

# Kohärente Zustände des harmonischen Oszillators

Für den harmonischen Oszillator existiert eine Klasse von Zuständen, die mit gewisser Berechtigung als 'Quasi-klassische' Zustände angesehen werden. Diese kohärenten Zustände sollen hier näher betrachtet werden. Die Zustände  $|\alpha\rangle$  sind Eigenzustände des Auf- und Absteige-Operators. Es gilt:

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad \langle\alpha|\alpha\rangle = 1 \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad (1)$$

Nun wollen wir herausfinden wie sich  $|\alpha\rangle$  als Liniarkombination von Energieeigenzuständen darstellen lassen.

$$|\alpha\rangle = \mathbb{1}|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \underbrace{\langle n|\alpha\rangle}_{c_n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \quad (2)$$

Wenden wir nun den Absteige-Operator auf den Zustand an:

$$a|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a|n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (3)$$

Ersetze  $n$  mit  $n+1$

$$a|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1} \sqrt{n+1}}{|n\rangle} |n\rangle \stackrel{!}{=} \underbrace{\alpha|\alpha\rangle}_{(1)} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha c_n |n\rangle}_{(2)} \quad (4)$$

Durch Vergleich von den beiden unterstrichenen Teilchen der Formel (4) erhalten wir folgende Rekursionsformel:

$$c_{n+1} \sqrt{n+1} = \alpha c_n \quad (5)$$

Ersetze  $n$  mit  $n-1$ :

$$c_n \sqrt{n} = \alpha c_{n-1} \quad (6)$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} c_{n-1}$$

$$c_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{1}} c_0$$

$$c_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} c_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \frac{\alpha}{\sqrt{1}} c_0$$

$$c_3 = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} c_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \frac{\alpha}{\sqrt{1}} c_0$$

$\vdots$

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0 \quad (7)$$

$c_n$  in Gleichung (2) eingesetzt ergibt:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0 |n\rangle \quad (8)$$

Bestimmen des  $c_0$  durch Normierungsbedingung:

$$\begin{aligned} \langle\alpha|\alpha\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}}_{e^{|\alpha|^2}} |c_0|^2 \underbrace{\langle n|n\rangle}_{=1} \\ &= e^{|\alpha|^2} |c_0|^2 \stackrel{!}{=} 1 \\ &\Leftrightarrow c_0 = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \end{aligned} \quad (9)$$

Eingesetzt in (8):

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (10)$$

In Fock-Raum-Schreibweise ergibt sich der kohärente Zustand  $|\alpha\rangle$  als unendliche Linearkombination von Zuständen fester Teilchenzahl (Fock-Zustände)  $|n\rangle$ .

## 0.1 Minimale Unschärfe der kohärenten Zustände

Wir wollen zeigen, dass für die kohärenten Zustände  $|\alpha\rangle$  minimale Unschärfe für Orts- und Impuls-Operator gilt die mit der Heisenbergschen Unschärferelation verträglich ist. Dazu benötigen wir die Darstellung des Orts- und Impuls-Operators als Auf- und Absteigeoperatoren:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a^\dagger + a) \quad (11)$$

$$p = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (a^\dagger - a) \quad (12)$$

Zu berechnen ist die Orts- und Impuls Unschärfe:

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad (13)$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \langle \alpha | x^2 | \alpha \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle \alpha | (a^\dagger + a)^2 | \alpha \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle \alpha | (a^\dagger)^2 + a^\dagger a + a a^\dagger + a^2 | \alpha \rangle \quad \text{mit } [a, a^\dagger] = 1 \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle \alpha | (a^\dagger)^2 + a^\dagger a + 1 + a^\dagger a + a^2 | \alpha \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle \alpha | (a^\dagger)^2 + 2a^\dagger a + 1 + a^2 | \alpha \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} (\langle \alpha | (a^\dagger)^2 | \alpha \rangle + 2\langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle + 1 + \langle \alpha | a^2 | \alpha \rangle) \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} ((\alpha^*)^2 + 2|\alpha|^2 + 1 + \alpha^2) \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} ((\alpha^* + \alpha)^2 + 1) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \langle \alpha | x | \alpha \rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle \alpha | (a^\dagger + a) | \alpha \rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\langle \alpha | a^\dagger | \alpha \rangle + \langle \alpha | a | \alpha \rangle) \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\alpha^* + \alpha) \end{aligned} \quad (16)$$

Die Erwartungswerte (15) und (16) in (13) einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega} [(\alpha^* + \alpha)^2 + 1 - (\alpha^* + \alpha)^2]} \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \end{aligned} \quad (17)$$

Analoge Rechnung ergibt für die Impulsunschärfe:

$$\Delta p = \sqrt{\frac{\hbar \omega m}{2}} \quad (18)$$

Daraus folgt für Unschärferelation:

$$\Delta x \cdot \Delta p = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sqrt{\frac{\hbar \omega m}{2}} = \frac{\hbar}{2} \quad (19)$$

## 0.2 Zusammenfassung; Eigenschaften

- Eigenzustände des Absteigeoperators  $a$  (auch des Vektorpotentials  $\vec{A}$ )
- minimale Unschärfe
- behalten diese Unschärfe auch unter Zeitentwicklung bei
- Im Fockraum  $a$  und  $a^\dagger$  spielen die Rolle von Vernichtungs- bzw. Erzeuge-Operatoren für Teilchen