

Lorentz-Transformation der Dirac-Gleichung

Wir wollen nun die Lorentz-Transformation der Dirac-Gleichung betrachten. Dabei erinnern wir uns dass die 4-Dimensionale Vektoren sich wie folgt transformieren

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (1)$$

Und die vierer-Ableitung transformiert sich wie ein kovarianter Vektor. Beweis

$$\partial'_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\nu} \quad (2)$$

Wir multiplizieren Gleichung (1) mit Λ^{-1}

$$x^{\nu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} x'^{\mu} \quad (3)$$

Diese Gleichung (3) in Gleichung (2) eingesetzt

$$\begin{aligned} \partial'_{\mu} &= \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\nu} \\ &= \frac{\partial(\Lambda_{\mu}^{\nu} x'^{\mu})}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\nu} \\ &= \Lambda_{\mu}^{\nu} \frac{\partial(x'^{\mu})}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\nu} \\ &= \Lambda_{\mu}^{\nu} \partial_{\nu} \end{aligned} \quad (4)$$

Wie man in der Gleichung (4) sieht transformiert sich die vierer-Ableitung kovariant. Als Nebenprodukt dieser Rechnung ergibt sich folgende nützliche Relation

$$\Lambda_{\mu}^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \quad (5)$$

Betrachten wir die zwei Intertialsysteme IS und IS' so gilt für die einzelnen Komponenten

IS	IS'
x^{μ}	$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu}$
∂_{μ}	$\partial'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} \partial_{\nu}$
$\psi(x)$???
$(i\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - \frac{mc}{\hbar})\psi(x) = 0$	$(i\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} - \frac{mc}{\hbar})\psi'(x') = 0$

Table 1: Lorentz-Transformation der einzelnen Komponenten der Dirac-Gleichung

Wie man ersehen kann, fehlt die Transformation für die vierkomponentiger Dirac-Spinor Funktion $\psi(x)$ (die vier Komponenten nicht mit den 4 Dimensionen der Raumzeit zu verwechseln!) Dies wollen wir nun näher ergründen indem wir versuchen in der Tabelle 1 aus der linken Dirac-Gleichung auf die rechte zu kommen. Das wollen wir zeigen dadurch dass es zu jeder Lorentz-Transformation eine lineare Abbildung $S(\Lambda)$ des Spinoren gibt, so das gilt

$$\psi'(x) = S(\Lambda)\psi(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x') \quad (6)$$

Die Menge $\{S(\Lambda)\}$ bilden die Darstellung der Lorentz-Gruppe mit der allgemeinen Gruppeneigenschaften

$S(\Lambda_1 \Lambda_2) = S(\Lambda_1)S(\Lambda_2) \Rightarrow S(\mathbb{1}) = \mathbb{1}, \quad S(\Lambda^{-1}) = (S(\Lambda))^{-1}$

(7)

Ersetze ψ mit ψ' aus (6) und multipliziere die Dirac-Gleichung mit $S(\Lambda)$ von links so ergibt sich

$$\begin{aligned}
& S(\Lambda) \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{mc}{\hbar} \right) S(\Lambda^{-1}) \psi'(x') = 0 \\
& \left(iS(\Lambda) \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} S(\Lambda^{-1}) - \frac{mc}{\hbar} \underbrace{S(\Lambda) S(\Lambda^{-1})}_1 \right) \psi'(x') = 0 \\
& \left(iS(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda^{-1}) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^\mu}}_{\Lambda^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}} - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi'(x') = 0 \\
& \left(i \underbrace{S(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda^{-1})}_{\gamma^\mu} \Lambda^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi'(x') = 0 \tag{8}
\end{aligned}$$

(9)

$S(\Lambda^{-1})$ vertauscht offensichtlich mit $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ (wieso?). Vergleicht man nun aus Tabelle 1 die Gestrichelte Dirac-Funktion, so stellt man fest, dass die Größe $S(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda^{-1}) \Lambda^\nu_\mu$ die Matritze γ^μ ergeben muss, also

$$\gamma^\mu = S(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda^{-1}) \Lambda^\nu_\mu \tag{10}$$

Multipliziere die Gleichung (10) mit $S(\Lambda^{-1})$ von links und mit $S(\Lambda)$ von rechts, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
& S(\Lambda^{-1}) \cdot | \quad \gamma^\mu = S(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda^{-1}) \Lambda^\nu_\mu \quad | \cdot S(\Lambda) \\
& S(\Lambda^{-1}) \gamma^\mu S(\Lambda) = \underbrace{S(\Lambda^{-1}) S(\Lambda)}_1 \gamma^\mu S(\Lambda^{-1}) \Lambda^\nu_\mu S(\Lambda) \\
& S(\Lambda^{-1}) \gamma^\mu S(\Lambda) = \gamma^\mu \underbrace{S(\Lambda^{-1}) S(\Lambda)}_1 \Lambda^\nu_\mu \\
& \Leftrightarrow \Lambda^\nu_\mu \gamma^\mu = S(\Lambda^{-1}) \gamma^\nu S(\Lambda) \tag{11}
\end{aligned}$$

die Bedingung für die Transformationsmatrix $S(\Lambda)$. Hier wurde vorausgesetzt das Λ^ν_μ und $S(\Lambda)$ vertauschen.

Referenzen

- Rollnik Quantentheorie 2