Kohärente Zustände des harmonischen Oszillators

Für den harmonischen Oszillator existiert eine Klasse von Zuständen, die mit gewisser Berechtigung als 'Quasi-klassische' Zustände angesehen werden. Diese kohärenten Zustände sollen hier näher betrachtet werden.
Die Zustände $|\alpha\rangle$ sind Eigenzustände des Auf- und Absteige-Operators. Es gilt:

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \qquad \langle\alpha|\alpha\rangle = 1 \qquad \alpha \in \mathbb{C} \tag{1}$$

Nun wollen wir herausfinden wie sich $|\alpha\rangle$ als Liniarkombination von Energieeigenzuständen darstellen lassen.

$$|\alpha\rangle = \mathbb{1}|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \underbrace{\langle n|\alpha\rangle}_{c_n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle \tag{2}$$

Wenden wir nun den Absteige-Operator auf den Zustand an:

$$a|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a|n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\sqrt{n}|n-1\rangle \tag{3}$$

Ersetze n mit $n+1$

$$a|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{c_{n+1}\sqrt{n+1}}|n\rangle \stackrel{!}{=} \underbrace{\alpha|\alpha\rangle}_{(1)} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \underline{\alpha c_n}|n\rangle}_{(2)} \tag{4}$$

Durch Vergleich von den beiden unterstrichenen Teilchen der Formel (4) erhalten wir folgende Rekusionsformel:

$$c_{n+1}\sqrt{n+1} = \alpha c_n \tag{5}$$

Ersetze n mit $n-1$:

$$c_n\sqrt{n} = \alpha c_{n-1} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow c_n &= \frac{\alpha}{\sqrt{n}} c_{n-1} \\ c_1 &= \frac{\alpha}{\sqrt{1}} c_0 \\ c_2 &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}} c_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\frac{\alpha}{\sqrt{1}} c_0 \\ c_3 &= \frac{\alpha}{\sqrt{3}} c_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\frac{\alpha}{\sqrt{1}} c_0 \\ &\vdots \\ c_n &= \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0 \end{aligned} \tag{7}$$

c_n in Gleichung (2) eingesetzt ergibt:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0|n\rangle \tag{8}$$

Bestimmen des c_0 durch Normierungsbedinung:

$$\begin{aligned} \langle\alpha|\alpha\rangle &= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}}_{e^{|\alpha|^2}} |c_0|^2 \underbrace{\langle n|n\rangle}_{=1} \\ &= e^{|\alpha|^2}|c_0|^2 \stackrel{!}{=} 1 \\ &\Leftrightarrow c_0 = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \end{aligned} \tag{9}$$

Eingesetzt in (8):

$$\boxed{|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle} \tag{10}$$

In Fock-Raum-Schreibweise ergibt sich der kohärente Zustand $|\alpha\rangle$ als unendliche Linearkombination von Zuständen fester Teilchenzahl (Fock-Zustände) $|n\rangle$.

Minimale Unschärfe der kohärenten Zustände

Wir wollen zeigen, dass für die kohärente Zustände $|\alpha\rangle$ minimale Unschärfe für Orts- und Impuls-Operator gilt die mit der Heisenbergschen Unschärferelation verträglich ist. Dazu benötigen wir die Darstellung des Orts- und Impuls-Operators als Auf- und Absteigeoperatoren:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a) \tag{11}$$

$$p = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a^\dagger - a) \tag{12}$$

Zu berechnen ist die Orts- und Impuls Unschärfe:

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} \tag{13}$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
\langle x^2\rangle &= \langle\alpha|x^2|\alpha\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle\alpha|(a^\dagger + a)^2|\alpha\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle\alpha|(a^\dagger)^2 + a^\dagger a + aa^\dagger + a^2|\alpha\rangle \qquad \text{mit } [a, a^\dagger] = 1 \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle\alpha|(a^\dagger)^2 + a^\dagger a + 1 + a^\dagger a + a^2|\alpha\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle\alpha|(a^\dagger)^2 + 2a^\dagger a + 1 + a^2|\alpha\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\langle\alpha|(a^\dagger)^2|\alpha\rangle + 2\langle\alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle + 1 + \langle\alpha|a^2|\alpha\rangle\right) \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\left((\alpha^*)^2 + 2|\alpha|^2 + 1 + \alpha^2\right) \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\left((\alpha^* + \alpha)^2 + 1\right)
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle &= \langle\alpha|x|\alpha\rangle \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle\alpha|(a^\dagger + a)|\alpha\rangle \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\langle\alpha|a^\dagger|\alpha\rangle + \langle\alpha|a|\alpha\rangle) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\alpha^* + \alpha)
\end{aligned} \tag{16}$$

Die Erwartungswerte (15) und (16) in (13) einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}[\cancel{(\alpha^* + \alpha)^2} + 1 - \cancel{(\alpha^* + \alpha)^2}]} \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}
\end{aligned} \tag{17}$$

Analoge Rechnung ergibt für die Impulsunschärfe:

$$\Delta p = \sqrt{\frac{\hbar \omega m}{2}} \tag{18}$$

Daraus folgt für Unschärferelation:

$$\Delta x \cdot \Delta p = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sqrt{\frac{\hbar \omega m}{2}} = \frac{\hbar}{2} \tag{19}$$

Zusammenfassung; Eigenschaften

- Eigenzustände des Absteigeoperators a (auch des Vektorpotentials $\vec{A}$)
- minimale Unschärfe
- behalten diese Unschärfe auch unter Zeitentwicklung bei
- Im Fokraum a und $a^\dagger$ spielen die Rolle von Vernichtungs- bzw. Erzeuge-Operatoren für Teilchen