Kap 6. Relativistische QM

Notation: Vierer-Vektoren

$$x^\mu = ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{r})$$

invariante Lönge $\sqrt{x^2}$

$$x^2 = x \cdot x = x^\mu x_\mu = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu$$

Einsteinsche Summenkonvention: $\sum_{\mu=0}^{3}$ für jedes Paar von oberen und unteren Index
Metrischer Tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -\vec{r})$$

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu = g^{\mu\nu} x^\nu = g^\nu_\nu x^\nu$$

$$g^\nu_\nu = \delta^\nu_\nu = \begin{cases} 1, & \mu = \nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} \to g^{\mu\nu} = [g_{\mu\nu}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vierer-Impuls: $p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p})$ $E = \sqrt{(mc^2)^2 + (\vec{p}c)^2}$

$$p^2 = p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = \frac{m^2c^4 + \vec{p}^2 c^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2c^2$$

Vierer-Potential: LT $x^{'\mu} = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$

$$A^\mu = (\frac{\phi}{c}, \vec{A} \qquad \to A^{'\mu}(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x)$$

Strom: $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$ in E und M
Skalarprodukt für a^μ, b^μ : $\qquad a \cdot b = a^\mu b_\mu = a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$
Ableitung nach x^ν

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla})$$

ist kovarianter Vektor unter Index wg: $\partial \mu a \cdot x = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(a_\nu x^\nu) = a_\mu$
Entsprechend $\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla})$
d'Alebert Operator

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$$

5.0 QM eines freien Teilchens

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$$

$$p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p}) \to (i\hbar\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar\vec{\nabla}) = i\hbar\partial^\mu$$

Schrödinger Gl. für NR freies Teilchens

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\psi(\vec{x}, t)$$

Relativistischer Fall

1) $E = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2} \to$ nichtlokalen Operator
2) $\frac{E^2}{c^2} = m^2c^2 + \vec{p}^2 \to -\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = m^2c^2\psi - \hbar^2\vec{\nabla}^2\psi$

$$\Leftrightarrow 0 = m^2c^2\psi + \hbar^2(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2 - \nabla^2)\psi = m^2c^2\psi + \hbar^2\Box\psi})$$

Klein Gordon Gl.

$$(\Box + (\frac{mc}{\hbar})^2)\psi(x) = 0$$

Anwendbar auf skalare Teilichen (Spin 0) wie $\pi^+, \pi^-, \pi^0, K, H$
Lösungen der KG-Gl. durch ebene Wellen

$$\psi_p(x) = Ne^{-ip\cdot x/\hbar} = Ne^{-iEt/\hbar}e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}$$

mit $p \cdot x = p^\mu x_\mu = Et - \vec{p}\cdot\vec{x}$

$$\Box\psi_p = (x) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi_p(x) = N(-\frac{i}{\hbar}p_\mu)(-\frac{i}{\hbar}p^\mu)e^{-ip\cdot x/\hbar} = -\frac{p^2}{\hbar^2}\psi_p$$

KG:

$$\Rightarrow (-\frac{p^2}{\hbar^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2})\psi_p(x) = 0 \Leftrightarrow p^2 = m^2c^2; \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2$$

$$\to E = \pm c\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2}$$

Lösungen mit Negativer Energie und das Energiespektrum ist nach unten nicht beschränkt.

5.0 Wahrscheinlichkeitserhaltung

Kontin.Gl $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu j^\mu = 0$ mit $j^\mu = (\rho c, \vec{j})$.
Gibt es einen erhaltenen 4-Strom für die lösung der KG-Gleichung?

$$\psi^*(\Box + (\frac{mc}{\hbar})^2)\psi(x) - \psi(\Box + (\frac{mc}{\hbar})^2)\psi^*(x) = 0$$

$$\psi^*(\partial_\mu\partial^\mu\psi) - \psi(\partial_\mu\partial^\mu\psi^*) = 0$$

$$\partial_\mu(\underbrace{\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\psi^*}_{\propto j^\mu}) = 0$$

$$j^\mu \propto (\psi^* \frac{i}{c} \frac{\propto}{\propto t} \psi - \psi \frac{i}{c} \frac{\propto}{\propto t} \psi^*, -(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*))$$

Kandidat für Wahrscheinlichkeits Strom $\frac{2im}{\hbar} \vec{j}$ in Schrödinger Gl

$$j^\mu = \frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*)$$

$$\rightarrow j^0 = \rho c = \frac{i\hbar}{2mc} (\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t})$$

Anwendung auf stationäre Lösung: $\psi_E(x) = e^{-iEt/\hbar} \psi_E(\vec{x})$

$$\frac{\partial \psi_E}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} \psi_E, \frac{\partial \psi_E^*}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} \psi_E^* \Rightarrow \rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} |\psi_E(\vec{x})|^2 \frac{-2iE}{\hbar} = \frac{E}{mc^2} |\psi_E(x)|^2$$

$\rho < 0$ für Zustände mit $E < 0$
$\Rightarrow$ Keine mögliche Wahrscheinlichkeitsdichte. (Ok für Zustände mit positiver Energie)
Interpretation: Zustände mit $E > 0 \Leftrightarrow$ z.B. π^+ und $E < 0 \Leftrightarrow$ z.B. π^-(Antiteilchen zum π^+)
$\rho > 0$: π^+ dominieren $\rho < 0$: π^- dominieren
$\rho \propto$ elektromagn. Ladungsdichte

$$j^\mu = |e| \frac{i\hbar}{2mc} (\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*)$$

Elektronen: Spin
$\rightarrow$ Wellenfunktion $\psi(x)$ hat ≥ 2 Komponenten

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ ... \\ \psi_N(x) \end{pmatrix}$$

Möglichkeit: Matrixstruktur für $\hat{H}$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = \hat{H} \psi(x)$$