Loretz-Transformation von Vierervektoren

Wir Betrachten einen linearen vierdimensionalen Vektoren, den sogenannten **Minkowski-Raum**. Er besteht aus 4 komponentigen Koordinatenvektoren bzw. Vierervektoren

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}, \qquad x^0 = ct \tag{1}$$

bzw. in kovarianter Schreibweise

$$x_\mu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (ct, -\vec{x}) \tag{2}$$

Um zwischen den ko- und kontra-varianten Vektoren zu wechseln, benötigt man den metrischen Tensor

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Damit gilt

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \qquad x^\nu = g^{\nu\mu} x_\mu \tag{4}$$

weitere wichtige Relation

$$x^\nu = g^{\nu\mu} \underbrace{x_\mu}_{(4)} = g^{\nu\mu} g_{\mu\alpha} x^\alpha = g^\nu{}_\alpha x^\alpha \tag{5}$$

Aus der Gleichung (5) folgt

$$g^\nu{}_\alpha = \begin{Bmatrix} 1, & \nu = \alpha \\ 0, & \nu \neq \alpha \end{Bmatrix} = \delta^\nu_\alpha \tag{6}$$

$x' = \Lambda x$ mit $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$
Bsp: Boost in z-Richtung: $z' = \gamma(z - vt)$, $t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2} z)$, $x' = x$, $y' = y$ mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
Lorenztranformation erhält relative Länge:

$$x' \cdot x' = g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = \underbrace{\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma g_{\mu\nu}}_{g_{\rho\sigma}} x^\rho x^\sigma = x \cdot x = x^\rho x^\sigma g_{\sigma\rho}$$

Def. Eigenschaft einer Lorenztransformation

$$\Lambda_\mu{}^\rho \Lambda^\mu{}_\sigma = g^\rho{}_\sigma = \delta^\rho{}_\sigma$$

oder $(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu = \Lambda_\mu{}^\rho$
$\Rightarrow det\Lambda = \pm 1$ (Verallgemeinerung von orthogonalen Transformation)

Referenzen

- Claude Cohen-Tannoudji Quantenmechanik Band 2
- Zettili Quanten Mehanics
- Rollnik Quantentheorie 2