Addition von Drehimpulsen, Clebsch-Gordan Koeffizienten

Wir betrachte zwei von einander unabhängige Drehimpulse $\vec{J}_1$ und $\vec{J}_2$, die jeweils einen eigenen Hilbertraum mit der Basis $\{|j_1, m_1\rangle\}$ für $\vec{J}_1$ und $\{|j_2, m_2\rangle\}$ für $\vec{J}_2$ bilden. Zusammen spannen sie einen $(2j_1+1) \times (2j_2+1)$ dimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ auf, mit der Basis $\{|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle\} \equiv \{|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle\}$. Nun wollen wir die einzelne Drehimpulse in eine gemeinsame Basis überführen, so dass wir einen Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ mit der neuen Basis $\{|J, M\rangle\}$ erhalten. Dies erreichen wir, in dem wir die Orthonormalität der alten Basis ausnutzen und den Einheitsoperator $\mathbb{1}$ vor die neue Basis einschieben:

$$
\begin{aligned}
|J, M\rangle &= \underbrace{\left(\sum_{m_1, m_2} |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \langle j_1, j_2; m_1, m_2| \right)}_{=\mathbb{1}} |J, M\rangle \\
|J, M\rangle &= \sum_{m_1, m_2} \underbrace{\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M\rangle}_{\textbf{Glebsch-Gordan Koef.}} |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Da sowohl die alte Basis $\{|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle\}$ als auch die neue Basis $\{|J, M\rangle\}$ orthonormiert sind, handelt es sich bei (20) um eine unitäre Transformation. Zu bemerken ist dass bei dem von uns eingefügten Einheitsoperator nur über die Magnetquantenzahlen m_1 und m_2 summiert wird. D.h. man hält die Drehimpulsquantenzahlen j_1 und j_2 fest und entwickelt nur nach den Magnetquantenzahlen, für die gilt $m_1 = -j_1,\ -j_1+1,\ -j_1+2, \dots j_1$ und $m_2 = -j_2,\ -j_2+1,\ -j_2+2, \dots j_2$.
Die Koeffizienten $\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M\rangle$ die die beiden Basen verbinden heißen *Clebsch-Gordan Koeffizienten*. D.h. das Problem der Addition zweier Drehimpulse reduziert sich auf das Bestimmen der Glebsch-Gordan Koeffizienten.
Für die Erwartungswerte J in der neuen Basis gilt:

$$
\boxed{|j_1 - j_2| \le J \le j_1 + j_2} \qquad (2)
$$

Dies wird durch die Vektoraddition $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ deutlich.
Den Erwartungswert M können wir mit Hilfe des $J_z = J_{z_1} + J_{z_2}$ Operators und folgenden Eigenwertgleichungen bestimmen:

$$
\begin{aligned}
J_Z |J, M\rangle &= M |J, M\rangle && (3a) \\
J_{z_1} |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle &= m_1 |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle && (3b) \\
J_{z_2} |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle &= m_2 |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle && (3c)
\end{aligned}
$$

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
J_z - J_{z_1} - J_{z_2} &= 0 \\
\langle j_1, j_2; m_1, m_2| J_z - J_{z_1} - J_{z_2} |J, M\rangle &= 0 \\
\underbrace{\langle j_1, j_2; m_1, m_2| J_z |J, M\rangle}_{(22a)} - \underbrace{\langle j_1, j_2; m_1, m_2| J_{z_1} |J, M\rangle}_{(22b)} & \\
- \underbrace{\langle j_1, j_2; m_1, m_2| J_{z_2} |J, M\rangle}_{(22c)} &= 0 \\
M \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M\rangle - m_1 \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M\rangle & \\
-m_2 \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M\rangle &= 0 \\
(M - m_1 - m_2) \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M\rangle &= 0 \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Aus der Gleichung (23) folgt das entweder $\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M\rangle = 0$ oder
$(M - m_1 - m_2) = 0$ was zur der wichtigen Beziehung führt:

$$
\boxed{M = m_1 + m_2} \qquad (5)
$$

Dies ist deswegen so wichtig weil dadurch die Entwicklung (20) nur auf die Clebsch-Gordan Koeffizienten beschränkt wird, bei denen die Bedingung (24) zutrifft. Alle anderen sind <u>Null</u>.
Der Erwartungswert für die Gesamtmagnetquantenzahl M zwischen:

$$
-j_1 - j_2 \le M \le j_1 + j_2 = -(j_1 + j_2) \le M \le j_1 + j_2 = -J \le M \le J \qquad (6)
$$

Eigenschaften der Clebsch-Gordan Koeffizienten

Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten sind konventionsgemäß *reell*:

$$\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M\rangle \in \mathbb{R} \tag{7}$$

D.h. es gilt:

$$\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M\rangle = \langle J, M | j_1, j_2; m_1, m_2\rangle^* = \langle J, M | j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \tag{8}$$

Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten sind *orthonormiert*:

$$\begin{aligned}
\langle J', M' | J, M\rangle &= \delta_{J',J}\delta_{J',J} \\
\langle J', M' | \underbrace{\left(\sum_{m_1,m_2} |j_1, j_2; m_1 m_2\rangle \langle j_1, j_2; m_1 m_2|\right)}_{=\mathbb{1}} |J, M\rangle &= \delta_{J',J}\delta_{J',J} \\
\Rightarrow \sum_{m_1,m_2} \langle J', M' | j_1, j_2; m_1 m_2\rangle \langle j_1, j_2; m_1 m_2 | J, M\rangle &= \delta_{J',J}\delta_{J',J}
\end{aligned} \tag{9}$$

Aus Gl. (27) und der Gl. (28) erhalten wir eine wichtige Beziehung:

$$\sum_{m_1,m_2} \langle j_1, j_2; m_1 m_2 | J', M'\rangle \langle j_1, j_2; m_1 m_2 | J, M\rangle = \delta_{J',J}\delta_{J',J} \tag{10}$$

Bzw. mit $J' = J$ und $M' = M$ folgt:

$$\boxed{\sum_{m_1,m_2} \langle j_1, j_2; m_1 m_2 | J, M\rangle^2 = 1} \tag{11}$$

Analog kann man auch folgende Beziehung herleiten:

$$\boxed{\sum_J \sum_M \langle j_1, j_2; m_1 m_2 | J, M\rangle^2 = 1} \tag{12}$$

Bestimmung der Clebsch-Gordan Koeffizienten

Wir wollen nun einige Beziehungen herleiten um die Clebsch-Gordan Koeffizienten bestimmen zu können. Eine wichtige Beziehung können wir direkt aus (23) übernehmen:

$$\boxed{\langle j_1, j_2; m_1 m_2 | J, M\rangle = 0 \quad \text{für} \quad m_1 + m_2 \neq M} \tag{13}$$

Eine weitere Beziehung finden wir aus den Extremalstellen für J und M d.h. wenn gilt:

$$J = j_1 + j_2 \quad \text{und} \quad M = J = j_1 + j_2 = m_1 + m_2 \tag{14}$$

Setzen wir (33) in die Gl. (20) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
|J, J\rangle &= \sum_{m_1=j_1}^{j_1} \sum_{m_2=j_2}^{j_2} \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, J\rangle |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \\
&= \langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J\rangle |j_1, j_2; j_1, j_2\rangle
\end{aligned} \tag{15}$$

Mit der Normierungsbedingung $\langle J, J | J, J\rangle \stackrel{!}{=} 1$ folgt:

$$\begin{aligned}
&\langle J, J | J, J\rangle = 1 \\
&\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | \langle J, J | j_1, j_2; j_1, j_2\rangle \langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J\rangle |j_1, j_2; j_1, j_2\rangle = 1 \\
&\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | \langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J\rangle \langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J\rangle |j_1, j_2; j_1, j_2\rangle = 1 \\
&\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J\rangle^2 \underbrace{\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | j_1, j_2; j_1, j_2\rangle}_{=1} = 1 \\
&\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J\rangle^2 = 1
\end{aligned} \tag{16}$$

Aus (35) folgt also:

$$\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J\rangle = \pm 1 \tag{17}$$

Um nun zu bestimmen ob das Ergebnis in (36) positive oder negative ist d.h. ob $+1$ oder -1, wurde die sog. *Condon-Shortley Phasenkonvention* eingeführt. Sie besagt, dass der Clebsch-Gordan Koeffizient von der Form: $\langle j_1, j_2; j_1, (J - j_1)|J, J\rangle$ reell und positive sein muss. D.h. in unserem Fall (33) mit $J = j_1 + j_2 \Leftrightarrow J - j_1 = j_2$ folgt:

$$\langle j_1, j_2; j_1, j_2|J, J\rangle = \underbrace{\langle j_1, j_2; j_1, (J - j_1)|J, J\rangle}_{\text{Konvention: } \textbf{positve}} = 1 \tag{18}$$

D.h.im Spezialfall (33) ist der Clebsch-Gordan Koeffizient gleich 1. Es gilt:

$$\boxed{\langle j_1, j_2; j_1, j_2|J, J\rangle = 1 \quad \text{mit} \quad J = j_1 + j_2} \tag{19}$$

Addition von Drehimpulsen, Clebsch-Gordan Koeffizienten

Wir betrachte zwei von einander unabhängige Drehimpulse $\vec{j}_1$ und $\vec{j}_2$, die jeweils einen eigenen Hilbertraum mit der Basis $\{|j_1, m_1\rangle\}$ für $\vec{j}_1$ und $\{|j_2, m_2\rangle\}$ für $\vec{j}_2$ bilden. Zusammen spannen sie einen $(2j_1 + 1) \times (2j_2 + 1)$ dimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ auf, mit der Basis $\{|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle\} \equiv \{|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle\}$. Nun wollen wir die einzelne Drehimpulse in eine gemeinsame Basis überführen, so dass wir einen Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$ mit der neuen Basis $\{|J, M\rangle\}$ erhalten. Dies erreichen wir, in dem wir die Orthonormalität der alten Basis ausnutzen und den Einheitsoperator $\mathbb{1}$ vor die neue Basis einschieben:

$$|J, M\rangle = \underbrace{\left(\sum_{m_1, m_2} |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \langle j_1, j_2; m_1, m_2|\right)}_{=\mathbb{1}} |J, M\rangle$$

$$|J, M\rangle = \sum_{m_1, m_2} \underbrace{\langle j_1, j_2; m_1, m_2|J, M\rangle}_{\textbf{Glebsch-Gordan Koef.}} |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \tag{20}$$

Da sowohl die alte Basis $\{|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle\}$ als auch die neue Basis $\{|J, M\rangle\}$ orthonormiert sind, handelt es sich bei (20) um eine unitäre Transformation. Zu bemerken ist dass bei dem von uns eingefügten Einheitsoperator nur über die Magnetquantenzahlen m_1 und m_2 summiert wird. D.h. man hält die Drehimpulsquantenzahlen j_1 und j_2 fest und entwickelt nur nach den Magnetquantenzahlen, für die gilt $m_1 = -j_1,\ -j_1 + 1,\ -j_1 + 2, \ldots j_1$ und $m_2 = -j_2,\ -j_2 + 1,\ -j_2 + 2, \ldots j_2$.
Die Koeffizienten $\langle j_1, j_2; m_1, m_2|J, M\rangle$ die die beiden Basen verbinden heißen *Clebsch-Gordan Koeffizienten*. D.h. das Problem der Addition zweier Drehimpulse reduziert sich auf das Bestimmen der Glebsch-Gordan Koeffizienten.
Für die Erwartungswerte J in der neuen Basis gilt:

$$\boxed{|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2} \tag{21}$$

Dies wird durch die Vektoraddition $\vec{J} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$ deutlich. Siehe dazu Abbildung 1

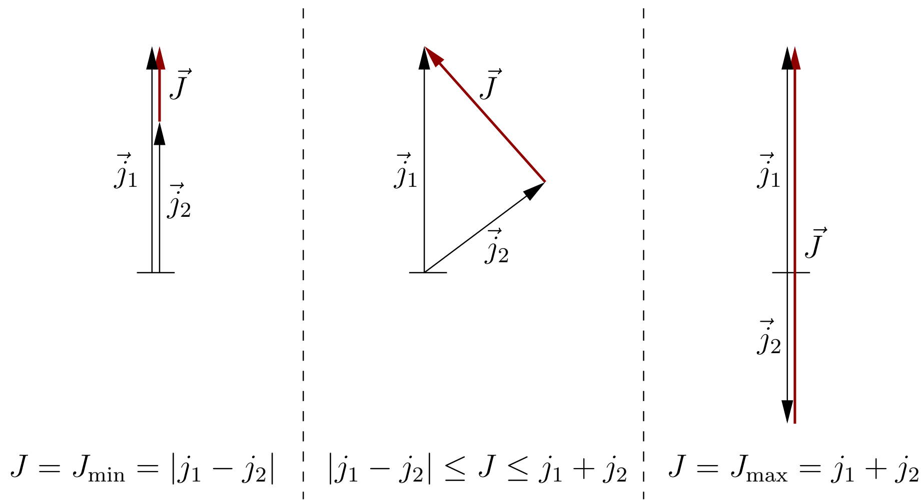

Figure 1: Addition zweier Drehimpulse.

Den Erwartungswert M können wir mit Hilfe des $J_z = j_{z_1} + j_{z_2}$ Operators und folgenden Eigenwertgleichungen bestimmen:

$$J_Z \left|J, M\right\rangle = M \left|J, M\right\rangle \tag{22a}$$
$$j_{z_1} \left|j_1, j_2; m_1, m_2\right\rangle = m_1 \left|j_1, j_2; m_1, m_2\right\rangle \tag{22b}$$
$$j_{z_2} \left|j_1, j_2; m_1, m_2\right\rangle = m_2 \left|j_1, j_2; m_1, m_2\right\rangle \tag{22c}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
J_z - j_{z_1} - j_{z_2} &= 0 \\
\left\langle j_1, j_2; m_1, m_2\right| J_z - j_{z_1} - j_{z_2} \left|J, M\right\rangle &= 0 \\
\underbrace{\left\langle j_1, j_2; m_1, m_2\right| J_z \left|J, M\right\rangle}_{(22a)} - \underbrace{\left\langle j_1, j_2; m_1, m_2\right| j_{z_1} \left|J, M\right\rangle}_{(22b)} & \\
- \underbrace{\left\langle j_1, j_2; m_1, m_2\right| j_{z_2} \left|J, M\right\rangle}_{(22c)} &= 0 \\
M \left\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M\right\rangle - m_1 \left\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M\right\rangle & \\
-m_2 \left\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M\right\rangle &= 0 \\
(M - m_1 - m_2) \left\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M\right\rangle &= 0
\end{aligned} \tag{23}$$

Aus der Gleichung (23) folgt das entweder $\left\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M\right\rangle = 0$ oder $(M - m_1 - m_2) = 0$ was zur der wichtigen Beziehung führt:

$$\boxed{M = m_1 + m_2} \tag{24}$$

Dies ist deswegen so wichtig weil dadurch die Entwicklung (20) nur auf die Clebsch-Gordan Koeffizienten beschränkt wird, bei denen die Bedingung (24) zutrifft. Alle anderen sind Null.
Der Erwartungswert für die Gesamtmagnetquantenzahl M liegt zwischen:

$$-j_1 - j_2 \leq M \leq j_1 + j_2 = -(j_1 + j_2) \leq M \leq j_1 + j_2 = -J \leq M \leq J \tag{25}$$

0.1 Eigenschaften der Clebsch-Gordan Koeffizienten

Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten sind konventionsgemäß *reell*:

$$\left\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M\right\rangle \in \mathbb{R} \tag{26}$$

D.h. es gilt:

$$\left\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M\right\rangle = \left\langle J, M | j_1, j_2; m_1, m_2\right\rangle^* = \left\langle J, M | j_1, j_2; m_1, m_2\right\rangle \tag{27}$$

Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten sind *orthonormiert*:

$$\begin{aligned}
\left\langle J', M' | J, M\right\rangle &= \delta_{J',J}\delta_{J',J} \\
\left\langle J', M'\right| \underbrace{\left(\sum_{m_1,m_2} \left|j_1, j_2; m_1 m_2\right\rangle \left\langle j_1, j_2; m_1 m_2\right|\right)}_{=\mathbb{1}} \left|J, M\right\rangle &= \delta_{J',J}\delta_{J',J} \\
\Rightarrow \sum_{m_1,m_2} \left\langle J', M' | j_1, j_2; m_1 m_2\right\rangle \left\langle j_1, j_2; m_1 m_2 | J, M\right\rangle &= \delta_{J',J}\delta_{J',J}
\end{aligned} \tag{28}$$

Aus Gl. (27) und der Gl. (28) erhalten wir eine wichtige Beziehung:

$$\sum_{m_1,m_2} \left\langle j_1, j_2; m_1 m_2 | J', M'\right\rangle \left\langle j_1, j_2; m_1 m_2 | J, M\right\rangle = \delta_{J',J}\delta_{J',J} \tag{29}$$

Bzw. mit $J' = J$ und $M' = M$ folgt:

$$\boxed{\sum_{m_1,m_2} \left\langle j_1, j_2; m_1 m_2 | J, M\right\rangle^2 = 1} \tag{30}$$

Analog kann man auch folgende Beziehung herleiten:

$$\boxed{\sum_{J} \sum_{M} \left\langle j_1, j_2; m_1 m_2 | J, M\right\rangle^2 = 1} \tag{31}$$

0.2 Bestimmung der Clebsch-Gordan Koeffizienten

Wir wollen nun einige Beziehungen herleiten um die Clebsch-Gordan Koeffizienten bestimmen zu können. Eine wichtige Beziehung können wir direkt aus (23) übernehmen:

$$\boxed{\langle j_1, j_2; m_1 m_2 | J, M\rangle = 0 \quad \text{für} \quad m_1 + m_2 \neq M} \tag{32}$$

Eine weitere Beziehung finden wir aus den Extremalstellen für J und M d.h. wenn gilt:

$$J = j_1 + j_2 \quad \text{und} \quad M = J = j_1 + j_2 = m_1 + m_2 \tag{33}$$

Setzen wir (33) in die Gl. (20) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} |J, J\rangle &= \sum_{m_1=j_1}^{j_1} \sum_{m_2=j_2}^{j_2} \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, J\rangle \, |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \\ &= \langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J\rangle \, |j_1, j_2; j_1, j_2\rangle \end{aligned} \tag{34}$$

Mit der Normierungsbedingung $\langle J, J | J, J\rangle \overset{!}{=} 1$ folgt:

$$\begin{aligned} &\langle J, J | J, J\rangle = 1 \\ &\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | \, \langle J, J | j_1, j_2; j_1, j_2\rangle \, \langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J\rangle \, |j_1, j_2; j_1, j_2\rangle = 1 \\ &\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | \, \langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J\rangle \, \langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J\rangle \, |j_1, j_2; j_1, j_2\rangle = 1 \\ &\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J\rangle^2 \underbrace{\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | j_1, j_2; j_1, j_2\rangle}_{=1} = 1 \\ &\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J\rangle^2 = 1 \end{aligned} \tag{35}$$

Aus (35) folgt also:

$$\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J\rangle = \pm 1 \tag{36}$$

Um nun zu bestimmen ob das Ergebnis in (36) positive oder negative ist d.h. ob $+1$ oder -1, wurde die sog. *Condon-Shortley Phasenkonvention* eingeführt. Sie besagt, dass der Clebsch-Gordan Koeffizient von der Form: $\langle j_1, j_2; j_1, (J - j_1) | J, J\rangle$ <u>reell</u> und <u>positive</u> sein muss. D.h. in unserem Fall (33) mit $J = j_1 + j_2 \Leftrightarrow J - j_1 = j_2$ folgt:

$$\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J\rangle = \underbrace{\langle j_1, j_2; j_1, (J - j_1) | J, J\rangle}_{\text{Konvention: } \textbf{positve}} = 1 \tag{37}$$

D.h.im Spezialfall (33) ist der Clebsch-Gordan Koeffizient gleich 1. Es gilt:

$$\boxed{\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J\rangle = 1 \quad \text{mit} \quad J = j_1 + j_2} \tag{38}$$

Eine weitere Extremalstelle ist wenn gilt:

$$J = j_1 + j_2 \quad \text{und} \quad M = -J = -j_1 - j_2 = m_1 + m_2 \tag{39}$$

Setzen wir (39) wieder in die Gl. (20) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} |J, -J\rangle &= \sum_{m_1=-j_1}^{-j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{-j_2} \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, -J\rangle \, |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \\ &= \langle j_1, j_2; -j_1, -j_2 | J, -J\rangle \, |j_1, j_2; j_1, j_2\rangle \end{aligned} \tag{40}$$

Die Normierungsbedingung $\langle J, -J | J, -J\rangle \overset{!}{=} 1$ und analoge Rechnung wie in (35) führt zu:

$$\langle j_1, j_2; -j_1, -j_2 | J, -J\rangle^2 = 1 \Leftrightarrow \langle j_1, j_2; -j_1, -j_2 | J, -J\rangle = \pm 1 \tag{41}$$

Um festzustellen ob das Ergebnis in (41) positiv oder negativ ist, führen wir eine kleine Substitution durch.

$$j_1' = -j_1; \quad j_2' = -j_2 \Rightarrow -J = -j_1 - j_2 = j_1' + j_2' \equiv J' \tag{42}$$

(42) eingesetzt in $\langle j_1, j_2; -j_1, -j_2 | J, -J\rangle$ führt zu:

$$\langle j_1, j_2; j_1', j_2' | J, J'\rangle = \underbrace{\langle j_1, j_2; j_1', (J' - j_1') | J, J'\rangle}_{\text{Konvention: } \textbf{positve}} \quad \text{mit } j_2' = J' - j_1' \tag{43}$$

Aus (42) und (43) folgt also, dass das Ergebnis in Gl. (41) positiv sein muss. Wir erhalten also:

$$\boxed{\langle j_1, j_2; -j_1, -j_2 | J, -J\rangle = 1 \quad \text{mit} \quad J = j_1 + j_2} \tag{44}$$

D.h. an den beiden Extrimalstellen, mit $M = -J$ und $M = J$, sind die Clebsch-Gordan Koeffizienten gleich Eins.
Mit (38) bzw. (44) können wir schon zwei der Clebsch-Gordan Koeffizienten bestimmen. Um alle weiteren ebenfalls bestimmen zu können, wollen wir jetzt eine **Rekursionsformel** herleiten, mit deren Hilfe wir ausgehend von einem CGK. (Clebsch-Gordan Koeffizienten) einen weiteren bestimmen können, um so sukzessive alle weiteren berechnen zu können.
Dazu betrachten wir das Matrixelement $\langle j_1, j_2; m_1, m_2| J_\pm |J, M\rangle$ und lassen den Auf/Absteigeoperator $J_\pm = j_{1\pm} + j_{2\pm}$ einmal auf die rechte Seite und einmal auf die linke Seite wirken.
Mit der Eigenwertgleichung:

$$J_\pm |J, M\rangle = \hbar\sqrt{(J \mp M)(J \pm M + 1)}\, |J, M \pm 1\rangle \tag{45}$$

Erhalten wir:

$$\langle j_1, j_2; m_1, m_2| J_\pm |J, M\rangle = \hbar\sqrt{(J \mp M)(J \pm M + 1)}\, \langle j_1, j_2; m_1, m_2|J, M \pm 1\rangle \tag{46}$$

Lassen wir den Auf/Absteigeoperator auf die linke Seite wirken, so brauchen wir folgende Eigenwertgleichung:

$$\begin{aligned}
j_{1\mp} |j_1, m_1\rangle &= \hbar\sqrt{(j_1 \pm m_1)(j_1 \mp m_1 + 1)}\, |j_1, m_1 \mp 1\rangle \\
(j_{1\mp} |j_1, m_1\rangle)^\dagger &= (\hbar\sqrt{(j_1 \pm m_1)(j_1 \mp m_1 + 1)}\, |j_1, m_1 \mp 1\rangle)^\dagger \\
\langle j_1, m_1| j_{1\mp}^\dagger &= \hbar\sqrt{(j_1 \pm m_1)(j_1 \mp m_1 + 1)}\, \langle j_1, m_1 \mp 1| \\
\langle j_1, m_1| j_{1\pm} &= \hbar\sqrt{(j_1 \pm m_1)(j_1 \mp m_1 + 1)}\, \langle j_1, m_1 \mp 1|
\end{aligned} \tag{47}$$

Bzw. analog:

$$\langle j_2, m_2| j_{1\pm} = \hbar\sqrt{(j_2 \pm m_2)(j_2 \mp m_2 + 1)}\, \langle j_2, m_2 \mp 1| \tag{48}$$

Mit (47) und (48) erhalten wir für das Matrixelement:

$$\begin{aligned}
&\langle j_1, j_2; m_1, m_2| J_\pm |J, M\rangle = \langle j_1, j_2; m_1, m_2| j_{1\pm} + j_{2\pm} |J, M\rangle \\
&\quad = \langle j_1, j_2; m_1, m_2| j_{1\pm} |J, M\rangle + \langle j_1, j_2; m_1, m_2| j_{2\pm} |J, M\rangle \\
&\quad = \hbar\sqrt{(j_1 \pm m)(j_1 \mp m + 1)}\, \langle j_1, m \mp 1|J, M\rangle \\
&\qquad + \hbar\sqrt{(j_2 \pm m)(j_2 \mp m + 1)}\, \langle j_2, m \mp 1|J, M\rangle
\end{aligned} \tag{49}$$

Setzen wir nun die beiden Gleichungen (46) und (49) gleich und kürzen auf beiden Seiten durch $\hbar$, so erhalten wir folgende *rekursive* Beziehung:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\sqrt{(J \mp M)(J \pm M + 1)}\, \langle j_1, j_2; m_1, m_2|J, M \pm 1\rangle \\
&\quad = \sqrt{(j_1 \pm m_1)(j_1 \mp m_1 + 1)}\, \langle j_1, j_2; , m_1 \mp 1, m_2|J, M\rangle \\
&\qquad + \sqrt{(j_2 \pm m_2)(j_2 \mp m_2 + 1)}\, \langle j_1, j_2; m_1, m_2 \mp 1|J, M\rangle
\end{aligned}} \tag{50}$$

Beispiel

Addition Zweier Drehimpulse anhand eines einfachen Beispiels von Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$.

$$|S, M\rangle = \sum_{m_1}\sum_{m_2} \langle s_i, s_2; m_1, m_2|S, M\rangle |s_1, s_2; m_1, m_2\rangle$$

$$|1, -1\rangle = \underbrace{\langle \frac{1}{2}\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}|11\rangle}_{=1} |\frac{1}{2}\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle \equiv |--\rangle$$

$$|1, 0\rangle = \underbrace{\langle \frac{1}{2}\frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}|10\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} |\frac{1}{2}\frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle + \underbrace{\langle \frac{1}{2}\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\frac{1}{2}|10\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} |\frac{1}{2}\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle)$$

$$|1,1\rangle == \underbrace{\langle\frac{1}{2}\frac{1}{2};\frac{1}{2}\frac{1}{2}|11\rangle}_{=1}|\frac{1}{2}\frac{1}{2};\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle \equiv |++\rangle$$

$$|0,0\rangle = \underbrace{\langle\frac{1}{2}\frac{1}{2};\frac{1}{2}-\frac{1}{2}|00\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}|\frac{1}{2}\frac{1}{2};\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rangle + \underbrace{\langle\frac{1}{2}\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\frac{1}{2}|00\rangle}_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}|\frac{1}{2}\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$$

Referenzen

- Claude Cohen-Tannoudji Quantenmechanik Band 2
- Zettili Quanten Mehanics
- Rollnik Quantentheorie 2