

adjungierter Pauli-Spinor

Um den Adjungierten Pauli-Spinor zu bestimmen wollen wir die adjungierte Dirac-Gleichung herleiten. Dazu gehen wir von der nicht adjungierten freien Dirac-Gleichung aus

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{mc}{\hbar} \psi = 0 \quad (1)$$

Nun adjungieren wir diese Gleichung

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu \psi)^\dagger - \frac{mc}{\hbar} \psi^\dagger &= 0 \\ -i(\partial_\mu \psi)^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger - \frac{mc}{\hbar} \psi^\dagger &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Nun machen wir eine kleine Nebenrechnung

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu)^\dagger &= (\beta, \beta\alpha_1, \beta\alpha_2, \beta\alpha_3)^\dagger \\ &= (\beta^\dagger, (\beta\alpha_1)^\dagger, (\beta\alpha_2)^\dagger, (\beta\alpha_3)^\dagger) \\ &= (\beta^\dagger, (\alpha_1)^\dagger(\beta)^\dagger, (\alpha_2)^\dagger(\beta)^\dagger, (\alpha_3)^\dagger(\beta)^\dagger) \quad \text{mit } \beta^\dagger = \beta \text{ und } (\alpha_i)^\dagger = \alpha_i \\ &= (\mathbf{1} \cdot \beta, \mathbf{1} \cdot \alpha_1 \beta, \mathbf{1} \cdot \alpha_2 \beta, \mathbf{1} \cdot \alpha_3 \beta) \\ &= (\beta \cdot \beta, \beta \cdot \beta \cdot \alpha_1 \beta, \beta \cdot \beta \cdot \alpha_2 \beta, \beta \cdot \beta \cdot \alpha_3 \beta) \\ &= \beta \cdot \underbrace{(\beta, \beta \cdot \alpha_1, \beta \cdot \alpha_2, \beta \cdot \alpha_3)}_{\gamma^\mu} \cdot \beta \end{aligned} \quad (3)$$

Wir bekommen aus der Gleichung (3) eine wichtige Relation mit $\beta = \gamma^0$

$$\boxed{(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0} \quad (4)$$

Setzen wir nun diese Relation in die Gleichung (2) ein und multiplizieren von rechts mit γ^0

$$\begin{aligned} -i(\partial_\mu \psi)^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 - \frac{mc}{\hbar} \psi^\dagger &= 0 \quad | \cdot \gamma^0 \\ -i(\partial_\mu \underbrace{\psi^\dagger \gamma^0}_{\bar{\psi}}) \gamma^\mu \mathbf{1} - \frac{mc}{\hbar} \underbrace{\psi^\dagger \gamma^0}_{\bar{\psi}} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Damit sieht unsere adjungierte Dirac-Gleichung wie folgt aus

$$-i(\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu - \frac{mc}{\hbar} \bar{\psi} = 0 \quad (6)$$

Mit dem **adjungierten Paulispinor**

$$\boxed{\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0} \quad (7)$$

Unter Lorenztransformation verhält sich der adjungierte Paulispinor $\bar{\psi}$ invers zu dem Dirac-Spinor ψ

$$\bar{\psi}' = \psi'^\dagger \gamma^0 = (S(\Lambda)\psi)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger S(\Lambda)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger \mathbf{1} S(\Lambda)^\dagger \gamma^0 = \underbrace{\psi^\dagger \gamma^0}_{\bar{\psi}} \gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0 = \bar{\psi} \gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0 \quad (8)$$

Machen wir eine kleine Nebenrechnung. Mit Hilfe der schon bekannten Beziehung, die sich aus der lorenztransformierten Dirac-Gleichung ergibt

$$\Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu = S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) \quad (9)$$

Die adjungierte dieser Gleichung lautet

$$\Lambda^\mu{}_\nu (\gamma^\nu)^\dagger = S^\dagger(\Lambda) (\gamma^\mu)^\dagger S(\Lambda)^{-1\dagger} \quad (10)$$

Mit Hilfe der Beziehung (4) in die Gleichung (10) ein und mit γ^0 von links und rechts multipliziert ergibt

$$\begin{aligned} \gamma^0 \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^0 \gamma^\nu \gamma^0 \gamma^0 &= \gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 \gamma^\nu \gamma^0 S(\Lambda)^{-1\dagger} \gamma^0 \\ \underbrace{\gamma^0 \gamma^0}_1 \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \underbrace{\gamma^0 \gamma^0}_1 &= \gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 \gamma^\nu \gamma^0 S(\Lambda)^{-1\dagger} \gamma^0 \\ \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu &= \gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 \gamma^\nu \gamma^0 S(\Lambda)^{-1\dagger} \gamma^0 \stackrel{(9)}{=} S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) \end{aligned} \quad (11)$$

Mit der Beziehung $(\gamma^0)^{-1} = \gamma^0$ folgt aus der Gleichung (11)

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 \gamma^\nu (\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0)^{-1} = S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) \quad (12)$$

mit $S(\Lambda)$ von rechts und $S^{-1}(\Lambda)$ von links multipliziert folgt

$$\begin{aligned} S(\Lambda) \gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 \gamma^\nu (\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0)^{-1} S^{-1}(\Lambda) &= \underbrace{S(\Lambda) S^{-1}(\Lambda)}_1 \gamma^\mu \underbrace{S(\Lambda) S^{-1}(\Lambda)}_1 \\ \left(S(\Lambda) \gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 \right) \gamma^\nu \left(S(\Lambda) \gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0 \right)^{-1} &= \gamma^\mu \end{aligned} \quad (13)$$

Wir betrachten hierzu einen allgemeinen Fall

$$\begin{aligned} ABA^{-1} &= B \quad | \cdot A \\ AB &= BA \Leftrightarrow [A, B] = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Für die Gleichung (13) bedeutet dass γ^ν auf jeden Fall mit dem Ausdruck $S(\Lambda) \gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0$ vertauscht. Da aber der Ausdruck nur aus unitären Matrizen bzw Matrizen mit der Determinante ± 1 kann dieser Ausdruck nur eine Einheitsmatrix ergeben.

$$S(\Lambda) \gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \mathbb{1} \quad (15)$$

Mit $S^{-1}(\Lambda)$ von links multipliziert folgt eine wichtige Relation

$$\boxed{\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = S^{-1}(\Lambda)} \quad (16)$$

Diese Relation in die Gleichung (8)

$$\boxed{\bar{\psi}' = \bar{\psi} S^{-1}(\Lambda)} \quad (17)$$

Aus der Gleichung (17) ist ersichtlich, dass der adjungierte Pauli-Spinor bei einer Lorentz-Transformation sich invers zu dem Dirac-Spinor verhält, für den gilt

$$\psi' = S(\Lambda) \psi \quad (18)$$

Diese Eigenschaft wird ausgenutzt um die sogenannte *kovariante Bilinearformen* zu bilden. Die ein definiertes Transformationsverhalten unter Lorentz-Transformation besitzen. Ein Beispiel für eine Bilinearform ist die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x) = \bar{\psi}(x) \psi(x)$ die sich wie folgt transformiert

$$\rho'(x') = \bar{\psi}'(x') \mathbb{1} \psi'(x') = \bar{\psi}(x) \underbrace{S^{-1} S}_1 \psi(x) = \bar{\psi}(x) \psi(x) = \rho(x) \quad (19)$$

Also transformiert sich die Wahrscheinlichkeitsdichte wie ein Skalar. Eine weitere Bilinearform ist der Wahrscheinlichkeitsstrom $j^\mu = c \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$

$$j'^\mu = c \bar{\psi}'(x) \gamma^\mu \psi'(x) = c \bar{\psi}(x) \underbrace{S^{-1} \gamma^\mu S}_{(9)} \psi(x) = c \bar{\psi}(x) \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu \underbrace{c \bar{\psi}(x) \gamma^\nu \psi(x)}_{j^\nu} = \Lambda^\mu{}_\nu j^\nu \quad (20)$$

Damit transformiert sich der Wahrscheinlichkeitsstrom wie ein Vierervektor.

Referenzen

- Schwabl2
- Rollnik Quantentheorie 2
- Wachter Relativistische Quantenmechanik