

# Contents

|          |  |          |
|----------|--|----------|
| <b>6</b> | <b>Kap 6. Relativistische QM</b>   | <b>2</b> |
| 6.0.1    | QM eines freien Teilchens . . . . .                                      | 3        |
| 6.0.2    | Wahrscheinlichkeitserhaltung . . . . .                                   | 4        |
| 6.1      | Dirac Gleichung . . . . .  | 6        |
| 6.1.1    | Wahrscheinlichkeitsstrom . . . . .                                       | 6        |
| 6.1.2    | Elektromagnetische Wechselwirkung . . . . .                              | 7        |
| 6.1.3    | Relativistische Korrekturen . . . . .                                    | 9        |
| 6.1.4    | Dirac Gleichung und Pauli Gl incl. relativistische Korrekturen . . . . . | 9        |
| 6.2      | Hamilton Op. für Pauli Gl mit rel. Korrekturen . . . . .                 | 10       |
| 6.2.1    | Korrekturen zum Wasserstoff spektrum . . . . .                           | 10       |
| 6.2.2    | Ebene Wellen als Lösungen der freien Dirac Gl . . . . .                  | 11       |
| 6.2.3    | Lösung für Impuls ungleich 0 . . . . .                                   | 11       |
| 6.2.4    | Lorentz Transformation . . . . .   | 11       |

## Chapter 6

# Kap 6. Relativistische QM

Notation: Vierer-Vektoren

$$x^\mu = ct, x, y, z = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{r})$$

invariante Länge  $\sqrt{x^2}$

$$x^2 = x \cdot x = x^\mu x_\mu = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu$$

Einsteinsche Summenkonvention:  $\sum_{\mu=0}^3$  für jedes Paar von oberen und unteren Index  
Metrischer Tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -\vec{r})$$

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu = g^{\mu\nu} x^\nu = g^\nu_\nu x^\nu$$

$$g^\nu_\nu = \delta^\nu_\nu = \begin{cases} 1, & \mu = \nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} \rightarrow g^{\mu\nu} = [g_{\mu\nu}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vierer-Impuls:  $p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p})$   $E = \sqrt{(mc^2)^2 + (\vec{p}c)^2}$

$$p^2 = p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = \frac{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2$$

Vierer-Potential: LT  $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$

$$A^\mu = (\frac{\phi}{c}, \vec{A}) \rightarrow A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x)$$

Strom:  $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$  in E und M

Skalarprodukt für  $a^\mu, b^\mu$ :  $a \cdot b = a^\mu b_\mu = a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$

Ableitung nach  $x^\nu$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla})$$

ist kovarianter Vektor unter Index wg:  $\partial_\mu a \cdot x = \frac{\partial}{\partial x^\mu} (a_\nu x^\nu) = a_\mu$

Entsprechend  $\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu = (\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla})$

d'Alebert Operator

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$$

## 6.0 QM eines freien Teilchens

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$$

$$p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p}) \rightarrow (i\hbar \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar \vec{\nabla}) = i\hbar \partial^\mu$$

Schrödinger Gl. für NR freies Teilchens

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \psi(\vec{x}, t)$$

Relativistischer Fall

- 1)  $E = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2} \rightarrow$  nichtlokalen Operator
- 2)  $\frac{E^2}{c^2} = m^2 c^2 + \vec{p}^2 \rightarrow -\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = m^2 c^2 \psi - \hbar^2 \vec{\nabla}^2 \psi$

$$\Leftrightarrow 0 = m^2 c^2 \psi + \hbar^2 \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \psi = m^2 c^2 \psi + \hbar^2 \square \psi$$

Klein Gordon Gl.

$$(\square + (\frac{mc}{\hbar})^2) \psi(x) = 0$$

Anwendbar auf skalare Teilchen (Spin 0) wie  $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ,  $\pi^0$ ,  $K$ ,  $H$

Lösungen der KG-Gl. durch ebene Wellen

$$\psi_p(x) = N e^{-ip \cdot x / \hbar} = N e^{-iEt/\hbar} e^{+i\vec{p} \cdot \vec{x} / \hbar}$$

mit  $p \cdot x = p^\mu x_\mu = Et - \vec{p} \cdot \vec{x}$

$$\square \psi_p(x) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi_p(x) = N \left( -\frac{i}{\hbar} p_\mu \right) \left( -\frac{i}{\hbar} p^\mu \right) e^{-ip \cdot x / \hbar} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \psi_p$$

KG:

$$\Rightarrow \left( -\frac{p^2}{\hbar^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi_p(x) = 0 \Leftrightarrow p^2 = m^2 c^2; \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2$$

$$\rightarrow E = \pm c \sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2}$$

Lösungen mit Negativer Energie und das Energiespektrum ist nach unten nicht beschränkt.

## 6.0 Wahrscheinlichkeitserhaltung

Kontin.Gl  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu j^\mu = 0$  mit  $j^\mu = (\rho c, \vec{j})$ .

Gibt es einen erhaltenen 4-Strom für die Lösung der KG-Gleichung?

$$\psi^* \left( \square + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \psi(x) - \psi \left( \square + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \psi^*(x) = 0$$

$$\psi^* (\partial_\mu \partial^\mu \psi) - \psi (\partial_\mu \partial^\mu \psi^*) = 0$$

$$\partial_\mu \underbrace{(\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*)}_{\propto j^\mu} = 0$$

$$j^\mu \propto \left( \psi^* \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \psi^*, -(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) \right)$$

Kandidat für Wahrscheinlichkeits Strom  $\frac{2im}{\hbar} \vec{j}$  in Schrödinger Gl

$$j^\mu = \frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*)$$

$$\rightarrow j^0 = \rho c = \frac{i\hbar}{2mc} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right)$$

Anwendung auf stationäre Lösung:  $\psi_E(x) = e^{-iEt/\hbar} \psi_E(\vec{x})$

$$\frac{\partial \psi_E}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} \psi_E, \frac{\partial \psi_E^*}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} \psi_E^* \Rightarrow \rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} |\psi_E(\vec{x})|^2 \frac{-2iE}{\hbar} = \frac{E}{mc^2} |\psi_E(x)|^2$$

$\rho < 0$  für Zustände mit  $E < 0$

$\Rightarrow$  Keine mögliche Wahrscheinlichkeitsdichte. (Ok für Zustände mit positiver Energie)

Interpretation: Zustände mit  $E > 0 \Leftrightarrow$  z.B.  $\pi^+$  und  $E < 0 \Leftrightarrow$  z.B.  $\pi^-$  (Antiteilchen zum  $\pi^+$ )

$\rho > 0$ :  $\pi^+$  dominieren  $\rho < 0$ :  $\pi^-$  dominieren

$\rho \propto$  elektromagn. Ladungsdichte

$$j^\mu = |e| \frac{i\hbar}{2mc} (\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*)$$

Elektronen: Spin

$\rightarrow$  Wellenfunktion  $\psi(x)$  hat  $\geq 2$  Komponenten

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \dots \\ \psi_N(x) \end{pmatrix}$$

Möglichkeit: Matrixstruktur für  $\hat{H}$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = \hat{H} \psi(x)$$

$$\text{Ansatz: } i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi \text{ mit } \psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \dots \\ \psi_N(x) \end{pmatrix}$$

und Wahrscheinlichkeitsdichte  $\rho = \sum_{i=1}^N |\psi_i|^2$

$$\Rightarrow \hat{H} \propto \frac{\partial}{\partial x^i} \propto \hat{p}_i$$

Ansatz für  $\hat{H}$

$$\hat{H} = c(\alpha_x \hat{p}_x + \alpha_y \hat{p}_y) + \beta mc^2 = c \sum_{i=1}^3 \alpha_i \hat{p}_i + \beta mc^2$$

Ebene Wellenlösung für freie Teilchen

$$\psi(x) = e^{-px/\hbar} \psi(p)$$

mit  $p^2 = m^2 c^2$

$$\Rightarrow E\psi(p) = [c \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta mc^2] \psi(p)$$

$$E^2 \psi(p) = (m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2) \psi(p)$$

$$Ec(\vec{\alpha} \vec{p} + \beta mc) \psi(p) = c^2 (\vec{\alpha} \vec{p} + \beta mc)^2 \psi(p)$$

$$= c^2 \left( \sum_{i,j=1}^3 \alpha_i \alpha_j p_i p_j + \sum_{i=1}^3 (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i mc + \beta^2 m^2 c^2 \right) \psi(p)$$

Koeffizientenvergleich:  $\beta^2 = 1$ ; Antikommutator:

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0$$

- $\boxed{\beta^2 = 1}$
- Antikommutator:  $\boxed{\{\alpha_i, \beta\} = 0}$
- $i \neq j$ : z.B.  $p_x p_y \{\alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x\}$ ;  $\{\alpha_i, \alpha_j\} = 0$
- $i = j$ :  $\alpha_x^2 p_x^2 + \alpha_y^2 p_y^2 + \alpha_z^2 p_z^2 = \vec{p}^2 \Rightarrow \alpha_i^2 = 1$

$$\Rightarrow \boxed{\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}}$$

1)  $\hat{p}_i, \hat{H}$  hermitesch  $\Rightarrow \vec{\alpha}, \beta$  hermitesch

2)  $\alpha_i^2 = 1, \beta^2 = 1 \Rightarrow$  Eigenwerte von  $\alpha_i, \beta$

3)  $\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \quad | \cdot \beta$

$$\Rightarrow \alpha_i = -\beta \alpha_i \beta \Rightarrow Tr[\alpha_i] = -Tr[\beta \alpha_i \beta] = -Tr[\alpha_i \beta^2] = -Tr[\alpha_i]$$

# - Anzahl; N - Dimension der Matrix

# EW +1 = # EW -1

$\Rightarrow N$  gerade ( $N = 2, 4, \dots$ )

$N = 2 \Rightarrow 3$  Pauli Matrizen als Kandidaten benötigt: 4 Matrizen  $\Rightarrow N \geq 4 : N = 4$  funktioniert

$N = 4$ : Dirac Basis:  $\beta$  diagonal

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

$\alpha_i$  hermitesch +  $\{\alpha_i, \beta\} = 0$

$$\alpha = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A & -B \\ C & -D \end{pmatrix}$$

$$A = D = 0, C = B^\dagger$$

$$\beta\alpha = \begin{pmatrix} A & B \\ -C & -D \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \tau_i \\ \tau_i^\dagger & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \Leftrightarrow \tau_i \tau_j^\dagger + \tau_j \tau_i^\dagger = 2\delta_{ij}$$

Lösung  $\tau_i = \sigma_i =$  Pauli Matrizen

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}; \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}}$$

## 6.1 Dirac Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = c(\vec{\alpha} \cdot \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \beta mc) \psi(x) \quad | \cdot \frac{\beta}{\hbar c}$$

Alternativ: kovariante Form

$$\Rightarrow i\beta \underbrace{\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t}}_{\frac{\partial}{\partial x^0}} \psi + i \underbrace{\beta \vec{\alpha}_i}_{\gamma^i} \cdot \underbrace{\vec{\nabla}_i}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \psi - \frac{mc}{\hbar} \psi = 0$$

$$\Rightarrow (i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{mc}{\hbar}) \psi = 0$$

$$\gamma^0 = \beta; \gamma^i = \beta \alpha_i$$

$$\boxed{\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right) \psi = 0}$$

Kovariante Form der Dirac Gleichung mit  $\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1}_4$   
 z.B.  $\{\gamma^i, \gamma^j\} = \beta \underbrace{\alpha_i \alpha_j}_{-\beta \alpha_i} + \beta \underbrace{\alpha_j \alpha_i}_{-\beta \alpha_j} = -\{\alpha_i, \alpha_j\} = -2\delta_{ij}$

## 6.1 Wahrscheinlichkeitsstrom

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi + \beta mc^2 \psi$$

adjungierte Dirac Gleichung:

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i} (\vec{\nabla} \psi^\dagger) \vec{\alpha} + \beta mc^2 \psi^\dagger \quad | \cdot \psi$$

Differenz der beiden Gleichungen:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) = \frac{\hbar c}{i} (\psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi + (\vec{\nabla} \psi^\dagger) \vec{\alpha} \psi)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) = -c \vec{\nabla} (\psi^\dagger \vec{\alpha} \psi)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\psi^\dagger \psi)}_\rho + \vec{\nabla} \cdot \underbrace{(c\psi^\dagger \vec{\alpha} \psi)}_{\vec{j}}$$

$$\rho = \psi^\dagger \psi = \sum_i |\psi_i|^2 \geq 0$$

$\rho$  ist positiv definierte Wahrscheinlichkeitsdichte  
Kovariante Form des W-Stroms

$$j^\mu = (c\psi^\dagger \psi, c\psi^\dagger \vec{\alpha} \psi) \quad (6.1)$$

$$= (c\psi^\dagger \beta \gamma^0 \psi, c\psi^\dagger \beta \vec{\gamma} \psi) \quad (6.2)$$

$$= c\psi^\dagger \beta \gamma^\mu \psi = c\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (6.3)$$

wobei  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \beta = \psi^\dagger \gamma^0$  der Pauli adjungierte Spinor ist.

## 6.1 Elektromagnetische Wechselwirkung

externe  $\vec{E}, \vec{B}$  Fleder  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$$\rightarrow A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A}\right)$$

minimale Substitution:

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - eA^\mu \quad QM \rightarrow i\hbar \partial^\mu - eA^\mu = i\hbar(\partial^\mu + \frac{ie}{\hbar} A^\mu) = i\hbar D^\mu$$

Komponenten der Kovarianten Ableitung  $D^\mu$

$$i\hbar D^\mu = \left(i\hbar \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{c} \phi, \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - e\vec{A}\right)$$

$$= \left(\frac{i}{c} (c\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi), \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - e\vec{A}\right)$$

Ersetze in freier Dirac-Gl  $\partial$

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = c\vec{\alpha} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - e\vec{A}\right) \psi + \beta mc^2 \psi + e\phi \psi}$$

oder

$$\boxed{(i\gamma^\mu D_\mu - \frac{mc}{\hbar}) \psi = 0}$$

beschreibt WW eines Elektrons der Ladung  $e$  mit dem elektromagnetischen Feld.

Notation:  $\vec{\alpha} \vec{p} \psi = \frac{\hbar}{i} \vec{\alpha} \vec{\nabla} \psi$

$$\text{mit } A = 1 \dots 4 \quad [\vec{\alpha} \vec{p} \psi]_A = \sum_{j=1}^3 \sum_{B=1}^4 \alpha_{jAB} \frac{\hbar}{i} \nabla_j \psi_B(\vec{x}, t) = \left[ \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \vec{p} \\ \vec{\sigma} \vec{p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \right]_A$$

Nichtrel. Grenzfall:  $E = mc^2 + E_S$

Ansatz:

$$\psi(\vec{x}, t) = e^{i\frac{mc^2}{\hbar} t} \begin{pmatrix} \phi(\vec{x}, t) \\ \chi(\vec{x}, t) \end{pmatrix} = e^{i\frac{mc^2}{\hbar} t} e^{i\frac{E_S}{\hbar} t} \begin{pmatrix} \phi_E(\vec{x}, t) \\ \chi_E(\vec{x}, t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow i\hbar \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\chi} \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \vec{p} i \vec{\chi} \\ \vec{\sigma} \vec{p} i \phi \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \phi \\ -\chi \end{pmatrix} + e\phi \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \vec{\pi} = \vec{p} - e\vec{A} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - e\vec{A} = \frac{\hbar}{i} \vec{D}$$

$$\Rightarrow \chi : 2mc^2 \chi + i\hbar \dot{\chi} - e\phi \chi = c\vec{\sigma} \vec{\pi} \phi$$

$$\Rightarrow i\hbar \dot{\phi} = c\vec{\sigma} \vec{\pi} \chi + e\Phi \phi$$

$$\chi \approx \frac{1}{2mc^2} c\vec{\sigma} \vec{\pi} \phi \approx \frac{mv}{2mc} \phi = \frac{1}{2} \frac{v}{c} \phi$$

( $\chi = \frac{1}{2mc^2 + E_S - V} c\vec{\sigma} \vec{\pi} \phi$ )  $\chi$  ist kleine Komponente des Dirac Spinors. Einsetzen von  $\chi$ :

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{c^2 (\vec{\sigma} \vec{\pi})^2}{2mc^2} \phi + V\phi \quad (V = e\Phi)$$

Berechnung von  $(\vec{\sigma} \vec{\pi})^2 = -\hbar^2 \underbrace{\sigma_i \sigma_j}_{\frac{1}{2} [\sigma_i, \sigma_j] + \frac{1}{2} \{\sigma_i, \sigma_j\}} D_i D_j$  mit  $[\sigma_i, \sigma_j] = i\hbar^2 \epsilon_{ijk} \sigma_k$  und  $\sigma_{ij}$

$$(\vec{\sigma} \vec{\pi})^2 = \vec{\pi}^2 - i\hbar^2 \epsilon_{ijk} \sigma_k \underbrace{D_i D_j}_{\frac{1}{2} [D_i, D_j]}$$

$$[D_i, D_j] = [\nabla_i - \frac{i}{\hbar} e A_i, \nabla_j - \frac{i}{\hbar} e A_j] = -\frac{i}{\hbar} e \underbrace{(\nabla_i A_j) - (\nabla_j A_i)}_{\vec{\nabla} \times \vec{A}}$$

$$\Rightarrow (\vec{\sigma} \vec{\pi})^2 = \vec{\pi}^2 - \frac{1}{2} \hbar e \vec{\sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\pi}^2 - 2e \vec{S} \vec{B} \quad (\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma})$$

$$\rightarrow i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\pi^2}{2m} \phi - \frac{e}{2m} 2\vec{S} \vec{B} \phi + V\phi$$

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} \phi - \frac{e}{2m} 2\vec{S} \vec{B} \phi + V\phi} \quad \text{Pauli Gleichung}$$

Schwaches homogenes  $B$ -Feld:  $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$

$$\frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} \approx \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e}{2m} \vec{B} \vec{L}$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\vec{p}^2}{2m} \phi - \frac{e}{2m} \vec{B} (\vec{L} + 2\vec{S}) \phi + V\phi$$

Magnetisches Moment des Elektrons:  $\vec{\mu} = \frac{e}{2m} (\vec{L} + 2\vec{S})$   $g = 2$  für geladenes Dirac-Fermion



## 6.1 Relativistische Korrekturen

Energieeigenzustände:  $\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}(\vec{x}, t) = e^{-E_s t/\hbar} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}(\vec{x}, t)$

Dirac Gleichung ist äquivalent zu

$$(2mc^2 + E_S - V)\chi = c\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi$$

$$E_S\phi = c\vec{\sigma}\vec{\pi}\chi + V\phi$$

$$\Rightarrow \chi = \frac{1}{2mc^2 + E_S - V} c\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi \quad (6.4)$$

$$= \frac{1}{2mc} \frac{1}{1 + \frac{E_S - V}{2mc^2}} \vec{\sigma}\vec{\pi}\phi \quad (6.5)$$

$$\approx \frac{1}{2mc} \left(1 - \frac{E_S - V}{2mc^2} + \dots\right) \vec{\sigma}\vec{\pi}\phi \quad (6.6)$$

$$(E_S - V)\vec{\sigma}\vec{\pi}\phi = \vec{\sigma}\vec{\pi}(E_S - V)\phi + \underbrace{\vec{\sigma}[E_S - V, \vec{\pi}]}_{[\vec{\pi}, V] = \frac{\hbar}{i}(\vec{\nabla}V)}\phi$$

Einsetzen in  $E_S\phi = \dots$

$$(E_S - V)\phi = \frac{(\vec{\sigma}\vec{\pi})^2}{2m}\phi - \frac{\vec{\sigma}\vec{\pi}}{4m^2c^2} \left( \frac{(\vec{\sigma}\vec{\pi})^3}{2m} + \vec{\sigma}\frac{\hbar}{i}(\vec{\nabla}V) \right)\phi$$

Spezialfall:

- $V = V(r)$  sphärisch symmetrisch  $\Rightarrow \vec{\nabla}V = \vec{r}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}$
- $\vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{\pi} = \vec{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \Rightarrow (\vec{\sigma}\vec{\pi})^2 = \vec{p}^2$

$$\Rightarrow E_S\phi = \left( \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + V \right)\phi - \frac{\hbar}{i} \frac{1}{4m^2c^2} \underbrace{\sigma_i\sigma_j}_{i\epsilon_{ijk}\pi_k + \sigma_{ij}} p_i r_j \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \phi$$

$$E_S\phi = \left( \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + V \right)\phi - \hbar \frac{1}{4m^2c^2} \vec{\sigma}(\vec{r} \times \vec{p}) \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \phi + \frac{\hbar^2}{4m^2c^2} \left( (\nabla^2 V) + \underbrace{(\vec{\nabla}) \cdot \vec{\nabla}}_{\text{nicht selbst adjungiert}} \right) \phi$$

Interpretation:

- $-\frac{p^4}{8m^3c^2}$  relativistischer Beitrag zur kin. Energie  
 $E = \sqrt{(mc^2)^2 + p^2c^2} = mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{(mc)^2}} = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m^2c^2} - \frac{1}{8} \frac{p^4}{m^4c^4} + \dots\right) = mc^2 - \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{8} \frac{p^4}{m^3c^2}$
- $\hbar \frac{1}{4m^2c^2} \vec{\sigma}(\vec{r} \times \vec{p}) \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \phi = \frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \vec{L}\vec{S}\phi = H_{LS}$  Korrekte Spin-Bahn Kopplung, inclusive Thomas Präzessionsfaktor  $\frac{1}{2}$

## 6.1 Dirac Gleichung und Pauli Gl incl. relativistische Korrekturen

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} H_\phi \phi$$

mit

$$H_\phi = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V + H_r + H_{LS} + \tilde{H}_D$$

$$H_r = -\frac{1}{8m} \left( \frac{\vec{p}^2}{2m} \right)^2$$

$$H_{LC} = \frac{1}{2m^2 c^2} \frac{1}{\gamma} \frac{dV}{d\gamma} \vec{L} \cdot \vec{S}$$

$$\tilde{H}_D = \frac{\hbar^2}{4m^2 c^2} ((\nabla^2 V) + (\vec{\nabla} V) \cdot \vec{\nabla})$$

$\cdot \vec{\nabla})$  nicht hermitesch

Problem: Wahrscheinlichkeits-Dichte ist

$$\rho = \frac{j^0}{c} = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi = \sum_{i=1} |\psi_i|^2 \quad (6.7)$$

$$= |\phi|^2 + |\chi|^2 \quad (6.8)$$

$$= |\phi|^2 + \left| \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{2mc} \phi \right|^2 \quad (6.9)$$

$$= |\phi|^2 + \phi^\dagger \frac{\vec{p}^2}{4m^2 c^2} \phi \approx \underbrace{\left| \left( 1 + \frac{\vec{p}^2}{8m^2 c^2} \right) \phi \right|^2}_{\phi} \quad (6.10)$$

Übergang zu

$$\phi = \Omega \phi = \left( 1 + \frac{\vec{p}^2}{8m^2 c^2} + \dots \right) \phi$$

Foldy-Wouthuysen Transformation. (Details: Bjorken-Drell relativ. QM)

Ersetze  $E_S \phi = H_\phi \phi$  durch  $E_S \phi = \underbrace{\Omega H_\phi \Omega^{-1}}_H \underbrace{\Omega \phi}_\phi$

$$H = \left( 1 + \frac{\vec{p}^2}{8m^2 c^2} \right) H_\phi \left( 1 - \frac{\vec{p}^2}{8m^2 c^2} \right) \quad (6.11)$$

$$= H_\phi + \left[ \frac{\vec{p}^2}{2m^2 c^2}, H_\phi \right] + \dots = H_\phi + \left[ -\frac{\vec{p}^2}{2m^2 c^2}, V \right] + \dots \quad (6.12)$$

$$\text{NR: } \left[ \frac{\vec{p}^2}{2m^2 c^2}, V \right] = -\frac{\hbar^2}{8m^2 c^2} \underbrace{\left[ \nabla_i \nabla_i, V \right]}_{\nabla_i \underbrace{[\nabla_i, V]}_{(\nabla_i V)} + \underbrace{[\nabla_i, V]}_{(\nabla_i V)} \nabla_i} = [(\nabla^2 V) + 2(\nabla, V) \nabla_i]$$

## 6.2 Hamilton Op. für Pauli Gl mit rel. Korrekturen

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V + H_r + H_{LS} + H_D$$

mit Darwin-Term  $H_D = \frac{\hbar^2}{8m^2 c^2} (\nabla^2 V)$

## 6.2 Korrekturen zum Wasserstoff spektrum

$$E_n^{(0)} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2a_0 n^2}$$

$$\Delta E_n^{(1)} = \alpha^2 E_n^{(0)} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right)$$

Aufspaltung von  $2p_{\frac{1}{2}}$   $2p_{\frac{3}{2}}$   
gleiche Energie für  $2s_{\frac{1}{2}}$   $2p_{\frac{1}{2}}$

## 6.2 Ebene Wellen als Lösungen der freien Dirac Gl

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) = 0$$

Ebene Welle als Ansatz  $\psi = e^{-px/\hbar}w(p)$  mit  $w(p)$ -Spinor im Impulsraum

$$i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi(x) = i\gamma^\mu \left(-\frac{ip_\mu}{\hbar}\right)\psi(x) \quad (6.13)$$

$$= \frac{1}{\hbar} \gamma^\mu p_\mu \psi(x) = \frac{mc}{\hbar} \psi(x) \quad (6.14)$$

Notation:  $\gamma^\mu p_\mu = \not{p}$

$$\boxed{(\not{p} - mc)w(p) = 0}$$

**Spezialfall: Teilchen in Ruhe**

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{0}\right)$$

$$\rightarrow \not{p} = \frac{E}{c} \gamma^0 = \frac{E}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{E}{c} - mc & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{c} - m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E}{c} - mc & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{E}{c} - mc \end{pmatrix} w(\vec{p}) = 0$$

4 Lösungen zu 2EW

$$E = +mc^2 : w_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$E = -mc^2 : w_3(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_4(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  Lösungen mit negativer Energie  $\rightarrow$  Existenz von Positronen.

## 6.2 Lösung für Impuls ungleich 0

1) Matrixgl.  $\not{p}w = mcw$  lösen

2) Lorenztransformation von Inertialsystem IS (Teilchen in Ruhe) in IS' ( $\vec{p} \neq 0$ )

## 6.2 Lorentz Transformation

$$x' = \Lambda x \text{ mit } x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

Bsp: Boost in z-Richtung:  $z' = \gamma(z - vt)$ ,  $t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}z)$ ,  $x' = x$ ,  $y' = y$

LT erhält relativ. Länge

$$x'x' = g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = \underbrace{\Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma g_{\mu\nu}}_{g_{\rho\sigma}} x^\rho x^\sigma = x \cdot c = x^\rho x^\sigma g_{\rho\sigma}$$

Def. Eigenschaft einer LT

$$\Lambda^\rho_\mu \Lambda^\mu_\sigma = g^\rho_\sigma = \delta^\rho_\sigma$$

oder  $(\Lambda^{-1})^\rho_\mu = \Lambda^\rho_\mu$

$\Rightarrow \det \Lambda = \pm 1$  (verallgemeinerung von orthogonalen Transf)

**infinitesimale LT**

Mit  $w_\mu^\rho$  infinitesimal

$$\Lambda_\mu^\rho = g_\mu^\rho + w_\mu^\rho$$

$$\Lambda_\mu^\rho \Lambda_\sigma^\mu = (g_\mu^\rho + w_\mu^\rho)(g_\sigma^\mu + w_\sigma^\mu) \quad (6.15)$$

$$g_\sigma^\rho = g_\sigma^\rho + \underbrace{w_\sigma^\rho + w_\sigma^\rho}_{=0} + \dots \quad (6.16)$$

$$\rightarrow w_{\sigma\rho} + w_{\rho\sigma} = 0, \quad \begin{pmatrix} 0 & w_{01} & w_{02} & w_{03} \\ -w_{01} & 0 & w_{12} & w_{13} \\ & & 0 & w_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6 reelle freie Parameter  $\Rightarrow$  6 Generatoren

$\vec{J}$  (Drehungen) 3  $w_{ij}$   $\vec{K}$  (Boosts) 3  $w_{oi}$