

Lorentz-Transformation der Dirac-Gleichung

Wir wollen nun die Lorentz-Transformation der Dirac-Gleichung betrachten. Dabei erinnern wir uns dass die 4-Dimensionale Vektoren sich wie folgt transformieren

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (1)$$

Und die vierer-Ableitung transformiert sich wie ein kovarianter Vektor. Beweis

$$\partial'_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\nu} \quad (2)$$

Wir multiplizieren Gleichung (1) mit Λ^{-1}

$$x^{\nu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} x'^{\mu} \quad (3)$$

Diese Gleichung (3) in Gleichung (2) eingesetzt

$$\begin{aligned} \partial'_{\mu} &= \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\nu} \\ &= \frac{\partial(\Lambda_{\mu}^{\nu} x'^{\mu})}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\nu} \\ &= \Lambda_{\mu}^{\nu} \frac{\partial(x'^{\mu})}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\nu} \\ &= \Lambda_{\mu}^{\nu} \partial_{\nu} \end{aligned} \quad (4)$$

Wie man in der Gleichung (4) sieht transformiert sich die vierer-Ableitung kovariant. Als Nebenprodukt dieser Rechnung ergibt sich folgende nützliche Relation

$$\Lambda_{\mu}^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \quad (5)$$

Betrachten wir die zwei Intertialsysteme IS und IS' so gilt für die einzelnen Komponenten

IS	IS'
x^{μ}	$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$
∂_{μ}	$\partial'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} \partial_{\nu}$
$\psi(x)$???
$(i\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - \frac{mc}{\hbar})\psi(x) = 0$	$(i\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} - \frac{mc}{\hbar})\psi'(x') = 0$

Table 1: Lorentz-Transformation der einzelnen Komponenten der Dirac-Gleichung

Wie man ersehen kann, fehlt die Transformation für die vierkomponentiger Dirac-Spinor Funktion $\psi(x)$ (die vier Komponenten nicht mit den 4 Dimensionen der Raumzeit zu verwechseln!) Dies wollen wir nun näher ergründen indem wir versuchen in der Tabelle 1 aus der linken Dirac-Gleichung auf die rechte zu kommen. Das wollen wir zeigen dadurch dass es zu jeder Lorentz-Transformation eine lineare Abbildung $S(\Lambda)$ des Spinoren gibt, so das gilt

$$\psi'(x) = S(\Lambda)\psi(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x') \quad (6)$$

Die Menge $\{S(\Lambda)\}$ bilden die Darstellung der Lorentz-Gruppe mit der allgemeinen Gruppeneigenschaften

$$\boxed{S(\Lambda_1 \Lambda_2) = S(\Lambda_1)S(\Lambda_2) \Rightarrow S(\mathbb{1}) = \mathbb{1}, \quad S(\Lambda^{-1}) = (S(\Lambda))^{-1}} \quad (7)$$

Ersetze ψ mit ψ' aus (6) und multipliziere die Dirac-Gleichung mit $S(\Lambda)$ von links so ergibt sich

$$\begin{aligned}
& S(\Lambda) \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{mc}{\hbar} \right) S(\Lambda^{-1}) \psi'(x') = 0 \\
& \left(iS(\Lambda)\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} S(\Lambda^{-1}) - \frac{mc}{\hbar} \underbrace{S(\Lambda)S(\Lambda^{-1})}_1 \right) \psi'(x') = 0 \\
& \left(iS(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1}) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^\mu}}_{\Lambda^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}} - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi'(x') = 0 \\
& \left(i \underbrace{S(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1})\Lambda^\nu_\mu}_{\gamma^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi'(x') = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

(9)

$S(\Lambda^{-1})$ vertauscht offensichtlich mit $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ (wieso?). Vergleicht man nun aus Tabelle 1 die Gestrichelte Dirac-Funktion, so stellt man fest, dass die Größe $S(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1})\Lambda^\nu_\mu$ die Matritze γ^μ ergeben muss, also

$$\gamma^\mu = S(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1})\Lambda^\nu_\mu \tag{10}$$

Multipliziere die Gleichung (10) mit $S(\Lambda^{-1})$ von links und mit $S(\Lambda)$ von rechts, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
& S(\Lambda^{-1}) \cdot | \quad \gamma^\mu = S(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1})\Lambda^\nu_\mu \quad | \cdot S(\Lambda) \\
& S(\Lambda^{-1})\gamma^\mu S(\Lambda) = \underbrace{S(\Lambda^{-1})S(\Lambda)}_1 \gamma^\mu S(\Lambda^{-1})\Lambda^\nu_\mu S(\Lambda) \\
& S(\Lambda^{-1})\gamma^\mu S(\Lambda) = \gamma^\mu \underbrace{S(\Lambda^{-1})S(\Lambda)}_1 \Lambda^\nu_\mu \\
& \Leftrightarrow \Lambda^\nu_\mu \gamma^\mu = S(\Lambda^{-1})\gamma^\nu S(\Lambda)
\end{aligned} \tag{11}$$

die Bedingung für die Transformationsmatrix $S(\Lambda)$. Hier wurde vorausgesetzt das Λ^ν_μ und $S(\Lambda)$ vertauschen.

Konstruktion der S Matrix

Wir wollen die Transformationsmatrix $S(\Lambda)$ bestimmen. Dazu betrachten wir die infinitesimale Lorenztransformationen. Für eine Lorenztransformation setzen wir an

$$\Lambda^\mu_\nu = e^{\omega^\mu_\nu} \tag{12}$$

Jetzt entwickeln wir die e -Funktion bis zu 1-ter Ordnung

$$\Lambda^\mu_\nu = \mathbb{1} + \omega^\mu_\nu + \mathcal{O}((\omega^\mu_\nu)^2) \tag{13}$$

Betrachten wir nun die infinitesimale Transformationen, d.h $\omega \rightarrow \delta\omega$ und vernachlässige Terme höherer Ordnung $\delta\omega^2 \dots$

$$\Lambda^\mu_\nu = \mathbb{1} + \delta\omega^\mu_\nu \tag{14}$$

Analog setzen wir für die Spinor-Transformationsmatrix $S(\Lambda)$

$$S(\Lambda) = e^\tau \tag{15}$$

Die gleiche Rechnung wie (12) bis (14) führt auf

$$S(\Lambda) = \mathbb{1} + \delta\tau \tag{16}$$

Die Kehrwertmatrix von $S(\Lambda)$ ist

$$S(\Lambda^{-1}) = S^{-1}(\Lambda) = e^{-\tau} \quad (17)$$

Die infinitesimale Rechnung von (17) liefert

$$S(\Lambda^{-1}) = \mathbb{1} - \delta\tau \quad (18)$$

Setzen wir die Gleichungen (14), (16) und (18) in (11) ein, so ergibt sich eine Beziehung für die infinitesimale Größen

$$\begin{aligned} (\mathbb{1} + \delta\omega^\mu{}_\nu)\gamma^\mu &= (\mathbb{1} - \delta\tau)\gamma^\nu(\mathbb{1} + \delta\tau) \\ \gamma^\mu + \delta\omega^\mu{}_\nu\gamma^\mu &= (\gamma^\nu - \delta\tau\gamma^\nu)(\mathbb{1} + \delta\tau) \\ \cancel{\gamma^\mu} + \delta\omega^\mu{}_\nu\gamma^\mu &= \cancel{\gamma^\nu} + \gamma^\nu\delta\tau - \delta\tau\gamma^\nu - \underbrace{\delta\tau^2\gamma^\nu}_{\approx 0} \\ \delta\omega^\mu{}_\nu\gamma^\mu &= [\gamma^\nu, \delta\tau] \end{aligned} \quad (19)$$

Mit der Beziehung

$$\delta\omega^\mu{}_\nu = -\delta\omega_\nu{}^\mu \quad (20)$$

Lässt sich die Gleichung (19) schreiben

$$\boxed{[\delta\tau, \gamma^\nu] = \gamma^\mu \delta\omega_\nu{}^\mu} \quad (21)$$

Desweiteren gilt dass die Norm von ψ bei Lorenz-Transformation invariant seien soll, d.h. $\psi' = S\psi$. Das bedeutet die Länge von ψ' und ψ muss gleich sein. Das heißt für die Transformationsmatrix

$$\det S = \pm 1 \quad (22)$$

Wir betrachten nur die eigentliche Transformationen $\det S = 1$ und lassen die Spiegelungen $\det S = -1$ weg. Mit $\det e^A = e^{\text{tr} A}$

$$1 = \det S = e^{\text{tr} \tau} = 1 + \text{tr} \tau + \mathcal{O}(\tau^2) \quad (23)$$

Betrachte wieder den infinitesimalen Fall

$$1 = 1 + \text{tr} \delta\tau \quad (24)$$

Aus dieser Gleichung folgt dass

$$\text{tr} \delta\tau = 0 \quad (25)$$

sein muss. Die Lösung der Gleichung (21) und (25) lautet (TODO)

$$\delta\tau = -\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\delta\omega^{\mu\nu} \quad (26)$$

mit

$$\boxed{\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]} \quad (27)$$

Für den nicht infinitesimalen Fall lautet die Gleichung (26)

$$\tau = -\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} \quad (28)$$

Setzt man diese in unseren Ansatz (15) ein so lautet die Transformations-Matrix $S(\Lambda)$

$$\boxed{S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}} \quad (29)$$

Die Bedeutung der Omega-Matrix

Betrachten wir nochmal den infinitesimalen Fall aus der Gleichung (14), so können wir schreiben

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \mathbb{1} + \delta\omega^\mu{}_\nu \quad (30)$$

Nutzen wir die allgemeine Bedingung dass $\Lambda^{-1}\Lambda = \mathbb{1}$ so folgt

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1}\Lambda &= \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda^\mu{}_\sigma = (\mathbb{1} + \delta\omega_\mu{}^\rho)(\mathbb{1} + \delta\omega^\mu{}_\sigma) \\ &= \mathbb{1} + \delta\omega^\mu{}_\sigma + \delta\omega_\mu{}^\rho + \underbrace{\delta\omega_\mu{}^\rho \delta\omega^\mu{}_\sigma}_{\approx 0} \\ &= \mathbb{1} + \underbrace{\delta\omega^\mu{}_\sigma + \delta\omega_\mu{}^\rho}_{=0} \stackrel{!}{=} \mathbb{1} \end{aligned} \quad (31)$$

Aus dieser Gleichung folgt die Beziehung für den infinitesimalen Fall $\delta\omega$

$$\delta\omega^\mu{}_\sigma = -\delta\omega_\mu{}^\rho \quad (32)$$

Betrachte nun den nicht infinitesimalen Fall so folgt

$$\begin{aligned} g^{\mu\alpha}\omega_{\alpha\sigma} &= -\omega_{\mu\alpha}g^{\alpha\rho} \\ \omega_{\alpha\sigma} &= -\omega_{\mu\alpha} \end{aligned} \quad (33)$$

Setzen wir nun die Indizes $\sigma = \mu = \rho$ so folgt

$$\boxed{\omega_{\alpha\rho} = -\omega_{\rho\alpha}} \quad (34)$$

Damit müsste die ω -Matrix folgende Gestalt haben

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{01} & \omega_{02} & \omega_{03} \\ \omega_{10} & 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{20} & \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{30} & \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{pmatrix} = \omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{01} & \omega_{02} & \omega_{03} \\ -\omega_{01} & 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{02} & -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{03} & -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix} \quad (35)$$

Das heißt es gibt insgesamt 6 reelle (warum reell?) freie Parameter \Rightarrow 6 Generatoren

\vec{J} (Drehungen) 3 ω_{ij}

\vec{K} (Boosts) 3 ω_{0i}

Betrachten wir nun eine Drehung um die z-Achse. Dann sieht die Lorentz-Transformationsmatrix folgendermaßen aus

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ 0 & -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (36)$$

Machen wir nun eine Näherung für kleine ω , d.h. $\sin \omega \approx \omega$ und $\cos \omega \approx 1$ so ergibt sich für Λ

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \omega & 0 \\ 0 & -\omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} + \omega = \mathbb{1} + \begin{pmatrix} 0 & \omega_{01} & \omega_{02} & \omega_{03} \\ \omega_{10} & 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{20} & \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{30} & \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad (37)$$

Setzen wir ω aus der Gleichung (35) in die Gl. (37) ein

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \omega & 0 \\ 0 & -\omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \mathbb{1} + \omega \\
&= \mathbb{1} + \begin{pmatrix} 0 & \omega_{01} & \omega_{02} & \omega_{03} \\ \omega_{10} & 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{20} & \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{30} & \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \omega_{01} & \omega_{02} & \omega_{03} \\ \omega_{10} & 1 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{20} & \omega_{21} & 1 & \omega_{23} \\ \omega_{30} & \omega_{31} & \omega_{32} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{38}$$

Durch Vergleich der beiden Matrizen in Gl. (38) stellen wir fest

$$\begin{aligned}
\omega_{12} &= \omega \\
\omega_{21} &= -\omega = -\omega_{12}
\end{aligned} \tag{39}$$

D.h. alle Elemente der ω -Matrix außer ω_{12} und ω_{21} Null sind. Somit müssen wir reduziert sich die Gleichung (29) auf

$$\begin{aligned}
S(\Lambda) &= e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}} \\
&= \exp\left\{-\frac{i}{4}(\sigma_{12}\omega^{12} + \sigma_{21}\omega^{21})\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{i}{4}(\sigma_{12}\omega - \sigma_{21}\omega)\right\} \quad \text{mit } \sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = -\frac{1}{2}[\gamma_\nu, \gamma_\mu] = -\sigma_{\nu\mu} \\
&= \exp\left\{-\frac{i}{4}(\sigma_{12}\omega + \sigma_{12}\omega)\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{i}{2}(\sigma_{12}\omega)\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\omega\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}\omega\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{i}{2}\sigma_3\begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}\omega\right\} \quad \text{mit } S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_3 \\
&= \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\omega S_z\right\}
\end{aligned} \tag{40}$$

Wir wollen nun die Exponentialfunktion auf die Matrix anwenden. Damit das gelingt starten wir mit folgender Form

$$S(\Lambda) = \exp\left\{\underbrace{-\frac{i}{2}\omega\sigma_3\mathbb{1}_2}_{\tilde{\omega}}\right\} = \exp\{\tilde{\omega} \cdot \sigma_3\mathbb{1}_2\} \tag{41}$$

$$= \exp\left\{\tilde{\omega} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_I\right\} \tag{42}$$

Die Matrix I weist periodisches Verhalten beim potenzieren

$$I^2 = I^4 = \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \quad I^1 = I^3 = \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = I \tag{43}$$

Dies wird bei der Entwicklung der Exponentielfunktion benötigt

$$S(\Lambda) = \exp\{\tilde{\omega} \cdot I\} = \cosh(I\tilde{\omega}) + \sinh(I\tilde{\omega}) \quad (44)$$

Referenzen

- Rollnik Quantentheorie 2