Addition von Drehimpulsen, Clebsch-Gordan Koeffizienten

Wir betrachte zwei von einander unabhängige Drehimpulse $\vec{J_1}$ und $\vec{J_2}$, die jeweils einen eigenen Hilbertraum mit der Basis $\{|j_1, m_1\rangle\}$ für $\vec{J_1}$ und $\{|j_2, m_2\rangle\}$ für $\vec{J_2}$ bilden. Zusammen spannen sie einen $(2j_1 + 1) \times (2j_2 + 1)$ dimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ auf, mit der Basis $\{|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle\} \equiv \{|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle\}$. Nun wollen wir die einzelne Drehimpulse in eine gemeinsame Basis überführen, so dass wir einen Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{J_1} + \vec{J_2}$ mit der neuen Basis $\{|J, M\rangle\}$ erhalten. Dies erreichen wir, in dem wir die Orthonormalität der alten Basis ausnutzen und den Einheitsoperator $\mathbb{1}$ vor die neue Basis einschieben:

$$|J, M\rangle = \underbrace{\left(\sum_{m_1, m_2} |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \langle j_1, j_2; m_1, m_2| \right)}_{=\mathbb{1}} |J, M\rangle$$

$$|J, M\rangle = \sum_{m_1, m_2} \underbrace{\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M\rangle}_{\textbf{Glebsch-Gordan Koef.}} |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \tag{1}$$

Da sowohl die alte Basis $\{|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle\}$ als auch die neue Basis $\{|J, M\rangle\}$ orthonormiert sind, handelt es sich bei (20) um eine unitäre Transformation. Zu bemerken ist dass bei dem von uns eingefügten Einheitsoperator nur über die Magnetquantenzahlen m_1 und m_2 summiert wird. D.h. man hält die Drehimpulsquantenzahlen j_1 und j_2 fest und entwickelt nur nach den Magnetquantenzahlen, für die gilt $m_1 = -j_1,\ -j_1 + 1,\ -j_1 + 2, \ldots j_1$ und $m_2 = -j_2,\ -j_2 + 1,\ -j_2 + 2, \ldots j_2$.
Die Koeffizienten $\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M\rangle$ die die beiden Basen verbinden heißen *Clebsch-Gordan Koeffizienten*. D.h. das Problem der Addition zweier Drehimpulse reduziert sich auf das Bestimmen der Glebsch-Gordan Koeffizienten.
Für die Erwartungswerte J in der neuen Basis gilt:

$$\boxed{|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2} \tag{2}$$

Dies wird durch die Vektoraddition $\vec{J} = \vec{J_1} + \vec{J_2}$ deutlich.
Den Erwartungswert M können wir mit Hilfe des $J_z = J_{z_1} + J_{z_2}$ Operators und folgenden Eigenwertgleichungen bestimmen:

$$J_Z |J, M\rangle = M |J, M\rangle \tag{3a}$$
$$J_{z_1} |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle = m_1 |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \tag{3b}$$
$$J_{z_2} |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle = m_2 |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \tag{3c}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} J_z - J_{z_1} - J_{z_2} &= 0 \\ \langle j_1, j_2; m_1, m_2| J_z - J_{z_1} - J_{z_2} |J, M\rangle &= 0 \\ \underbrace{\langle j_1, j_2; m_1, m_2| J_z |J, M\rangle}_{(22a)} - \underbrace{\langle j_1, j_2; m_1, m_2| J_{z_1} |J, M\rangle}_{(22b)} & \\ - \underbrace{\langle j_1, j_2; m_1, m_2| J_{z_2} |J, M\rangle}_{(22c)} &= 0 \\ M \langle j_1, j_2; m_1, m_2|J, M\rangle - m_1 \langle j_1, j_2; m_1, m_2|J, M\rangle & \\ -m_2 \langle j_1, j_2; m_1, m_2|J, M\rangle &= 0 \\ (M - m_1 - m_2) \langle j_1, j_2; m_1, m_2|J, M\rangle &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Aus der Gleichung (23) folgt das entweder $\langle j_1, j_2; m_1, m_2|J, M\rangle = 0$ oder
$(M - m_1 - m_2) = 0$ was zur der wichtigen Beziehung führt:

$$\boxed{M = m_1 + m_2} \tag{5}$$

Dies ist deswegen so wichtig weil dadurch die Entwicklung (20) nur auf die Clebsch-Gordan Koeffizienten beschränkt wird, bei denen die Bedingung (24) zutrifft. Alle anderen sind <u>Null</u>.
Der Erwartungswert für die Gesamtmagnetquantenzahl M zwischen:

$$-j_1 - j_2 \leq M \leq j_1 + j_2 = -(j_1 + j_2) \leq M \leq j_1 + j_2 = -J \leq M \leq J \tag{6}$$

Eigenschaften der Clebsch-Gordan Koeffizienten

Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten sind konventionsgemäß *reell*:

$$\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M\rangle \in \mathbb{R} \tag{7}$$

D.h. es gilt:

$$\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M\rangle = \langle J, M | j_1, j_2; m_1, m_2\rangle^* = \langle J, M | j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \tag{8}$$

Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten sind *orthonormiert*:

$$\begin{aligned} \langle J', M' | J, M\rangle &= \delta_{J',J}\delta_{J',J} \\ \langle J', M' | \underbrace{\left(\sum_{m_1, m_2} |j_1, j_2; m_1 m_2\rangle \langle j_1, j_2; m_1 m_2| \right)}_{=\mathbb{1}} |J, M\rangle &= \delta_{J',J}\delta_{J',J} \\ \Rightarrow \sum_{m_1, m_2} \langle J', M' | j_1, j_2; m_1 m_2\rangle \langle j_1, j_2; m_1 m_2 | J, M\rangle &= \delta_{J',J}\delta_{J',J} \end{aligned} \tag{9}$$

Aus Gl. (27) und der Gl. (28) erhalten wir eine wichtige Beziehung:

$$\sum_{m_1, m_2} \langle j_1, j_2; m_1 m_2 | J', M'\rangle \langle j_1, j_2; m_1 m_2 | J, M\rangle = \delta_{J',J}\delta_{J',J} \tag{10}$$

Bzw. mit $J' = J$ und $M' = M$ folgt:

$$\boxed{\sum_{m_1, m_2} \langle j_1, j_2; m_1 m_2 | J, M\rangle^2 = 1} \tag{11}$$

Analog kann man auch folgende Beziehung herleiten:

$$\boxed{\sum_J \sum_M \langle j_1, j_2; m_1 m_2 | J, M\rangle^2 = 1} \tag{12}$$

Bestimmung der Clebsch-Gordan Koeffizienten

Wir wollen nun einige Beziehungen herleiten um die Clebsch-Gordan Koeffizienten bestimmen zu können. Eine wichtige Beziehung können wir direkt aus (23) übernehmen:

$$\boxed{\langle j_1, j_2; m_1 m_2 | J, M\rangle = 0 \quad \text{für} \quad m_1 + m_2 \neq M} \tag{13}$$

Eine weitere Beziehung finden wir aus den Extremalstellen für J und M d.h. wenn gilt:

$$J = j_1 + j_2 \quad \text{und} \quad M = J = j_1 + j_2 = m_1 + m_2 \tag{14}$$

Setzen wir (33) in die Gl. (20) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} |J, J\rangle &= \sum_{m_1 = j_1}^{j_1} \sum_{m_2 = j_2}^{j_2} \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, J\rangle \, |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \\ &= \langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J\rangle \, |j_1, j_2; j_1, j_2\rangle \end{aligned} \tag{15}$$

Mit der Normierungsbedingung $\langle J, J | J, J\rangle \stackrel{!}{=} 1$ folgt:

$$\begin{aligned} &\langle J, J | J, J\rangle = 1 \\ &\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | \, \langle J, J | j_1, j_2; j_1, j_2\rangle \langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J\rangle \, |j_1, j_2; j_1, j_2\rangle = 1 \\ &\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | \, \langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J\rangle \langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J\rangle \, |j_1, j_2; j_1, j_2\rangle = 1 \\ &\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J\rangle^2 \underbrace{\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | j_1, j_2; j_1, j_2\rangle}_{=1} = 1 \\ &\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J\rangle^2 = 1 \end{aligned} \tag{16}$$

Aus (35) folgt also:

$$\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J\rangle = \pm 1 \tag{17}$$

Um nun zu bestimmen ob das Ergebnis in (36) positive oder negative ist d.h. ob $+1$ oder -1, wurde die sog. *Condon-Shortley Phasenkonvention* eingeführt. Sie besagt, dass der Clebsch-Gordan Koeffizient von der Form: $\langle j_1, j_2; j_1, (J - j_1)|J, J\rangle$ reell und positive sein muss. D.h. in unserem Fall (33) mit $J = j_1 + j_2 \Leftrightarrow J - j_1 = j_2$ folgt:

$$\langle j_1, j_2; j_1, j_2|J, J\rangle = \underbrace{\langle j_1, j_2; j_1, (J - j_1)|J, J\rangle}_{\text{Konvention: } \textbf{positve}} = 1 \tag{18}$$

D.h.im Spezialfall (33) ist der Clebsch-Gordan Koeffizient gleich 1. Es gilt:

$$\boxed{\langle j_1, j_2; j_1, j_2|J, J\rangle = 1 \quad \text{mit} \quad J = j_1 + j_2} \tag{19}$$

Addition von Drehimpulsen, Clebsch-Gordan Koeffizienten

Wir betrachte zwei von einander unabhängige Drehimpulse $\vec{j}_1$ und $\vec{j}_2$, die jeweils einen eigenen Hilbertraum mit der Basis $\{|j_1, m_1\rangle\}$ für $\vec{j}_1$ und $\{|j_2, m_2\rangle\}$ für $\vec{j}_2$ bilden. Zusammen spannen sie einen $(2j_1 + 1) \times (2j_2 + 1)$ dimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ auf, mit der Basis $\{|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle\} \equiv \{|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle\}$. Nun wollen wir die einzelne Drehimpulse in eine gemeinsame Basis überführen, so dass wir einen Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$ mit der neuen Basis $\{|J, M\rangle\}$ erhalten. Dies erreichen wir, in dem wir die Orthonormalität der alten Basis ausnutzen und den Einheitsoperator $\mathbb{1}$ vor die neue Basis einschieben:

$$\begin{aligned}
|J, M\rangle &= \underbrace{\left(\sum_{m_1, m_2} |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \langle j_1, j_2; m_1, m_2| \right)}_{=\mathbb{1}} |J, M\rangle \\
|J, M\rangle &= \sum_{m_1, m_2} \underbrace{\langle j_1, j_2; m_1, m_2|J, M\rangle}_{\textbf{Glebsch-Gordan Koef.}} |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle
\end{aligned} \tag{20}$$

Da sowohl die alte Basis $\{|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle\}$ als auch die neue Basis $\{|J, M\rangle\}$ orthonormiert sind, handelt es sich bei (20) um eine unitäre Transformation. Zu bemerken ist dass bei dem von uns eingefügten Einheitsoperator nur über die Magnetquantenzahlen m_1 und m_2 summiert wird. D.h. man hält die Drehimpulsquantenzahlen j_1 und j_2 fest und entwickelt nur nach den Magnetquantenzahlen, für die gilt $m_1 = -j_1,\ -j_1 + 1,\ -j_1 + 2, \ldots j_1$ und $m_2 = -j_2,\ -j_2 + 1,\ -j_2 + 2, \ldots j_2$.
Die Koeffizienten $\langle j_1, j_2; m_1, m_2|J, M\rangle$ die die beiden Basen verbinden heißen *Clebsch-Gordan Koeffizienten*. D.h. das Problem der Addition zweier Drehimpulse reduziert sich auf das Bestimmen der Glebsch-Gordan Koeffizienten.
Für die Erwartungswerte J in der neuen Basis gilt:

$$\boxed{|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2} \tag{21}$$

Dies wird durch die Vektoraddition $\vec{J} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$ deutlich. Siehe dazu Abbildung 1

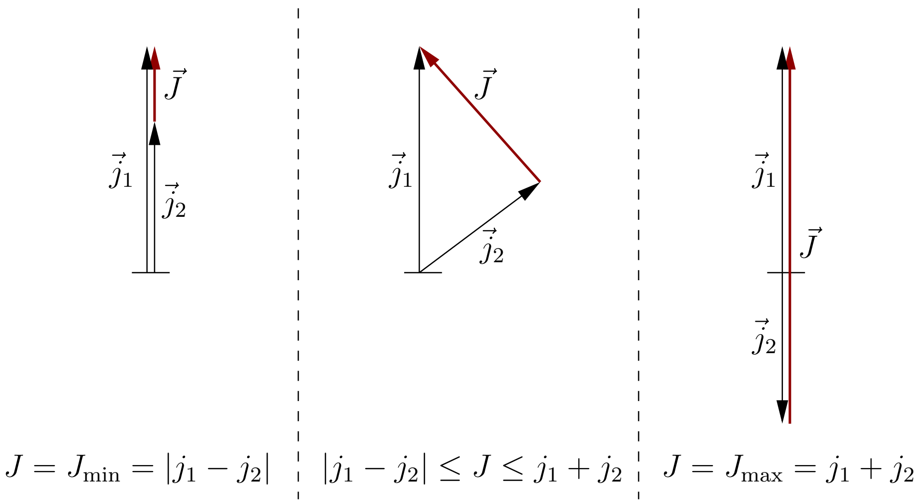

Figure 1: Addition zweier Drehimpulse.

Den Erwartungswert M können wir mit Hilfe des $J_z = j_{z_1} + j_{z_2}$ Operators und folgenden Eigenwertgleichungen bestimmen:

$$J_Z |J, M\rangle = M |J, M\rangle \tag{22a}$$
$$j_{z_1} |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle = m_1 |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \tag{22b}$$
$$j_{z_2} |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle = m_2 |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \tag{22c}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
J_z - j_{z_1} - j_{z_2} &= 0 \\
\langle j_1, j_2; m_1, m_2| J_z - j_{z_1} - j_{z_2} |J, M\rangle &= 0 \\
\underbrace{\langle j_1, j_2; m_1, m_2| J_z |J, M\rangle}_{(22a)} - \underbrace{\langle j_1, j_2; m_1, m_2| j_{z_1} |J, M\rangle}_{(22b)} & \\
- \underbrace{\langle j_1, j_2; m_1, m_2| j_{z_2} |J, M\rangle}_{(22c)} &= 0 \\
M \langle j_1, j_2; m_1, m_2|J, M\rangle - m_1 \langle j_1, j_2; m_1, m_2|J, M\rangle & \\
-m_2 \langle j_1, j_2; m_1, m_2|J, M\rangle &= 0 \\
(M - m_1 - m_2) \langle j_1, j_2; m_1, m_2|J, M\rangle &= 0
\end{aligned} \tag{23}$$

Aus der Gleichung (23) folgt das entweder $\langle j_1, j_2; m_1, m_2|J, M\rangle = 0$ oder $(M - m_1 - m_2) = 0$ was zur der wichtigen Beziehung führt:

$$\boxed{M = m_1 + m_2} \tag{24}$$

Dies ist deswegen so wichtig weil dadurch die Entwicklung (20) nur auf die Clebsch-Gordan Koeffizienten beschränkt wird, bei denen die Bedingung (24) zutrifft. Alle anderen sind Null.
Der Erwartungswert für die Gesamtmagnetquantenzahl M liegt zwischen:

$$-j_1 - j_2 \leq M \leq j_1 + j_2 = -(j_1 + j_2) \leq M \leq j_1 + j_2 = -J \leq M \leq J \tag{25}$$

Eigenschaften der Clebsch-Gordan Koeffizienten

Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten sind konventionsgemäß *reell*:

$$\langle j_1, j_2; m_1, m_2|J, M\rangle \in \mathbb{R} \tag{26}$$

D.h. es gilt:

$$\langle j_1, j_2; m_1, m_2|J, M\rangle = \langle J, M|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle^* = \langle J, M|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \tag{27}$$

Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten sind *orthonormiert*:

$$\begin{aligned}
\langle J', M'|J, M\rangle &= \delta_{J',J}\delta_{J',J} \\
\langle J', M'| \underbrace{\left(\sum_{m_1,m_2} |j_1, j_2; m_1 m_2\rangle \langle j_1, j_2; m_1 m_2| \right)}_{=\mathbb{1}} |J, M\rangle &= \delta_{J',J}\delta_{J',J} \\
\Rightarrow \sum_{m_1,m_2} \langle J', M'|j_1, j_2; m_1 m_2\rangle \langle j_1, j_2; m_1 m_2|J, M\rangle &= \delta_{J',J}\delta_{J',J}
\end{aligned} \tag{28}$$

Aus Gl. (27) und der Gl. (28) erhalten wir eine wichtige Beziehung:

$$\sum_{m_1,m_2} \langle j_1, j_2; m_1 m_2|J', M'\rangle \langle j_1, j_2; m_1 m_2|J, M\rangle = \delta_{J',J}\delta_{J',J} \tag{29}$$

Bzw. mit $J' = J$ und $M' = M$ folgt:

$$\boxed{\sum_{m_1,m_2} \langle j_1, j_2; m_1 m_2|J, M\rangle^2 = 1} \tag{30}$$

Analog kann man auch folgende Beziehung herleiten:

$$\boxed{\sum_J \sum_M \langle j_1, j_2; m_1 m_2|J, M\rangle^2 = 1} \tag{31}$$

Bestimmung der Clebsch-Gordan Koeffizienten

Wir wollen nun einige Beziehungen herleiten um die Clebsch-Gordan Koeffizienten bestimmen zu können. Eine wichtige Beziehung können wir direkt aus (23) übernehmen:

$$\boxed{\langle j_1, j_2; m_1 m_2 | J, M\rangle = 0 \quad \text{für} \quad m_1 + m_2 \neq M} \tag{32}$$

Eine weitere Beziehung finden wir aus den Extremalstellen für J und M d.h. wenn gilt:

$$J = j_1 + j_2 \quad \text{und} \quad M = J = j_1 + j_2 = m_1 + m_2 \tag{33}$$

Setzen wir (33) in die Gl. (20) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} |J, J\rangle &= \sum_{m_1=j_1}^{j_1} \sum_{m_2=j_2}^{j_2} \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, J\rangle \, |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \\ &= \langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J\rangle \, |j_1, j_2; j_1, j_2\rangle \end{aligned} \tag{34}$$

Mit der Normierungsbedingung $\langle J, J | J, J\rangle \overset{!}{=} 1$ folgt:

$$\begin{aligned} &\langle J, J | J, J\rangle = 1 \\ &\langle j_1, j_2; j_1, j_2| \, \langle J, J | j_1, j_2; j_1, j_2\rangle \, \langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J\rangle \, |j_1, j_2; j_1, j_2\rangle = 1 \\ &\langle j_1, j_2; j_1, j_2| \, \langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J\rangle \, \langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J\rangle \, |j_1, j_2; j_1, j_2\rangle = 1 \\ &\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J\rangle^2 \underbrace{\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | j_1, j_2; j_1, j_2\rangle}_{=1} = 1 \\ &\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J\rangle^2 = 1 \end{aligned} \tag{35}$$

Aus (35) folgt also:

$$\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J\rangle = \pm 1 \tag{36}$$

Um nun zu bestimmen ob das Ergebnis in (36) positive oder negative ist d.h. ob $+1$ oder -1, wurde die sog. *Condon-Shortley Phasenkonvention* eingeführt. Sie besagt, dass der Clebsch-Gordan Koeffizient von der Form: $\langle j_1, j_2; j_1, (J - j_1) | J, J\rangle$ <u>reell</u> und <u>positive</u> sein muss. D.h. in unserem Fall (33) mit $J = j_1 + j_2 \Leftrightarrow J - j_1 = j_2$ folgt:

$$\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J\rangle = \underbrace{\langle j_1, j_2; j_1, (J - j_1) | J, J\rangle}_{\text{Konvention: } \textbf{positve}} = 1 \tag{37}$$

D.h.im Spezialfall (33) ist der Clebsch-Gordan Koeffizient gleich 1. Es gilt:

$$\boxed{\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J\rangle = 1 \quad \text{mit} \quad J = j_1 + j_2} \tag{38}$$

Eine weitere Extremalstelle ist wenn gilt:

$$J = j_1 + j_2 \quad \text{und} \quad M = -J = -j_1 - j_2 = m_1 + m_2 \tag{39}$$

Setzen wir (39) wieder in die Gl. (20) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} |J, -J\rangle &= \sum_{m_1=-j_1}^{-j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{-j_2} \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, -J\rangle \, |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \\ &= \langle j_1, j_2; -j_1, -j_2 | J, -J\rangle \, |j_1, j_2; j_1, j_2\rangle \end{aligned} \tag{40}$$

Die Normierungsbedingung $\langle J, -J | J, -J\rangle \overset{!}{=} 1$ und analoge Rechnung wie in (35) führt zu:

$$\langle j_1, j_2; -j_1, -j_2 | J, -J\rangle^2 = 1 \Leftrightarrow \langle j_1, j_2; -j_1, -j_2 | J, -J\rangle = \pm 1 \tag{41}$$

Um festzustellen ob das Ergebnis in (41) positiv oder negativ ist, führen wir eine kleine Substitution durch.

$$j_1' = -j_1; \quad j_2' = -j_2 \Rightarrow -J = -j_1 - j_2 = j_1' + j_2' \equiv J' \tag{42}$$

(42) eingesetzt in $\langle j_1, j_2; -j_1, -j_2 | J, -J\rangle$ führt zu:

$$\langle j_1, j_2; j_1', j_2' | J, J'\rangle = \underbrace{\langle j_1, j_2; j_1', (J' - j_1') | J, J'\rangle}_{\text{Konvention: } \textbf{positve}} \quad \text{mit } j_2' = J' - j_1' \tag{43}$$

Aus (42) und (43) folgt also, dass das Ergebnis in Gl. (41) positiv sein muss. Wir erhalten also:

$$\boxed{\langle j_1, j_2; -j_1, -j_2 | J, -J\rangle = 1 \quad \text{mit} \quad J = j_1 + j_2} \tag{44}$$

D.h. an den beiden Extrimalstellen, mit $M = -J$ und $M = J$, sind die Clebsch-Gordan Koeffizienten gleich Eins.
Mit (38) bzw. (44) können wir schon zwei der Clebsch-Gordan Koeffizienten bestimmen. Um alle weiteren ebenfalls bestimmen zu können, wollen wir jetzt eine **Rekursionsformel** herleiten, mit deren Hilfe wir ausgehend von einem CGK. (Clebsch-Gordan Koeffizienten) einen weiteren bestimmen können, um so sukzessive alle weiteren berechnen zu können.
Dazu betrachten wir das Matrixelement $\langle j_1, j_2; m_1, m_2| J_\pm |J, M\rangle$ und lassen den Auf/Absteigeoperator $J_\pm = j_{1\pm} + j_{2\pm}$ einmal auf die rechte Seite und einmal auf die linke Seite wirken.
Mit der Eigenwertgleichung:

$$J_\pm |J, M\rangle = \hbar\sqrt{(J \mp M)(J \pm M + 1)}\, |J, M \pm 1\rangle \tag{45}$$

Erhalten wir:

$$\langle j_1, j_2; m_1, m_2| J_\pm |J, M\rangle = \hbar\sqrt{(J \mp M)(J \pm M + 1)}\, \langle j_1, j_2; m_1, m_2|J, M \pm 1\rangle \tag{46}$$

Lassen wir den Auf/Absteigeoperator auf die linke Seite wirken, so brauchen wir folgende Eigenwertgleichung:

$$\begin{aligned}
j_{1\mp} |j_1, m_1\rangle &= \hbar\sqrt{(j_1 \pm m_1)(j_1 \mp m_1 + 1)}\, |j_1, m_1 \mp 1\rangle \\
(j_{1\mp} |j_1, m_1\rangle)^\dagger &= (\hbar\sqrt{(j_1 \pm m_1)(j_1 \mp m_1 + 1)}\, |j_1, m_1 \mp 1\rangle)^\dagger \\
\langle j_1, m_1| j_{1\mp}^\dagger &= \hbar\sqrt{(j_1 \pm m_1)(j_1 \mp m_1 + 1)}\, \langle j_1, m_1 \mp 1| \\
\langle j_1, m_1| j_{1\pm} &= \hbar\sqrt{(j_1 \pm m_1)(j_1 \mp m_1 + 1)}\, \langle j_1, m_1 \mp 1|
\end{aligned} \tag{47}$$

Bzw. analog:

$$\langle j_2, m_2| j_{1\pm} = \hbar\sqrt{(j_2 \pm m_2)(j_2 \mp m_2 + 1)}\, \langle j_2, m_2 \mp 1| \tag{48}$$

Mit (47) und (48) erhalten wir für das Matrixelement:

$$\begin{aligned}
&\langle j_1, j_2; m_1, m_2| J_\pm |J, M\rangle = \langle j_1, j_2; m_1, m_2| j_{1\pm} + j_{2\pm} |J, M\rangle \\
&\quad = \langle j_1, j_2; m_1, m_2| j_{1\pm} |J, M\rangle + \langle j_1, j_2; m_1, m_2| j_{2\pm} |J, M\rangle \\
&\quad = \hbar\sqrt{(j_1 \pm m)(j_1 \mp m + 1)}\, \langle j_1, m \mp 1|J, M\rangle \\
&\qquad + \hbar\sqrt{(j_2 \pm m)(j_2 \mp m + 1)}\, \langle j_2, m \mp 1|J, M\rangle
\end{aligned} \tag{49}$$

Setzen wir nun die beiden Gleichungen (46) und (49) gleich und kürzen auf beiden Seiten durch $\hbar$, so erhalten wir folgende *rekursive* Beziehung:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\sqrt{(J \mp M)(J \pm M + 1)}\, \langle j_1, j_2; m_1, m_2|J, M \pm 1\rangle \\
&\quad = \sqrt{(j_1 \pm m_1)(j_1 \mp m_1 + 1)}\, \langle j_1, j_2; , m_1 \mp 1, m_2|J, M\rangle \\
&\qquad + \sqrt{(j_2 \pm m_2)(j_2 \mp m_2 + 1)}\, \langle j_1, j_2; m_1, m_2 \mp 1|J, M\rangle
\end{aligned}} \tag{50}$$

Beispiel

Addition Zweier Drehimpulse anhand eines einfachen Beispiels von Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$. Die Koeffizienten nehmen folgenden Werte an:

$$j_1 = \frac{1}{2} \quad j_2 = \frac{1}{2} \qquad m_1 = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \quad m_2 = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \tag{51}$$

$$0 \le J \le 1 \qquad M = -1, 0, 1 \tag{52}$$

Allgemein die Basis $|J, M\rangle$ in der Clebsch-Gordan Basis $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$ ausgedrückt lautet:

$$|J, M\rangle = \sum_{m_1}\sum_{m_2} \langle j_1, j_2; m_1, m_2|J, M\rangle |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \tag{53}$$

Betrachte das 'größste' und das 'kleinste' Element $|1,1\rangle$ und $|1,-1\rangle$ weil es nur ein möglichen CGK aus der Summation übrigbleibt

$$|1,1\rangle = \underbrace{\left\langle \frac{1}{2}\frac{1}{2};\frac{1}{2}\frac{1}{2}\middle|11\right\rangle}_{=1}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2};\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle \tag{54}$$

$$|1,-1\rangle = \underbrace{\left\langle \frac{1}{2}\frac{1}{2};-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\middle|1-1\right\rangle}_{=1}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2};-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right\rangle \tag{55}$$

Nach der Beziehung (30) muss die Quadratische Summe aller Koeffizienten 1 ergeben. Da es nur ein möglicher CGK in beiden Fällen da ist, steht das Ergebnis gleich fest.
Es bleiben noch zwei weniger einfache Fälle $|1,0\rangle$ und $|0,0\rangle$. Verwende hierfür die Rekursionsformel (50). In den meisten Fällen gelingt eine Lösung in dem man die einzelnen Faktoren so wält, dass auf der Linken Seite der gesuchte CGK steht. Auf der linken Seite stehen dann entweder schon bekannte oder unbekannte CGK's. Wir versuchen das für $|1,0\rangle$. Wähle $m_1 = \frac{1}{2}$, $m_1 = -\frac{1}{2}$, $J = 1$ und $M = 1$

$$\sqrt{2}\left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\middle|10\right\rangle = \underbrace{\left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|11\right\rangle}_{=1 \quad (54)} \tag{56}$$

$$\rightarrow \left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\middle|10\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{57}$$

Wähle nun $m_1 = -\frac{1}{2}$, $m_1 = \frac{1}{2}$, $J = 1$ und $M = 1$

$$\sqrt{2}\left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2};-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|10\right\rangle = \underbrace{\left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|11\right\rangle}_{=1 \quad (54)} \tag{58}$$

$$\rightarrow \left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2};-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|10\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{59}$$

Somit können wir für $|1,0\rangle$ das Ergebnis schreiben

$$|1,0\rangle = \underbrace{\left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\middle|10\right\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right\rangle + \underbrace{\left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\middle|10\right\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle \tag{60}$$

Für den Zustand $|0,0\rangle$ erzeugen wir jetzt anstelle auf der linken Seite zuerst auf der rechten Seite den gesuchten CGK. Wähle die Werte $m_1 = -\frac{1}{2}$, $m_1 = -\frac{1}{2}$, $J = 0$ und $M = 0$

$$0 = \left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\middle|00\right\rangle + \left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2};-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|00\right\rangle \tag{61}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\middle|00\right\rangle}_{\text{positiv}} = -\left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2};-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|00\right\rangle \tag{62}$$

Der CGK $\left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\middle|00\right\rangle$ ist nach der Condon-Shortley Phasenkonvention (37) eine positive Größe. Also ergibt sich für den übrigbleibenden CGK in der Gleichung (61) etwas negatives. Aufrund der Normierungsbedingung $\langle 0,0|0,0\rangle = 1$ ist es möglich beide CGK's herauszufinden. Wir nehmen an dass beide vom Betrag her gleich sind und nur vom Vorzeichen sich unterscheiden also dass gilt:

$$C_1 = -C_2 \tag{63}$$

Aus der Normierungsbedinung ergibt sich

$$|C_1|^2 + |C_2|^2 = |C_1|^2 + |-C_1|^2 = 1 \tag{64}$$

$$\Leftrightarrow C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad C_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{65}$$

Mit $C_1 = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| 00 \right\rangle$ und $C_2 = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| 00 \right\rangle$ folgt für den Zustand $|0,0\rangle$

$$|0,0\rangle = \underbrace{\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \middle| 00 \right\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle + \underbrace{\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \frac{1}{2} \middle| 00 \right\rangle}_{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \tag{66}$$

Referenzen

- Claude Cohen-Tannoudji Quantenmechanik Band 2
- Zettili Quanten Mehanics
- Rollnik Quantentheorie 2