Schrödingergleichung

Suchen Bewegungsgleichung für $\psi(\vec{r}, t)$. Forderungen:

1. DGL 1. Ordnung in der Zeit, damit $\psi(\vec{r}, t)$ durch die Anfangsverteilung $\psi(\vec{r}, t = 0)$bestimmt ist.
2. Sie muss linear in ψ sein, damit Superpositionsprinzip gilt (d.h. Linearkombination von Lösungen stellen wieder Lösungen dar $\rightarrow$ deshalb treten Interferenzeffekte auf wie in der Optik. (Optik: Diese folgen aus der Linearität der Maxwellgleichungen)
3. Sie muss homogen sein, damit $\int_{-\infty}^{\infty} d^3r|\psi(\vec{r}, t)|^2 = 1$ für alle Zeiten erfüllt bleibt.
4. Die ebenen Wellen $\psi(\vec{r}, t) = c \cdot e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r} - \frac{p^2}{2m}t)}$ sollen Lösungen der Gleichung sein.
   Für diese ebenen Wellen gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r}, t) &= -\frac{i}{\hbar} \cdot \frac{p^2}{2m}\psi(\vec{r}, t) \\
&= -\frac{i}{\hbar} \cdot \frac{p^2}{2m}\psi(\vec{r}, t) \cdot \frac{\hbar^2}{\hbar^2} \\
&= \frac{i\hbar}{2m} \cdot \underbrace{\frac{(ip)^2}{\hbar^2}\psi(\vec{r}, t)}_{\nabla^2\psi(\vec{r}, t)} \\
&= \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r}, t)
\end{aligned}$$

Aus 1.-4. erhalten wir die zeitabhängige Schrödingergleichung für ein freies Teilchen:

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\vec{r}, t)} \tag{1}$$

Annahme: Teilchen der Masse m unterliegt einem Potential $V(\vec{r}, t)$

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r}, t) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t) \\
&= \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}, t)\right]\Psi(\vec{r}, t)
\end{aligned}$$