

Erwartungswert von $\sin^2(x)$

Behauptung:

$$\boxed{\langle \sin^2(x) \rangle = \frac{1}{2}} \quad (1)$$

Wir wollen nun die Behauptung (1) überprüfen. Dazu benutzen wir folgende Identität:

$$\sin(x) = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) \quad (2)$$

Damit können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \langle \sin^2(x) \rangle &= \left\langle -\frac{1}{4} (e^{ix} - e^{-ix})^2 \right\rangle = \left\langle -\frac{1}{4} \left(e^{2ix} + e^{-2ix} - 2 \cdot \underbrace{e^{ix} e^{-ix}}_{=1} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{2} - \frac{1}{4} (e^{2ix} + e^{-2ix}) \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} \right\rangle - \left\langle \frac{1}{4} (e^{2ix} + e^{-2ix}) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} - \left\langle \frac{1}{4} (e^{2ix} + e^{-2ix}) \right\rangle \end{aligned} \quad (3)$$

Nun wollen wir den Eigenwert des zweiten Terms in der Gl. (3) bestimmen. Für den Erwartungswert eines Operators im Ortsraum gilt allgemein:

$$\langle O \rangle = \int \psi^* O \psi dx \quad (4)$$

Betrachte ψ als ebene Welle mit:

$$\psi = A e^{i(kx - \omega t)} \quad (5)$$

Mit (4) und (5) folgt für den Erwartungswert in Gl. (2):

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{4} (e^{2ix} + e^{-2ix}) \right\rangle &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} A^* e^{-i(kx - \omega t)} (e^{2ix} + e^{-2ix}) A e^{i(kx - \omega t)} dx \\ &= \frac{|A|^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{2ix} + e^{-2ix}) dx \end{aligned} \quad (6)$$

Um nun das Integral in Gl. (6) zu berechnen machen wir eine Substitution:

$$z = e^{2ix} \Rightarrow z(\infty) = \infty \quad z(-\infty) = 0 \quad \text{mit } z \in \mathbb{C} \quad (7a)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = 2ie^{2ix} = 2iz \Leftrightarrow dx = \frac{dz}{2iz} \quad (7b)$$

Mit der Substitution (7a) und (7b) erhalten wir für das Integral in der Gl. (6):

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} (e^{2ix} + e^{-2ix}) dx &= \int_0^{\infty} \left(z + \frac{1}{z}\right) \frac{1}{2iz} dz = \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{1}{z^2}\right) dz \\ &= \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} \frac{z^2 + 1}{z^2} dz\end{aligned}\quad (8)$$

Da die Variable z im Gl. (8) nur in quadratischer Form vorkommt, können wir die Grenzen ersetzen mit $\int_0^{\infty} \rightarrow \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty}$ und erhalten folgendes Integral:

$$\frac{1}{4i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2 + 1}{z^2} dz \quad (9)$$

Das Integral (9) lässt sich mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\oint f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k) \quad (10)$$

bestimmen. Dazu berechnen wir zuerst das Residuuum unser Funktion:

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2} \quad (11)$$

Für das Residuuum einer Funktion $f(z)$, die in z_0 einen Pol n -ter Ordnung hat, gilt:

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z - z_0)^n f(z) \right] \quad (12)$$

Die Funktion (11) hat einen Pol 2-ter Ordnung bei $z_0 = 0$. D.h es gilt laut Gl. (12):

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} z^2 \left(\frac{z^2 + 1}{z^2} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} z^2 + 1 = \lim_{z \rightarrow 0} 2z = 0 \quad (13)$$

Mit (10), (11) und (13) folgt für unser Integral (9):

$$\frac{1}{4i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2 + 1}{z^2} dz \equiv \frac{1}{4i} \oint f(z) dz = \frac{1}{4i} 2\pi i \text{Res}(f, 0) = \frac{\pi}{2} \cdot 0 = 0 \quad (14)$$

Damit gilt für den Erwartungswert in Gl. (3):

$$\left\langle \frac{1}{4} (e^{2ix} + e^{-2ix}) \right\rangle \equiv \frac{1}{4i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2 + 1}{z^2} dz = 0 \quad (15)$$

Somit wäre die Behauptung Gl. (1) bestätigt.