Klein-Gordon-Gleichung

Die Klein-Gordon-Gleichung ist eine relativistische Gleichung und beschreibt Teilchen mit Spin 0 z.B: π-Mesonen und K^0-Mesonen. Sie folgt aus dem Korrespondenzprinzip (klassisch)

$$\vec{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \tag{1}$$

bzw. kovarianter Schreibweise (relativistisch)

$$p_\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu \tag{2}$$

Betrachten wir die Länge eines Impulses im Laborsystem IS

$$p^2 = p_\mu p^\mu = (p_0, -\vec{p})(p_0, \vec{p}) = p_0^2 - \vec{p}^2$$

mit $p_0 = \frac{E}{c}$

$$p_\mu p^\mu = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^2 \tag{3}$$

Die Energie für ein Teilchen in seinem Ruhesystem IS' ist $E = mc^2$ (mit m für Ruhe-Energie) und $\vec{p}' = 0$ setzen wir die Gleichung in (3) ein so erhalten wir

$$p'_\mu p'^\mu = m^2c^2 \tag{4}$$

Setzt man nun die beiden Gleichungen (3) und (4) gleich (Erhaltung der Länge des Impulses in allen Inertialsystemen) IS=IS' und stellt sie nach E um somit folgt

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^2 = m^2c^2 \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow E = \pm\sqrt{\vec{p}^2c^2 + m^2c^4} \tag{6}$$

Die negative Energien in Gleichung (6) führt zu der Annahme von Antiteilchen.
Setzen wir das Korrespondenzprinzip für die Energie $E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ und den Impuls $p \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla}$ in die Gleichung (5) ein und erhalten

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^2 = m^2c^2 \\
&\left(\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - (-i\hbar\vec{\nabla})^2 = m^2c^2 \\
&-\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hbar^2\vec{\nabla}^2 = m^2c^2 \qquad | : -\hbar^2 \\
&\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 = -\frac{m^2c^2}{\hbar^2} \\
\Leftrightarrow &\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} = 0
\end{aligned} \tag{7}$$

Führen wir den **d'Alembert-Operator** ein $\Box \equiv \partial_\mu\partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle$ und multiplizieren wir die Gleichung (7) mit der Wellenfunktion ψ von rechts, so ergibt das die **Klein-Gordon-Gleichung**

$$\boxed{\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\psi = 0} \tag{8}$$

Die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie, erhält aber zwei fundamentale Probleme. Ohne deren Bewältigung die Gleichung physikalisch unhaltbar ist.

Das **erste Problem** ist, dass die Lösung der Klein-Gordon-Gleichung auch negative Energieen zulässt. Dies wollen wir näher untersuchen.

Die Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung sind ebene Wellen mit der Form

$$\psi(x) = Ne^{-ipx/\hbar} \tag{9}$$

mit $p \cdot x = p^\mu x_\mu = Et - \vec{p}\vec{x}$, eingesetzt in (9)

$$\psi(x) = N e^{\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{x})} \tag{10}$$

Setzen wir nun die ebene Welle in die Klein-Gordon-Gleichung (8) ein

$$\begin{aligned}
\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] N e^{\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{x})} &= 0 && (11)\\
\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle\right) e^{\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{x})} + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 e^{\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{x})} &= 0 && (12)\\
\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{x})} - \nabla^2 e^{\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{x})} + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 e^{\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{x})} &= 0 && (13)\\
-\frac{E^2}{c^2\hbar^2}\cancel{e^{\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{x})}} + \frac{1}{\hbar^2}p^2\cancel{e^{\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{x})}} + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \cancel{e^{\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{x})}} &= 0 && (14)\\
-\frac{E^2}{c^2} + p^2 + m^2c^2 &= 0 && (15)\\
\Leftrightarrow E^2 &= p^2c^2 + m^2c^4 && (16)
\end{aligned}$$

Durch ziehen der Wurzel auf beiden Seiten erhält man

$$E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \tag{17}$$

Die selbe Energie wie Gleichung (6). Lösungen der negativer Energie des Energiespektrums ist nach unten nicht beschränkt. Formal liegt das darin begründet, dass die Klein-Gordon-Gleichung eine DGL 2-Ordnung nach der Zeit ist. Es stellt sich also das Problem der Intepretation der negativen Energie. Was später mit Antiteilchen begründet wird.

Das **zweite Problem** der Klein-Gordon-Gleichung ist dass sie negative Wahrscheinlichkeitsdichten hervorbringt. Dies wollen wir nun näher untersuchen.

Zur Herleitung einer Kontinuitätsgleichung multipliziert man die Klein-Gordon-Gleichung von links mit ψ^*

$$\psi^* \left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \psi = 0 \tag{18}$$

und zieht davon die komplex konjugierte Gleichung

$$\psi \left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \psi^* = 0 \tag{19}$$

ab. Somit folgt

$$\begin{aligned}
\psi^* \left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \psi - \psi \left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \psi^* &= 0 && (20)\\
\psi^*\Box\psi + \cancel{\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 |\psi|^2} - \psi\Box\psi^* - \cancel{\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 |\psi|^2} &= 0 && (21)\\
\psi^*\Box\psi - \psi\Box\psi^* &= 0 && (22)\\
& && (23)
\end{aligned}$$

Mit $\Box \equiv \partial_\mu\partial^\mu$ eingesetzt mit

$$\begin{aligned}
&\psi^*\partial_\mu\partial^\mu\psi - \psi\partial_\mu\partial^\mu\psi^* = 0\\
&\partial_\mu(\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\psi^*) = 0 \qquad \text{Produktregel ?} && (24)
\end{aligned}$$

Setzt man in die Gleichung (24) die Entsprechung für die partielle Ableitungen ein

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right), \qquad \partial^\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right) \tag{25}$$

so ergibt das

$$
\begin{aligned}
&\partial_0(\psi^*\partial^0\psi - \psi\partial^0\psi^*) + \vec{\nabla}(-\psi^*\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\psi^*) = 0 \\
&\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi - \psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^*) + \vec{\nabla}(-\psi^*\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\psi^*) = 0 \quad | \cdot -1 \\
&-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi - \psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^*) + \vec{\nabla}(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*) = 0 \qquad (26)
\end{aligned}
$$

Multipliziert man die Gleichung (26) mit $\frac{\hbar}{2mi}$ somit folgt eine ähnliche Form für die Kontinuitätsgleichung in nicht relativistischen Fall

$$
\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left[\frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi - \psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\right)\right]}_{\rho} + \vec{\nabla}\underbrace{\frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right)}_{\vec{j}} = 0 \qquad (27)
$$

Vergleichen wir die Gleichung (27) mit der Kontinuitätsgleichung

$$
\frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla}\vec{j} = 0 \qquad (28)
$$

So erhalten wir für die Wahrscheinlichkeitsdichte ρ

$$
\rho = \left[\frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi - \psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\right)\right] \qquad (29)
$$

Und für die Wahrscheinlichkeitsstromdichte

$$
\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right) \qquad (30)
$$

Um zu sehen dass die Wahrscheinlichkeitsdichte ρ auch negativ werden kann, betrachte zunächst die Schrödinger Gleichung sowie die komlexkonjugierte davon

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{i}{\hbar}H\psi = -\frac{i}{\hbar}E\psi \qquad (31) \\
&\frac{\partial}{\partial t}\psi^* = \frac{i}{\hbar}E\psi^* \qquad (32)
\end{aligned}
$$

Eingesetzt in (29)

$$
\begin{aligned}
\rho &= \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(-\frac{i}{\hbar}E\psi^*\psi - \frac{i}{\hbar}E\psi\psi^*\right) && (33) \\
&= \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(-\frac{i2}{\hbar}E|\psi|^2\right) && (34) \\
&= \frac{E}{mc^2}|\psi|^2 && (35) \\
& && (36)
\end{aligned}
$$

Da wir wissen das $E < 0$ werden kann folgt daraus dass die Wahrscheinlichkeitsstromdichte ρ ebenfalls kleiner Null wird. Daraus folgt ρ kann **nicht** die Bedeutung einer Wahrscheinlichkeitsdichte haben, sondern eventuell einer Ladungsdichte. Zur Begründung dass ρ eine mögliche Ladungsdichte ist betrachten wir die Zustande mit $E > 0$ z.B. π^+ und $E < 0$ z.B. π^- (Antiteilchen von π^+. Im Fall $\rho > 0$ dominieren die π^+Teilchen. Also ist die Ladungsdichte positiv. Im Fall $\rho < 0$ dominieren π^-Teilchen, also wird die Ladungsdichte negativ. Somit ist ρ proportional zu elektrischen Ladungsdichte.
Die klein-Gordon-Gleichung ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in t, deshalb können die Anfangswerte von ψ und $\frac{\partial}{\partial t}\psi$ unabhängig vorgegeben werden, so dass ρ als Funktion von $\vec{x}$ sowohl positiv wie auch negativ sein kann.

Referenzen

- Schwabl QMII
- Rollnik Quantentheorie 2