29. März 2012

Verfasst von Waldemar Heffel und Walter Werner

Erwartungswert von $\sin^2(x)$

Behauptung:

$$\boxed{\left\langle \sin^2(x) \right\rangle = \frac{1}{2}} \tag{1}$$

Wir wollen nun die Behauptung (1) überprüfen. Dazu benutzen wir folgende Identität:

$$\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \tag{2}$$

Damit können wir schreiben:

$$\begin{aligned}
\langle \sin^2(x) \rangle &= \left\langle -\frac{1}{4}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^2 \right\rangle = \left\langle -\frac{1}{4}\left(e^{2ix} + e^{-2ix} - 2 \cdot \underbrace{e^{ix}e^{-ix}}_{=1}\right) \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right) \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} \right\rangle - \left\langle \frac{1}{4}\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right) \right\rangle \\
&= \frac{1}{2} - \left\langle \frac{1}{4}\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right) \right\rangle
\end{aligned} \tag{3}$$

Nun wollen wir den Eigenwert des zweiten Terms in der Gl. (3) bestimmen. Für den Erwartungswert eines Operators im Ortsraum gilt allgemein:

$$\langle O \rangle = \int \psi^* O \psi \mathrm{d}x \tag{4}$$

Betrachte ψ als ebene Welle mit:

$$\psi = Ae^{i(kx - \omega t)} \tag{5}$$

Mit (4) und (5) folgt für den Erwartungswert in Gl. (2):

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{4}\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right) \right\rangle &= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} A^* e^{-i(kx-\omega t)} \left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right) Ae^{i(kx-\omega t)} \mathrm{d}x \\
&= \frac{|A|^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right) \mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{6}$$

Um nun das Integral in Gl. (6) zu berechnen machen wir eine Substitution:

$$z = e^{2ix} \quad \Rightarrow z(\infty) = \infty \quad z(-\infty) = 0 \qquad \text{mit } z \in \mathbb{C} \tag{7a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2ie^{2ix} = 2iz \Leftrightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z}{2iz} \tag{7b}$$

Mit der Substitution (7a) und (7b) erhalten wir für das Integral in der Gl. (6):

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right) \mathrm{d}x &= \int_{0}^{\infty} \left(z + \frac{1}{z}\right) \frac{1}{2iz} \mathrm{d}z = \frac{1}{2i} \int_{0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{z^2}\right) \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2i} \int_{0}^{\infty} \frac{z^2+1}{z^2} \mathrm{d}z \end{aligned} \tag{8}$$

Da die Variable z im Gl. (8) nur in quadratischer Form vorkommt, können wir die Grenzen ersetzen mit $\int_0^\infty \to \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}$ und erhalten folgendes Integral:

$$\frac{1}{4i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2+1}{z^2} \mathrm{d}z \tag{9}$$

Das Integral (9) lässt sich mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\oint f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k) \tag{10}$$

bestimmen. Dazu berechnen wir zuerst das Residuuum unser Funktion:

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z^2} \tag{11}$$

Für das Residuum einen Funktion $f(z)$, die in z_0 einen Pol n-ter Ordnung hat, gilt:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \Big[(z - z_0)^n f(z)\Big] \tag{12}$$

Die Funktion (11) hat einen Pol 2-ter Ordnung bei $z_0 = 0$. D.h es gilt laut Gl. (12):

$$\mathrm{Res}(f, 0) = \lim_{z \to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z^2 \left(\frac{z^2+1}{z^2}\right) = \lim_{z \to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z^2 + 1 = \lim_{z \to 0} 2z = 0 \tag{13}$$

Mit (10), (11) und (13) folgt für unser Integral (9):

$$\frac{1}{4i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z^2+1}{z^2}\mathrm{d}z \equiv \frac{1}{4i}\oint f(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{4i}2\pi i\,\mathrm{Res}(f,0) = \frac{\pi}{2}\cdot 0 = 0 \tag{14}$$

Damit gilt für den Erwartungswert in Gl. (3):

$$\left\langle \frac{1}{4}\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)\right\rangle \equiv \frac{1}{4i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z^2+1}{z^2}\mathrm{d}z = 0 \tag{15}$$

Somit wäre die Behauptung Gl. (1) bestätigt.