Contents

Chapter 7

Quantisierung des Strahlungsfeldes

Wiederholung (siehe http://de.wikipedia.org/wiki/Maxwell-Gleichungen) :

Name	**SI**	**Physikalischer Bedeutung**
Gaußsches Gesetz	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	Elektrische Feldlinien divergieren voneinander unter Anwesenheit elektrischer Ladung, die Ladung ist Quelle des elektrischen Feldes.
Gaußsches Gesetz für Magnetfelder	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	Magnetische Feldlinien divergieren nicht, das magnetische Feld ist quellenfrei; es gibt keine magnetischen Monopole.
Induktionsgesetz von Faraday	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Änderungen der magnetischen Flussdichte führt zu einem elektrischen Wirbelfeld.
Erweitertes ampèresches Gesetz	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	Elektrische Ströme – einschließlich des Verschiebungsstroms – führen zu einem magnetischen Wirbelfeld.

Potentiale:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Eichfreiheit für $\phi, \vec{A}$
Maxwell $\Rightarrow$

$$\vec{\nabla}\vec{E} = -\vec{\nabla}^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \tag{7.1}$$

$$= \underbrace{(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2)}_{\Box}\phi - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{7.2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Leftrightarrow$$

$$\Box\vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}) = \mu_0 \vec{j}$$

Coulomb Eichung: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

$$\Rightarrow \phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3\vec{x}' \, \frac{\rho(\vec{x}, t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Zunächst betrachte freier Fall $\rho = 0, \vec{j} = 0 \Rightarrow \phi = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\Box \vec{A} = 0}$$

vergleiche Klein-Gorddon-Gleichung $\left(\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)\psi = 0$
Lösung: ebene Wellen

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$$

$$\Box \vec{A} = 0 \Leftrightarrow -\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2 = 0 \Leftrightarrow \omega = c|\vec{k}|$$

Eichbedingung: $\nabla \vec{A} = 0 \Leftrightarrow i\vec{k}\vec{A}_0 = 0 \Rightarrow \vec{A}_0 \perp \vec{k} \Rightarrow$ transversale Wellen
Klassische Energie des Strahlungsfeldes

$$H_{rad} = \frac{1}{2}\int (\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2) d^3\vec{x}$$

in einem endlichen Kasten mit periodischen Randbedingungen
Forderung:

$$\vec{A}(x_1 = -\frac{L}{2}, x_2, x_3, t) = \vec{A}(x_1 = +\frac{L}{2}, x_2, x_3, t)$$

usw.
Lösungen sind

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{f}_{r,\vec{k}}(\vec{x}) e^{-i\omega t} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{V}}\vec{\epsilon}_r(k) e^{i\vec{k}\vec{x}}}_{\vec{f}_{r,\vec{k}}(\vec{x})} e^{-i\omega t}$$

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3) \neq 0 \qquad n_i \in \mathbb{Z}$$

Wähle $\vec{\epsilon}_r(\vec{k})$ so dass $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3, \hat{k} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ ein rechtshändiges Orthonormalsystem bilden.

$$\vec{\epsilon}_r(\vec{k}) \cdot \vec{\epsilon}_s(\vec{k}) = \delta_{rs}$$

$$\vec{\epsilon}_r(\vec{k}) \cdot \vec{k} = 0$$

$$\epsilon_1 \times \epsilon_2 = \hat{k} \qquad \text{und zyklisch}$$

$\vec{A}(\vec{x}, t)$ darstellbar als Fourierreihe

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{r,\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} \left[a_r(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} + a_r^*(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}\right] \vec{\epsilon}_r(\vec{k})$$

$\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}}$ Faktor damit $a_r(\vec{k})$ dimensionslos sind. Einheiten: $[\vec{A}] = [\vec{E} \cdot t] = \frac{N}{C}s$

$$[\frac{\hbar}{\epsilon_0 V \omega}] = \frac{Nms}{\frac{C^2}{Nm^2} m^3 \frac{1}{s}} = \frac{N^2 s^2}{C^2} \qquad \checkmark$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{r,\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_k}} \left[\vec{f}_{r,\vec{k}}(\vec{x}) a_r(\vec{k}, t) + \vec{f}_{r,-\vec{k}}(\vec{x}) a_r^*(\vec{k}, t)\right]$$

mit $a_r(\vec{k},t) = a_r(\vec{k})e^{-i\omega_k t}$
Im endlichen Kasten ($V = L^3$)

$$\int_V d^3\vec{x}\vec{f}_{r,\vec{k}}(\vec{x})\vec{f}^*_{r',\vec{k}'}(\vec{x}) = \delta_{\vec{k},\vec{k}'}\delta_{rs}$$

$$H_{rad} \approx \int(\vec{E}^2 + c^2\vec{B}^2)d^2\vec{x}$$

mit $\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \sum_{r,\vec{k}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_k}}(-i\omega_k)\left[a_r(\vec{k},t) - \delta_r a_r^*(-\vec{k},t)\right]f_{r,\vec{k}}(\vec{x})$
mit $\delta_r = \pm 1$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \sum_{r,\vec{k}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_k}}\left[a_r(\vec{k},t) + \delta_r a_r^*(-\vec{k},t)\right]i\vec{k}\times f_{r,\vec{k}}(\vec{x})$$

$$\int\vec{B}^2 d^3\vec{x} \approx \int(\underbrace{\vec{k}\times\vec{f}_{r,\vec{k}}(\vec{x}))(\vec{k}'\times\vec{f}^*_{r',\vec{k}'}(\vec{x})}_{\vec{k}^2\vec{f}_{r,\vec{k}}\vec{f}^*_{r',\vec{k}'} - \vec{k}\vec{f}^*_{r',\vec{k}'}(\vec{x})\vec{k}'\vec{f}_{r,\vec{k}}(x)})d^3\vec{x} \tag{7.3}$$

$$= \delta_{\vec{k},\vec{k}'}(\vec{k}^2\underbrace{\epsilon_r(\vec{k})\vec{\epsilon}_{r'}(\vec{k})}_{\delta_{r,r'}} - \underbrace{\vec{k}\vec{\epsilon}_{r'}(\vec{k})}_{0}\quad_{=0}\quad\underbrace{\vec{k}\vec{\epsilon}_r(\vec{k})}_{\text{da}\quad\vec{k}\perp\vec{\epsilon}_r} \tag{7.4}$$

$$= |\vec{k}|^2\delta_{\vec{k},\vec{k}'}\delta_{rr'} \tag{7.5}$$

Einsetzen in H_{rad}

$$H_{rad} = \frac{\epsilon_0}{2}\sum_{r,\vec{k}}\{(a_r(\vec{k},t) - \delta_r a_r^* r(-\vec{k},t))(\delta_r a_r(-\vec{k},t) - a_r^*(\vec{k},t))(-\omega_k^2) \tag{7.6}$$

$$+ (a_r(\vec{k},t) + \delta_r a_r(-\vec{k},t) + a_r^*(\vec{k},t))\underbrace{(c\vec{k})^2}_{\omega_k^2}\} \tag{7.7}$$

$$= \epsilon_0\sum_{r,\vec{k}}\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_k}\omega_k^2(a_r(\vec{k},t)a_r^* r(\vec{k},t) + a_r^* r(+\vec{k},t)a_r^* r(+\vec{k},t)) \tag{7.8}$$

$$= \sum_{r,\vec{k}}\hbar\omega_k\frac{1}{2}(a_r(\vec{k})a_r^*(\vec{k}) + a_r^*(\vec{k})a_r(\vec{k})) \tag{7.9}$$

vergleiche mit Harmonischen Oszillator $H = \hbar\omega\frac{1}{2}(a^\dagger a + aa^\dagger) \equiv \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$

7.0.1 Spektrum des quantisierten Strahlungsfeldes

Für jeden Mode $\vec{k}, r$

1 Phonton $E = \hbar\omega_k$
2 Phonton $E = 2\hbar\omega_k$
$n(\vec{k},r)$ Phonton $E = \hbar\omega_k n(\vec{k},r)$

Quantisierungsbedingung für das Strahlungsfeld, $a_r(\vec{k}), a_r^\dagger(\vec{k})$ als Auf und Absteigeoperatoren:

$$[a_r(\vec{k}), \vec{a}_s^\dagger(\vec{k}')] = \delta_{rs}\delta_{\vec{k},\vec{k}'}$$

$$[a_r(\vec{k}), \vec{a}_s(\vec{k}')] = 0$$

$$H_{rad} = \sum_{r,\vec{k}}\hbar\omega_k(\underbrace{a_r^\dagger(\vec{k})a_r(\vec{k})}_{N_r(\vec{k})} + \frac{1}{2})$$

Grundzustand : $|0\rangle$ mit $a_r(\vec{k})|0\rangle = 0$ hat Energie

$$E_0 = \frac{1}{2}\sum_{r,\vec{k}} \hbar\omega_k = \infty$$

Messe Energie relativ zum Grundzustand

$$H_{rad} = H_{rad} - E_0$$

$$\boxed{H_{rad} = \sum_{r,\vec{k}} \hbar\omega_k (\underbrace{a_r^\dagger(\vec{k})a_r(\vec{k})}_{N_r(\vec{k})})}$$

Harmonischer Oszillator für jeden Mode $(\vec{k}, r)$

$$\vec{p}_{rad} = \sum_{\vec{k},r} \hbar\vec{k}N_r(\vec{k})$$

mit Teilchenzahloperator $N(\vec{k}) = a_r^\dagger(\vec{k})a_r(\vec{k})$ mit Mode $(\vec{k}, r)$ Eigenzustände von $N_r(\vec{k})$ (und $H_{rad}, \vec{p}_{rad}$)

$$|n_r(\vec{k}) = n\rangle = \frac{(a_r^\dagger(\vec{k}))^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$$

Allgemeiner Zustand: Produkt über Moden (<u>Fock Raum</u> für Photonen):

$$|...n_r(\vec{k})...\rangle = \prod_{\vec{k},r} |n_r(\vec{k})\rangle \in \mathcal{H}_{rad} = \otimes_{\vec{k},r}\mathcal{H}^{H0}_{\vec{k},r}$$

Grundzustand: $|0\rangle$ def. durch $a_r(\vec{k})|0\rangle = 0$

- 1 Photon Zustand: $a_r^\dagger(\vec{k})|0\rangle = |\vec{k}, r\rangle$
- 2 Photon Zustand: $a_{r1}^\dagger(\vec{k}_1)a_{r2}^\dagger(\vec{k}_2)|0\rangle = |(\vec{k}_1, r_1), (\vec{k}_2, r_2)\rangle$

sind Eigenzustände zu $H_{rad}, \vec{P}_{rad}$

$$H_{rad}a_r^\dagger(\vec{k})|E, \vec{P}\rangle = [H_{rad}, a_r^\dagger] + a_r^\dagger(\vec{k})\underbrace{H_{rad}}_{E}|E, \vec{p}\rangle$$

mit $[H_{rad}, a_r^\dagger] = \hbar\omega_k[a_r^\dagger(\vec{k})a_r(\vec{k}), a_r^\dagger(\vec{k})] = \hbar\omega_k a_r^\dagger(\vec{k})$

$$H_{rad}a_r^\dagger(\vec{k})|E, \vec{P}\rangle = (\hbar\omega_k + E)a_r^\dagger(\vec{k})|E, \vec{P}\rangle$$

$a_r^\dagger(\vec{k})$ erzeugt extra Photon im Zustand mit Energie $\hbar\omega_k$ und Impuls $\hbar\vec{k}$
$\Rightarrow a_r^\dagger(\vec{k})$ ist Erzeugungsoperator für 1 Photon
$\Rightarrow a_r(\vec{k})$ ist Vernichtungsoperator für 1 Photon

Allgemeiner 1 Photon zustand:

$$|1\rangle = \sum_{\vec{k},r} \psi(\vec{k}, r)a_r^\dagger(\vec{k})|0\rangle$$

Bose Symmetrie (Fall n=2, gilt für alle n)

$$|(\vec{k}_1, r_1), (\vec{k}_2, r_2)\rangle = a_{r1}^\dagger(\vec{k}_1)a_{r2}^\dagger|0\rangle = a_{r2}^\dagger(\vec{k}_2)a_{r1}^\dagger(\vec{k}_1)|0\rangle$$

$$= |(\vec{k}_2, r_2), (\vec{k}_1, r_1)\rangle$$

ist automatisch Bose-symmetrisch!
Vektor potential des quantisierten Feldes:

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \vec{A}^{+}(\vec{x},t) + \vec{A}^{-}(\vec{x},t)$$

ist linear in erzeugern und Vernichtern:

$$\vec{A}^{-}(\vec{x},t) = \sum\nolimits_{\vec{k},r} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} \vec{\epsilon}_r(\vec{k}) a_r^{\dagger}(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\vec{x}-\omega_k t)}$$

$$\vec{A}^{+}(\vec{x},t) = \sum\nolimits_{\vec{k},r} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} \vec{\epsilon}_r(\vec{k}) a_r(\vec{k}) e^{+i(\vec{k}\vec{x}-\omega_k t)}$$

ist linear in erzeugern und Vernichtern:

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind Operatoren auf dem Fock Raum.
$\vec{x}, t$ sind Parameter der Felder $\vec{E}(\vec{x},t), \vec{A}(\vec{x},t)$... (sind keine Operatoren)
Klassischer Limes

$$\vec{E}_{\text{Klassisch}}(\vec{x},t) = \langle A|\vec{E}(\vec{x},t)|A\rangle \qquad |A\rangle \in \mathcal{H}_{rad}$$

A darf keine feste Anzahl (=n) Photoonen haben.

$$|B\rangle = |n \text{ Photonen}\rangle \Rightarrow \underbrace{\vec{A}(\vec{x},t)}_{\vec{A}^{+}+\vec{A}^{-}} |n \text{ Photonen}\rangle = \#|n-1\rangle + \#|n+1\rangle$$

$$\langle n|\vec{A}(\vec{x},t)|n\rangle$$

Zustände mit vorgegebener fester Photonenzahl $\not\Leftrightarrow$ Klassischer Zustände. Klassischer Limes entspricht den Kohärenten Zuständen.

7.1 Wechselwirkung Strahlung in Materie

Materie: N Punktteilchen, Masse m_i, Ladung e_i.

$$\tilde{H}_m = \sum_i^N \frac{1}{2} m_i (\frac{d\vec{r}_i}{dt})^2 + H_C$$

mit Coulomb WW.

$$H_C = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{e_i e_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

mit der Beziehung: $\sum_{i,j;i\neq j} = 2\sum_{i,j;i<j}$
Strahlungsfeld in Coulomb Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$
aber:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{x},t)}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N e_i \delta^3(\vec{x} - \vec{r}_i(t)) \neq 0$$

$\Rightarrow \vec{E}$ hat longitudinale Komponente $\vec{E}_L$

$$\vec{E} = \vec{E}_L + \vec{E}_T = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi \qquad \text{mit } \vec{\nabla} \times \vec{E}_L = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_T = 0$$

Es gilt $\boxed{\vec{E}_L = -\vec{\nabla}\phi, \quad \vec{E}_T = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$ wegen $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - T = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$
Energie des e.m.Feldes

$$H_{e.m.} = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\vec{x}(\vec{E}^2 + c^2\vec{B}^2) \tag{7.10}$$

$$= \underbrace{\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\vec{x}(\vec{E}_T^2 + c^2\vec{B}^2}_{H_{rad}} + \vec{E}_L^2 + \cancel{2\vec{E}_L \cdot \vec{E}_T}) \tag{7.11}$$

NR: $\vec{E}_L \cdot \vec{E}_T = \vec{\nabla}\phi \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\phi \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) - \phi \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\vec{\nabla}\vec{A}}_{=0} \rightarrow$ Oberflächenterm $\rightarrow 0$

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int \underbrace{\vec{E}_L^2}_{(-\vec{\nabla}\phi)^2} d^3\vec{x} = -\frac{\epsilon_0}{2} \int \phi \underbrace{\nabla^2\phi}_{-\frac{\rho(\vec{x},t)}{\epsilon_0}} d^3\vec{x} \tag{7.12}$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3\vec{x}\rho(\vec{x},t) \frac{\rho(\vec{x}',t)}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}-\vec{x}'|} \tag{7.13}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \frac{e_i e_j}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)|} \tag{7.14}$$

$$= H_C + E_S \tag{7.15}$$

(E_S = Selbstenergie der N Teilchen)
H_C schon in $\tilde{H}_m$ enthalten
Korrekter Kanonischer Impuls für $\tilde{H}_m$

$$\vec{p}_i = m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} + e_i \vec{A}(\vec{r}_i(t), t)$$

$$\Rightarrow \tilde{H}_m = \sum_i \frac{1}{2m_i}(\vec{p}_i - e_i \underbrace{\vec{A}(\vec{r}_i)}_{\vec{A}_i})^2 + H_C$$

$$\tilde{H}_m = \underbrace{\sum_i \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + H_C}_{H_m} + \underbrace{\sum_i \frac{1}{2m_i}(-e_i\vec{p}_i A_i - e_i\vec{A}_i p_i + e_i^2 A_i^2)}_{H_I}$$

in Coulomb Eichung gilt: $\vec{p}_i \cdot \vec{A}_i = \vec{A}_i \cdot \vec{p}_i$ wegen $\vec{\nabla}\vec{A} = 0$

$$H_I = \sum_{i=1}^{N} \{ i\frac{e_i\hbar}{m_i}\vec{A}(\vec{r}_i, t) \cdot \vec{\nabla}_i + \frac{e_i^2}{2m_i}\vec{A}^2(\vec{r}_i, t) \}$$

$\Rightarrow$ Störungentwicklung für

$$H = \underbrace{H_{rad} + H_m}_{H_0} + H_I$$

7.2 Materie + Strahlung

$$H = \underbrace{H_m + H_{rad}}_{H_0} + H_I$$

$$H_I = \sum_{i=1}^{N} (-\frac{e_i}{m_i}\vec{A}(\vec{r}_i, t)\vec{p}_i + \frac{e_i^2}{2m}\vec{A}^2)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k},r} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} \vec{\epsilon}_r(\vec{k})[a_r^\dagger(\vec{k})e^{-i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)} + a_r(\vec{k})e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}]$$

ungestörter Zustand

$$|A; ...n_r(\vec{k})...\rangle = |A\rangle|...n_r(\vec{k})...\rangle$$

$|A\rangle$ Eigenzustand von H_m

$$H_m|A\rangle = E_A|A\rangle$$

<u>Emission</u> von einem Photon:

$$A \to B + \gamma$$

Vergleiche mit Fermi-Goldener-Regel:

$$w_{i\to n} = \frac{2\pi}{\hbar}|V_{ni}|^2\delta(E_n - E_i)$$

Übergangswahrscheinlichkeit/Zeit

$$p_r(\vec{k}) = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle B; ...n_r(\vec{k}) + 1...|H_I|A; ...n_r(\vec{k})...\rangle|^2 \cdot \delta(E_A - E_B - \hbar\omega_k)$$

Zerfallswarcheinlichkeit/Zeit

$$w_r = \sum_{\vec{k}} p_r(\vec{k}) = \frac{V}{(2\pi)^3}\sum_{\vec{k}} \underbrace{(\frac{2\pi}{L})^3}_{\Delta^3 k} p_r(\vec{k}) \to \frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{k} p_r(\vec{k})$$

Matrixelement:

$$\langle B; n_r(\vec{k}) + 1|H_I|A; n_r(\vec{k})\rangle = -\sum_i \frac{e_i}{m_i}\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_o V\omega_k}} \underbrace{\langle n_r(\vec{k}) + 1|a_r^\dagger(\vec{k})|n_r(\vec{k})\rangle}_{\sqrt{n_r(\vec{k})+1}} \langle B|e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_i}\epsilon_r(\vec{k}) \cdot \vec{p}_i|A\rangle$$

- $V_{ni} \propto \sqrt{n+1} \to w_r \propto (n+1) \to$ Stimulierte Emission für große n : Laser
- Emission auch für $n = 0$. Aber klassisch $\vec{E} = 0 = \vec{B} \Rightarrow \vec{A} = 0 \Rightarrow H_I = 0$. spontane Emission ist rein QM.

Dipolapproximation für $\langle B|e^{-ikr}...|A\rangle$:

$$e^{-i\vec{k}\vec{r}_i} \approx 1 - i\vec{k}\vec{r}_i \approx 1$$

und den Impulsoperator können wir schreiben als:

$$\vec{p}_i = \frac{m_i}{i\hbar}[\vec{x}_i, \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i}] = \frac{m_i}{i\hbar}[\vec{x}_i, H_m]$$

$$\Rightarrow \langle B| \sum_i \underbrace{e^{-i\vec{k}\vec{r}_i}}_{\approx 1} \frac{e_i}{m_i} \vec{p}_i |A\rangle \tag{7.16}$$
$$= \frac{1}{i\hbar} \langle B| [\sum_i e_i \vec{x}_i, H_m] |A\rangle \tag{7.17}$$
$$= \frac{1}{i\hbar}(E_A - E_B) \langle B| \sum_i e_i \vec{x}_i |A\rangle \tag{7.18}$$
$$= \frac{1}{i\hbar}(E_A - E_B) e \vec{X}_{AB} \tag{7.19}$$
$$= (-im\omega \vec{X}_{AB}) \frac{e}{m} \tag{7.20}$$

mit $\omega = \omega_k = \frac{E_A - E_B}{\hbar}$ und m=Elektronenmasse
$\Rightarrow$ Zerfallswarhscheinlichkeit/Zeit

$$\langle B; n_r(\vec{k}) + 1 | H_I | A; n_r(\vec{k}) \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{\epsilon_0}} \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \sqrt{n_r(k) + 1} \frac{e}{m} (-im\omega \vec{X}_{AB} \vec{\epsilon}_r(\vec{k}) \tag{7.21}$$
$$\tag{7.22}$$

$$\Rightarrow w_r = \sum_{\vec{k}} \frac{(2\pi)^3}{V} \frac{\hbar}{\epsilon_0} \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k} (n_r(\vec{k}) + 1) \frac{2\pi}{\hbar} \delta(\hbar\omega - E_A + E_B) \frac{e}{m^2} | - im\omega \vec{\epsilon}_r(\vec{k}) \vec{X}_{AB}|^2 \tag{7.23}$$
$$= \int d^3\vec{k} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \frac{\hbar c}{\pi m^3 2\omega_k} (n_r(\vec{k}) + 1) | - im\omega \vec{\epsilon}_r(\vec{k}) \vec{X}_{AB}|^2 \delta(\hbar\omega - E_A + E_B) \tag{7.24}$$

NR: $d^3\vec{k} = d\Omega \frac{(ck)^2 d(ck)}{c^3} = d\Omega \frac{\omega^2}{\hbar^3} d(\hbar\omega)$

$$w_r = \int d\Omega \alpha \frac{\omega}{m^2 c^2 2\pi} (n_r(k) + 1) m^2 \omega^2 |\epsilon_r(\vec{k}) \vec{X}_{AB}|^2$$

$$\boxed{w_r = \int d\Omega \alpha \frac{\omega^3}{2\pi c^2} |\epsilon_r(\vec{k}) \vec{X}_{AB}|^2 (n_r(k) + 1)}$$

Spontane Emission $n_r(k) = 0$
Keine Polarisation : $\sum_{r=1,2}$

$$\int d\Omega \sum_r |\vec{X}\vec{\epsilon}|^2 \tag{7.25}$$
$$= \int d\Omega \vec{X}^* (\underbrace{\vec{\epsilon}_1 \vec{\epsilon}_1 \vec{X} + \vec{\epsilon}_2 \vec{\epsilon}_2 \vec{X} + \hat{K}\hat{K}\vec{X}}_{\vec{X}} - \hat{K}\hat{K}\vec{X}) \tag{7.26}$$
$$= \int d\Omega (|\vec{X}|^2 - \underbrace{|\vec{X}\hat{K}|^2}_{|\vec{X}| cos^2\theta} = |\vec{X}|^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{4\pi} \underbrace{2 \int_0^1 dcos\phi (1 - cos^2\theta)}_{\frac{2}{3}} \tag{7.27}$$
$$= \frac{2\pi}{3} |\vec{X}|^2 \tag{7.28}$$

$$w_{A\to B} = \alpha \frac{\omega^3}{2\pi c^2} \frac{8\pi}{3} |\vec{X}_{AB}|^2$$

$$\boxed{w_{A\to B} = \alpha \frac{4}{3} \frac{\omega^3}{c^2} |\vec{X}_{AB}|^2}$$

Lebensdauer des Zustands $|A\rangle$

$$\boxed{\frac{1}{\tau_A} = \sum_B w_{A\to B}}$$

7.3 Planck'sche Strahlungsformel für Schwarzkörperstrahlung

Übergang $A \to B + \gamma$ im thermischen Gleichgewicht.
Anzahl der Atome in Level A $N(A) \propto e^{-E_A/kT}$
Anzahl der Atome in Level B $N(B) \propto e^{-E_B/kT}$

$$\frac{N(B)}{N(A)} = \frac{e^{-E_B/kT}}{e^{-E_A/kT}} = e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}$$

Gleichgewichtsbedingung:

$$N(B) w_{abs.} = N(A) w_{emmiss.}$$

$$w_{emmis.} = \alpha \frac{\omega}{2\pi m^2 c^2} |\langle B| \sum e^{-i\vec{K}\vec{r}_i} \vec{\epsilon}_r \vec{p}_i |A\rangle|^2 (n_r(\vec{k}) + 1)$$

$$w_{abs} = \alpha \frac{\omega}{2\pi m^2 c^2} |\langle A| \sum e^{i\vec{K}\vec{r}_i} \vec{\epsilon}_r \vec{p}_i |B\rangle|^2 n_r(\vec{k})$$

Das Matrixelement von w_{abs} ist genau das komlex konjugierte von $w_{emmis.}$

$$\Rightarrow \frac{w_{emiss}}{w_{abs}} = \frac{n_r(k) + 1}{n_r(k)} = 1 + \frac{1}{n_r(\vec{k})}$$

$$\frac{N(B)}{N(A)} = e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}$$

$$\Rightarrow \boxed{n_r(\vec{k}) = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}} \qquad \text{vergleiche Einstein-Bose-Statistik}$$

Energie im Strahlungsfeld pro Volumeneinheit

$$\int U(\omega) d\omega = \frac{1}{V} \sum_{r,\vec{k}} n_r(\vec{k}) \hbar\omega_k = \underbrace{\frac{(2\pi)^3}{V} \sum_{r,\vec{k}}}_{\int d^3k \cdot 2} n_r(\vec{k}) \hbar\omega \frac{1}{(2\pi)^3} \tag{7.29}$$

$$= 8\pi \int \frac{k^2 dck}{c^3} \frac{\hbar\omega}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \tag{7.30}$$

$$= \frac{8\pi\hbar}{c^3} \int d\omega (\frac{\omega}{2\pi})^3 \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \tag{7.31}$$

$$U(\omega) = \frac{8\pi\hbar}{c^3} (\frac{\omega}{2\pi})^3 \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} = u(\nu) \frac{d\omega}{d\nu} = \frac{1}{2\pi} u(\nu)$$

mit $\frac{d\omega}{d\nu} = \frac{1}{2\pi}$

$$\Rightarrow u(\nu) = 2\pi U(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} r^3 \frac{1}{e^{\hbar\nu/kT} - 1}$$

$$\boxed{u(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} r^3 \frac{1}{e^{\hbar\nu/kT} - 1}}$$