

## Zeitliche Entwicklung eines kohärenten Zustandes

Wir wollen nun die kohärenten Zustände eines harmonischen Oszillators  $|\alpha\rangle$

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (1)$$

zeitlich entwickeln und zeigen, dass diese kohärent bleiben.

Aus dem Separationsansatz der zeitabhängigen Schrödinger Gleichung wissen wir:

$$|\alpha(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H t\right) |\alpha\rangle \quad (2)$$

$$= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H t\right) e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (3)$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H t\right) |n\rangle \quad (4)$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right) |n\rangle \quad (5)$$

Mit der allgemeinen Lösung für die Energieeigenwerte des harmonischen Oszillators  $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$  ergibt sich:

$$|\alpha(t)\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hbar\omega(n + \frac{1}{2})t\right) |n\rangle \quad (6)$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-i\omega\frac{1}{2}t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega n t} |n\rangle \quad (7)$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-i\omega\frac{1}{2}t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (8)$$

Da  $|e^{-i\omega t}| = 1$  können wir statt  $|\alpha|^2$  auch  $|\alpha e^{-i\omega t}|^2$  schreiben. Damit sieht die Gleichung (8) wie folgt aus:

$$|\alpha(t)\rangle = e^{-\frac{|\alpha e^{-i\omega t}|^2}{2}} e^{-i\omega\frac{1}{2}t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (9)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}i\omega t} \underbrace{\left( e^{-\frac{|\alpha e^{-i\omega t}|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right)}_{\text{vergleiche mit (1)}} \quad (10)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}i\omega t} |\alpha e^{-i\omega t}\rangle \quad (11)$$

Um zu zeigen dass der Zustand für alle Zeiten kohärent bleibt, wendet man den Absteigeoperator auf (9) an und erhält den Eigenwert  $\alpha e^{-i\omega t}$ :

$$a|\alpha(t)\rangle = \alpha e^{-i\omega t} |\alpha(t)\rangle \quad (12)$$

$$(13)$$

## Zeitliche Oszillation

$$\langle x \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle \alpha(t) | a^\dagger + a | \alpha(t) \rangle \quad (14)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\langle \alpha(t) | a^\dagger | \alpha(t) \rangle + \langle \alpha(t) | a | \alpha(t) \rangle) \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R} \quad (15)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\alpha e^{i\omega t} + \alpha e^{-i\omega t}) \quad (16)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} 2\alpha \cos(\omega t) \quad (17)$$

$$= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \alpha \cos(\omega t) \quad (18)$$

Der Ortserwartungswert oszilliert mit der Frequenz  $\omega$  zwischen  $-\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\alpha$  und  $\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\alpha$  hin und her. Analoge Rechnung für den Impulserwartungswert liefert:

$$\langle p \rangle = -\sqrt{2\hbar m\omega} \cdot \alpha \sin(\omega t) \quad (19)$$

Die Erwartungswerte für Ort und Impuls verhalten sich demnach genauso wie eine klassische harmonische Oszillation. Man kann ebenso den Zusammenhang zwischen Orts- und Impuls-Operator wie in der klassischen Mechanik herstellen:

$$m \frac{d\langle x \rangle}{dt} = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} m \alpha \omega (-\sin(\omega t)) = -\sqrt{2\hbar m\omega} \cdot \alpha \sin(\omega t) \equiv \langle p \rangle \quad (20)$$

## Referenzen

- [www.physik.uni-regensburg.de/forschung/schwarz/QOptik/Wurm.pdf](http://www.physik.uni-regensburg.de/forschung/schwarz/QOptik/Wurm.pdf)
- <http://www2009.ph.tum.de/studium/betrieb/ferienkurse/2009s/qm/diml.pdf>