

Wigner-Eckart-Theorem

Betrachte ein $T_q^{(k)}$ einen irreduzierbler Tensor k -ter Stufe. Dieser verhält sich wie ein Zustandsvektor bei einer Drehung. Dieser Tensor ist proportional zu einem Ket $T_q^{(k)} \sim |k, q\rangle$ (Beweis siehe). D.h wir können folgende Linearkombination

$$|JM\rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | jm \rangle |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | jm \rangle |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle \quad (1)$$

dem Tensor mit Hilfe der Clebsch-Gordan-Koeffizienten als Ket-Vektor ausdrücken

$$|JM\rangle = \sum_{m, q} \langle jk; mq | JM \rangle |k, q\rangle \otimes |jm\rangle = \sum_{m, q} \langle jk; mq | JM \rangle T_q^{(k)} |jm\rangle \quad (2)$$

Da es noch andere Quantenzahlen vorkommen können wie Enegie multiplizieren wir die Gleichung (2) mit einem Ket $|\alpha\rangle$ der symbolisch für andere Quantenzahlen steht.

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle \cdot |JM\rangle &= |\alpha\rangle \cdot \sum_{m, q} \langle jk; mq | JM \rangle |k, q\rangle \otimes |jm\rangle \\ \Leftrightarrow |\alpha; JM\rangle &= \sum_{m, q} \langle jk; mq | JM \rangle T_q^{(k)} |\alpha; jm\rangle \end{aligned} \quad (3)$$

Wir möchten die Summe und Clebsch-Gordan-Koeffizienten auf die andere Seite bringen. Dazu möchten wir folgende Relation herleiten:

$$\begin{aligned} \langle JM | JM \rangle &= \langle JM | \mathbb{1} | JM \rangle \\ &= \langle JM | \left(\sum_{mq} |jk; mq\rangle \langle jk; mq| \right) | JM \rangle \\ &= \sum_{mq} \langle JM | jk; mq \rangle \langle jk; mq | JM \rangle \\ &= \sum_{mq} | \langle jk; mq | JM \rangle |^2 \\ &\stackrel{!}{=} 1 \end{aligned}$$

Die Relation lautet nun:

$$\sum_{mq} | \langle jk; mq | JM \rangle |^2 = 1 \quad (4)$$

Unter Ausnutzung der Relation (4) folgt für die Gleichung (3):

$$\begin{aligned} \mathbb{1} |\alpha; JM\rangle &= \sum_{m, q} \langle jk; mq | JM \rangle T_q^{(k)} |\alpha; jm\rangle \\ \sum_{JM} |\alpha; JM\rangle \underbrace{\langle \alpha; JM | \alpha; JM \rangle}_{=1 = \sum_{mq} | \langle jk; mq | JM \rangle |^2} &= \sum_{m, q} \langle jk; mq | JM \rangle T_q^{(k)} |\alpha; jm\rangle \\ \sum_{JM} |\alpha; JM\rangle \sum_{\cancel{mq}} | \langle jk; mq | JM \rangle |^2 &= \sum_{\cancel{mq}} \langle jk; mq | JM \rangle T_q^{(k)} |\alpha; jm\rangle \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$T_q^{(k)} |\alpha; jm\rangle = \sum_{JM} |\alpha; JM\rangle \langle jk; mq | JM \rangle \quad (5)$$

Multiplizieren wir mit $\langle \alpha; j'm' |$

$$\langle \alpha; j'm' | T_q^{(k)} |\alpha; jm\rangle = \sum_{JM} \underbrace{\langle \alpha; j'm' | \alpha; JM \rangle}_{\delta_{j'j} \delta_{m'm}} \langle jk; mq | JM \rangle \quad (6)$$

Wegen der Orthogonalitätsbedingung bleibt von der Summe nur ein Summand übrig, bei dem gilt $j' = J$ und $m' = M$. Gleichung (6) können wir nun schreiben:

$$\langle \alpha; j' m' | T_q^{(k)} | \alpha; j m \rangle = \underbrace{\langle \alpha; j' m' | \alpha; j' m' \rangle}_{\text{reduziertes Matricelement}} \langle j k; m q | j' m' \rangle \quad (7)$$

Dabei ist das reduzierte Matricelement unabhängig von der Quantenzahl m . Das wird im Anschluss bewiesen. Wir erhalten das Wigner-Eckart-Theorem

$$\langle \alpha; j' m' | T_q^{(k)} | \alpha; j m \rangle = \langle j k; m q | j' m' \rangle \langle \alpha; j || T_k^{(q)} || \alpha; j' \rangle \quad (8)$$

Das reduzierte Matricelement hat den Vorteil, dass man es für ein gegebene α, j nur einmal berechnen muss. Die restlichen Matricelemente des Tensors die von m abhängig sind bekommt man von den Clebsch-Gordan-Koeffizienten, die man nachschlägt oder ebenso berechnen kann. Man findet in der Literatur das Theorem mit unterschiedlichen Vorfaktoren wie beispielsweise $\frac{1}{\sqrt{2j+1}}$, dieser ist aber Konvention (Tiefgründige Bedeutung ist uns nicht bekannt).

Behandlung des Tensors als Zustandsvektor

Wir wollen zeigen dass sich ein irreduzierbarer Tensor k -ter Stufe wie ein Zustandsvektor unter Rotation transformiert. Für die Transformation eines Zustandsvektors $|JM\rangle$ gilt mit $U(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha J_z} e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_y} e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma J_z}$

$$\begin{aligned} U(R)|J, M\rangle &= \mathbb{1} \cdot U(R)|J, M\rangle \quad U(R) \equiv U(\alpha, \beta, \gamma) \\ &= \sum_{M'=-J}^J |J, M'\rangle \langle J, M' | U(R) | J, M \rangle \\ &= \sum_{M'=-J}^J \underbrace{\langle J, M' | U(R) | J, M \rangle}_{D_{M'M}^{(J)}(R)} |J, M'\rangle \\ &= \sum_{M'=-J}^J D_{M'M}^{(J)}(R) |J, M'\rangle \end{aligned} \quad (9)$$

Andererseits gilt

$$U(R)|J, M\rangle = \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | JM \rangle U |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle \quad (10)$$

Setzen wir die Gleichungen (9) und (10) gleich

$$\begin{aligned}
\sum_{M'=-J}^J \langle J, M' | U | J, M \rangle | J, M' \rangle &= \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | JM \rangle U | j_1 m_1 \rangle | j_2 m_2 \rangle \\
\sum_{M'=-J}^J \sum_{m'_1 m'_2} \sum_{m_1 m_2} \langle JM' | m'_2 m'_1; j_2 j_1 \rangle \langle j_1 j_2; m'_1 m'_2 | U(R) \langle \cancel{j_1 j_2; m_1 m_2} | JM \rangle | j_1 j_2; m_1 m_2 \rangle | J, M' \rangle \\
&= \sum_{m_1 m_2} \langle \cancel{j_1 j_2; m_1 m_2} | JM \rangle U | j_1 m_1 \rangle | j_2 m_2 \rangle \\
\sum_{M'=-J}^J \sum_{m'_1 m'_2} \langle JM' | m'_2 m'_1; j_2 j_1 \rangle \underbrace{\langle j_1 j_2; m'_1 m'_2 | U | j_1 j_2; m_1 m_2 \rangle}_{\langle j_1 m'_1 | U(R_1) | j_1 m_1 \rangle \cdot \langle j_2 m'_2 | U(R_2) | j_2 m_2 \rangle} | J, M' \rangle &= U | j_1 m_1 \rangle | j_2 m_2 \rangle \\
\sum_{M'=-J}^J \sum_{m'_1 m'_2} \langle JM' | m'_2 m'_1; j_2 j_1 \rangle \underbrace{\langle j_1 m'_1 | U(R_1) | j_1 m_1 \rangle}_{D_{m'_1 m_1}^{(j_1)}} \cdot \underbrace{\langle j_2 m'_2 | U(R_2) | j_2 m_2 \rangle}_{D_{m'_2 m_2}^{(j_2)}} | J, M' \rangle &= U | j_1 m_1 \rangle | j_2 m_2 \rangle \\
\sum_{M'=-J}^J \sum_{m'_1 m'_2} \langle JM' | m'_2 m'_1; j_2 j_1 \rangle D_{m'_1 m_1}^{(j_1)} \cdot D_{m'_2 m_2}^{(j_2)} | J, M' \rangle &= U | j_1 m_1 \rangle | j_2 m_2 \rangle \\
\sum_{M'=-J}^J \sum_{m'_1 m'_2} \langle JM' | m'_2 m'_1; j_2 j_1 \rangle D_{m'_1 m_1}^{(j_1)} \cdot D_{m'_2 m_2}^{(j_2)} \sum_{m'_1, m'_2} \langle j_1 j_2; m'_1 m'_2 | JM' \rangle | j_1 j_2; m'_1 m'_2 \rangle &= U | j_1 m_1 \rangle | j_2 m_2 \rangle \\
\sum_{M'=-J}^J \sum_{m'_1 m'_2} \sum_{m'_1, m'_2} \underbrace{\langle JM' | m'_2 m'_1; j_2 j_1 \rangle \langle j_1 j_2; m'_1 m'_2 | JM' \rangle}_{=1 \quad (4) \text{ eine } \sum_{m'_1 m'_2} \text{ verschwindet}} D_{m'_1 m_1}^{(j_1)} \cdot D_{m'_2 m_2}^{(j_2)} | j_1 j_2; m'_1 m'_2 \rangle &= U | j_1 m_1 \rangle | j_2 m_2 \rangle \\
\sum_{M'=-J}^J D_{m'_1 m_1}^{(j_1)} \cdot D_{m'_2 m_2}^{(j_2)} | j_1 j_2; m'_1 m'_2 \rangle &= U | j_1 m_1 \rangle | j_2 m_2 \rangle \tag{11}
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$U | j_1 m_1 \rangle | j_2 m_2 \rangle = \sum_{M'=-J}^J D_{m'_1 m_1}^{(j_1)} \cdot D_{m'_2 m_2}^{(j_2)} | j_1 m'_1 \rangle | j_2 m'_2 \rangle \tag{12}$$

$$= \sum_{m'_1 m_1} D_{m'_1 m_1}^{(j_1)} \cdot D_{m'_2 m_2}^{(j_2)} | j_1 m'_1 \rangle | j_2 m'_2 \rangle \tag{13}$$

$$\tag{14}$$

Für die Rotation eines Tensors gilt

$$U^{-1}(R) T_q^{(k)} U(R) = \sum_{q'=-k}^k T_{q'}^{(k)} D_{qq'}^{(k)}(R^{-1}) \tag{15}$$

Ersetze R mit R^{-1} und R^{-1} mit R

$$U^{-1}(R^{-1}) T_q^{(k)} U(R^{-1}) = \sum_{q'=-k}^k T_{q'}^{(k)} D_{qq'}^{(k)}(R) \tag{16}$$

Es gilt $U(R^{-1}) = U^{-1}(R)$ somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
(U^{-1})^{-1}(R) T_q^{(k)} U^{-1}(R) &= \sum_{q'=-k}^k T_{q'}^{(k)} D_{qq'}^{(k)}(R) \\
U(R) T_q^{(k)} U^{-1}(R) &= \sum_{q'=-k}^k T_{q'}^{(k)} D_{qq'}^{(k)}(R) \tag{17}
\end{aligned}$$

Nun wenden wir den Unitären Operator $U(R)$ auf ein Produkt-Zustand aus $T_q^{(k)}$ und $|jm\rangle$. Verkürze $U(R)$ auf U

$$\begin{aligned}
UT_q^{(k)} |jm\rangle &= UT_q^{(k)} \mathbb{1} |jm\rangle \\
&= \underbrace{UT_q^{(k)} U^{-1}}_{= (17)} \underbrace{U}_{(9)} |jm\rangle \\
&= \sum_{q'=-k}^k T_{q'}^{(k)} D_{qq'}^{(k)} \sum_{m'=-j}^j D_{m'm}^{(j)} |j, m'\rangle \\
&= \sum_{q'=-k}^k \sum_{m'=-j}^j D_{qq'}^{(k)} D_{m'm}^{(j)} T_{q'}^{(k)} |j, m'\rangle
\end{aligned} \tag{18}$$

Im Vergleich zur Gleichung (12) transformiert sich der Produkt-Zustand $T_q^{(k)} |jm\rangle$ wie ein Produkt aus zwei Zustandsvektoren $|kq\rangle |jm\rangle$.

Reduziertes Matrixelement unabhängig von m

Als nächstes wollen wir beweisen, dass das reduzierte Matrixelement von der Quantenzahl m unabhängig ist. Dies lässt sich durch Anwenden des Schiebeoperators J_{\pm} zeigen. Zur Erinnerung die Eigenwertgleichung lautet

$$J_{\pm} |\alpha; jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |\alpha; jm \pm 1\rangle \tag{19}$$

Durch einsetzen von J_{\pm} und durch ausgleichen von einem Vorfaktor lässt sich das reduzierte Matrixelement schreiben

$$\langle \alpha; jm | \alpha; jm \rangle = \frac{1}{\sqrt{j(j+1) - m(m \mp 1)}} \langle \alpha; jm | J_{\pm} | \alpha; jm \mp 1 \rangle \tag{20}$$

Lässt man nun J_{\pm} einmal auf links wirken, dabei wird $(J_{\pm})^{\dagger} = J_{\mp}$

$$\begin{aligned}
\langle \alpha; jm | \alpha; jm \rangle &= \frac{\sqrt{j(j+1) - m(m \mp 1)}}{\sqrt{j(j+1) - m(m \mp 1)}} \langle \alpha; jm \mp 1 | \alpha; jm \mp 1 \rangle \\
&= \langle \alpha; jm \mp 1 | \alpha; jm \mp 1 \rangle
\end{aligned} \tag{21}$$

Aus der Gleichung (21) sieht man dass das reduzierte Matrixelement nicht von m abhängig ist. Wir können Die Gleichung (7) schreiben

$$\langle \alpha; jm | T_q^{(k)} | \alpha; jm \rangle = \underbrace{\langle \alpha; j | \alpha; j \rangle}_{\text{reduziertes Matrixelement}} \langle jk; mq | jm \rangle \tag{22}$$

Referenzen

- Zettili Quanten Mechanics
- Rollnik Quantentheorie 2