Landau Niveaus

Wir betrachten ein Teilchen im Magnetfeld. Das konstante Magnetfeld zeigt in z-Richtung $\vec{B} = (0, 0, B_0$. Das Vektorpotential ist nach Landau-Eichung ($\nabla \cdot \vec{A} = 0$) somit $\vec{A} = (-yB_0, 0, 0)$. Der Hamiltonoperator lautet:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2$$

In Quantenmechanischer Schreibweise:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2$$

Einsetzen des Hamiltonoperators in die Schrödinger-Gleichung:

$$H\psi = E\psi$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\psi = E\psi$$

$$\frac{1}{2m}\left(-\hbar^2\nabla^2 - \frac{\hbar q}{ic}\nabla\vec{A} - \frac{\hbar q}{ic}\vec{A}\nabla + \frac{q^2}{c^2}\vec{A}^2\right)\psi = E\psi$$

$$\frac{1}{2m}\left(-\hbar^2\nabla^2\psi - \frac{\hbar q}{ic}\underbrace{\nabla\vec{A}\psi}_{(\nabla\vec{A})\psi + \vec{A}\cdot(\nabla\psi)} - \frac{\hbar q}{ic}\vec{A}\nabla\psi + \frac{q^2}{c^2}\vec{A}^2\psi\right) = E\psi$$

Nach der Landau Eichung ist der Term $(\nabla\vec{A})\psi = 0$

$$\frac{1}{2m}\left(-\hbar^2\nabla^2\psi - \frac{\hbar q}{ic}\vec{A}\cdot(\nabla\psi) - \frac{\hbar q}{ic}\vec{A}\nabla\psi + \frac{q^2}{c^2}\vec{A}^2\psi\right) = E\psi$$

$$\frac{1}{2m}\left(-\hbar^2\nabla^2\psi - \frac{2\hbar q}{ic}\vec{A}\cdot(\nabla\psi) + \frac{q^2}{c^2}\vec{A}^2\psi\right) = E\psi$$

Einsetzen des Vektorfeldes ergibt nur noch eine Ableitung in die x-Richtung:

$$\frac{1}{2m}\left(-\hbar^2\nabla^2\psi + \frac{2\hbar q}{ic}yB_0\frac{\partial}{\partial x}\psi + \frac{q^2}{c^2}y^2B_0^2\psi\right) = E\psi$$

Mit der Annahme vom $\psi(x, y, z) = e^{\frac{i}{\hbar}p_0 x} \cdot \phi(y)$ können wir erstmal $\nabla^2\psi$ ausrechnen NR:

$$\nabla\psi = \begin{pmatrix} \frac{ip_0}{\hbar}e^{ip_0x/hbar} \cdot \phi(y) \\ e^{ip_0x/hbar} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\phi(y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2\psi = -\frac{p_0^2}{\hbar^2}e^{ip_0x/\hbar}\phi(y) + e^{ip_0x/\hbar}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(y)$$