

Contents

7	Quantisierung des Strahlungsfeldes	2
7.0.1	Spektrum des quantisierten Strahlungsfeldes	4
7.1	Wechselwirkung Strahlung in Materie	6
7.2	Materie + Strahlung	8
7.3	Planck'sche Strahlungsformel für Schwarzkörperstrahlung	10

Chapter 7

Quantisierung des Strahlungsfeldes

Wiederholung (siehe <http://de.wikipedia.org/wiki/Maxwell-Gleichungen>) :

Name	SI	Physikalischer Bedeutung
Gaußsches Gesetz	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	Elektrische Feldlinien divergieren voneinander unter Anwesenheit elektrischer Ladung, die Ladung ist Quelle des elektrischen Feldes.
Gaußsches Gesetz für Magnetfelder	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	Magnetische Feldlinien divergieren nicht, das magnetische Feld ist quellenfrei; es gibt keine magnetischen Monopole.
Induktionsgesetz von Faraday	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Änderungen der magnetischen Flussdichte führt zu einem elektrischen Wirbelfeld.
Erweitertes ampèresches Gesetz	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	Elektrische Ströme – einschließlich des Verschiebungsstroms – führen zu einem magnetischen Wirbelfeld.

Potentiale:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Eichfreiheit für ϕ, \vec{A}
Maxwell \Rightarrow

$$\vec{\nabla} \vec{E} = -\vec{\nabla}^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad (7.1)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t})}_{\square} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Leftrightarrow$$

$$\square \vec{A} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}) = \mu_0 \vec{j}$$

Coulomb Eichung: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

$$\Rightarrow \phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 \vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Zunächst betrachte freier Fall $\rho = 0, \vec{j} = 0 \Rightarrow \phi = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\square \vec{A} = 0}$$

vergleiche Klein-Gordon-Gleichung $\left(\square + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right) \psi = 0$

Lösung: ebene Wellen

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$$

$$\square \vec{A} = 0 \Leftrightarrow -\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2 = 0 \Leftrightarrow \omega = c|\vec{k}|$$

Eichbedingung: $\nabla \vec{A} = 0 \Leftrightarrow i\vec{k}\vec{A}_0 = 0 \Rightarrow \vec{A}_0 \perp \vec{k} \Rightarrow$ transversale Wellen
Klassische Energie des Strahlungsfeldes

$$H_{rad} = \frac{1}{2} \int (\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2) d^3 \vec{x}$$

in einem endlichen Kasten mit periodischen Randbedingungen
Forderung:

$$\vec{A}(x_1 = -\frac{L}{2}, x_2, x_3, t) = \vec{A}(x_1 = +\frac{L}{2}, x_2, x_3, t)$$

usw.

Lösungen sind

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{f}_{r,\vec{k}}(\vec{x}) e^{-i\omega t} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{V}} \vec{\epsilon}_r(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}}}_{\vec{f}_{r,\vec{k}}(\vec{x})} e^{-i\omega t}$$

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L} (n_1, n_2, n_3) \neq 0 \quad n_i \in \mathbb{Z}$$

Wähle $\vec{\epsilon}_r(\vec{k})$ so dass $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3, \hat{k} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ ein rechtshändiges Orthonormalsystem bilden.

$$\vec{\epsilon}_r(\vec{k}) \cdot \vec{\epsilon}_s(\vec{k}) = \delta_{rs}$$

$$\vec{\epsilon}_r(\vec{k}) \cdot \vec{k} = 0$$

$$\epsilon_1 \times \epsilon_2 = \hat{k} \quad \text{und zyklisch}$$

$\vec{A}(\vec{x}, t)$ darstellbar als Fourierreihe

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{r,\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} \left[a_r(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} + a_r^*(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} \right] \vec{\epsilon}_r(\vec{k})$$

$\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}}$ Faktor damit $a_r(\vec{k})$ dimensionslos sind. Einheiten: $[\vec{A}] = [\vec{E} \cdot t] = \frac{N}{C} s$

$$\left[\frac{\hbar}{\epsilon_0 V \omega} \right] = \frac{N m s}{\frac{C^2}{N m^2} m^3 \frac{1}{s}} = \frac{N^2 s^2}{C^2} \quad \checkmark$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{r,\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_k}} \left[\vec{f}_{r,\vec{k}}(\vec{x}) a_r(\vec{k}, t) + \vec{f}_{r,-\vec{k}}(\vec{x}) a_r^*(\vec{k}, t) \right]$$

mit $a_r(\vec{k}, t) = a_r(\vec{k})e^{-i\omega_k t}$
 Im endlichen Kasten ($V = L^3$)

$$\int_V d^3\vec{x} \vec{f}_{r,\vec{k}}(\vec{x}) \vec{f}_{r',\vec{k}'}^*(\vec{x}) = \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{rs}$$

$$H_{rad} \approx \int (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2) d^3\vec{x}$$

mit $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \sum_{r,\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_k}} (-i\omega_k) [a_r(\vec{k}, t) - \delta_r a_r^*(-\vec{k}, t)] f_{r,\vec{k}}(\vec{x})$
 mit $\delta_r = \pm 1$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \sum_{r,\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_k}} [a_r(\vec{k}, t) + \delta_r a_r^*(-\vec{k}, t)] i\vec{k} \times f_{r,\vec{k}}(\vec{x})$$

$$\int \vec{B}^2 d^3\vec{x} \approx \int \underbrace{(\vec{k} \times \vec{f}_{r,\vec{k}}(\vec{x}))(\vec{k}' \times \vec{f}_{r',\vec{k}'}^*(\vec{x}))}_{\vec{k}^2 \vec{f}_{r,\vec{k}} \vec{f}_{r',\vec{k}'}^* - \vec{k} \vec{f}_{r',\vec{k}'}^* (\vec{x}) \vec{k}' \vec{f}_{r,\vec{k}}(\vec{x})} d^3\vec{x} \quad (7.3)$$

$$= \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \underbrace{(k^2 \epsilon_r(\vec{k}) \vec{\epsilon}_{r'}(\vec{k}) - \vec{k} \vec{\epsilon}_{r'}(\vec{k}) \vec{k})}_{\delta_{r,r'}} \underbrace{\vec{k} \vec{\epsilon}_{r'}(\vec{k})}_0 \underbrace{\vec{k} \vec{\epsilon}_r(\vec{k})}_{=0 \text{ da } \vec{k} \perp \vec{\epsilon}_r} \quad (7.4)$$

$$= |\vec{k}|^2 \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{rr'} \quad (7.5)$$

Einsetzen in H_{rad}

$$H_{rad} = \frac{\epsilon_0}{2} \sum_{r,\vec{k}} \{ (a_r(\vec{k}, t) - \delta_r a_r^*(-\vec{k}, t)) (\delta_r a_r(-\vec{k}, t) - a_r^*(\vec{k}, t)) (-\omega_k^2) \quad (7.6)$$

$$+ (a_r(\vec{k}, t) + \delta_r a_r(-\vec{k}, t) + a_r^*(\vec{k}, t)) \underbrace{(c\vec{k})^2}_{\omega_k^2} \} \quad (7.7)$$

$$= \epsilon_0 \sum_{r,\vec{k}} \frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_k} \omega_k^2 (a_r(\vec{k}, t) a_r^*(-\vec{k}, t) + a_r^*(-\vec{k}, t) a_r(\vec{k}, t)) \quad (7.8)$$

$$= \sum_{r,\vec{k}} \hbar \omega_k \frac{1}{2} (a_r(\vec{k}) a_r^*(\vec{k}) + a_r^*(\vec{k}) a_r(\vec{k})) \quad (7.9)$$

vergleiche mit Harmonischen Oszillator $H = \hbar\omega \frac{1}{2} (a^\dagger a + a a^\dagger) \equiv \hbar\omega (a^\dagger a + \frac{1}{2})$

7.0.1 Spektrum des quantisierten Strahlungsfeldes

Für jeden Mode \vec{k}, r

1 Photon $E = \hbar\omega_k$

2 Photon $E = 2\hbar\omega_k$

$n(\vec{k}, r)$ Photon $E = \hbar\omega_k n(\vec{k}, r)$

Quantisierungsbedingung für das Strahlungsfeld, $a_r(\vec{k}), a_r^\dagger(\vec{k})$ als Auf und Absteigeoperatoren:

$$[a_r(\vec{k}), a_s^\dagger(\vec{k}')] = \delta_{rs} \delta_{\vec{k},\vec{k}'}$$

$$[a_r(\vec{k}), a_s(\vec{k}')] = 0$$

$$H_{rad} = \sum_{r,\vec{k}} \hbar\omega_k \underbrace{(a_r^\dagger(\vec{k}) a_r(\vec{k}) + \frac{1}{2})}_{N_r(\vec{k})}$$

Grundzustand : $|0\rangle$ mit $a_r(\vec{k})|0\rangle = 0$ hat Energie

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_{r, \vec{k}} \hbar \omega_k = \infty$$

Messe Energie relativ zum Grundzustand

$$H_{rad} = H_{rad} - E_0$$

$$H_{rad} = \sum_{r, \vec{k}} \hbar \omega_k \underbrace{(a_r^\dagger(\vec{k}) a_r(\vec{k}))}_{N_r(\vec{k})}$$

Harmonischer Oszillator für jeden Mode (\vec{k}, r)

$$\vec{p}_{rad} = \sum_{\vec{k}, r} \hbar \vec{k} N_r(\vec{k})$$

mit Teilchenzahlop $N(\vec{k}) = a_r^\dagger(\vec{k}) a_r(\vec{k})$ mit Mode (\vec{k}, r) Eigenzustände von $N_r(\vec{k})$ (und H_{rad}, \vec{P}_{rad})

$$|n_r(\vec{k}) = n\rangle = \frac{(a_r^\dagger(\vec{k}))^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$$

Allgemeiner Zustand: Produkt über Moden (Fock Raum für Photonen):

$$|...n_r(\vec{k})...\rangle = \prod_{\vec{k}, r} |n_r(\vec{k})\rangle \in \mathcal{H}_{rad} = \otimes_{\vec{k}, r} \mathcal{H}_{\vec{k}, r}^{H_0}$$

Grundzustand: $|0\rangle$ def. durch $a_r(\vec{k})|0\rangle = 0$

- 1 Photon Zustand: $a_r^\dagger(\vec{k})|0\rangle = |\vec{k}, r\rangle$
- 2 Photon Zustand: $a_{r_1}^\dagger(\vec{k}_1) a_{r_2}^\dagger(\vec{k}_2)|0\rangle = |(\vec{k}_1, r_1), (\vec{k}_2, r_2)\rangle$

sind Eigenzustände zu H_{rad}, \vec{P}_{rad}

$$H_{rad} a_r^\dagger(\vec{k}) |E, \vec{P}\rangle = [H_{rad}, a_r^\dagger] + a_r^\dagger(\vec{k}) \underbrace{H_{rad}}_E |E, \vec{P}\rangle$$

mit $[H_{rad}, a_r^\dagger] = \hbar \omega_k [a_r^\dagger(\vec{k}) a_r(\vec{k}), a_r^\dagger(\vec{k})] = \hbar \omega_k a_r^\dagger(\vec{k})$

$$H_{rad} a_r^\dagger(\vec{k}) |E, \vec{P}\rangle = (\hbar \omega_k + E) a_r^\dagger(\vec{k}) |E, \vec{P}\rangle$$

$a_r^\dagger(\vec{k})$ erzeugt extra Photon im Zustand mit Energie $\hbar \omega_k$ und Impuls $\hbar \vec{k}$

$\Rightarrow a_r^\dagger(\vec{k})$ ist Vrzeugungsooperator für 1 Photon

$\Rightarrow a_r(\vec{k})$ ist Vernichtungsoperator für 1 Photon

Allgemeiner 1 Photon zustand:

$$|1\rangle = \sum_{\vec{k}, r} \psi(\vec{k}, r) a_r^\dagger(\vec{k}) |0\rangle$$

Bose Symmetrie (Fall n=2, gilt für alle n)

$$|(\vec{k}_1, r_1), (\vec{k}_2, r_2)\rangle = a_{r_1}^\dagger(\vec{k}_1) a_{r_2}^\dagger |0\rangle = a_{r_2}^\dagger(\vec{k}_2) a_{r_1}^\dagger(\vec{k}_1) |0\rangle$$

$$= |(\vec{k}_2, r_2), (\vec{k}_1, r_1)\rangle$$

ist automatisch Bose-symmetrisch!

Vektor potential des quantisierten Feldes:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}^+(\vec{x}, t) + \vec{A}^-(\vec{x}, t)$$

mit ist linear in erzeugern und Vernichtern:

$$\vec{A}^-(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}, r} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} \vec{e}_r(\vec{k}) a_r^\dagger(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\vec{x} - \omega_k t)}$$

$$\vec{A}^+(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}, r} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} \vec{e}_r(\vec{k}) a_r(\vec{k}) e^{+i(\vec{k}\vec{x} - \omega_k t)}$$

ist linear in erzeugern und Vernichtern:

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

\vec{E} und \vec{B} sind Operatoren auf dem Fock Raum.

\vec{x}, t sind Parameter der Felder $\vec{E}(\vec{x}, t), \vec{A}(\vec{x}, t) \dots$ (sind keine Operatoren)

Klassischer Limes

$$\vec{E}_{\text{Klassisch}}(\vec{x}, t) = \langle A | \vec{E}(\vec{x}, t) | A \rangle \quad |A\rangle \in \mathcal{H}_{\text{rad}}$$

A darf keine feste Anzahl (=n) Photonen haben.

$$|B\rangle = |n \text{ Photonen}\rangle \Rightarrow \underbrace{\vec{A}(\vec{x}, t)}_{\vec{A}^+ + \vec{A}^-} |n \text{ Photonen}\rangle = \#|n-1\rangle + \#|n+1\rangle$$

$$\langle n | \vec{A}(\vec{x}, t) | n \rangle$$

Zustände mit vorgegebener fester Photonenzahl \nrightarrow Klassischer Zustandände. Klassischer Limes entspricht den Kohärenten Zuständen.

7.1 Wechselwirkung Strahlung in Materie

Materie: N Punktteilchen, Masse m_i , Ladung e_i .

$$\tilde{H}_m = \sum_i^N \frac{1}{2} m_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)^2 + H_C$$

mit Coulomb WW.

$$H_C = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{e_i e_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

mit der Beziehung: $\sum_{i,j; i \neq j} = 2 \sum_{i,j; i < j}$

Strahlungsfeld in Coulomb Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

aber:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{x}, t)}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N e_i \delta^3(\vec{x} - \vec{r}_i(t)) \neq 0$$

$\Rightarrow \vec{E}$ hat longitudinale Komponente \vec{E}_L

$$\vec{E} = \vec{E}_L + \vec{E}_T = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi \quad \text{mit } \vec{\nabla} \times \vec{E}_L = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_T = 0$$

Es gilt $\boxed{\vec{E}_L = -\vec{\nabla} \phi, \quad \vec{E}_T = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$ wegen $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - T = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$

Energie des e.m.Feldes

$$H_{e.m.} = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3 \vec{x} (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2) \quad (7.10)$$

$$= \underbrace{\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3 \vec{x} (\vec{E}_T^2 + c^2 \vec{B}^2 + \vec{E}_L^2 + 2\vec{E}_L \cdot \vec{E}_T)}_{H_{red}} \quad (7.11)$$

NR: $\vec{E}_L \cdot \vec{E}_T = \vec{\nabla} \phi \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\phi \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) - \phi \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}}_{=0} \rightarrow \text{Oberflächenterm} \rightarrow 0$

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int \underbrace{\vec{E}_L^2}_{(-\vec{\nabla} \phi)^2} d^3 \vec{x} = -\frac{\epsilon_0}{2} \int \phi \underbrace{\nabla^2 \phi}_{-\frac{\rho(\vec{x}, t)}{\epsilon_0}} d^3 \vec{x} \quad (7.12)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3 \vec{x} \rho(\vec{x}, t) \frac{\rho(\vec{x}', t)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (7.13)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \frac{e_i e_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)|} \quad (7.14)$$

$$= H_C + E_S \quad (7.15)$$

(E_S = Selbstenergie der N Teilchen)

H_C schon in \tilde{H}_m enthalten

Korrektter Kanonischer Impuls für \tilde{H}_m

$$\vec{p}_i = m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} + e_i \vec{A}(\vec{r}_i(t), t)$$

$$\Rightarrow \tilde{H}_m = \sum_i \frac{1}{2m_i} (\vec{p}_i - e_i \underbrace{\vec{A}(\vec{r}_i)}_{\vec{A}_i})^2 + H_C$$

$$\tilde{H}_m = \underbrace{\sum_i \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i}}_{H_m} + H_C + \underbrace{\sum_i \frac{1}{2m_i} (-e_i \vec{p}_i \cdot \vec{A}_i - e_i \vec{A}_i \cdot \vec{p}_i + e_i^2 A_i^2)}_{H_I}$$

in Coulomb Eichung gilt: $\vec{p}_i \cdot \vec{A}_i = \vec{A}_i \cdot \vec{p}_i$ wegen $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

$$H_I = \sum_{i=1}^N \left\{ i \frac{e_i \hbar}{m_i} \vec{A}(\vec{r}_i, t) \cdot \vec{\nabla}_i + \frac{e_i^2}{2m_i} \vec{A}^2(\vec{r}_i, t) \right\}$$

\Rightarrow Störungsentwicklung für

$$H = \underbrace{H_{rad} + H_m}_{H_0} + H_I$$

7.2 Materie + Strahlung

$$H = \underbrace{H_m + H_{rad}}_{H_0} + H_I$$

$$H_I = \sum_{i=1}^N \left(-\frac{e_i}{m_i} \vec{A}(\vec{r}_i, t) \vec{p}_i + \frac{e_i^2}{2m} \vec{A}^2 \right)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, r} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} \vec{\epsilon}_r(\vec{k}) [a_r^\dagger(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} + c.c.]$$

ungestörter Zustand

$$|A; \dots n_r(\vec{k}) \dots\rangle = |A\rangle |\dots n_r(\vec{k}) \dots\rangle$$

$|A\rangle$ Eigenzustand von H_m

$$H_m |A\rangle = E_A |A\rangle$$

Emission von Photon:

$$A \rightarrow B + \gamma$$

Übergangswahrscheinlichkeit/Zeit

$$p_r(\vec{k}) = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle B; \dots n_r(\vec{k}) + 1 \dots | H_I | A; \dots n_r(\vec{k}) \dots \rangle|^2 \cdot \delta(E_A - E_B - \hbar\omega_k)$$

Zerfallswahrscheinlichkeit/Zeit

$$w_r = \sum_{\vec{k}} p_r(\vec{k}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \sum_{\vec{k}} \underbrace{\left(\frac{2\pi}{2}\right)^3}_{\Delta^3 k} p_r(\vec{k}) \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{k} p_r(\vec{k})$$

Matrixelement:

$$\langle B; n_r(\vec{k}) + 1 | H_I | A; n_r(\vec{k}) \rangle = - \sum_i \frac{e_i}{m_i} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} \underbrace{\langle n_r(\vec{k}) + 1 | a_r^\dagger(\vec{k}) | n_r(\vec{k}) \rangle}_{\sqrt{n_r(\vec{k})+1}} \langle B | e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_i} \vec{\epsilon}_r(\vec{k}) \cdot \vec{p}_i | A \rangle$$

•

$$V_{ni} \propto \sqrt{n+1} \rightarrow w_r \propto (n+1)$$

→ Stimulierte Emission für große n : Laser

- Emission auch für $n = 0$. Aber klassisch $\vec{E} = 0 = \vec{B} \Rightarrow \vec{A} = 0 \Rightarrow H_I = 0$. spontane Emission ist rein QM.

Dipolapproximation für $\langle B | e^{-i\vec{k}\vec{r}} \dots | A \rangle$:

$$e^{-i\vec{k}\vec{r}_i} \approx 1 - i\vec{k}\vec{r}_i \approx 1$$

und den Impulsoperator können wir schreiben als:

$$\vec{p}_i = \frac{m_i}{i\hbar} [\vec{x}_i, \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i}] = \frac{m_i}{i\hbar} [\vec{x}_i, H_m]$$

$$\Rightarrow \langle B | \sum_i \underbrace{e^{-i\vec{k}\vec{r}_i}}_{\approx 1} \frac{e_i}{m_i} \vec{p}_i | A \rangle \quad (7.16)$$

$$= \frac{1}{i\hbar} \langle B | [\sum_i e_i \vec{x}_i, H_m] | A \rangle \quad (7.17)$$

$$= \frac{1}{i\hbar} (E_A - E_B) \langle B | \sum_i e_i \vec{x}_i | A \rangle \quad (7.18)$$

$$= \frac{1}{i\hbar} (E_A - E_B) e \vec{X}_{AB} \quad (7.19)$$

$$= (-im\omega \vec{X}_{AB}) \frac{e}{m} \quad (7.20)$$

mit $\omega = \omega_k = \frac{E_A - E_B}{\hbar}$ und m = Elektronenmasse
 \Rightarrow Zerfallswahrscheinlichkeit/Zeit

$$\langle B; n_r(\vec{k}) + 1 | H_I | A; n_r(\vec{k}) \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{\epsilon_0}} \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \sqrt{n_r(k) + 1} \frac{e}{m} (-im\omega \vec{X}_{AB} \vec{\epsilon}_r(\vec{k})) \quad (7.21)$$

$$(7.22)$$

$$\Rightarrow w_r = \sum_{\vec{k}} \frac{(2\pi)^3}{V} \frac{\hbar}{\epsilon_0} \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k} (n_r(\vec{k}) + 1) \frac{2\pi}{\hbar} \delta(\hbar\omega - E_A + E_B) \frac{e}{m^2} |-im\omega \vec{\epsilon}_r(\vec{k}) \vec{X}_{AB}|^2 \quad (7.23)$$

$$= \int d^3\vec{k} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \frac{\hbar c}{\pi m^3 2\omega_k} (n_r(\vec{k}) + 1) |\dots|^2 \delta(\hbar\omega - E_A + E_B) \quad (7.24)$$

$$\text{NR: } d^3\vec{k} = d\Omega \frac{(ck)^2 dck}{c^3} = d\Omega \frac{\omega^2}{\hbar^3} d(\hbar\omega)$$

$$w_r = \int d\Omega \alpha \frac{\omega}{m^2 c^2 2\pi} (n_r(k) + 1) m^2 \omega^2 |\epsilon_r(\vec{k}) \vec{X}_{AB}|^2$$

$$\boxed{w_r = \int d\Omega \alpha \frac{\omega^3}{2\pi c^2} |\epsilon_r(\vec{k}) \vec{X}_{AB}|^2 (n_r(k) + 1)}$$

Spontane Emission $n_r(k) = 0$

Keine Polarisation : $\sum_{r=1,2}$

$$\int d\Omega \sum_r |\vec{X} \vec{\epsilon}|^2 \quad (7.25)$$

$$= \int d\Omega \vec{X}^* \underbrace{(\vec{\epsilon}_1 \vec{\epsilon}_1 \vec{X} + \vec{\epsilon}_2 \vec{\epsilon}_2 \vec{X} + \hat{K} \hat{K} \vec{X} - \hat{K} \hat{K} \vec{X})}_{\vec{X}} \quad (7.26)$$

$$= \int d\Omega (|\vec{X}|^2 - \underbrace{|\vec{X} \hat{K}|^2}_{|\vec{X}| \cos^2 \theta}) = |\vec{X}|^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi 2}_{4\pi} \underbrace{\int_0^1 d\cos\phi (1 - \cos^2 \theta)}_{\frac{2}{3}} = \frac{2\pi}{3} |\vec{X}|^2 \quad (7.27)$$

$$w_{A \rightarrow B} = \alpha \frac{\omega^3}{2\pi c^2} \frac{8\pi}{3} |\vec{X}_{AB}|^2$$

$$\boxed{w_{A \rightarrow B} = \alpha \frac{4}{3} \frac{\omega^3}{c^2} |\vec{X}_{AB}|^2}$$

Lebensdauer des Zustands $|A\rangle$

$$\boxed{\frac{1}{\tau_A} = \sum_B w_{A \rightarrow B}}$$

7.3 Planck'sche Strahlungsformel für Schwarzkörperstrahlung

Übergang $A \rightarrow B + \gamma$ im thermischen Gleichgewicht.

Anzahl der Atome in Level A $N(A) \propto e^{-E_A/kT}$

Anzahl der Atome in Level B $N(B) \propto e^{-E_B/kT}$

$$\frac{N(B)}{N(A)} = \frac{e^{-E_B/kT}}{e^{-E_A/kT}} = e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}$$

Gleichgewichtsbedingung:

$$N(B)w_{abs.} = N(A)w_{emmiss.}$$

$$w_{emmiss.} = \alpha \frac{\omega}{2\pi m^2 c^2} |\langle B | \sum e^{-i\vec{K}\vec{r}_i} \vec{\epsilon}_r \vec{p}_i | A \rangle|^2 (n_r(\vec{k}) + 1)$$

$$w_{abs} = \alpha \frac{\omega}{2\pi m^2 c^2} |\langle A | \sum e^{-i\vec{K}\vec{r}_i} \vec{\epsilon}_r \vec{p}_i | B \rangle|^2 n_r(\vec{k})$$

Das Matrixelement von w_{abs} ist genau das komplex konjugierte von $w_{emmiss.}$

$$\Rightarrow \frac{w_{emmiss}}{w_{abs}} = \frac{n_r(\vec{k}) + 1}{n_r(\vec{k})} = 1 + \frac{1}{n_r(\vec{k})}$$

$$\frac{N(B)}{N(A)} = e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}$$

$$\Rightarrow \boxed{n_r(\vec{k}) = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}}$$

Energie im Strahlungsfeld pro Volumeneinheit

$$\int U(\omega) d\omega = \frac{1}{V} \sum_{r,\vec{k}} n_r(\vec{k}) \hbar\omega_k = \underbrace{\frac{(2\pi)^3}{V} \sum_{r,\vec{k}} n_r(\vec{k}) \hbar\omega}_{\int d^3k \cdot 2} \frac{1}{(2\pi)^3} \quad (7.28)$$

$$= 8\pi \int \frac{k^2 dk}{c^3} \frac{\hbar\omega}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \quad (7.29)$$

$$= \frac{8\pi\hbar}{c^3} \int d\omega \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^3 \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \quad (7.30)$$

$$U(\omega) = \frac{8\pi\hbar}{c^3} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^3 \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} = u(\nu) \frac{d\omega}{d\nu} = \frac{1}{2\pi} u(\nu)$$

mit $\frac{d\omega}{d\nu} = \frac{1}{2\pi}$

$$\Rightarrow u(\nu) = 2\pi U(\nu) = \frac{8\pi\hbar}{c^3} \nu^3 \frac{1}{e^{\hbar\nu/kT} - 1}$$

$$\boxed{u(\nu) = \frac{8\pi\hbar}{c^3} \nu^3 \frac{1}{e^{\hbar\nu/kT} - 1}}$$