Die Dirac Gleichung

Die Möglichkeit $\rho = \psi^*\psi$ für die Wahrscheinlichkeitsdichte zu schreiben folgt aus der Tatsache, dass die Zeitableitung in der nicht relativistische Schrödinger-Gleichung nur in 1-Ordnung auftritt. Im Vergleich nimmt ρ in der Klein-Gordon Gleichung auch negative Werte an, dort ist die Zeitlichte Ableitung von 2-Ordnung.

Es gilt nun eine Differential Gleichung 1-Ordung in der Zeit der Form

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi \tag{1}$$

die relativistische Enegie-Impuls-Beziehung

$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = (mc)^2 \tag{2}$$

für ein freies Teilchen erfüllt. Die Betrachtungen im Zusammenhang mit der Klein-Gordon-Gleichung haben gezeigt, dass man dieses Problem für eine einfache skalare Wellenfunktion ψ nicht lösen kann. Diracs Idee war eine mehrdimensionale Wellenfunktion einzuführen .

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_n(x) \end{pmatrix} \tag{3}$$

Des weiteren muss die Gleichung (1) folgende Forderungen erfüllen:

- Die Komponenten von ψ müssen die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen, so dass der Hamilton-Operator die relativistische Beziehung $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ erfüllt.
- Es existiert ein erhaltener Viererstrom, dessen nullte Komponente eine positive Dichte ist.
- Die Gleichung muss Lorentz-kovariant sein. Das bedeutet, dass sie unter Transformation ihre Form behält. Bezugssystem unabhängig. Damit dies erfüllt ist muss gelten: Da die zeitliche Ableitung nur in 1-Ordnung auftritt, muss auch die räumliche Ableitung in 1-Ordnung auftreten.

Der Ansatz für den Hamiltonoperator H sollte so sein dass

$$H^2 = E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \tag{4}$$

das Quadrat der relativistischen Energie im Quadrat gleich ist. Folgender allgemeiner Ansatz erfüllt diese Bedingung

$$H = c(\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z) + \beta m^2c^4 = c\sum_{i=1}^{3}\alpha_i p_i + \beta m^2c^4 \tag{5}$$

Die unbekannten Koeffizienten α_i, β können nicht einfach Zahlen sein, da sonst die Gleichung nicht einmal forminvariant gegenüber räumlichen Drehungen ist (D.h. die Form der Gleichung ändert sich je nachdem wie man das Koordinatensystem wählt). α_i, β müssen hermitische Matritzen sein damit H hermitesch ist. Daraus folgt α_i, β müssen $N \times N$ Matrizen sein.
Um die unbekannten Matritzen α_i, β zu bestimmen gehen wir von der Klein-Gordon Gleichung aus

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x) = \underbrace{c^2(\vec{p}^2 + m^2c^2)}_{H^2}\psi(x) \tag{6}$$

$$\stackrel{!}{=} \left(c\sum_{i=1}^{3}\alpha_i p_i + \beta m^2 c^4\right)^2 \psi(x) \tag{7}$$

$$= [c\sum_{j=1}^{3}\alpha_j p_j + \beta mc^2] \cdot [c\sum_{i=1}^{3}\alpha_i p_i + \beta mc^2]\psi(p) \tag{8}$$

$$= c^2[\sum_{j=1}^{3}\alpha_j p_j + \beta mc] \cdot [\sum_{i=1}^{3}\alpha_i p_i + \beta mc]\psi(p) \tag{9}$$

$$= c^2\left(\sum_{j=1}^{3}\alpha_j p_j \sum_{i=1}^{3}\alpha_i p_i + \sum_{j=1}^{3}\alpha_j p_j \beta mc + \beta mc\sum_{i=1}^{3}\alpha_i p_i + \beta^2 m^2 c^2\right)\psi(p) \tag{10}$$

$$= c^2\left(\sum_{i,j=1}^{3}\alpha_i\alpha_j p_i p_j + \sum_{i=1}^{3}(\alpha_i\beta + \beta\alpha_i)p_i mc + \beta^2 m^2 c^2\right)\psi(p) \tag{11}$$

Der Koeffizientenverleich zwischen $c^2(\vec{p}^2 + m^2c^2)$ und $c^2\left(\sum_{i,j=1}^{3}\alpha_i\alpha_j p_i p_j + \sum_{i=1}^{3}(\alpha_i\beta + \beta\alpha_i)p_i mc + \beta^2 m^2 c^2\right)$ liefert

- $\boxed{\beta^2 = 1}$
- Antikommutator:

  $$\boxed{\{\alpha_i, \beta\} = 0} \tag{12}$$

  Damit der Mischterm $(\alpha_i\beta + \beta\alpha_i)p_i mc$ verschwindet
- $i \neq j$: z.B: $\{\alpha_i, \alpha_j\} = 0$ damit die unterschiedlichen Terme $p_i p_j = \delta_{ij}$ verschwinden
- $i = j$: $\alpha_x^2 p_x^2 + \alpha_y^2 p_y^2 + \alpha_z^2 p_z^2 = \vec{p}^2 \Rightarrow \alpha_i^2 = 1$

$$\Rightarrow \boxed{\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}} \tag{13}$$

- $\hat{p}_i, \hat{H}$ hermitesch $\Rightarrow \vec{\alpha}, \beta$ hermitesch
- $\alpha_i^2 = 1, \beta^2 = 1 \Rightarrow$ Eigenwerte von α_i, β sind ± 1
- $\alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0 \qquad | \cdot \beta$

  $$\Rightarrow \alpha_i = -\beta\alpha_i\beta \Rightarrow Tr[\alpha_i] = -Tr[\beta\alpha_i\beta] = -Tr[\alpha_i\beta^2] = -Tr[\alpha_i]$$

Die Eigenwerte von α_i und β wie oben schon erwähnt ± 1. D.h. wir haben für $+1$ genau so viele Eigenwerte wie für -1. Es kommen also nur Matritzen in den Dimensionen $N = 2, 4, 6...$ in Frage. Für den Fall $N = 2$ können die Paulimatritzen σ_i mit den Eigenwerten ± 1 benutzt werden. Sie erlauben jedoch nur 6 Antikommutator Beziehungen zu beschreiben. Benötigt werden aber 9, nämlich 6x (13) und 3x (12). Welche durch 4 dimensionale Matritzen (4x4=16) ausreichend beschrieben werden.
β diagonal mit den Eigenwerten ± 1 also wähle

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Um die α_i zu bestimmen, nutzen wir, dass α_i hermitesch ist und der Antikommutator (12) zwischen α_i und β gleich Null ist. Allgemeiner Ansatz für α

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{15}$$

Mit der Beziehung dass die Spur von α_i gleich Null seien muss

$$
\begin{aligned}
&\{\alpha_i, \beta\} = \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \\
\Leftrightarrow &\alpha_i \beta = -\beta \alpha_i \quad | \cdot \beta \\
&\alpha_i \underbrace{\beta^2}_{=1} = -\beta \alpha_i \beta
\end{aligned} \tag{16}
$$

Die Spur von (16) ergibt

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}(\alpha_i) = -\mathrm{Tr}(\beta \alpha_i \beta) = -\mathrm{Tr}(\alpha_i \beta^2) = -\mathrm{Tr}(\alpha_i) \\
\Leftrightarrow &\mathrm{Tr}\ \alpha_i = -\mathrm{Tr}\ \alpha_i \\
\Rightarrow &\mathrm{Tr}\ \alpha_i = 0
\end{aligned} \tag{17}
$$

Für hermitesche 2D Matrix gilt $C = B^\dagger$ und aus Spurenfreiheit folgt $A = D = 0$.

$$
\Rightarrow \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & B_i \\ B_i^\dagger & 0 \end{pmatrix} \tag{18}
$$

Setze für $B = \tau_i$. Aus (13)

$$
\{\alpha_i, \alpha_j\} = \begin{pmatrix} 0 & B_i \\ B_i^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_j \\ B_j^\dagger & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B_j \\ B_j^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_i \\ B_i^\dagger & 0 \end{pmatrix} \tag{19}
$$

$$
= \begin{pmatrix} B_i B_j^\dagger & 0 \\ 0 & B_i^\dagger B_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_j B_i^\dagger & 0 \\ 0 & B_j^\dagger B_i \end{pmatrix} \tag{20}
$$

$$
= \begin{pmatrix} B_i B_j^\dagger + B_j B_i^\dagger & 0 \\ 0 & B_i^\dagger B_j + B_j^\dagger B_i \end{pmatrix} \tag{21}
$$

$$
\tag{22}
$$

Versuchen wir für B_i die Paulimatritzen einzusetzen

$$
\{\alpha_i, \alpha_j\} = \begin{pmatrix} \sigma_i \sigma_j^\dagger + \sigma_j \sigma_i^\dagger & 0 \\ 0 & \sigma_i^\dagger \sigma_j + \sigma_j^\dagger \sigma_i \end{pmatrix} \qquad \text{Paulimatritzen hermitesch } \sigma_i^\dagger = \sigma_i \tag{23}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \mathbb{1} \tag{24}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 2\delta_{ij} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 2\delta_{ij} \mathbb{1} \end{pmatrix} \tag{25}
$$

$$
= 2\delta_{ij} \mathbb{1} \tag{26}
$$

Damit erfüllen die Paulimatrizen die Antikommutator-Beziehung $\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}$. Somit können wir für B_i die Paulimatrizen nutzen. Zusammenfassend lässt sich schreiben

$$
\Rightarrow \boxed{\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}; \qquad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}} \tag{27}
$$

Die Dirac Gleichung (1) lässt sich mit den Hamiltonoperator (5) und den gefundenen Matritzen α_i und β nun wie folgt schreiben

$$
\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = c \left(\vec{\alpha} \cdot \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \beta mc \right) \psi(x)} \tag{28}
$$

Alternativ gibt es die Dirac-Gleichung in kovarianter Form, dazu bringen wir alle Terme auf eine Seite

$$
\begin{aligned}
&\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - c\vec{\alpha}\cdot\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \beta mc^2\right)\psi(x) = 0 \qquad | \cdot \frac{\beta}{\hbar c} \\
&\left(\beta\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\alpha}\cdot\beta\frac{1}{i}\vec{\nabla} - \underbrace{\beta^2}_{\mathbb{1}}\frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) = 0 \\
&\left(i\underbrace{\beta}_{\gamma^0}\underbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}}_{\partial_0} + i\underbrace{\beta\vec{\alpha}}_{\vec{\gamma}}\vec{\nabla} - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) = 0 \\
&\left(i\underbrace{(\gamma^0\partial_0 + \vec{\gamma}\vec{\nabla})}_{\gamma^\mu\partial_\mu} - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) = 0
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Damit erhalten wir die Dirac-Gleichung in kovarianter Form

$$
\boxed{\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0} \tag{30}
$$

Wobei die γ^μ die Gamma-Matrizen sind für die gilt $\gamma^0 = \beta$; $\gamma^i = \beta\alpha_i$

Referenzen

- Wachter Relativistische Quantenmechanik
- Schwabl Quantenmechanik für Fortgeschrittene
- Rollnik Quantentheorie 2