Lorentz-Transformation der Dirac-Gleichung

Wir wollen nun die Lorantz-Transformation der Dirac-Gleichung betrachten. Dabei errinern wir uns dass die 4-Dimensionale Vektoren sich wie folgt transformieren

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{1}$$

Und die vierer-Ableitung transfomiert sich wie ein kovarianter Vektor. Beweis

$$\partial'_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\nu} \tag{2}$$

Wir multiplizieren Gleichung (1) mit Λ^{-1}

$$x^{\nu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} x'^{\mu} \tag{3}$$

Diese Gleichung (3) in Gleichung (2) eingesetzt

$$\begin{aligned}
\partial'_{\mu} &= \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\nu} \\
&= \frac{\partial(\Lambda_{\mu}{}^{\nu} x'^{\mu})}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\nu} \\
&= \Lambda_{\mu}{}^{\nu} \frac{\partial(x'^{\mu})}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\nu} \\
&= \Lambda_{\mu}{}^{\nu} \partial_{\nu}
\end{aligned} \tag{4}$$

Wie man in der Gleichung (4) sieht transformiert sich die vierer-Ableitung kovariant. Als nebenprodukt dieser Rechung ergibt sich folgende nützliche Relation

$$\Lambda_{\mu}{}^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \tag{5}$$

Betrachten wir die zwei Intertialsysteme IS und IS' so gilt für die einzelten komponenten

IS	IS'
x^{μ}	$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$
∂_{μ}	$\partial'_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} \partial_{\nu}$
$\psi(x)$	???
$(i\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - \frac{mc}{\hbar})\psi(x) = 0$	$(i\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} - \frac{mc}{\hbar})\psi'(x') = 0$

Table 1: Lorentz-Transformation der einzelnen Komponenten der Dirac-Gleichung

Wie man ersehen kann, fehlt die Transformation für die vierkomponentiger Dirac-Spinor Funktion $\psi(x)$ (die vier Komponenten nicht mit den 4 Dimensionen der Raumzeit zu verwechseln!) Dies wollen wir nun näher ergründen indem wir versuchen in der Tabelle 1 aus der linken Dirac-Gleichung auf die rechte zu kommen.
Das wollen wir zeigen dadurch dass es zu jeder Lorentz-Transformation eine lineare Abbildung $S(\Lambda)$ des Spinoren gibt, so das gilt

$$\psi'(x) = S(\Lambda)\psi(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x') \tag{6}$$

Die Menge $\{S(\Lambda)\}$ bilden die Darstellung der Lorentz-Gruppe mit der allgemeinen Gruppeneigenschaften

$$\boxed{S(\Lambda_1\Lambda_2) = S(\Lambda_1)S(\Lambda_2) \Rightarrow S(\mathbb{1}) = \mathbb{1}, \quad S(\Lambda^{-1}) = (S(\Lambda))^{-1}} \tag{7}$$

Ersetze ψ mit ψ' aus (6) und multipliziere die Dirac-Gleichung mit $S(\Lambda)$ von links so ergibt sich

$$S(\Lambda)\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{mc}{\hbar}\right) S(\Lambda^{-1})\psi'(x') = 0$$

$$\left(iS(\Lambda)\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} S(\Lambda^{-1}) - \frac{mc}{\hbar}\underbrace{S(\Lambda)S(\Lambda^{-1})}_{\mathbb{1}}\right)\psi'(x') = 0$$

$$\left(iS(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1})\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^\mu}}_{\Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}} - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi'(x') = 0$$

$$\left(i\underbrace{S(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1})\Lambda^\nu{}_\mu}_{\gamma^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi'(x') = 0 \tag{8}$$

$$\tag{9}$$

$S(\Lambda^{-1})$ vertauscht offensichtlich mit $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ (wieso?). Vergleicht man nun aus Tabelle 1 die Gestrichelte Dirac-Funktion, so stellt man fest, dass die Größe $S(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1})\Lambda^\nu{}_\mu$ die Matritze γ^μ ergeben muss, also

$$\gamma^\mu = S(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1})\Lambda^\nu{}_\mu \tag{10}$$

Multipliziere die Gleichung (10) mit $S(\Lambda^{-1})$ von links und mit $S(\Lambda)$ von rechts, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
S(\Lambda^{-1})\cdot | \qquad \gamma^\mu &= S(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1})\Lambda^\nu{}_\mu \qquad | \cdot S(\Lambda)\\
S(\Lambda^{-1})\gamma^\mu S(\Lambda) &= \underbrace{S(\Lambda^{-1})S(\Lambda)}_{\mathbb{1}}\gamma^\mu S(\Lambda^{-1})\Lambda^\nu{}_\mu S(\Lambda)\\
S(\Lambda^{-1})\gamma^\mu S(\Lambda) &= \gamma^\mu \underbrace{S(\Lambda^{-1})S(\Lambda)}_{\mathbb{1}}\Lambda^\nu{}_\mu\\
\Leftrightarrow \Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu &= S(\Lambda^{-1})\gamma^\nu S(\Lambda)
\end{aligned} \tag{11}$$

die Bedingung für die Transformationsmatrix $S(\Lambda)$. Hier wurde vorausgesetzt das $\Lambda^\nu{}_\mu$ und $S(\Lambda)$ vertauschen.

Konstruktion der S Matrix

Wir wollen die Transformationsmatrix $S(\Lambda)$ bestimmen. Dazu betrachten wir die infinitesimale Lorenztransformationen. Für eine Lorenztransformation setzen wir an

$$\Lambda^\mu{}_\nu = e^{\omega^\mu{}_\nu} \tag{12}$$

Jetzt entwickeln wir die e-Funktion bis zu 1-ter Ordnung

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \mathbb{1} + \omega^\mu{}_\nu + \mathcal{O}\left((\omega^\mu{}_\nu)^2\right) \tag{13}$$

Betrachten wir nun die infinitesimale Transformationen, d.h $\omega \to \delta\omega$ und vernachlässige Terme höherer Ordnung $\delta\omega^2 \ldots$

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \mathbb{1} + \delta\omega^\mu{}_\nu \tag{14}$$

Analog setzen wir für die Spinor-Transformationsmatrix $S(\Lambda)$

$$S(\Lambda) = e^\tau \tag{15}$$

Die gleiche Rechnung wie (12) bis (14) führt auf

$$S(\Lambda) = \mathbb{1} + \delta\tau \tag{16}$$

Die Kehrwertmatrix von $S(\Lambda)$ ist

$$S(\Lambda^{-1}) = S^{-1}(\Lambda) = e^{-\tau} \tag{17}$$

Die infinitisimale Rechnung von (17) liefert

$$S(\Lambda^{-1}) = \mathbb{1} - \delta\tau \tag{18}$$

Setzen wir die Gleichungen (14), (16) und (18) in (11) ein, so ergibt sich eine Beziehung für die infinitesimale Größen

$$\begin{aligned}
(\mathbb{1} + \delta\omega^{\mu}{}_{\nu})\gamma^{\mu} &= (\mathbb{1} - \delta\tau)\gamma^{\nu}(\mathbb{1} + \delta\tau)\\
\gamma^{\mu} + \delta\omega^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\mu} &= (\gamma^{\nu} - \delta\tau\gamma^{\nu})(\mathbb{1} + \delta\tau)\\
\cancel{\gamma^{\mu}} + \delta\omega^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\mu} &= \cancel{\gamma^{\nu}} + \gamma^{\nu}\delta\tau - \delta\tau\gamma^{\nu} - \underbrace{\delta\tau^2\gamma^{\nu}}_{\approx 0}\\
\delta\omega^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\mu} &= [\gamma^{\nu}, \delta\tau]
\end{aligned} \tag{19}$$

Mit der Beziehung

$$\delta\omega^{\mu}{}_{\nu} = -\delta\omega_{\nu}{}^{\mu} \tag{20}$$

Läst sich die Gleichung (19) schreiben

$$\boxed{[\delta\tau, \gamma^{\nu}] = \gamma^{\mu}\delta\omega_{\nu}{}^{\mu}} \tag{21}$$

Desweiteren gilt dass die Norm von ψ bei Lorenz-Transformation invariant seien soll, d.h. $\psi' = S\psi$. Das bedeutet die Länge von ψ' und ψ muss gleich sein. Das heißt für die Transformationsmatrix

$$\det S = \pm 1 \tag{22}$$

Wir betrachten nur die eigentliche Transformationen $\det S = 1$ und lassen die Spiegelungen $\det S = -1$ weg. Mit $\det e^{A} = e^{\operatorname{tr} A}$

$$1 = \det S = e^{\operatorname{tr}\tau} = 1 + \operatorname{tr}\tau + \mathcal{O}(\tau^2) \tag{23}$$

Betrachte wieder den infinitesimalen Fall

$$1 = 1 + \operatorname{tr}\delta\tau \tag{24}$$

Aus dieser Gleichung folgt dass

$$\operatorname{tr}\delta\tau = 0 \tag{25}$$

seien muss. Die Lösung der Gleichung (21) und (25) lautet (TODO)

$$\delta\tau = -\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\delta\omega^{\mu\nu} \tag{26}$$

mit

$$\boxed{\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}]} \tag{27}$$

Für den nicht infinitesimalen Fall lautet die Gleichung (26)

$$\tau = -\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} \tag{28}$$

Setzt man diese in unseren Ansatz (15) ein so lautet die Transformations-Matrix $S(\Lambda)$

$$\boxed{S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}} \tag{29}$$

Die Bedeutung der Omega-Matrix

Betrachten wir nochmal den infinitesimalen Fall aus der Gleichung (14), so können wir schreiben

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \mathbb{1} + \delta\omega^{\mu}{}_{\nu} \tag{30}$$

Nutzen wir die allgemeine Bedingung dass $\Lambda^{-1}\Lambda = \mathbb{1}$ so folgt

$$\begin{aligned}
\Lambda^{-1}\Lambda = \Lambda_{\mu}{}^{\rho}\Lambda^{\mu}{}_{\sigma} &= (\mathbb{1} + \delta\omega_{\mu}{}^{\rho})(\mathbb{1} + \delta\omega^{\mu}{}_{\sigma}) \\
&= \mathbb{1} + \delta\omega^{\mu}{}_{\sigma} + \delta\omega_{\mu}{}^{\rho} + \underbrace{\delta\omega_{\mu}{}^{\rho}\delta\omega^{\mu}{}_{\sigma}}_{\approx 0} \\
&= \mathbb{1} + \underbrace{\delta\omega^{\mu}{}_{\sigma} + \delta\omega_{\mu}{}^{\rho}}_{=0} \overset{!}{=} \mathbb{1}
\end{aligned} \tag{31}$$

Aus dieser Gleichung folgt die Beziehung für den infinitesimalen Fall $\delta\omega$

$$\delta\omega^{\mu}{}_{\sigma} = -\delta\omega_{\mu}{}^{\rho} \tag{32}$$

Betrachte nun den nicht infinitesimalten Fall so folgt

$$\begin{aligned}
g^{\mu\alpha}\omega_{\alpha\sigma} &= -\omega_{\mu\alpha}g^{\alpha\rho} \\
\omega_{\alpha\sigma} &= -\omega_{\mu\alpha}
\end{aligned} \tag{33}$$

Setzen wir nun die Indezes $\sigma = \mu = \rho$ so folgt

$$\boxed{\omega_{\alpha\rho} = -\omega_{\rho\alpha}} \tag{34}$$

Damit müsste die ω-Matrix folgende Gestalt haben

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{01} & \omega_{02} & \omega_{03} \\ \omega_{10} & 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{20} & \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{30} & \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{pmatrix} = \omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{01} & \omega_{02} & \omega_{03} \\ -\omega_{01} & 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{02} & -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{03} & -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix} \tag{35}$$

Das heißt es gibt insgesamt 6 reelle (warum reell?) freie Parameter $\Rightarrow$ 6 Generatoren

$\vec{J}$ (Drehungen) 3 ω_{ij}
$\vec{K}$ (Boosts) 3 ω_{0i}

Betrachten wir nun eine Drehung um die z-Achse. Dann sieht die Lorenz-Transformationsmatrix folgendermaßen aus

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega & 0 \\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{36}$$

Machen wir nun eine Näherung für kleine ω, d.h. $\sin\omega \approx \omega$ und $\cos\omega \approx 1$ so ergibt sich für Λ

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \omega & 0 \\ 0 & -\omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} + \omega = \mathbb{1} + \begin{pmatrix} 0 & \omega_{01} & \omega_{02} & \omega_{03} \\ \omega_{10} & 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{20} & \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{30} & \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{pmatrix} \tag{37}$$

Setzen wir ω aus der Gleiching (35) in die Gl. (37) ein

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \omega & 0 \\ 0 & -\omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \mathbb{1} + \omega \\
&= \mathbb{1} + \begin{pmatrix} 0 & \omega_{01} & \omega_{02} & \omega_{03} \\ \omega_{10} & 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{20} & \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{30} & \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \omega_{01} & \omega_{02} & \omega_{03} \\ \omega_{10} & 1 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{20} & \omega_{21} & 1 & \omega_{23} \\ \omega_{30} & \omega_{31} & \omega_{32} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{38}$$

Durch Vergleich der beiden Matrizen in Gl. (38) stellen wir fest

$$\begin{aligned}
&\omega_{12} = \omega \\
&\omega_{21} = -\omega = -\omega_{12}
\end{aligned} \tag{39}$$

D.h. alle Elemente der ω-Matrix außer ω_{12} und ω_{21} Null sind. Somit müssen wir reduziert sich die Gleichung (29) auf

$$\begin{aligned}
S(\Lambda) &= e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}} \\
&= \exp\left\{-\frac{i}{4}(\sigma_{12}\omega^{12} + \sigma_{21}\omega^{21})\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{i}{4}(\sigma_{12}\omega - \sigma_{21}\omega)\right\} \qquad \text{mit } \sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = -\frac{1}{2}[\gamma_\nu, \gamma_\mu] = -\sigma_{\nu\mu} \\
&= \exp\left\{-\frac{i}{4}(\sigma_{12}\omega + \sigma_{12}\omega)\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{i}{2}(\sigma_{12}\omega)\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\omega\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}\omega\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{i}{2}\sigma_3\begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}\omega\right\} \qquad \text{mit } S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_3 \\
&= \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\omega S_z\right\}
\end{aligned} \tag{40}$$

Wir wollen nun die Exponentialfunktion auf die Matrix anwenden. Damit das gelingt starten wir mit folgender Form

$$S(\Lambda) = \exp\left\{i \underbrace{-\frac{1}{2}\omega}_{\tilde{\omega}} \sigma_3 \mathbb{1}_2\right\} = \exp\left\{i\tilde{\omega} \cdot \sigma_3 \mathbb{1}_2\right\} \tag{41}$$

$$= \exp\left\{i\tilde{\omega} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{I}\right\} \tag{42}$$

Die Matrix I weist periodisches Verhalten beim potenzieren

$$I^2 = I^4 = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \qquad I^1 = I^3 = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = I \tag{43}$$

Dies wird bei der Entwicklung der Exponentielfunktion benötigt

$$S(\Lambda) = \exp\{i\tilde{\omega} \cdot I\} = \cos(I\tilde{\omega}) + i\sin(I\tilde{\omega}) \tag{44}$$

Setzen wir die Entwicklungen für $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ und $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ in die Gleichung (44) ein

$$\begin{aligned}
S(\Lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(I\tilde{\omega})^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(I\tilde{\omega})^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= I^0\tilde{\omega}^0 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(I\tilde{\omega})^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(I\tilde{\omega})^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \underbrace{I^0\tilde{\omega}^0}_{\mathbb{1}_4} + \underbrace{I^2}_{\mathbb{1}_4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(\tilde{\omega})^{2n}}{(2n)!} + iI\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(\tilde{\omega})^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \mathbb{1}_4 + \mathbb{1}_4\left(-\frac{\tilde{\omega}^0}{0!} + \frac{\tilde{\omega}^0}{0!} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(\tilde{\omega})^{2n}}{(2n)!}\right) + iI\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(\tilde{\omega})^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \mathbb{1}_4 + \mathbb{1}_4\left(\underbrace{-\frac{\tilde{\omega}^0}{0!}}_{-1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(\tilde{\omega})^{2n}}{(2n)!}}_{\cos(\tilde{\omega})}\right) + iI\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(\tilde{\omega})^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\sin(\tilde{\omega})} \\
&= \mathbb{1}_4 + \mathbb{1}_4\left(-1 + \cos(\tilde{\omega})\right) + iI\sin(\tilde{\omega}) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1+\cos(\tilde{\omega}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1+\cos(\tilde{\omega}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+\cos(\tilde{\omega}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1+\cos(\tilde{\omega}) \end{pmatrix} + \\
&\qquad + \begin{pmatrix} i\sin(\tilde{\omega}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\sin(\tilde{\omega}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\sin(\tilde{\omega}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\sin(\tilde{\omega}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\tilde{\omega}) + i\sin(\tilde{\omega}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\tilde{\omega}) - i\sin(\tilde{\omega}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\tilde{\omega}) + i\sin(\tilde{\omega}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\tilde{\omega}) - i\sin(\tilde{\omega}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{i\tilde{\omega}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\tilde{\omega}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\tilde{\omega}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\tilde{\omega}} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{45}$$

Setzen wir nun für $\tilde{\omega} = -\frac{1}{2}\omega$ ein, so folgt

$$S(\Lambda) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{i}{2}\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{i}{2}\omega} \end{pmatrix} \tag{46}$$

Führt man die gleiche Rechnung für Λ^{-1} (dass heißt der Drehwinkel ändert sein Vorzeichen) durch, so ergibt sich dass $\tilde{\omega} = +\frac{1}{2}\omega$. Setzt man $\tilde{\omega}$ in die Gleichung (45)

$$S(\Lambda^{-1}) = \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{i}{2}\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{i}{2}\omega} \end{pmatrix} = S^{-1}(\Lambda) \tag{47}$$

Das ist gerade die Kehrwertmatrix und beide erfüllen die Bedinung (7) für die Lorentz-Gruppe.

Bemerkung: Die Gleichung (46) findet man in der Literatur auch in folgender Form:

$$S(\Lambda) = \cos\frac{\omega}{2} - i\begin{pmatrix}\sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3\end{pmatrix}\sin\frac{\omega}{2} \tag{48}$$

Bzw. eine Drehung um eine Beliebige Achse $\vec{n}$

$$\boxed{S(\Lambda) = \cos\frac{\omega}{2} - i\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\begin{pmatrix}\mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2\end{pmatrix}\sin\frac{\omega}{2}} \tag{49}$$

Vergleiche das mit der Transformation eines Paulispinors

$$R(\vec{n},\omega) = \cos\frac{\omega}{2} - i\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\,\sin\frac{\omega}{2} \tag{50}$$

Man sieht dass sich der Dirac-Spinor genauso transformiert wie ein zweikomponentiger Spinor eines Spin $\frac{1}{2}$ Teilchens in der nicht relativistischen Quantenmechanik.

Referenzen

- http://itp.tugraz.at/LV/evertz/QM-2/qm2.pdf