\frac{i}{\hbar} \beta J_{2y}} | j_2, m_2 \rangle}_{d_{m'_2 m_2}^{j_2}} \quad (0.8)$$

und somit:

$$d_{m'm}^{(j)}(\beta) = \quad (0.9)$$

$$= \sum_{m_1, m_2} \sum_{m'_1, m'_2} \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | j m \rangle \langle j_1, j_2; m'_1, m'_2 | j m' \rangle d_{m'_1 m_1}^{(j_1)}(\beta) d_{m'_2 m_2}^{(j_2)}(\beta) \quad (0.10)$$

$$d_{11}^{(1)}(\beta) = \underbrace{\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | 11 \rangle \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | 11 \rangle}_{=1} \underbrace{d_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})}(\beta) d_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})}(\beta)}_{\cos \frac{\beta}{2}} \quad (0.11)$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \cos^2 \frac{\beta}{2} \quad (0.12)$$

$$d_{1-1}^{(1)}(\beta) = \underbrace{\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | 11 \rangle \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | 1-1 \rangle}_{=1} \underbrace{d_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})}(\beta) d_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})}(\beta)}_{-\sin \frac{\beta}{2}} \quad (0.13)$$

$$= \sin^2 \frac{\beta}{2} \quad (0.14)$$