Loretz-Transformation von Vierervektoren

Wir Betrachten einen linearen vierdimensionalen Vektoren, den sogenannten **Minkowski-Raum**. Er besteht aus 4 komponentigen Koordinatenvektoren bzw. Vierervektoren

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}, \qquad x^0 = ct \tag{1}$$

bzw. in kovarianter Schreibweise

$$x_\mu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (ct, -\vec{x}) \tag{2}$$

Aus dem Viererortsvektor lässt sich mit Hilfe des Eigenzeitdifferentials

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \tag{3}$$

herleiten. Die Vierergeschwindigkeit u^μ als Ableitung vom Ort nach der Eigenzeit

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dx^\mu}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} \tag{4}$$

der Viererimpuls p^μ aus dem Produkt aus der Ruhemasse m_0 und der Vierergeschwindigkeit

$$p^\mu = m_0 u^\mu = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc \\ \vec{p} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{5}$$

Sowie der Viererkraft F^μ als Ableitung des Viererimpuls nach der Eigenzeit

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dp^\mu}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\frac{dp^\mu}{dt} = \begin{pmatrix} c\frac{dm}{dt} \\ \vec{F} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Um zwischen den ko- und kontra-varianten Vektoren zu wechseln, benötigt man den metrischen Tensor

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Damit gilt

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu, \qquad x^\nu = g^{\nu\mu}x_\mu \tag{8}$$

weitere wichtige Relation

$$x^\nu = g^{\nu\mu}\underbrace{x_\mu}_{(8)} = g^{\nu\mu}g_{\mu\alpha}x^\alpha = g^\nu{}_\alpha x^\alpha \tag{9}$$

Aus der Gleichung (9) folgt

$$g^\nu{}_\alpha = \begin{Bmatrix} 1, & \nu = \alpha \\ 0, & \nu \neq \alpha \end{Bmatrix} = \delta^\nu_\alpha \tag{10}$$

Wir betrachten zwei Inertialsysteme. Um von einem Intertialsystem IE in ein anderes IE' zu wechseln benötigt man die Loretz-Transfomation mit

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{11}$$

Hier bezeichnet x'^{μ} ein Vierervektor im IE' Intertialsystem und x^{μ} im IE Intertialsystem . Die $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ sind 4x4 Matrizen die den Zusammenhang zwischen den Inertialsystemen herstellen. Betrachten wir eine Drehung um die z-Achse, d.h IE' ist um ein Winkel θ zu IE gedreht, dann gilt

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Ein anderer Fall wäre wenn die zwei Intertialsysteme mit einer Geschwindigkeit v zu einander bewegen. Dies bezeichnet man als **Boosts**. Eine Transformation für ein Boost in die z-Richtung

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{13}$$

mit den Abkürzungen

$$\beta = \frac{v}{c}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{14}$$

Für dieses Beispiel angewandt ergibt sich im IE' für die einzelnen Komponenten x'^{μ}

$$x'^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma(x^0 - \beta x^3) \\ x^1 \\ x^2 \\ \gamma(x^3 - vt) \end{pmatrix} \tag{15}$$

Eine Lorentztransformation ist eine Transformation die die Länge x^2 des Vektors x^{μ} unverändert lässt. Zum Beweis

$$\begin{aligned} (x')^2 = x'_{\nu} x'^{\nu} &= \underbrace{g_{\mu\nu} x'^{\mu}}_{(8)} x'^{\nu} \\ &= g_{\mu\nu} \underbrace{x'^{\mu}}_{\Lambda^{\mu}{}_{\rho} x^{\rho}} \cdot \underbrace{x'^{\nu}}_{\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} x^{\sigma}} \\ &= \underbrace{\Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} g_{\mu\nu}}_{g_{\rho\sigma}} x^{\rho} x^{\sigma} \\ &= g_{\sigma\rho} x^{\rho} x^{\sigma} = x_{\sigma} x^{\sigma} = x^2 \end{aligned} \tag{16}$$

Aus der Gleichung (16) folgt $(x')^2 = x^2$ und d.h. dass die relative Länge in beiden Inertialsystemen erhalten ist. x^2 ist Lorentz-Invariant.
Da die Lorentztransformation eine unitäre Transformation ist, gilt die allgemeine Eigenschaft $\Lambda^{-1}\Lambda = \mathbb{1}_4$. In der Tensorschreibweise sieht das folgendermaßen aus

$$\Lambda_{\mu}{}^{\rho} \Lambda^{\mu}{}_{\sigma} = g^{\rho}{}_{\sigma} = \delta^{\rho}{}_{\sigma} \tag{17}$$

mit

$$\boxed{(\Lambda^{-1})^{\rho}{}_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\rho}} \tag{18}$$

ergibt sich

$$(\Lambda^{-1})^{\rho}{}_{\mu} \Lambda^{\mu}{}_{\sigma} = \delta^{\rho}{}_{\sigma} \tag{19}$$

$\Rightarrow det\Lambda = \pm 1$ (Verallgemeinerung von orthogonalen Transformation)
TODO: qms9 S.481

Referenzen

- Wachter: Relativistische Quantenmechanik
- www.tphys.physik.uni-tuebingen.de/muether/quanten/qms9.ps