Aufgabe 16: Wigner-Matrizen

Die Wigner-Matrizen $d^j_{m'm}(\beta)$ lassen sich für beliebiges j sukzessiv aus den $d^{\frac{1}{2}}_{m'm}(\beta)$ und den Clebsch-Gordan-Koeffizienten (CGKs) berechnen. Bestimmen Sie so die gesamte Wigner Matrix für $j = 1$ aus der Matrix für $j = \frac{1}{2}$,

$$d^{\frac{1}{2}}_{m'm}(\beta) = \begin{pmatrix} cos\frac{\beta}{2} & -sin\frac{\beta}{2} \\ sin\frac{\beta}{2} & cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

und den dazugehörigen CGKs.

LSG

Ein paar einleitende Worte (ausführlich in Zettile:Quantum Mechanics) die man auf die Wigner-Matrix kommt. Der Rotationsoperator $\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma)$ kann in der Basis $|j, m\rangle$ des Drehimpulses $\vec{J}$ dargestellt werden. Der Rotationsoperator in exponentialform lautet:

$$\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha J_z} e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_y} e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma J_z}$$

Unter Ausnutzung des Kommutators $[\vec{J}^2, \hat{R}(\alpha, \beta, \gamma)] = 0$, sieht man dass $\vec{J}^2$ den Zustand unter beliebiger Rotation nicht verändert:

$$\vec{J}^2 \hat{R}(\alpha, \beta, \gamma)|j, m\rangle = \hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) J^2 |j, m\rangle = j(j + 1)\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma)|j, m\rangle$$

In den meisten Fällen verändert der Rotationsoperator den Zustandsvektor, weil sich die z-Komponente sich verändert (solange nicht um z-Achse rotiert wird) verändert sich auch $m \to m'$. Allgemein lässt sich das so aufschreiben:

$$\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma)|j, m\rangle = \mathbb{1} \cdot \hat{R}(\alpha, \beta, \gamma)|j, m\rangle \tag{0.1}$$

$$= \sum_{m'=-j}^{j} |j, m'\rangle\langle j, m'|\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma)|j, m\rangle \tag{0.2}$$

$$= \sum_{m'=-j}^{j} \langle j, m'|\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma)|j, m\rangle|j, m'\rangle \tag{0.3}$$

$$= \sum_{m'=-j}^{j} D^{(j)}_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma)|j, m'\rangle \tag{0.4}$$

$D^{(j)}_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma)$ sind die Matrixelemente des Rotationsoperators. Da der Rotationsoperator in der Exponentialdarstellung zweimal den J_Z Operator hat und $|j, m\rangle$ auch seine Eigenzustandsvektoren sind kann die D matrix weiter vereinfacht werden:

$$\boxed{D^{(j)}_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i(m'\alpha + m\gamma)} \underbrace{\langle j, m'|e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_y}|j, m\rangle}_{d^j_{m'm}(\beta)}}$$

Wobei $d^j_{m'm}(\beta)$ die Wigner-Matrix ist. Schlussendlich muss noch eine Beziehung her zwischen $j = 1$ und $j_1, j_2 = \frac{1}{2}$.
$|j, m\rangle = \sum_{m_1 m_2} \langle j_j, j_2; m_1, m_2|j, m\rangle|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle$, $\langle j, m'| = \sum_{m_1' m_2'} \langle j_j, j_2; m_1', m_2'|j, m'\rangle\langle j_1, j_2; m_1, m_2|$ und $d^j_{m'm}(\beta) = \langle j, m'|e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_y}|j, m\rangle$ ineinander einsetzen:

$$d^j_{m'm}(\beta) = \sum_{m_1 m_2} \sum_{m_1' m_2'} \langle j_j, j_2; m_1, m_2|j, m\rangle\langle j_j, j_2; m_1', m_2'|j, m'\rangle \tag{0.5}$$

$$\times \langle j_1, j_2; m_1, m_2|e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_y}|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \tag{0.6}$$

Da einzelne Drehimpulse aus verschiedenen Räumen bestehen: $J_y = J_{1y} + J_{2y}$ und $|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle = |j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle$ lässt sich das ganze weiter schreiben:

$$d^j_{m'm}(\beta) = \sum_{m_1 m_2}\sum_{m_1' m_2'} \langle j_j, j_2; m_1, m_2 | j, m\rangle \langle j_j, j_2; m_1', m_2' | j, m'\rangle \tag{0.7}$$

$$\times \underbrace{\langle j_1, m_1' | e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_{1y}} | j_1, m_1\rangle}_{d^{j1}_{m'm}} \underbrace{\langle j_2, m_2' | e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_{2y}} | j_2, m_2\rangle}_{d^{j2}_{m'm}} \tag{0.8}$$

und somit:

$$d^{(j)}_{m'm}(\beta) = \tag{0.9}$$

$$= \sum_{m_1, m_2}\sum_{m_1', m_2'} \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | jm\rangle \langle j_1, j_2; m_1', m_2' | jm'\rangle d^{(j_1)}_{m_1' m_1}(\beta) d^{(j_2)}_{m_2' m_2}(\beta) \tag{0.10}$$

$$d^{(1)}_{11}(\beta) = \underbrace{\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | 11\rangle}_{=1} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | 11\rangle \underbrace{d^{(\frac{1}{2})}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\beta)}_{cos\frac{\beta}{2}} d^{(\frac{1}{2})}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\beta) \tag{0.11}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot cos^2\frac{\beta}{2} \tag{0.12}$$

$$d^{(1)}_{1-1}(\beta) = \underbrace{\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | 11\rangle}_{=1} \underbrace{\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | 1-1\rangle}_{=1} \underbrace{d^{(\frac{1}{2})}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(\beta)}_{-sin\frac{\beta}{2}} d^{(\frac{1}{2})}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(\beta) \tag{0.13}$$

$$= sin^2\frac{\beta}{2} \tag{0.14}$$