Addition von Drehimpulsen, Clebsch-Gordan Koeffizienten

Wir betrachte zwei von einander unabhängige Drehimpulse $\vec{J}_1$ und $\vec{J}_2$, die jeweils einen eigenen Hilbertraum mit der Basis $\{|j_1, m_1\rangle\}$ für $\vec{J}_1$ und $\{|j_2, m_2\rangle\}$ für $\vec{J}_2$ bilden. Zusammen spannen sie einen $(2j_1+1)\times(2j_2+1)$ dimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ auf, mit der Basis $\{|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle\} \equiv \{|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle\}$. Nun wollen wir die einzelne Drehimpulse in eine gemeinsame Basis überführen, so dass wir einen Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ mit der neuen Basis $\{|J, M\rangle\}$ erhalten. Dies erreichen wir, in dem wir die Orthonormalität der alten Basis ausnutzen und den Einheitsoperator $\mathbb{1}$ vor die neue Basis einschieben:

$$
\begin{aligned}
|J, M\rangle &= \underbrace{\left(\sum_{m_1, m_2} |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \langle j_1, j_2; m_1, m_2|\right)}_{=\mathbb{1}} |J, M\rangle \\
|J, M\rangle &= \sum_{m_1, m_2} \underbrace{\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M\rangle}_{\textbf{Glebsch-Gordan Koef.}} |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Da sowohl die alte Basis $\{|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle\}$ als auch die neue Basis $\{|J, M\rangle\}$ orthonormiert sind, handelt es sich bei (1) um eine unitäre Transformation. Zu bemerken ist dass bei dem von uns eingefügten Einheitsoperator nur über die Magnetquantenzahlen m_1 und m_2 summiert wird. D.h. man hält die Drehimpulsquantenzahlen j_1 und j_2 fest und entwickelt nur nach den Magnetquantenzahlen, für die gilt $m_1 = -j_1,\ -j_1+1,\ -j_1+2, \dots j_1$ und $m_2 = -j_2,\ -j_2+1,\ -j_2+2, \dots j_2$.
Die Koeffizienten $\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M\rangle$ die die beiden Basen verbinden heißen *Clebsch-Gordan Koeffizienten*. D.h. das Problem der Addition zweier Drehimpulse reduziert sich auf das Bestimmen der Glebsch-Gordan Koeffizienten.
Für die Erwartungswerte J in der neuen Basis gilt:

$$
\boxed{|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2} \qquad (2)
$$

Dies wird durch die Vektoraddition $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ deutlich.
Den Erwartungswert M können wir mit Hilfe des $J_z = J_{z_1} + J_{z_2}$ Operators und folgenden Eigenwertgleichungen bestimmen:

$$
\begin{aligned}
J_Z |J, M\rangle &= M |J, M\rangle \qquad (3a) \\
J_{z_1} |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle &= m_1 |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \qquad (3b) \\
J_{z_2} |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle &= m_2 |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \qquad (3c)
\end{aligned}
$$

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
J_z - J_{z_1} - J_{z_2} &= 0 \\
\langle j_1, j_2; m_1, m_2| J_z - J_{z_1} - J_{z_2} |J, M\rangle &= 0 \\
\underbrace{\langle j_1, j_2; m_1, m_2| J_z |J, M\rangle}_{(3a)} - \underbrace{\langle j_1, j_2; m_1, m_2| J_{z_1} |J, M\rangle}_{(3b)} & \\
- \underbrace{\langle j_1, j_2; m_1, m_2| J_{z_2} |J, M\rangle}_{(3c)} &= 0 \\
M \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M\rangle - m_1 \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M\rangle & \\
-m_2 \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M\rangle &= 0 \\
(M - m_1 - m_2) \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M\rangle &= 0 \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Aus der Gleichung (4) folgt das entweder $\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M\rangle = 0$ oder $(M - m_1 - m_2) = 0$ was zur der wichtigen Beziehung führt:

$$
\boxed{M = m_1 + m_2} \qquad (5)
$$

Dies ist deswegen so wichtig weil dadurch die Entwicklung (1) nur auf die Clebsch-Gordan Koeffizienten beschränkt wird, bei denen die Bedingung (5) zutrifft. Alle anderen sind Null.
Der Erwartungswert für die Gesamtmagnetquantenzahl M zwischen:

$$
-j_1 - j_2 \leq M \leq j_1 + j_2 = -(j_1 + j_2) \leq M \leq j_1 + j_2 = -J \leq M \leq J \qquad (6)
$$

Eigenschaften der Clebsch-Gordan Koeffizienten

Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten sind konventionsgemäß *reell*:

$$\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M \rangle \in \mathbb{R} \tag{7}$$

D.h. es gilt:

$$\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M \rangle = \langle J, M | j_1, j_2; m_1, m_2 \rangle^* = \langle J, M | j_1, j_2; m_1, m_2 \rangle \tag{8}$$

Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten sind *orthonormiert*:

$$\begin{aligned} \langle J', M' | J, M \rangle &= \delta_{J',J}\delta_{J',J} \\ \langle J', M' | \underbrace{\left(\sum_{m_1,m_2} |j_1, j_2; m_1 m_2\rangle \langle j_1, j_2; m_1 m_2| \right)}_{=\mathbb{1}} |J, M\rangle &= \delta_{J',J}\delta_{J',J} \\ \Rightarrow \sum_{m_1,m_2} \langle J', M' | j_1, j_2; m_1 m_2 \rangle \langle j_1, j_2; m_1 m_2 | J, M \rangle &= \delta_{J',J}\delta_{J',J} \end{aligned} \tag{9}$$

Aus Gl. (8) und der Gl. (9) erhalten wir eine wichtige Beziehung:

$$\sum_{m_1,m_2} \langle j_1, j_2; m_1 m_2 | J', M' \rangle \langle j_1, j_2; m_1 m_2 | J, M \rangle = \delta_{J',J}\delta_{J',J} \tag{10}$$

Bzw. mit $J' = J$ und $M' = M$ folgt:

$$\boxed{\sum_{m_1,m_2} \langle j_1, j_2; m_1 m_2 | J, M \rangle^2 = 1} \tag{11}$$

Analog kann man auch folgende Beziehung herleiten:

$$\boxed{\sum_{J} \sum_{M} \langle j_1, j_2; m_1 m_2 | J, M \rangle^2 = 1} \tag{12}$$

Bestimmung der Clebsch-Gordan Koeffizienten

Wir wollen nun einige Beziehungen herleiten um die Clebsch-Gordan Koeffizienten bestimmen zu können. Eine wichtige Beziehung können wir direkt aus (4) übernehmen:

$$\boxed{\langle j_1, j_2; m_1 m_2 | J, M \rangle = 0 \quad \text{für} \quad m_1 + m_2 \neq M} \tag{13}$$

Eine weitere Beziehung finden wir aus den Extremalstellen für J und M d.h. wenn gilt:

$$J = j_1 + j_2 \quad \text{und} \quad M = J = j_1 + j_2 = m_1 + m_2 \tag{14}$$

Setzen wir (14) in die Gl. (1) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} |J, J\rangle &= \sum_{m_1=j_1}^{j_1} \sum_{m_2=j_2}^{j_2} \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, J \rangle |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \\ &= \langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J \rangle |j_1, j_2; j_1, j_2\rangle \end{aligned} \tag{15}$$

Mit der Normierungsbedingung $\langle J, J | J, J \rangle \stackrel{!}{=} 1$ folgt:

$$\begin{aligned} &\langle J, J | J, J \rangle = 1 \\ &\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | \langle J, J | j_1, j_2; j_1, j_2 \rangle \langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J \rangle |j_1, j_2; j_1, j_2\rangle = 1 \\ &\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | \langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J \rangle \langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J \rangle |j_1, j_2; j_1, j_2\rangle = 1 \\ &\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J \rangle^2 \underbrace{\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | j_1, j_2; j_1, j_2 \rangle}_{=1} = 1 \\ &\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J \rangle^2 = 1 \end{aligned} \tag{16}$$

Aus (16) folgt also:

$$\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J \rangle = \pm 1 \tag{17}$$

Um nun zu bestimmen ob das Ergebnis in (17) positive oder negative ist d.h. ob $+1$ oder -1, wurde die sog. *Condon-Shortley Phasenkonvention* eingeführt. Sie besagt, dass der Clebsch-Gordan Koeffizient von der Form: $\langle j_1, j_2; j_1, (J - j_1)|J, J\rangle$ reell und positive sein muss. D.h. in unserem Fall (14) mit $J = j_1 + j_2 \Leftrightarrow J - j_1 = j_2$ folgt:

$$\langle j_1, j_2; j_1, j_2|J, J\rangle = \underbrace{\langle j_1, j_2; j_1, (J - j_1)|J, J\rangle}_{\text{Konvention: } \textbf{positve}} = 1 \tag{18}$$

D.h.im Spezialfall (14) ist der Clebsch-Gordan Koeffizient gleich 1. Es gilt:

$$\boxed{\langle j_1, j_2; j_1, j_2|J, J\rangle = 1 \quad \text{mit} \quad J = j_1 + j_2} \tag{19}$$

Beispiel

Addition Zweier Drehimpulse anhand eines einfachen Beispiels von Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$.

$$|S, M\rangle = \sum_{m_1} \sum_{m_2} \langle s_i, s_2; m_1, m_2|S, M\rangle |s_1, s_2; m_1, m_2\rangle$$

$$|1, -1\rangle = \underbrace{\langle\frac{1}{2}\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}|11\rangle}_{=1} |\frac{1}{2}\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle \equiv | - -\rangle$$

$$|1, 0\rangle = \underbrace{\langle\frac{1}{2}\frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}|10\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} |\frac{1}{2}\frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle + \underbrace{\langle\frac{1}{2}\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\frac{1}{2}|10\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} |\frac{1}{2}\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(| + -\rangle + | - +\rangle)$$

$$|1, 1\rangle == \underbrace{\langle\frac{1}{2}\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\frac{1}{2}|11\rangle}_{=1} |\frac{1}{2}\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle \equiv | + +\rangle$$

$$|0, 0\rangle = \underbrace{\langle\frac{1}{2}\frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}|00\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} |\frac{1}{2}\frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle + \underbrace{\langle\frac{1}{2}\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\frac{1}{2}|00\rangle}_{-\frac{1}{\sqrt{2}}} |\frac{1}{2}\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(| + -\rangle - | - +\rangle)$$

Referenzen

- Claude Cohen-Tannoudji Quantenmechanik Band 2
- Zettili Quanten Mehanics
- Rollnik Quantentheorie 2