adjungierter Pauli-Spinor

Um den Adjungierten Pauli-Spinor zu bestimmen wollen wir die adjungierte Dirac-Gleichung herleiten. Dazu gehen wir von der nicht adjungierten freien Dirac-Gleichung aus

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{mc}{\hbar}\psi = 0 \tag{1}$$

Nun adjungieren wir diese Gleichung

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu \psi)^\dagger - \frac{mc}{\hbar}\psi^\dagger &= 0 \\ -i(\partial_\mu \psi)^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger - \frac{mc}{\hbar}\psi^\dagger &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Nun machen wir eine kleine Nebenrechnung

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu)^\dagger &= (\beta, \beta\alpha_1, \beta\alpha_2, \beta\alpha_3)^\dagger \\ &= (\beta^\dagger, (\beta\alpha_1)^\dagger, (\beta\alpha_2)^\dagger, (\beta\alpha_3)^\dagger) \\ &= (\beta^\dagger, (\alpha_1)^\dagger(\beta)^\dagger, (\alpha_2)^\dagger(\beta)^\dagger, (\alpha_3)^\dagger(\beta)^\dagger) \quad \text{mit } \beta^\dagger = \beta \text{ und } (\alpha_i)^\dagger = \alpha_i \\ &= (\mathbb{1}\cdot\beta, \mathbb{1}\cdot\alpha_1\beta, \mathbb{1}\cdot\alpha_2\beta, \mathbb{1}\cdot\alpha_3\beta) \\ &= (\beta\cdot\beta\cdot\beta, \beta\cdot\beta\cdot\alpha_1\beta, \beta\cdot\beta\cdot\alpha_2\beta, \beta\cdot\beta\cdot\alpha_3\beta) \\ &= \beta\cdot\underbrace{(\beta, \beta\cdot\alpha_1, \beta\cdot\alpha_2, \beta\cdot\alpha_3)}_{\gamma^\mu}\cdot\beta \end{aligned} \tag{3}$$

Wir bekommen aus der Gleichung (3) eine wichtige Relation mit $\beta = \gamma^0$

$$\boxed{(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0} \tag{4}$$

Setzen wir nun diese Relation in die Gleichung (2) ein und multiplizieren von rechts mit γ^0

$$\begin{aligned} -i(\partial_\mu \psi)^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 - \frac{mc}{\hbar}\psi^\dagger &= 0 \qquad | \cdot \gamma^0 \\ -i(\partial_\mu \underbrace{\psi^\dagger\gamma^0}_{\overline{\psi}})\gamma^\mu\mathbb{1} - \frac{mc}{\hbar}\underbrace{\psi^\dagger\gamma^0}_{\overline{\psi}} &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Damit sieht unsere adjungierte Dirac-Gleichung wie folgt aus

$$-i(\partial_\mu\overline{\psi})\gamma^\mu - \frac{mc}{\hbar}\overline{\psi} = 0 \tag{6}$$

Mit dem **adjungierten Paulispinor**

$$\boxed{\overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0} \tag{7}$$

Unter Lorenztranformation verhält sich der adjungierte Paulispinor $\overline{\psi}$ invers zu dem Dirac-Spinor ψ

$$\overline{\psi}' = \psi'^\dagger\gamma^0 = (S(\Lambda)\psi)^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger S(\Lambda)^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger\mathbb{1}S(\Lambda)^\dagger\gamma^0 = \underbrace{\psi^\dagger\gamma^0}_{\overline{\psi}}\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger\gamma^0 = \overline{\psi}\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger\gamma^0 \tag{8}$$

Referenzen

- Claude Cohen-Tannoudji Quantenmechanik Band 2
- Zettili Quanten Mehanics
- Rollnik Quantentheorie 2