Quantisierung des Strahlungsfeldes

Wir wollen das Vektorpotential $\vec{A}$ als Operator ausdrücken. Dazu betrachten wir die Wellengleichung für eine Elektromagnetische Welle im Vakuum

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = 0 \qquad \text{mit } \Box \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \quad \rightarrow \quad \Box \vec{A} = 0 \tag{1}$$

Eine Lösung für die Wellengleichung (1) wäre z.B. eine *ebene Welle*

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \alpha \hat{\epsilon} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} + \alpha^* \hat{\epsilon}^* e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \tag{2}$$

Die Vektoren $\hat{\epsilon}$ sind die sogenannten Polarisationsvektoren der Welle. Sie stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung $\vec{k}$. Deswegen bleiben nur noch zwei Raumrichtungen in die sie zeigen können übrig. Betrachte z.B. eine linear polarisierte ebene Welle die sich in z-Richtung ausbreitet. Damit lautet der Wellevektor $\vec{k} = (0, 0, k)^T$. Für den Polarisationsvektor bleiben zwei Möglichkeiten übrig. Entweder zeigt er in x-Richtung mit $\hat{\epsilon} = (1, 0, 0)^T$ oder in y-Richtung $\hat{\epsilon} = (0, 1, 0)^T$.
Wir betrachten ein Strahlungsfeld mit allen möglichen $\vec{k}$-Werten. Das bedeutet eine Überlagerung aller $\vec{k}$-Werte. Dazu müssen wir die Gleichung (2) über $\vec{k}$ integrieren. Dabei müssen wir noch über zwei Moden $m = 1, 2$ Summieren. Diese Stehen für das elektrische und magnetische Feld.

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{m=1,2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\vec{\mathcal{A}}_m(\vec{k}) \hat{\epsilon}_m(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} + \vec{\mathcal{A}}^*_m(k) \hat{\epsilon}^*_m(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \right] \tag{3}$$

Die Integration entspricht einer Fouriertransformation aus dem Impulsraum in den Ortsraum. Die Vorfaktoren $\vec{\mathcal{A}}_m(k)$ sind nichts anderes als die fouriertransformierte Vektorpotential im Impulsraum. Der Faktor $\frac{1}{(2\pi)^2}$ ist eine Konvention und dient zur Normierung der Fouriertransformation.
Nun möchten wir das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r}, t)$ quantisieren. D.h. $\vec{A}(\vec{r}, t)$ ist nicht mehr eine kontinuierliche Größe, sondern darf nur bestimmte diskrete Werte annehmen. Dazu betrachten wir einen dreidimensionale Kasten mit der Kantenlänge L, der mit stehenden Wellen gefüllt ist. Die Randbedingungen für eine stehende Welle die z.B. in x-Richtung läuft muss heißen

$$\vec{A}(x, y, z) = \vec{A}(x + L, y, z) \tag{4}$$

Diese Bedingung an die Gleichung (3) angewandt

$$\alpha \hat{\epsilon} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} + \alpha^* \hat{\epsilon}^* e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \stackrel{!}{=} \alpha \hat{\epsilon} e^{i(k_x (x+L) + k_y y + k_z z - \omega t)} + \alpha^* \hat{\epsilon}^* e^{-i(k_x (x+L) + k_y y + k_z z - \omega t)} \tag{5}$$

Das Istgleichzeichen ist nur dann erfüllt wenn die realen Anteile der Gleichung den komplexkonjugierten Anteilen gleichen

$$\alpha \hat{\epsilon} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \stackrel{!}{=} \alpha \hat{\epsilon} e^{i(k_x (x+L) + k_y y + k_z z - \omega t)} \tag{6a}$$
$$\text{und } \alpha^* \hat{\epsilon}^* e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \stackrel{!}{=} \alpha^* \hat{\epsilon}^* e^{-i(k_x (x+L) + k_y y + k_z z - \omega t)} \tag{6b}$$
$$\tag{6c}$$

Um eine Bedingung für $\vec{k}$ zu bestimmen betrachte die Gleichung (6a)

$$\begin{aligned} \cancel{\alpha \hat{\epsilon}} e^{i(k_x x)} \cancel{e^{i(k_y y + k_z z - \omega t)}} &= \cancel{\alpha \hat{\epsilon}} e^{i(k_x (x+L)} \cancel{e^{i(k_y y + k_z z - \omega t)}} \\ \cancel{e^{i(k_x x)}} &= e^{ik_x (x+L)} = \cancel{e^{ik_x x}} e^{ik_x L} \end{aligned} \tag{7}$$

Aus der Gleichung (7) geht hervor

$$e^{ik_x L} = 1 \tag{8}$$

Dies ist nur dann erfüllt wenn gilt

$$k_x L = n_x \cdot 2\pi \qquad \text{mit } n_x \in \mathbb{Z} \tag{9}$$

Analogen Rechnung lässt sich für eine stehende Welle in y-Richtung bzw. in z-Richtung durchführen. D.h. für beliebige Raumrichtung gilt

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \frac{2\pi}{L} \vec{n} \tag{10}$$

Betrachten wir zwei benachbarte Zustände mit $\vec{k}_n = \frac{2\pi}{L}\vec{n}$ und $\vec{k}_{n+1} = \frac{2\pi}{L}(\vec{n}+1)$ für die Differenz der beiden ergibt sich

$$\Delta k = k_{n+1} - k_n = \frac{2\pi}{L}(\vec{n} + 1 - \vec{n}) = \frac{2\pi}{L} \tag{11}$$

Für ein unendlich große Länge L wird Δk zu dk bzw in 3 Dimensionen $\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 = d^3k$.

Damit haben wir gezeigt dass, das $\vec{k}$ quantisiert ist. Somit lässt sich das Integral als eine Summe schreiben. Damit ändert sich die Gleichung (3) zu

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_{m=1,2} \sum_{\vec{k}} N_{\vec{k}} \left[\vec{\mathcal{A}}_m(\vec{k}) \hat{\epsilon}_m(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} + \vec{\mathcal{A}}^*_m(k) \hat{\epsilon}^*_m(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \right] \tag{12}$$

Dabei ist $N_{\vec{k}}$ eine Normierungskonstante. Man wählt für $N_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\vec{k}} V}}$ damit $\mathcal{A}$ einheitenlos wird. Weiterhin betrachten wir linear polarisierte Wellen mit $\hat{\epsilon}_m \in \mathbb{R}$, daher ist $\hat{\epsilon}^*_m = \hat{\epsilon}_m$ und wir können es ausklammern. Somit sieht die Gleichung (12) wie folgt aus

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_{m=1,2} \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\vec{k}} V}} \hat{\epsilon}_m \left[\vec{\mathcal{A}}_m(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} + \vec{\mathcal{A}}^*_m(k) e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \right] \tag{13}$$

Um den Hamiltonoperator zu bestimmen betrachten wir die klassische Energie eines Strahlungsfeldes, die wie folgt definiert ist

$$E_{\text{klassisch}} = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right) = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \left(\left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)^2 + \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right)^2 \right) \tag{14}$$

Nebenrechnung für das erste Integral mit (13) ergibt

$$
\begin{aligned}
\int d^3r \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)^2 &= \int d^3r \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{m=1,2}\sum_{\vec{k}}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\vec{k}}V}}\hat{\epsilon}_m(\vec{k})\left[\vec{\mathcal{A}}_m(\vec{k})e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}+\vec{\mathcal{A}}^*_m(k)e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right]\right)^2 \\
&= \int d^3r \left(\frac{1}{c}\sum_{m=1,2}\sum_{\vec{k}}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\vec{k}}V}}\hat{\epsilon}_m(\vec{k})\left[-i\omega\vec{\mathcal{A}}_m(\vec{k})e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}+i\omega\vec{\mathcal{A}}^*_m(k)e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right]\right)^2 \\
&= \frac{2\pi\hbar}{V}\int d^3r \left(\sum_{m=1,2}\sum_{\vec{k}}(-i)\sqrt{\omega_{\vec{k}}}\hat{\epsilon}_m(\vec{k})\left[\vec{\mathcal{A}}_m(\vec{k})e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}-\vec{\mathcal{A}}^*_m(k)e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right]\right)^2 \\
&= \frac{2\pi\hbar}{V}\int d^3r \sum_{m=1,2}\sum_{\vec{k}}\Big((-i)\sqrt{\omega_{\vec{k}}}\hat{\epsilon}_m(\vec{k})\left[\vec{\mathcal{A}}_m(\vec{k})e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}-\vec{\mathcal{A}}^*_m(k)e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right]\Big)\times \\
&\quad\times\sum_{m'=1,2}\sum_{\vec{k}'}\Big((-i)\sqrt{\omega_{\vec{k}'}}\hat{\epsilon}_{m'}(\vec{k}')\left[\vec{\mathcal{A}}_{m'}(\vec{k}')e^{i(\vec{k}'\vec{r}-\omega t)}-\vec{\mathcal{A}}^*_{m'}(k')e^{-i(\vec{k}'\vec{r}-\omega t)}\right]\Big) \\
&= \frac{2\pi\hbar}{V}\int d^3r \sum_{m,m'=1,2}\sum_{\vec{k},\vec{k}'}\sqrt{\omega_{\vec{k}'}\omega'_{\vec{k}'}}\hat{\epsilon}_m(\vec{k})\hat{\epsilon}'_m(\vec{k})\Big[-\vec{\mathcal{A}}_m(\vec{k})\vec{\mathcal{A}}_{m'}(\vec{k})e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}e^{i(\vec{k}'\vec{r}-\omega t)}- \\
&\quad-\vec{\mathcal{A}}^*_m(k)\vec{\mathcal{A}}^*_{m'}(k')e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}e^{-i(\vec{k}'\vec{r}-\omega t)}+\vec{\mathcal{A}}_m(\vec{k})e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\vec{\mathcal{A}}^*_{m'}(k')e^{-i(\vec{k}'\vec{r}-\omega t)} \\
&\quad+\vec{\mathcal{A}}^*_m(k)e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\vec{\mathcal{A}}_{m'}(\vec{k}')e^{i(\vec{k}'\vec{r}-\omega t)}\Big] \\
&= \frac{2\pi\hbar}{V}\int d^3r \sum_{m,m'=1,2}\sum_{\vec{k},\vec{k}'}\sqrt{\omega_{\vec{k}'}\omega'_{\vec{k}'}}\hat{\epsilon}_m(\vec{k})\hat{\epsilon}'_m(\vec{k})\Big[-\vec{\mathcal{A}}_m(\vec{k})\vec{\mathcal{A}}_{m'}(\vec{k})e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\vec{r}}e^{-2i\omega t} \\
&\quad-\vec{\mathcal{A}}^*_m(k)\vec{\mathcal{A}}^*_{m'}(k')e^{-i(\vec{k}+\vec{k}')\vec{r}}e^{2i\omega t}+\vec{\mathcal{A}}_m(\vec{k})\vec{\mathcal{A}}^*_{m'}(k')e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}}+\vec{\mathcal{A}}^*_m(k)\vec{\mathcal{A}}_{m'}(\vec{k}')e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\vec{r}}\Big]
\end{aligned} \tag{15}
$$

Mit den zwei Relationen

$$
\frac{1}{V}\int d^3r e^{i(\vec{k}-\vec{k}')}\vec{r}=\delta_{\vec{k},\vec{k}'} \quad \text{und} \quad \frac{1}{V}\int d^3r e^{i(\vec{k}+\vec{k}'}\vec{r}=\delta_{\vec{k},-\vec{k}'} \quad \text{und} \quad \sum_{m,m'}\hat{\epsilon}_m(\vec{k})\hat{\epsilon}_{m'}(\vec{k}')=\sum_m \tag{16}
$$

Ergibt die erste Nebenrechnung (15)

$$
\begin{aligned}
\int d^3r \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)^2 &= \frac{2\pi\hbar}{V}\int d^3r \sum_{m,m'=1,2}\sum_{\vec{k},\vec{k}'}\sqrt{\omega_{\vec{k}'}\omega'_{\vec{k}'}}\hat{\epsilon}_m(\vec{k})\hat{\epsilon}'_m(\vec{k})\Big[-\vec{\mathcal{A}}_m(\vec{k},t)\vec{\mathcal{A}}_{m'}(\vec{k},t)e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\vec{r}} \\
&\quad-\vec{\mathcal{A}}^*_m(\vec{k},t)\vec{\mathcal{A}}^*_{m'}(\vec{k}',t)e^{-i(\vec{k}+\vec{k}')\vec{r}}+\vec{\mathcal{A}}_m(\vec{k})\vec{\mathcal{A}}^*_{m'}(k')e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}}+\vec{\mathcal{A}}^*_m(k)\vec{\mathcal{A}}_{m'}(\vec{k}')e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\vec{r}}\Big] \\
&= 2\pi\hbar\sum_{m,m'=1,2}\sum_{\vec{k},\vec{k}'}\sqrt{\omega_{\vec{k}'}\omega'_{\vec{k}'}}\hat{\epsilon}_m(\vec{k})\hat{\epsilon}'_m(\vec{k})\Big[-\vec{\mathcal{A}}_m(\vec{k},t)\vec{\mathcal{A}}_{m'}(\vec{k},t)\delta_{\vec{k},-\vec{k}'} \\
&\quad-\vec{\mathcal{A}}^*_m(\vec{k},t)\vec{\mathcal{A}}^*_{m'}(\vec{k}',t)\delta_{\vec{k},-\vec{k}'}+\vec{\mathcal{A}}_m(\vec{k})\vec{\mathcal{A}}^*_{m'}(k')\delta_{\vec{k},\vec{k}'}+\vec{\mathcal{A}}^*_m(k)\vec{\mathcal{A}}_{m'}(\vec{k}')\delta_{\vec{k},\vec{k}'}\Big] \\
&= 2\pi\hbar\sum_{m=1,2}\sum_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}}\Big[-\vec{\mathcal{A}}_m(\vec{k},t)\vec{\mathcal{A}}_m(-\vec{k},t)-\vec{\mathcal{A}}^*_m(\vec{k},t)\vec{\mathcal{A}}^*_m(-\vec{k},t) \\
&\quad+\vec{\mathcal{A}}_m(\vec{k})\vec{\mathcal{A}}^*_m(\vec{k})+\vec{\mathcal{A}}^*_m(k)\vec{\mathcal{A}}_m(\vec{k})\Big]
\end{aligned} \tag{17}
$$

Mit Hilfe der Lagrange Indentität $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{d})$

$$
(\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=(\vec{\nabla}^2)(\vec{A}^2)-(\vec{A}\vec{\nabla})\underbrace{(\vec{\nabla}\vec{A})}_{=0\text{ Coulombeichung}} \tag{18}
$$

Ergibt die Nebenrechung für das zweite Integral von der Gleichung (14)

$$\int d^3r \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)^2 = \int d^3r \left(\vec{\nabla} \vec{A}\right)^2$$
$$= 2\pi\hbar \sum_{m=1,2} \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \left[\vec{\mathcal{A}}_m(\vec{k},t)\vec{\mathcal{A}}_m(-\vec{k},t) + \vec{\mathcal{A}}^*_m(\vec{k},t)\vec{\mathcal{A}}^*_m(-\vec{k},t) + \vec{\mathcal{A}}_m(\vec{k})\vec{\mathcal{A}}^*_m(\vec{k}) + \vec{\mathcal{A}}^*_m(k)\vec{\mathcal{A}}_m(\vec{k})\right] \tag{19}$$

Die zwei Nebenreichnungen (16) und (19) in (14) eingesetzt ergibt

$$E_{\text{klassisch}} = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \left(\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)^2 + \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)^2 \right) =$$
$$= \frac{1}{8\pi} 2\pi\hbar \sum_{m=1,2} \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \left[-\cancel{\vec{\mathcal{A}}_m(\vec{k},t)\vec{\mathcal{A}}_m(-\vec{k},t)} - \cancel{\vec{\mathcal{A}}^*_m(\vec{k},t)\vec{\mathcal{A}}^*_m(-\vec{k},t)} + \vec{\mathcal{A}}_m(\vec{k})\vec{\mathcal{A}}^*_m(\vec{k}) + \vec{\mathcal{A}}^*_m(k)\vec{\mathcal{A}}_m(\vec{k}) \right.$$
$$\left. \cancel{\vec{\mathcal{A}}_m(\vec{k},t)\vec{\mathcal{A}}_m(-\vec{k},t)} + \cancel{\vec{\mathcal{A}}^*_m(\vec{k},t)\vec{\mathcal{A}}^*_m(-\vec{k},t)} + \vec{\mathcal{A}}_m(\vec{k})\vec{\mathcal{A}}^*_m(\vec{k}) + \vec{\mathcal{A}}^*_m(k)\vec{\mathcal{A}}_m(\vec{k}) \right] \tag{20}$$

Nach Kürzungen ergibt sich aus der Gleichung (20) einen Hamiltonoperator der dem Harmonischen Oszillator aus der Quantenmechanik ähnlich ist

$$E_{\text{klassisch}} = \frac{1}{2} \sum_{m=1,2} \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} \left[\vec{\mathcal{A}}_m(\vec{k})\vec{\mathcal{A}}^*_m(\vec{k}) + \vec{\mathcal{A}}^*_m(k)\vec{\mathcal{A}}_m(\vec{k})\right] \tag{21}$$

Zur vergleich erinnern wir uns an den Hamiltonoperator für den gequantelten harmonischen Oszillator

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}) = \frac{\hbar\omega}{2}(a^\dagger a + aa^\dagger) \tag{22}$$

Durch Vergleich von (21) und (22) können wir sagen dass jede Mode $\vec{k}, m$ des elektromagnetischen Feldes sich wie ein harmonischer Oszillator verhält. Das bedeutet, dass das e.m. Feld durch eine unendliche Zahl von Harmonischen Oszillatoren beschrieben wird. D.h. wir können das e.m Feld quansieren, indem wir die klassische Größen $\vec{\mathcal{A}}_m$ durch die entsprechenden quantenmechanische Operatoren ersetzen

$$\vec{\mathcal{A}}_m(\vec{k}) \to a_m(\vec{k}) \qquad \vec{\mathcal{A}}^*_m(\vec{k}) \to a^\dagger_m(\vec{k}) \tag{23}$$

Damit erhalten wir ein Hamiltonoperator für das quantisierte Strahlungsfeld

$$\boxed{H = \frac{1}{2} \sum_{m=1,2} \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} \left[a^\dagger_m(\vec{k})a_m(\vec{k}) + a_m(\vec{k})a^\dagger_m(\vec{k})\right] = \sum_{m=1,2} \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} \left[a^\dagger_m(\vec{k})a_m(\vec{k}) + \frac{1}{2}\right]} \tag{24}$$

Für die Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren gilt folgende Vertauschungsrelation

$$[a_m(\vec{k}), a^\dagger_{m'}(\vec{k}')] = \delta_{mm'}\delta_{\vec{k}\vec{k}'} \tag{25}$$

D.h. der Erzeugungsoperator $a^\dagger_{m'}(\vec{k}')$ ein Photon zur Mode $\vec{k}, m$ erzeugt und der Vernichtungsoperator $a_m(\vec{k})$ ein Photon vernichtet. Auf das Vakuum angewendeter Erzeugungsoperator

$$a^\dagger_m(\vec{k}) \left|0\right\rangle = \left|1_{\vec{k},m}\right\rangle \tag{26}$$

Anwendung zweier verschiedener Erzeugungsoperatoren liefert einen Zwei-Photonen Zustand

$$a^\dagger_m(\vec{k})a^\dagger_{m'}(\vec{k}') \left|0\right\rangle = \left|1_{\vec{k},m}, 1_{\vec{k}',m'}\right\rangle \tag{27}$$

Zwei Photonen in gleichen Moden erzeugt zwei Photonen-Zustand im gleichen Zustand $\vec{k}, m$

$$a^\dagger_m(\vec{k})a^\dagger_m(\vec{k}) \left|0\right\rangle = \sqrt{2} \left|2_{\vec{k},m}\right\rangle \tag{28}$$

Vergleiche dazu die Relationen aus dem quantenmechanischen harmonischen Oszillator

$$a \left|n\right\rangle = \sqrt{n} \left|n-1\right\rangle \qquad a^\dagger \left|n\right\rangle = \sqrt{n+1} \left|n+1\right\rangle \tag{29}$$

Nullpunksenergie

Es ist noch zu bemerken wenn man den Erwarunswert des Hamiltonoperators für den Vakuumzustand berechnen eine undendlich hohe Energie herauskommt, denn es gilt

$$\begin{aligned}\langle 0|\, H\, |0\rangle &= \langle 0| \sum_{m=1,2}\sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} \left[a_m^\dagger(\vec{k})a_m(\vec{k}) + \frac{1}{2}\right] |0\rangle = \sum_{m=1,2}\sum_{\vec{k}} \left[\hbar\omega_{\vec{k}} \underbrace{\langle 0|\, a_m^\dagger(\vec{k})a_m(\vec{k})\, |0\rangle}_{=0} + \frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2} \underbrace{\langle 0|0\rangle}_{=1}\right] \\ &= \sum_{m=1,2}\sum_{\vec{k}} \frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2} \to \infty \end{aligned} \tag{30}$$

Die Lösung für das Dilema ist:

- Es wird nicht die Gesamtenergie gemessen, sondern nur die Energiedifferenzen. D.h. die unendlichgroße Energie des Vakuums spielt daher keine große Rolle.
- Die Vakuumsenergie hängt von den Randbedingungen ab und variiert je nach geometrischen Gegebenheiten. Siehe z.B. *Casimir-Effekt*

Daher lässt man bei den praktischen Berechnungen das $\frac{1}{2}$ weg. Damit reduziert sich der Hamiltonperator aus (24) auf

$$\boxed{H = \sum_{m=1,2}\sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} a_m^\dagger(\vec{k})a_m(\vec{k})} \tag{31}$$