

Contents

6	Relativistische QM	2
6.0.1	QM eines freien Teilchens	3
6.0.2	Wahrscheinlichkeitserhaltung	4
6.1	Dirac Gleichung	7
6.1.1	Wahrscheinlichkeitsstrom	7
6.1.2	Elektromagnetische Wechselwirkung	8
6.1.3	Relativistische Korrekturen	9
6.1.4	Dirac Gleichung und Pauli Gl incl. relativistische Korrekturen	10
6.2	Hamilton Op. für Pauli Gl mit rel. Korrekturen	11
6.2.1	Korrekturen zum Wasserstoff spektrum	11
6.2.2	Ebene Wellen als Lösungen der freien Dirac Gl	11
6.2.2.1	Spezialfall: Teilchen in Ruhe	11
6.2.3	Lösung für Impuls ungleich 0	12
6.2.4	Lorentz Transformation	12
6.2.4.1	infinitesimale LT	12
6.2.5	Kovarianz der Dirac Gleichung	12
6.3	16 unabhängige Fermion-Bilineare	15
6.4	Bedeutung der omega Parameter	16
6.4.1	Ebene-Wellen-Lösung zu allg. Impuls	17
6.5	Der Diracsee	19
6.6	Ladungskonjugation	21

Chapter 6

Relativistische QM

Notation: Vierer-Vektoren

$$x^\mu = (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{r})$$

invariante Länge $\sqrt{x^2}$

$$x^2 = x \cdot x = x^\mu x_\mu = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu$$

Einsteinsche Summenkonvention: $\sum_{\mu=0}^3$ für jedes Paar von oberen und unteren Index
Metrischer Tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -\vec{r})$$

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu = g^{\mu\nu} x^\nu = g^\nu_\nu x^\nu$$

$$g^\nu_\nu = \delta^\nu_\nu = \begin{cases} 1, & \mu = \nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} \rightarrow g^{\mu\nu} = [g_{\mu\nu}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vierer-Impuls: $p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p})$ mit $E = \sqrt{(mc^2)^2 + (\vec{p}c)^2}$

$$p^2 = p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = \frac{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2$$

Vierer-Potential: Lorenz-Transformation $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$

$$A^\mu = (\frac{\phi}{c}, \vec{A}) \quad \rightarrow \quad A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x)$$

Strom: $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$ in E und M

Skalarprodukt für a^μ, b^μ : $a \cdot b = a^\mu b_\mu = a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$

Ableitung nach x^ν

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$$

ist kovarianter Vektor (Index unten) wegen: $\partial_\mu a \cdot x = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(a_\nu x^\nu) = a_\mu$

Entsprechend $\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right)$

d'Alebert Operator

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$$

6.0.1 QM eines freien Teilchens

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$$

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \rightarrow \left(i\hbar \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar \vec{\nabla}\right) = i\hbar \partial^\mu$$

Schrödinger Gl. für nicht relativistisches freies Teilchen (ohne Potential)

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \psi(\vec{x}, t)$$

Relativistischer Fall

- 1) $E = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2} \rightarrow$ nichtlokaler Operator
- 2) $\frac{E^2}{c^2} = m^2 c^2 + \vec{p}^2 \rightarrow -\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = m^2 c^2 \psi - \hbar^2 \vec{\nabla}^2 \psi$

$$-\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = m^2 c^2 \psi - \hbar^2 \vec{\nabla}^2 \psi$$

$$\Leftrightarrow 0 = m^2 c^2 \psi + \hbar^2 \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \psi \quad (6.1)$$

$$0 = m^2 c^2 \psi + \hbar^2 \square \psi \quad (6.2)$$

Klein Gordon Gleichung:

$$\left(\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \psi(x) = 0$$

Anwendbar auf skalare Teilchen (Spin 0) wie $\pi^+, \pi^-, \pi^0, K, H$
 Lösungen der KG-Gl. durch ebene Wellen

$$\psi_p(x) = N e^{-ip \cdot x / \hbar} = N e^{-iEt/\hbar} e^{+i\vec{p} \cdot \vec{x} / \hbar}$$

mit $p \cdot x = p^\mu x_\mu = Et - \vec{p} \cdot \vec{x}$

$$\square \psi_p(x) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi_p(x) = N \left(-\frac{i}{\hbar} p_\mu \right) \left(-\frac{i}{\hbar} p^\mu \right) e^{-ip \cdot x / \hbar} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \psi_p$$

Klein Gordon Gleichung:

$$\Rightarrow \left(-\frac{p^2}{\hbar^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi_p(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow p^2 = m^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2$$

$$\rightarrow E = \pm c \sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2}$$

Lösungen mit Negativer Energie und das Energiespektrum ist nach unten nicht beschränkt.

6.0.2 Wahrscheinlichkeitserhaltung

Kontinuitäts-Gleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu j^\mu = 0$$

mit $j^\mu = (\rho c, \vec{j})$ und $\partial_\mu = (\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla})$.

Gibt es einen erhaltenen 4-Strom für die Lösung der Klein-Gordon-Gleichung?

$$\psi^* (\square + (\frac{mc}{\hbar})^2) \psi(x) - \psi (\square + (\frac{mc}{\hbar})^2) \psi^*(x) = 0$$

$$\psi^* \square \psi(x) + \psi^*(x) (\frac{mc}{\hbar})^2 \psi(x) - \psi \square \psi^*(x) - \psi(x) (\frac{mc}{\hbar})^2 \psi^*(x) = 0$$

$$\psi^* \square \psi(x) - \psi \square \psi^*(x) + \cancel{|\psi(x)|^2 (\frac{mc}{\hbar})^2} - \cancel{|\psi(x)|^2 (\frac{mc}{\hbar})^2} = 0$$

mit $\square \psi = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi$

$$\psi^* (\partial_\mu \partial^\mu \psi) - \psi (\partial_\mu \partial^\mu \psi^*) = 0$$

$$\partial_\mu \underbrace{(\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*)}_{\propto j^\mu} = 0$$

$$j^\mu \propto (\psi^* \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \psi^*, -(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*))$$

Kandidat für Wahrscheinlichkeits Strom $\frac{2im}{\hbar} \vec{j}$ in Schrödinger Gl

$$j^\mu = \frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*)$$

$$\rightarrow j^0 = \rho c = \frac{i\hbar}{2mc} (\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t})$$

Anwendung auf stationäre Lösung: $\psi_E(x) = e^{-iEt/\hbar} \psi_E(\vec{x})$

$$\frac{\partial \psi_E}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} \psi_E, \quad \frac{\partial \psi_E^*}{\partial t} = \frac{iE}{\hbar} \psi_E^*$$

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} (\psi_E^* \frac{\partial \psi_E}{\partial t} - \psi_E \frac{\partial \psi_E^*}{\partial t}) \tag{6.3}$$

$$= \frac{i\hbar}{2mc^2} (-\psi_E^* \frac{iE}{\hbar} \psi_E - \psi_E \frac{iE}{\hbar} \psi_E^*) \tag{6.4}$$

$$= \frac{i\hbar}{2mc^2} |\psi_E(\vec{x})|^2 \frac{-2iE}{\hbar} \tag{6.5}$$

$$= \frac{E}{mc^2} |\psi_E(x)|^2 \tag{6.6}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho = \frac{E}{mc^2} |\psi_E(x)|^2}$$

$\rho < 0$ für Zustände mit $E < 0$

\Rightarrow Keine mögliche Wahrscheinlichkeitsdichte. (Ok für Zustände mit positiver Energie)

Interpretation: Zustände mit $E > 0 \Leftrightarrow$ z.B. π^+ und $E < 0 \Leftrightarrow$ z.B. π^- (Antiteilchen zum π^+)

$\rho > 0$: π^+ dominieren $\rho < 0$: π^- dominieren

$\rho \propto$ elektromagn. Ladungsdichte

$$j^\mu = |e| \frac{i\hbar}{2mc} (\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*)$$

Elektronen: Spin

\rightarrow Wellenfunktion $\psi(x)$ hat ≥ 2 Komponenten

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \dots \\ \psi_N(x) \end{pmatrix}$$

Möglichkeit: Matrixstruktur für \hat{H}

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = \hat{H} \psi(x)$$

Ansatz: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi$ mit $\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \dots \\ \psi_N(x) \end{pmatrix}$

und Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho = \sum_{i=1}^N |\psi_i|^2$

$$\Rightarrow \hat{H} \propto \frac{\partial}{\partial x^i} \propto \hat{p}_i$$

Ansatz für \hat{H}

$$\hat{H} = c(\alpha_x \hat{p}_x + \alpha_y \hat{p}_y + \alpha_z \hat{p}_z) + \beta mc^2 = c \sum_{i=1}^3 \alpha_i \hat{p}_i + \beta mc^2$$

Ebene Wellenlösung für freie Teilchen

$$\psi(x) = e^{-px/\hbar} \psi(p)$$

mit $p^2 = m^2 c^2$

$$\Rightarrow E\psi(p) = [c \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta mc^2] \psi(p)$$

$$E^2 \psi(p) = E \cdot [c \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta mc^2] \psi(p) \quad (6.7)$$

$$= [c \sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j + \beta mc^2] \cdot [c \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta mc^2] \psi(p) \quad (6.8)$$

$$= c^2 [\sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j + \beta mc] \cdot [\sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta mc] \psi(p) \quad (6.9)$$

$$= c^2 \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j \beta mc + \beta mc \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta^2 m^2 c^2 \right) \psi(p) \quad (6.10)$$

$$= c^2 \left(\sum_{i,j=1}^3 \alpha_i \alpha_j p_i p_j + \sum_{i=1}^3 (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i mc + \beta^2 m^2 c^2 \right) \psi(p) \quad (6.11)$$

$$\stackrel{!}{=} c^2 (m^2 c^2 + \vec{p}^2) \psi(p) \quad (6.12)$$

Koeffizientenvergleich:

- $\boxed{\beta^2 = 1}$
- Antikommutator: $\boxed{\{\alpha_i, \beta\} = 0}$
- $i \neq j$: z.B: $p_x p_y \{\alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x\}; \{\alpha_i, \alpha_j\} = 0$
- $i = j$: $\alpha_x^2 p_x^2 + \alpha_y^2 p_y^2 + \alpha_z^2 p_z^2 = \vec{p}^2 \Rightarrow \alpha_i^2 = 1$
 $\Rightarrow \boxed{\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}}$

- 1) \hat{p}_i, \hat{H} hermitesch $\Rightarrow \vec{\alpha}, \beta$ hermitesch
- 2) $\alpha_i^2 = 1, \beta^2 = 1 \Rightarrow$ Eigenwerte von α_i, β sind ± 1
- 3) $\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \quad | \cdot \beta$

$$\Rightarrow \alpha_i = -\beta \alpha_i \beta \Rightarrow \text{Tr}[\alpha_i] = -\text{Tr}[\beta \alpha_i \beta] = -\text{Tr}[\alpha_i \beta^2] = -\text{Tr}[\alpha_i]$$

(Info: # = Anzahl; N = Dimension der Matrix)

$$\# \text{ EW } +1 = \# \text{ EW } -1$$

$\Rightarrow N$ gerade ($N = 2, 4, \dots$)

$N = 2 \Rightarrow 3$ Pauli Matrizen. Als Kandidaten werden benötigt: 4×4 Matrizen $\Rightarrow N \geq 4 : N = 4$ funktioniert

$N = 4$: Dirac Basis: β diagonal

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i \text{ hermitesch} + \{\alpha_i, \beta\} = 0$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$A = D = 0, C = B^\dagger$$

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} A & -B \\ C & -D \end{pmatrix} \quad \beta\alpha = \begin{pmatrix} A & B \\ -C & -D \end{pmatrix}$$

$$A = D = 0 \quad C = B^\dagger$$

$$\Rightarrow \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \tau_i \\ \tau_i^\dagger & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \Leftrightarrow \tau_i \tau_j^\dagger + \tau_j \tau_i^\dagger = 2\delta_{ij}$$

Lösung $\tau_i = \sigma_i =$ Pauli Matrizen

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}; \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}}$$

6.1 Dirac Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = c(\vec{\alpha} \cdot \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \beta mc) \psi(x) \quad | \cdot \frac{\beta}{\hbar c}$$

Alternativ: kovariante Form

$$\Rightarrow i\beta \underbrace{\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t}}_{\frac{\partial}{\partial x^0}} \psi + i \underbrace{\beta \vec{\alpha}_i}_{\gamma^i} \cdot \underbrace{\vec{\nabla}_i}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \psi - \frac{mc}{\hbar} \psi = 0$$

$$\Rightarrow (i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{mc}{\hbar}) \psi = 0$$

$$\gamma^0 = \beta; \gamma^i = \beta \alpha_i$$

$$\boxed{\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi = 0}$$

Kovariante Form der Dirac Gleichung mit $\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1}_4$

$$\text{z.B. } \{\gamma^i, \gamma^j\} = \beta \underbrace{\alpha_i \beta}_{-\beta \alpha_i} \alpha_j + \beta \underbrace{\alpha_j \beta}_{-\beta \alpha_j} \alpha_i = -\{\alpha_i, \alpha_j\} = -2\delta_{ij}$$

6.1.1 Wahrscheinlichkeitsstrom

$$\psi^\dagger \cdot | \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi + \beta mc^2 \psi \quad (6.13)$$

adjungierte Dirac Gleichung:

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} = -\frac{\hbar c}{i} (\vec{\nabla} \psi^\dagger) \vec{\alpha} + \beta mc^2 \psi^\dagger \quad | \cdot \psi \quad (6.14)$$

Differenz der beiden Gleichungen 6.13 – 6.14:

$$\underbrace{i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} \psi^\dagger \right) \psi + i\hbar \psi^\dagger \left(\frac{\partial}{\partial t} \psi \right)}_{\text{Produktregel} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi)} = \underbrace{\frac{\hbar c}{i} (\psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi + (\vec{\nabla} \psi^\dagger) \vec{\alpha} \psi)}_{\text{Produktregel} = -c \vec{\nabla} (\psi^\dagger \vec{\alpha} \psi)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) = -c \vec{\nabla} (\psi^\dagger \vec{\alpha} \psi)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\psi^\dagger \psi)}_\rho + \vec{\nabla} \cdot \underbrace{(c \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi)}_{\vec{j}} = 0$$

$$\rho = \psi^\dagger \psi = \sum_i |\psi_i|^2 \geq 0$$

ρ ist positiv definierte Wahrscheinlichkeitsdichte
Kovariante Form des Wahrscheinlichkeits-Stroms

$$j^\mu = (c\rho, c\vec{j}) \quad (6.15)$$

$$= (c \underbrace{\psi^\dagger \psi}_{\equiv \rho}, c \psi^\dagger \beta \vec{\alpha} \psi) \quad (6.16)$$

$$= (c \psi^\dagger \underbrace{\beta \gamma^0}_{\mathbb{1}} \psi, c \psi^\dagger \beta \vec{\gamma} \psi) \quad (6.17)$$

$$= c \psi^\dagger \beta \gamma^\mu \psi \quad (6.18)$$

$$= c \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (6.19)$$

wobei $\bar{\psi} = \psi^\dagger \beta = \psi^\dagger \gamma^0$ der Pauli adjungierte Spinor ist.

6.1.2 Elektromagnetische Wechselwirkung

externe \vec{E}, \vec{B} Fleder $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$$\rightarrow A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A}\right)$$

minimale Subsittution:

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - eA^\mu \xrightarrow{QM} i\hbar\partial^\mu - eA^\mu = i\hbar(\partial^\mu + \frac{ie}{\hbar}A^\mu) = i\hbar D^\mu$$

Komponenten der Kovarianten Ableitung D^μ

$$i\hbar D^\mu = \left(i\hbar\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{c}\phi, \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e\vec{A}\right) \quad (6.20)$$

$$= \left(\frac{i}{c}(c\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\phi), \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e\vec{A}\right) \quad (6.21)$$

Einsetzen in die Dirac-Gleichung:

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = c\vec{\alpha}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e\vec{A}\right)\psi + \beta mc^2\psi + e\phi\psi} \quad (6.22)$$

oder ersetze in freier Dirac-Gleichung $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$

$$\boxed{(i\gamma^\mu D_\mu - \frac{mc}{\hbar})\psi = 0} \quad (6.23)$$

Diese Gleichung beschreibt Wechselwirkung eines Elektrons der Ladung e mit dem elektromagnetischen Feld.

Notation: $\vec{\alpha}\vec{p}\psi = \frac{\hbar}{i}\vec{\alpha}\vec{\nabla}\psi$

$$\text{mit } A = 1\dots 4 \quad [\vec{\alpha}\vec{p}\psi]_A = \sum_{j=1}^3 \sum_{B=1}^4 \alpha_{jAB} \frac{\hbar}{i} \nabla_j \psi_B(\vec{x}, t) = \left[\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\vec{p} \\ \vec{\sigma}\vec{p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \right]_A$$

Nichtrelativistischer Grenzfall: $E = mc^2 + E_S$ mit E_S als Schrödinger Energie.

Ansatz:

$$\psi(\vec{x}, t) = e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} \phi(\vec{x}, t) \\ \chi(\vec{x}, t) \end{pmatrix} = e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t} e^{i\frac{E_S}{\hbar}t} \begin{pmatrix} \phi_E(\vec{x}) \\ \chi_E(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Einsetzen in die Dirac-Gleichung (6.22) für Teilchen im Elektromagnetischem Feld:

$$\Rightarrow i\hbar \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\chi} \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\vec{\pi}\vec{\chi} \\ \vec{\sigma}\vec{\pi}\phi \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \phi \\ -\chi \end{pmatrix} + e\phi \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

mit $\vec{\pi} = \vec{p} - e\vec{A} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e\vec{A} = \frac{\hbar}{i}\vec{\mathcal{D}}$

$$\Rightarrow i\hbar\dot{\phi} = c\vec{\sigma}\vec{\pi}\chi + e\Phi\phi$$

$$\Rightarrow 2mc^2\chi + i\hbar\dot{\chi} - e\phi\chi = c\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi$$

$$\chi \approx \frac{1}{2mc^2} c\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi \approx \frac{mv}{2mc} \phi = \frac{1}{2} \frac{v}{c} \phi$$

($\chi = \frac{1}{2mc^2 + E_S - V} c\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi$) χ ist kleine Komponente des Dirac Spinors. Einsetzen von χ :

$$i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{c^2(\vec{\sigma}\vec{\pi})^2}{2mc^2} \phi + V\phi \quad (V = e\Phi)$$

Berechnung von $(\vec{\sigma}\vec{\pi})^2 = -\hbar^2 \underbrace{\sigma_i \sigma_j}_{\frac{1}{2}[\sigma_i, \sigma_j] + \frac{1}{2}\{\sigma_i, \sigma_j\}} D_i D_j$ mit $[\sigma_i, \sigma_j] = i\hbar^2 \epsilon_{ijk} \sigma_k$ und σ_{ij}

$$(\vec{\sigma}\vec{\pi})^2 = \vec{\pi}^2 - i\hbar^2 \epsilon_{ijk} \sigma_k \underbrace{D_i D_j}_{\frac{1}{2}[D_i, D_j]}$$

$$[D_i, D_j] = [\nabla_i - \frac{i}{\hbar} e A_i, \nabla_j - \frac{i}{\hbar} e A_j] = -\frac{i}{\hbar} e \underbrace{(\nabla_i A_j)}_{\vec{\nabla} \times \vec{A}} - \underbrace{(\nabla_j A_i)}_{\vec{\nabla} \times \vec{A}}$$

$$\Rightarrow (\vec{\sigma}\vec{\pi})^2 = \vec{\pi}^2 - \frac{1}{2} \hbar e \vec{\sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) 2 = \vec{\pi}^2 - 2e \vec{S} \vec{B} \quad (\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma})$$

$$\rightarrow i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\pi^2}{2m} \phi - \frac{e}{2m} 2\vec{S} \vec{B} \phi + V \phi$$

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} \phi - \frac{e}{2m} 2\vec{S} \vec{B} \phi + V \phi} \quad \text{Pauli Gleichung}$$

Schwaches homogenes B -Feld: $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$

$$\frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} \approx \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e}{2m} \vec{B} \vec{L}$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\vec{p}^2}{2m} \phi - \frac{e}{2m} \vec{B} (\vec{L} + 2\vec{S}) \phi + V \phi$$

Magnetisches Moment des Elektrons: $\vec{\mu} = \frac{e}{2m} (\vec{L} + 2\vec{S}) \quad g = 2$ für geladenes Dirac-Fermion

6.1.3 Relativistische Korrekturen

Energieeigenzustände: $\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} (\vec{x}, t) = e^{-E_s t / \hbar} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} (\vec{x}, t)$

Dirac Gleichung ist äquivalent zu

$$(2mc^2 + E_S - V)\chi = c\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi$$

$$E_S \phi = c\vec{\sigma}\vec{\pi}\chi + V\phi$$

$$\Rightarrow \chi = \frac{1}{2mc^2 + E_S - V} c\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi \quad (6.24)$$

$$= \frac{1}{2mc} \frac{1}{1 + \frac{E_S - V}{2mc^2}} \vec{\sigma}\vec{\pi}\phi \quad (6.25)$$

$$\approx \frac{1}{2mc} \left(1 - \frac{E_S - V}{2mc^2} + \dots\right) \vec{\sigma}\vec{\pi}\phi \quad (6.26)$$

$$(E_S - V)\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi = \vec{\sigma}\vec{\pi}(E_S - V)\phi + \underbrace{\vec{\sigma} [E_S - V, \vec{\pi}]}_{[\vec{\pi}, V] = \frac{\hbar}{i} (\vec{\nabla} V)} \phi$$

Einsetzen in $E_S \phi = \dots$

$$(E_S - V)\phi = \frac{(\vec{\sigma}\vec{\pi})^2}{2m} \phi - \frac{\vec{\sigma}\vec{\pi}}{4m^2 c^2} \left(\frac{(\vec{\sigma}\vec{\pi})^3}{2m} + \vec{\sigma} \frac{\hbar}{i} (\vec{\nabla} V) \right) \phi$$

Spezialfall:

- $V = V(r)$ sphärisch symmetrisch $\Rightarrow \vec{\nabla}V = \vec{r}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}$
- $\vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{\pi} = \vec{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \Rightarrow (\vec{\sigma}\vec{\pi})^2 = \vec{p}^2$

$$\Rightarrow E_S\phi = \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + V\right)\phi - \frac{\hbar}{i}\frac{1}{4m^2c^2} \underbrace{\sigma_i\sigma_j}_{i\epsilon_{ijk}\pi_k + \sigma_{ij}} p_i r_j \frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\phi$$

$$E_S\phi = \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + V\right)\phi - \hbar\frac{1}{4m^2c^2}\vec{\sigma}(\vec{r}\times\vec{p})\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\phi + \frac{\hbar^2}{4m^2c^2}\left((\nabla^2V) + \underbrace{(\vec{\nabla})\cdot\vec{\nabla}}_{\text{nicht selbst adjungiert}}\right)\phi$$

Interpretation:

- $-\frac{p^4}{8m^3c^2}$ relativistischer Beitrag zur kin. Energie
 $E = \sqrt{(mc^2)^2 + p^2c^2} = mc^2\sqrt{1 + \frac{p^2}{(mc)^2}} = mc^2(1 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{m^2c^2} - \frac{1}{8}\frac{p^4}{m^4c^4} + \dots) = mc^2 - \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{8}\frac{p^4}{m^3c^2}$
- $\hbar\frac{1}{4m^2c^2}\vec{\sigma}(\vec{r}\times\vec{p})\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\phi = \frac{1}{2m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\vec{L}\vec{S}\phi = H_{LS}$ Korrekte Spin-Bahn Kopplung, inclusive Thomas Präzessionsfaktor $\frac{1}{2}$

6.1.4 Dirac Gleichung und Pauli Gl incl. relativistische Korrekturen

$$i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t}H_\phi\phi$$

mit

$$H_\phi = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V + H_r + H_{LS} + \tilde{H}_D$$

$$H_r = -\frac{1}{8m}\left(\frac{\vec{p}^2}{2m}\right)^2$$

$$H_{LC} = \frac{1}{2m^2c^2}\frac{1}{\gamma}\frac{dV}{d\gamma}\vec{L}\cdot\vec{S}$$

$$\tilde{H}_D = \frac{\hbar^2}{4m^2c^2}((\nabla^2V) + (\vec{\nabla}V)\cdot\vec{\nabla})$$

$\cdot\vec{\nabla})$ nicht hermitesch

Problem: Wahrscheinlichkeits-Dichte ist

$$\rho = \frac{j^0}{c} = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi = \sum_{i=1} |\psi_i|^2 \quad (6.27)$$

$$= |\phi|^2 + |\chi|^2 \quad (6.28)$$

$$= |\phi|^2 + \left|\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{2mc}\phi\right|^2 \quad (6.29)$$

$$= |\phi|^2 + \phi^\dagger \frac{\vec{p}^2}{4m^2c^2}\phi \approx \underbrace{\left(1 + \frac{\vec{p}^2}{8m^2c^2}\right)}_{\phi} |\phi|^2 \quad (6.30)$$

Übergang zu

$$\phi = \Omega\phi = \left(1 + \frac{\vec{p}^2}{8m^2c^2} + \dots\right)\phi$$

Foldy-Wouthuysen Transformation. (Details: Bjorken-Drell relativ. QM)

Ersetze $E_S \phi = H_\phi \phi$ durch $E_S \phi = \underbrace{\Omega H_\phi \Omega^{-1}}_H \underbrace{\Omega \phi}_\phi$

$$H = (1 + \frac{\vec{p}^2}{8m^2 c^2}) H_\phi (1 - \frac{\vec{p}^2}{8m^2 c^2}) \quad (6.31)$$

$$= H_\phi + [\frac{\vec{p}^2}{2m^2 c^2}, H_\phi] + \dots = H_\phi + [\frac{\vec{p}^2}{2m^2 c^2}, V] + \dots \quad (6.32)$$

$$\text{NR: } [\frac{\vec{p}^2}{2m^2 c^2}, V] = -\frac{\hbar^2}{8m^2 c^2} \underbrace{[\nabla_i \nabla_i, V]}_{\nabla_i [\nabla_i, V] + [\nabla_i, V] \nabla_i} = [(\nabla^2 V) + 2(\nabla, V) \nabla_i]$$

6.2 Hamilton Op. für Pauli Gl mit rel. Korrekturen

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V + H_r + H_{LS} + H_D$$

mit Darwin-Term $H_D = \frac{\hbar^2}{8m^2 c^2} (\nabla^2 V)$

6.2.1 Korrekturen zum Wasserstoff spektrum

$$E_n^{(0)} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2a_0 n^2}$$

$$\Delta E_n^{(1)} = \alpha^2 E_n^{(0)} \frac{1}{n} (\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n})$$

Aufspaltung von $2p_{\frac{1}{2}}$ $2p_{\frac{3}{2}}$
gleiche Energie für $2s_{\frac{1}{2}}$ $2p_{\frac{1}{2}}$

6.2.2 Ebene Wellen als Lösungen der freien Dirac Gl

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}) \psi(x) = 0$$

Ebene Welle als Ansatz $\psi = e^{-px/\hbar} w(p)$ mit $w(p)$ -Spinor im Impulsraum

$$i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi(x) = i\gamma^\mu (-\frac{ip_\mu}{\hbar}) \psi(x) \quad (6.33)$$

$$= \frac{1}{\hbar} \gamma^\mu p_\mu \psi(x) = \frac{mc}{\hbar} \psi(x) \quad (6.34)$$

Notation: $\gamma^\mu p_\mu = \not{p}$

$$\boxed{(\not{p} - mc)w(p) = 0}$$

6.2.2.1 Spezialfall: Teilchen in Ruhe

$$p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{0})$$

$$\rightarrow \not{p} = \frac{E}{c} \gamma^0 = \frac{E}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{E}{c} - mc & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{c} - m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E}{c} - mc & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{E}{c} - mc \end{pmatrix} w(\vec{p}) = 0$$

4 Lösungen zu 2EW

$$E = +mc^2 : w_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$E = -mc^2 : w_3(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_4(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow Lösungen mit negativer Energie \rightarrow Existenz von Positronen.

6.2.3 Lösung für Impuls ungleich 0

1) Matrixgl. $\not{p}w = mcw$ lösen

2) Lorentztransformation von Inertialsystem IS (Teilchen in Ruhe) in IS' ($\vec{p} \neq 0$)

6.2.4 Lorentz Transformation

$x' = \Lambda x$ mit $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$

Bsp: Boost in z-Richtung: $z' = \gamma(z - vt)$, $t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}z)$, $x' = x$, $y' = y$

LT erhält relativ. Länge

$$x'x' = g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu = \underbrace{\Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma g_{\mu\nu}}_{g_{\rho\sigma}} x^\rho x^\sigma = x \cdot c = x^\rho x^\sigma g_{\sigma\rho}$$

Def. Eigenschaft einer LT

$$\Lambda^\rho_\mu \Lambda^\mu_\sigma = g^\rho_\sigma = \delta^\rho_\sigma$$

oder $(\Lambda^{-1})^\rho_\mu = \Lambda^\rho_\mu$

$\Rightarrow \det \Lambda = \pm 1$ (verallgemeinerung von orthogonalen Transf)

6.2.4.1 infinitesimale LT

Mit w^ρ_μ infinitesimal

$$\Lambda^\rho_\mu = g^\rho_\mu + w^\rho_\mu$$

$$\Lambda^\rho_\mu \Lambda^\mu_\sigma = (g^\rho_\mu + w^\rho_\mu)(g^\mu_\sigma + w^\mu_\sigma) \quad (6.35)$$

$$g^\rho_\sigma = g^\rho_\sigma + \underbrace{w^\rho_\sigma + w^\sigma_\rho}_{=0} + \dots \quad (6.36)$$

$$\rightarrow w_{\sigma\rho} + w_{\rho\sigma} = 0, \quad \begin{pmatrix} 0 & w_{01} & w_{02} & w_{03} \\ -w_{01} & 0 & w_{12} & w_{13} \\ & & 0 & w_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6 reelle freie Parameter \Rightarrow 6 Generatoren

\vec{J} (Drehungen) 3 w_{ij} \vec{K} (Booster) 3 w_{oi}

6.2.5 Kovarianz der Dirac Gleichung

inertialsystem:

$$\begin{array}{cc} \text{IS} & \text{IS'} \\ x^\mu & x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \end{array}$$

$$(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{mc}{\hbar})\psi(x) = 0 \quad (i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - \frac{mc}{\hbar})\psi'(x) = 0$$

Zu zeigen: Es gibt zu jeder LT Λ eine lineare Abbildung $S(\Lambda)$ der Spinoren: $\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x^1)$

Die Menge $\{S(\Lambda)\}$ bilden Darstellung der Lorentzgruppe

$$S(\Lambda_1 \Lambda_2) = S(\Lambda_1)S(\Lambda_2) \Rightarrow S(\mathbb{1}) = \mathbb{1}, \quad S(\Lambda^{-1}) = (S(\Lambda))^{-1}$$

$$\psi(x) = S(\Lambda^{-1})\psi'(x')$$

$$S(\Lambda_1)(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{mc}{\hbar})S(\Lambda^{-1})\psi'(x') = 0$$

$$\Leftrightarrow iS(\Lambda_1)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1}) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^\mu}}_{\Lambda^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}} \psi'(x') = 0$$

NR:

$$x'^\nu = \Lambda^\nu_\rho x^\rho$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \underbrace{\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}}_{\Lambda^\nu_\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu}$$

ist äquivalent zur Dirac Gl in IS'

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1})\Lambda^\nu_\mu = \gamma^\nu$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Lambda^\nu_\mu \gamma^\mu = S(\Lambda^{-1})\gamma^\nu S(\Lambda^{-1})}^*$$

Betrachte infinitesimalen Fall:

$$\Lambda^\nu_\mu = g^\nu_\mu + \omega^\nu_\mu$$

$$S(\Lambda) = \mathbb{1} - \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}$$

mit 4x4 Matrizen $\sigma_{\alpha\beta} = -\sigma_{\beta\alpha}$ (6 Matrizen)

$$S(\Lambda^{-1}) = \mathbb{1} - \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}$$

Einsetzen in *: Term linear in $\omega^{\mu\nu}$ gilt für alle $\omega^{\alpha\beta} = -\omega^{\beta\alpha}$

$$\underbrace{\omega^\nu_\mu \gamma^\mu}_{\omega^{\alpha\beta} \frac{1}{2}(g^\nu_\alpha \gamma_\beta - g^\nu_\beta \gamma_\alpha)} = -\frac{i}{4}\omega^{\alpha\beta}(\gamma^\nu \sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta} \gamma^\nu)$$

$$\Rightarrow \boxed{[\gamma^\nu, \sigma_{\alpha\beta}] = 2i(g^\nu_\alpha \gamma_\beta - g^\nu_\beta \gamma_\alpha)}$$

Lösung für $\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]$

Bew:

$$\frac{2}{i}[\gamma^\nu, \sigma_{\alpha\beta}] = \gamma^\nu(\gamma_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma_\alpha) - (\gamma_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma_\alpha)\gamma^\nu + \gamma_\alpha \gamma^\nu \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma^\nu \gamma_\alpha - \gamma_\alpha \gamma^\nu \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma^\nu \gamma_\alpha \quad (6.37)$$

$$= 2 \cdot 2g^\nu_\alpha \gamma_\beta - 2 \cdot 2g^\nu_\beta \gamma_\alpha \quad (6.38)$$

$$= \frac{2}{i}2i(g^\nu_\alpha \gamma_\beta - g^\nu_\beta \gamma_\alpha) \quad (6.39)$$

$\Rightarrow \sigma_{\alpha\beta}$ sind Generatoren für Spinordarstellung der LG

$$S(g + \omega) = 1 + \frac{1}{8}[\gamma_\nu, \gamma_\nu]\omega^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}$$

mit $\omega^{\mu\nu}$ endlich

Frage: Ist $j^\mu = c\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ mit $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ ein 4-Vektor?

Transformation von $\bar{\psi}$:

$$\psi'(x')^\dagger = (S(\Lambda)\psi(x))^\dagger = \psi^\dagger(x)S^\dagger(\Lambda) = \psi^\dagger(x)e^{+\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^\dagger = \frac{i}{2}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]^\dagger = -\frac{i}{2}[\gamma_\beta^\dagger, \gamma_\alpha^\dagger] = \frac{i}{2}[\gamma_\alpha^\dagger, \gamma_\beta^\dagger]$$

$$\gamma_0^\dagger = \gamma_0 = \gamma^0\gamma_0\gamma^0$$

$$\vec{\gamma}^\dagger = (\beta\vec{\alpha})^\dagger = \vec{\alpha}\beta = \beta \underbrace{(\beta\vec{\alpha})}_{\vec{\gamma}}\beta = \gamma^0\vec{\gamma}\gamma^0$$

Durch eine Gleichung zusammenfassen:

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^\dagger = \frac{i}{2}[\gamma^0\gamma_\alpha\gamma^0, \gamma^0\gamma_\beta\gamma^0] = \gamma^0\sigma_{\alpha\beta}\gamma^0$$

wegen $\gamma^0 = 1$

$$\Rightarrow S^\dagger(\Lambda) = e^{\gamma^0 A \gamma^0} \quad (6.40)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{(\gamma^0 A \gamma^0)^n}_{\gamma^0 A^n \gamma^0} \quad (6.41)$$

$$= \gamma^0 A \gamma^0 \quad (6.42)$$

$$= \gamma^0 e^{+\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}} \gamma^0 \quad (6.43)$$

$$= \gamma^0 S(\Lambda)^{-1} \gamma^0 \quad (6.44)$$

mit $A = \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}$

$$\boxed{S^\dagger(\Lambda) = \gamma^0 S(\Lambda^{-1}) \gamma^0}$$

$$\bar{\psi}'(x') = (\bar{\psi}'(x'))^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger(x) \psi^0 \psi^0 \gamma^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \bar{\psi}(x) \overbrace{\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0}^{S(\Lambda^{-1})}$$

LT von $j^\mu c \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$

$$j^{\mu'}(x') = c \bar{\psi}'(x') \gamma^\mu \psi'(x') = c \bar{\psi}(x) \underbrace{S(\Lambda^{-1}) \gamma^\mu S(\Lambda)}_{\Lambda^\mu_\alpha \gamma^\alpha} \psi(x) \quad (6.45)$$

$$= \Lambda^\mu_\alpha (c \bar{\psi}'(x') \gamma^\alpha \psi(x)) = \Lambda^\mu_\alpha j^\alpha(x) \quad (6.46)$$

$\Rightarrow j^\mu(x)$ ist 4-Vektorfeld

$$j^\mu = (c\rho, \vec{j})$$

Kontinuitätsgleichung $\frac{1}{c} \frac{\partial(c\rho)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu j^\mu = 0$

Andere Bilineare: z.B.

$$\rho(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = \bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}'(x')\gamma^0\psi'(x') = \bar{\psi}'(x')S(\Lambda^{-1})S(\Lambda)\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\psi(x) = \rho(x)$$

$\Rightarrow \rho(x)$ ist ein Skalares Feld

Allgemeiner Fall: $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$ mit Γ 4x4 Matrix

6.3 16 unabhängige Fermion-Bilineare

Gute Basis der Γ :

$$\Gamma_S = 1, \quad \Gamma_\mu^\nu = \gamma_\mu, \quad \Gamma_{\mu\nu}^T = \sigma_{\mu\nu}$$

$$\Gamma_P = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^5, \quad \Gamma_\mu^A = \gamma_\mu\gamma_5$$

$$\bar{\psi}(x) = \Gamma\psi(x)$$

Γ große Gamma Matrizen, 16 lin. unabh. 4x4-Matrizen

$$T^{\mu\nu} = \bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)$$

$$T'^{\mu\nu} = \bar{\psi}(x) \underbrace{S^{-1}(\Lambda) \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] S(\Lambda)}_{\Lambda^\mu_\rho \gamma^\rho} \psi(x) \quad (6.47)$$

$$= \frac{i}{2} [\underbrace{S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda)}_{\Lambda^\mu_\rho \gamma^\rho}, \underbrace{S^{-1}(\Lambda) \gamma^\nu S(\Lambda)}_{\Lambda^\nu_\sigma \gamma^\sigma}]$$

$$= \Lambda^\mu_\rho \gamma^\rho \Lambda^\nu_\sigma \gamma^\sigma \bar{\psi} \sigma^{\rho\sigma} \psi \quad (6.48)$$

$$= \Lambda^\mu_\rho \gamma^\rho \Lambda^\nu_\sigma \gamma^\sigma T^{\rho\sigma} \quad (6.49)$$

→ Trasformiert sich wie ein Tensor

Was ist mit γ_5 - Termen?

verwende $\gamma_5 \gamma^\mu = -i\gamma^2\gamma^0\gamma^1\gamma^3\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma_5$

z.B. $\gamma_5 \gamma^2 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^2 = -i\gamma^2\gamma^0\gamma^1\gamma^3 = -\gamma^2\gamma_5$

$$\Rightarrow \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$$

$$\Rightarrow [\gamma_5, \sigma^{\mu\nu}] = 0 \Rightarrow [\gamma_5, S(\Lambda)] = 0$$

$$\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x) \equiv \text{Skalar}$$

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(x) \equiv \text{Vektor}$$

Pseudo-/Axial wegen Paritätstransformation (spezielle Lorenztrasformation)

$$x' = \Lambda x \quad x = (ct, \vec{x}) = x^\mu \quad x' = (ct, -\vec{x}) = x_\mu$$

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{\mu\nu}$$

Transformation von Spinoren: brauchen 4x4 Matrix P

$$P^{-1}\gamma P = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu = \gamma_\mu$$

Bei Spinoren:

$$\psi'(x') = P\psi(x) = \gamma^0\psi(x)$$

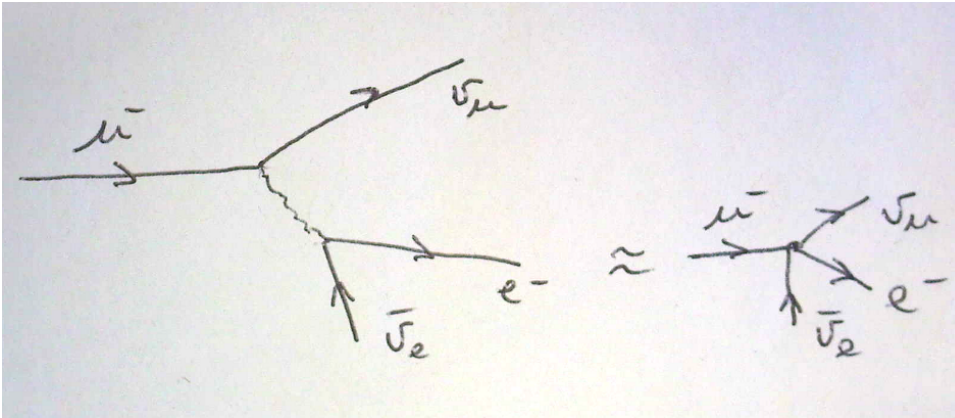
$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)P^{-1} = \bar{\psi}(x)\gamma^0$$

$$\Rightarrow P^{-1}\gamma_5 P = \gamma^0\gamma_5\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^0\gamma_5 = -\gamma_5$$

$\Rightarrow \bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$ ist ungerade und Permutation.

Anwendung: Paritätsverletzung in der schwachen Wechselwirkung. \Rightarrow z.B. μ^- -Zerfall

$$\mu^-(P) \rightarrow \nu_\mu(P_i) + e^-(k_1) + \bar{\nu}_e(k_2)$$



$$T = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \underbrace{\bar{\psi}(P_2)\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi(P_1)}_{J^{\text{myon}}} \underbrace{\bar{\psi}(k_1)\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi(k_2)}_{J^{\text{elektron}}}$$

$J^{\text{myon}} \cdot J^{\text{elektron}} = \text{Lorenz-Skalar?} \rightarrow \text{Parität:}$

$$T \rightarrow T' = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\psi}(P_2) \underbrace{P^{-1}\gamma^\mu(1-\gamma_5)P}_{\gamma^\mu(1+\gamma_5)} \psi(P_1) \bar{\psi}(k_1) \underbrace{P^{-1}\gamma_\mu(1-\gamma_5)P}_{\gamma_\mu(1+\gamma_5)} \psi(k_2) \neq T$$

β -Zerfall: sehr ähnlich, jedoch Koeffizienten c_μ, c_λ für Nukleonen

6.4 Bedeutung der omega Parameter

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{1}{4}(\omega^{12}\sigma_{12} + \omega^{22}\sigma_{21})} = e^{-\frac{i}{2}\omega^{12}\sigma_{12}}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma_{12} &= \frac{1}{2} \frac{i}{2} [\gamma_1, \gamma_2] = \frac{i}{4} \underbrace{\left[\begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \right]}_{= \begin{pmatrix} -[\sigma_1, \sigma_2] & 0 \\ 0 & -[\sigma_1, \sigma_2] \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_3}{2} \end{pmatrix} = \frac{S_z}{\hbar} \end{aligned}$$

mit $\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ allgemeiner:

$$\frac{1}{2} \sum_k = \frac{S_k}{\hbar} = \frac{1}{4} \epsilon^{ijk} \sigma_{ij} = \frac{1}{2} \gamma_5 \alpha_k$$

ω_1 und ω_3 sind EZ von S_z zu $+\frac{\hbar}{2}$; ω_2 und ω_4 sind EZ von S_z zu $-\frac{\hbar}{2}$;

Jetzt boost in Bezugssystem mit Geschwindigkeit \vec{v}

Dazu

$$\omega^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & +n_1 & +n_2 & +n_3 \\ -n_1 & 0 & 0 & 0 \\ -n_2 & 0 & 0 & 0 \\ -n_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{n}^2 = 1$$

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}} = e^{-\frac{i}{2}\sum_j \omega^{0j}\sigma_{0j}} = e^{-\frac{1}{2}\omega\vec{n}\vec{\alpha}}$$

mit $\sum_j \omega^{0j}\sigma_{0j} = \omega\vec{n}\frac{i}{2}[\beta, -\beta\vec{\alpha}]$

Verschiebung von $\omega^{\mu\nu}$ und \vec{v}

$$\Lambda^\mu{}_\nu : \quad \Lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(g + \frac{\omega}{N}\right)^N = \exp \left\{ \omega \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & +n_1 & +n_2 & +n_3 \\ -n_1 & 0 & 0 & 0 \\ -n_2 & 0 & 0 & 0 \\ -n_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_I \right\}$$

Spezialfall $n_1 = 1, n_2 = n_3 = 0$

$$I^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad I^3 = I; \quad etc.$$

$$\Lambda = e^{\omega I} = \cosh(I\omega) + \sinh(I\omega) = \begin{pmatrix} \cosh\omega & -\sinh\omega & 0 & 0 \\ -\sinh\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vergleiche $x'^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu x^\mu$

$$x^{0'} = \cosh\omega(x^0 - \tanh\omega x') = \gamma(ct - \frac{v}{2}x)$$

$$x'' = \cosh\omega(x' - \tanh\omega x^0) = \gamma(x - \frac{v}{2}ct)$$

$$\Rightarrow \tanh\omega = \frac{v}{c} = \frac{|\vec{p}|^2}{E}$$

$$\cosh\omega = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E}{m^2}$$

\Rightarrow Allgemeiner Fall $\vec{n} = \hat{v}$; $\tanh\omega = \frac{v}{c}$

$$\text{Rapidität} = \frac{1}{2} \ln \frac{E + |\vec{p}|c}{E - |\vec{p}|c} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \tanh\omega}{1 - \tanh\omega} = \frac{1}{2} \ln \frac{\cosh\omega + \sinh\omega}{\cosh\omega - \sinh\omega} = \frac{1}{2} \ln \frac{e^\omega}{e^{-\omega}} = \omega$$

6.4.1 Ebene-Wellen-Lösung zu allg. Impuls

$$(i\not{\partial} - \frac{mc}{\hbar})\psi(x) = 0$$

Lösung mit $\psi(x) = e^{-i\frac{E\vec{x}}{\hbar}} \omega(\vec{p})$
 \vec{p} in Ruhe

$$E = +cm^2 \quad \omega_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E = -cm^2 \quad \omega_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_4(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Besser für Teilchenwellenfunktionen immer $E > 0$, d.h.

$$p^\mu = (\frac{E}{2}, \vec{p}) = (+\sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2}, \vec{p})$$

Lsg pos. Energie $\psi(x) = e^{-i\frac{p_x}{\hbar}} \omega_i(\vec{p})$ mit $i=1,2$

Lsg neg. Energie $\psi(x) = e^{+i\frac{p_x}{\hbar}} \omega_i(\vec{p})$ mit $i=3,4$

$$\Rightarrow (\not{p} - mc)\omega_i(\vec{p}) = 0 \quad i = 1, 2$$

$$\Rightarrow (\not{p} + mc)\omega_i(\vec{p}) = 0 \quad i = 3, 4$$

Jetzt $\omega_i(\vec{p})$ durch boost von $\omega_i(0)$ entlang der \vec{p} -Richtung:

ungestricheltes System = Ruhesystem des Teilchens gestricheltes System = Teilchen bewegt sich in \vec{p} -Richtung

\Rightarrow boost in $-\vec{p}$ -Richtung im Teilchen in Bewegung zu setzen

$$\Rightarrow \omega_\nu(\vec{p}) = S(\Lambda)\omega_\nu(0) = e^{\frac{1}{2}\omega\hat{p}\vec{\alpha}}\omega_\nu(0)$$

Diese $\omega_\nu(\vec{p})$ ist der Spinor der Elektornen mit Impuls \vec{p} und Spin in Ruhesystem in $\pm z$ -Richtung beschreibt

$$\hat{p}\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{p}\vec{\sigma} \\ \hat{p}\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\hat{p}\vec{\alpha})^2 = \begin{pmatrix} (\hat{p}\vec{\sigma})^2 & 0 \\ 0 & (\hat{p}\vec{\sigma})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{2}\omega\hat{p}\vec{\alpha}} = \cosh\frac{\omega}{2}\mathbb{1} + \sinh\frac{\omega}{2}(\hat{p}\vec{\alpha})$$

$$\cosh\frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cosh\omega}{2}} = \sqrt{\frac{1 + E/mc^2}{2}} = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}}$$

$$\sinh\frac{\omega}{2} = \sqrt{\cosh^2\frac{\omega}{2} - 1} = \sqrt{\frac{E - mc^2}{2mc^2}} = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2} \frac{(E - mc^2)(E + mc^2)}{(E + mc^2)}} = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \frac{|\vec{p}|c}{E + mc^2}$$

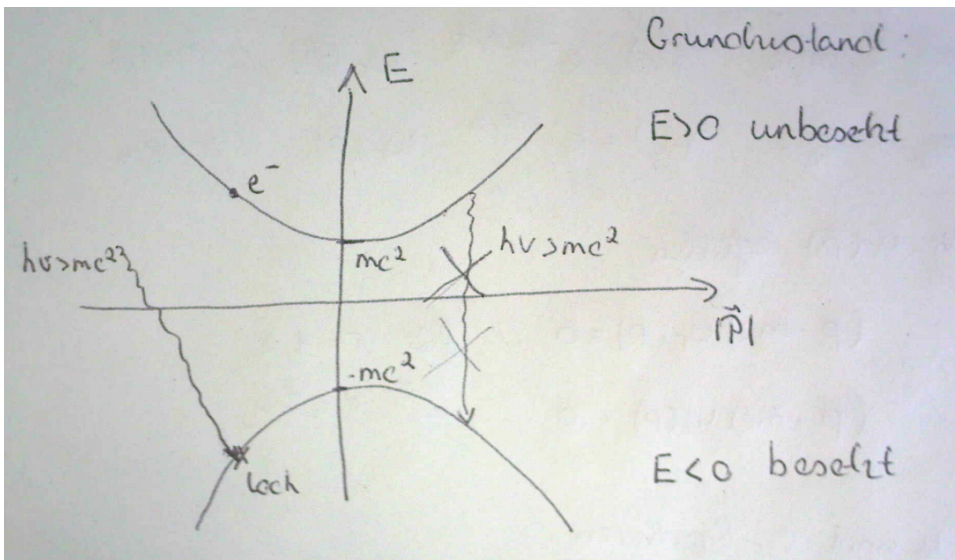
$$S(\Lambda) = e^{\frac{1}{2}\omega\hat{p}\vec{\alpha}} = \cosh\frac{\omega}{2}\left(\mathbb{1} + \frac{c\hat{p}\vec{\alpha}}{E + mc^2}\right) \quad (6.50)$$

$$= \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{cp_+}{E + mc^2} & \frac{cp_-}{E + mc^2} \\ 0 & 1 & \frac{cp_+}{E - mc^2} & -\frac{cp_-}{E + mc^2} \\ \frac{cp_z}{E + mc^2} & \frac{c(p_x - ip_y)}{E + mc^2} & 1 & 1 \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{E + mc^2} & -\frac{cp_z}{E + mc^2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.51)$$

$$= (\omega_1(\vec{p}), \omega_2(\vec{p}), \omega_3(\vec{p}), \omega_4(\vec{p})) \quad (6.52)$$

mit $p_\pm = p_x \pm ip_y$

6.5 Der Diracsee



Grundzustand:

$E > 0$ unbesetzt

$E < 0$ alle besetzt \Rightarrow Pauli Prinzip verbietet Übergänge von $E > 0 \rightarrow E < 0$

Elektron: Zustand mit $E > mc^2$, Ladung $-|e|$, Spin S_z

Loch: es fehlt Elektron mit $E < 0$

Gegenüber Grundzustand: Energieerhöhung um $-E = +\sqrt{m^2c^4 + (\vec{p}c)^2}$

Ladung $+|e|$ Spin $-S_z$

\rightarrow Positronen mit positiver Ladung $E > 0$

Lösungen der Dirac Gl: $E = p^0 = +\sqrt{m^2c^4 + (\vec{p}c)^2}$

pos. Energie: $\psi(x) = e^{-ipx/\hbar} w_r(\vec{p})$ mit $r = 1, 2$

neg. Energie: $\psi(x) = e^{+ipx/\hbar} w_r(\vec{p})$ mit $r = 3, 4$

Die $w_r(\vec{p})$ erfüllen

$$(\not{p} - mc)w_r(\vec{p}) = 0 \quad \text{für } r = 1, 2$$

$$(\not{p} + mc)w_r(\vec{p}) = 0 \quad \text{für } r = 3, 4$$

u und v Spinoren

Ruhesystem des e^\pm : $\vec{p}^\mu = (mc, \vec{0})$ 4 Impuls

$\vec{S}^\mu = (0, \vec{S})$ ($\vec{S}^2 = 1$ \vec{S} Quant. achse)

Boost in IS in dem $p^0 = +\sqrt{(mc^2)^2 + (\vec{p}c)^2} \quad : \quad \Lambda_\nu^\mu$

$$p^\mu = \Lambda_\nu^\mu \bar{p}^\nu, \quad s^\nu = \Lambda_\nu^\mu \bar{s}^\nu$$

$$\Rightarrow p^2 = m^2c^2, \quad p \cdot s = \bar{p} \cdot \bar{s} = 0, \quad s^2 = -1$$

$$e^- : \quad \psi(x) = e^{-ipx/\hbar} u(p, \pm s)$$

$$e^+ : \quad \psi(x) = e^{+ipx/\hbar} v(p, \pm s)$$

Für $\vec{S} = \hat{z}$:

Elektron:

$$w_1(\vec{p}) = u(p, +s)$$

$$w_2(\vec{p}) = u(p, -s)$$

Positron:

$$w_3(\vec{p}) = v(p, -s)$$

$$w_4(\vec{p}) = v(p, +s)$$

Normierung der u, v $\epsilon, \epsilon' = \pm 1$

$$\bar{u}(p, \epsilon s) u(p, \epsilon' s) \stackrel{L.I.}{=} \bar{u}(\bar{p}, \epsilon \bar{s}) u(\bar{p}, \epsilon' \bar{s}) = w_{r(\epsilon)}^+(\vec{0}) \gamma^0 w_{r'(\epsilon')}(0) = \delta_{\epsilon \epsilon'}$$

$$\bar{u}(p, \epsilon s) v(p, \epsilon' s) = 0$$

$$\bar{v}(p, \epsilon s) v(p, \epsilon' s) = -\delta_{\epsilon' \epsilon} \quad \text{wegen } \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vollständigkeit

Jeder Spinor kann als Linearkombination von $u(p, s), u(p, -s), v(p, s), v(p, -s)$ geschrieben werden.

$$\Rightarrow \sum_{\epsilon'} u_A(p, \epsilon' s) \bar{u}_B(p, \epsilon' s) = \left(\frac{\not{p} + mc}{2mc} \right)_{AB} = (\Lambda_+(p))_{AB}$$

Bew: Angewendet auf u, v Spinoren, geben beide Matrizen gleiches Ergebnis

$$\frac{\not{p} + mc}{2mc} u(p, \epsilon s) = \frac{\not{p} - mc + 2mc}{2mc} u(p, \epsilon s) = u(p, \epsilon s)$$

$$\frac{\not{p} + mc}{2mc} v(p, \epsilon s) = 0$$

Andererseits

$$\sum_{\epsilon'} u(p, \epsilon' s) \underbrace{\bar{u}(p, \epsilon s) u(p, \epsilon s)}_{\delta_{\epsilon' \epsilon}} = u(p, \epsilon s)$$

$$\sum_{\epsilon} u(p, \epsilon' s) \underbrace{\bar{u}(p, \epsilon' s) v(p, \epsilon s)}_{=0} = 0$$

Analog für v Spinoren

$$\sum_{\epsilon'} u_A(p, \epsilon' s) \bar{u}_B(p, \epsilon' s) = \left(\frac{\not{p} - mc}{2mc} \right)_{AB}$$

$$\text{denn } \sum_{\epsilon'} v(p, \epsilon' s) \underbrace{\bar{v}(p, \epsilon' s) v(p, \epsilon s)}_{-\delta_{\epsilon' \epsilon}} = -v(p, \epsilon s)$$

$$\left(\frac{\overbrace{\not{p}}^{-mc} - mc}{2mc} \right) v(p, \epsilon s) = -v(p, \epsilon s)$$

$\Lambda_+(p)$ ist Projektor auf Zustände pos. Energie e^-

$\Lambda_-(p)$ ist Projektor auf Zustände neg. Energie e^+

Beweis: z.Z: $\Lambda_{\pm}^2 = \Lambda_{\pm}$, $\Lambda_+ \Lambda_- = 0$, $\Lambda_+ + \Lambda_- = \mathbb{1}$ mit $\not{p}^2 = p^2$

$$\Lambda_{\pm} = \frac{mc \pm \not{p}}{2mc} \Rightarrow \Lambda_{\pm}^2 = \frac{m^2 c^2 \pm 2mc \not{p} + p^2}{(2mc)^2} = 2mc \frac{mc \pm \not{p}}{(2mc)^2} = \Lambda_{\pm}$$

$$\Lambda_+ \Lambda_- = \frac{mc + \not{p}}{2mc} \frac{mc - \not{p}}{2mc} = \frac{(mc)^2 - p^2}{(2mc)^2} = 0$$

$$\Lambda_+ + \Lambda_- = \frac{mc + \not{p} + mc - \not{p}}{2mc} = \mathbb{1}$$

6.6 Ladungskonjugation

Dirac Gl. sollte auch für Positronen als Teilchen, Elektronen als Antiteilchen existieren. (mit Spinor ψ_C)

$$(i\hbar \not{\partial} + \underbrace{e\cancel{A}}_{-q_e + \cancel{A}} - mc)\psi_C(x) = 0$$

(e = Ladungsvorzeichen e^-)

Ges. Beziehung zur Dirac Gl. für e^-

$$i\hbar \not{\partial} - e\cancel{A} - mc)\psi(x) = 0$$

$$\Rightarrow [-(i\hbar \partial_\mu + eA_\mu)\gamma^{*\mu} - mc]\psi^*(x) = 0 \quad | \cdot C\gamma^0$$

Transformation mit Matrix $C\gamma^0$

$$\Rightarrow [(i\hbar \partial_\mu + eA_\mu)(-C\gamma^0\gamma^{*\mu}((\gamma^0)^{-1} - mc)C\gamma^0\psi^*(x) = 0$$

gesucht C mit $C\gamma^0\gamma^{*\mu}(C\gamma^0)^{-1} = -\gamma^\mu$!

Dann ist $\psi_C(x) = C\gamma^0\psi^*(x) = C(\gamma^0)^T(\psi^\dagger)^T = C(\psi^\dagger\gamma^0)^T = C\bar{\psi}^T(x)$

die Matrix $C = i\gamma^2\gamma^0$ tut's !

$$\Rightarrow C\gamma^0 = i\gamma^2\gamma^0\gamma^0 = i\gamma^2 = (C\gamma^0)^{-1}, \quad (\gamma^2)^2 = -\mathbb{1}, \quad (i\gamma^2)^2 = +\mathbb{1}$$

$$C\gamma^0(\gamma^\mu)^*(C\gamma^0)^{-1} = i\gamma^2\gamma^{*\mu}i\gamma^2 = -\gamma^2\gamma^{*\mu}\gamma^2 = \begin{cases} \mu = 2 : & -\gamma^2(-\gamma^2)\gamma^2 = -\gamma^2 \\ \text{sonst} & -\gamma^2 \underbrace{\gamma^\mu\gamma^2}_{-\gamma^2\gamma^\mu} = -\gamma^\mu \end{cases}$$

Es gilt auch

$$C\bar{u}^T(p, s) = v(p, s) \cdot e^{i\alpha}$$

$$C\bar{v}^T(p, s) = u(p, s) \cdot e^{i\alpha'}$$