Die Dirac Gleichung

Die Möglichkeit $\rho = \psi^*\psi$ für die Wahrscheinlichkeitsdichte zu schreiben folgt aus der Tatsache, dass die Zeitableitung in der nicht relativistische Schrödinger-Gleichung nur in 1-Ordnung auftritt. Im Vergleich nimmt ρ in der Klein-Gordon Gleichung auch negative Werte an, dort ist die Zeitlichte Ableitung von 2-Ordnung.

Es gilt nun eine Differential Gleichung 1-Ordung in der Zeit der Form

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi \tag{1}$$

die relativistische Enegie-Impuls-Beziehung

$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = (mc)^2 \tag{2}$$

für ein freies Teilchen erfüllt. Die Betrachtungen im Zusammenhang mit der Klein-Gordon-Gleichung haben gezeigt, dass man dieses Problem für eine einfache skalare Wellenfunktion ψ nicht lösen kann. Diracs Idee war eine mehrdimensionale Wellenfunktion einzuführen .

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_n(x) \end{pmatrix} \tag{3}$$

Des weiteren muss die Gleichung (1) folgende Forderungen erfüllen:

- Die Komponenten von ψ müssen die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen, so dass ebene Wellend ie relativistische Beziehung $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ erfüllen.
- Es existiert ein erhaltener Viererstrom, dessen nullte Komponente eine positive Dichte ist.
- Die Gleichung muss Lorentz-kovariant sein. Das bedeutet, dass sie unter Transformation ihre Form behält. Bezugssystem unabhängig. Damit dies erfüllt ist muss gelten: Da die zeitliche Ableitung nur in 1-Ordnung auftritt, muss auch die räumliche Ableitung in 1-Ordnung auftreten.

Der Ansatz für den Hamiltonoperator H sollte so sein dass

$$H^2 = E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \tag{4}$$

das Quadrat der relativistischen Energie im Quadrat gleich ist. Folgender allgemeiner Ansatz erfüllt diese Bedingung

$$H = c(\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z) + \beta m^2c^4 = c\sum_{i=1}^{3}\alpha_i p_i + \beta m^2c^4 \tag{5}$$

Die unbekannten Koeffizienten α_i, β können nicht einfach Zahlen sein, da sonst die Gleichung nicht einmal forminvariant gegenüber räumlichen Drehungen ist (D.h. form der Gleichung ändert sich je nachdem das Koordinatensystem wählt). α_i, β müssen hermitische Matritzen sein damit H hermitesch ist. Daraus folgt α_i, β müssen $N \times N$ Matrizen sein.
Um die unbekannten Matritzen α_i, β zu bestimmen gehen wir von der Klein-Gordon Gleichung aus

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x) = \underbrace{c^2(\vec{p}^2 + m^2c^2)}_{H^2} \psi(x) \tag{6}$$

$$\stackrel{!}{=} \left(c \sum_{i=1}^{3} \alpha_i p_i + \beta m^2 c^4 \right)^2 \psi(x) \tag{7}$$

$$= [c \sum_{j=1}^{3} \alpha_j p_j + \beta mc^2] \cdot [c \sum_{i=1}^{3} \alpha_i p_i + \beta mc^2] \psi(p) \tag{8}$$

$$= c^2 [\sum_{j=1}^{3} \alpha_j p_j + \beta mc] \cdot [\sum_{i=1}^{3} \alpha_i p_i + \beta mc] \psi(p) \tag{9}$$

$$= c^2 \left(\sum_{j=1}^{3} \alpha_j p_j \sum_{i=1}^{3} \alpha_i p_i + \sum_{j=1}^{3} \alpha_j p_j \beta mc + \beta mc \sum_{i=1}^{3} \alpha_i p_i + \beta^2 m^2 c^2 \right) \psi(p) \tag{10}$$

$$= c^2 \left(\sum_{i,j=1}^{3} \alpha_i \alpha_j p_i p_j + \sum_{i=1}^{3} (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i mc + \beta^2 m^2 c^2 \right) \psi(p) \tag{11}$$

Der Koeffizientenverleich zwischen $c^2(\vec{p}^2 + m^2c^2)$ und $c^2 \left(\sum_{i,j=1}^{3} \alpha_i \alpha_j p_i p_j + \sum_{i=1}^{3} (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i mc + \beta^2 m^2 c^2 \right)$ liefert

- $\boxed{\beta^2 = 1}$
- Antikommutator: $\boxed{\{\alpha_i, \beta\} = 0}$ damit der Mischterm $(\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i mc$ verschwindet
- $i \neq j$: z.B: $\{\alpha_i, \alpha_j\} = 0$ damit die unterschiedlichen Terme $p_i p_j = \delta_{ij}$ verschwinden
- $i = j$: $\alpha_x^2 p_x^2 + \alpha_y^2 p_y^2 + \alpha_z^2 p_z^2 = \vec{p}^2 \Rightarrow \alpha_i^2 = 1$

  $$\Rightarrow \boxed{\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}}$$

- $\hat{p}_i, \hat{H}$ hermitesch $\Rightarrow \vec{\alpha}, \beta$ hermitesch
- $\alpha_i^2 = 1, \beta^2 = 1 \Rightarrow$ Eigenwerte von α_i, β sind ± 1
- $\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \qquad | \cdot \beta$

  $$\Rightarrow \alpha_i = -\beta \alpha_i \beta \Rightarrow Tr[\alpha_i] = -Tr[\beta \alpha_i \beta] = -Tr[\alpha_i \beta^2] = -Tr[\alpha_i]$$

Referenzen

- Wachter Relativistische Quantenmechanik
- Schwabl Quantenmechanik für Fortgeschrittene
- Rollnik Quantentheorie 2