Lorentz-Transformation der Dirac-Gleichung

Wir wollen nun die Lorantz-Transformation der Dirac-Gleichung betrachten. Dabei errinern wir uns dass die 4-Dimensionale Vektoren sich wie folgt transformieren

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{1}$$

Und die vierer-Ableitung transfomiert sich wie ein kovarianter Vektor. Beweis

$$\partial'_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\nu} \tag{2}$$

Wir multiplizieren Gleichung (1) mit Λ^{-1}

$$x^{\nu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} x'^{\mu} \tag{3}$$

Diese Gleichung (3) in Gleichung (2) eingesetzt

$$\begin{aligned}
\partial'_{\mu} &= \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\nu} \\
&= \frac{\partial(\Lambda_{\mu}{}^{\nu} x'^{\mu})}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\nu} \\
&= \Lambda_{\mu}{}^{\nu} \frac{\partial(x'^{\mu})}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\nu} \\
&= \Lambda_{\mu}{}^{\nu} \partial_{\nu}
\end{aligned} \tag{4}$$

Wie man in der Gleichung (4) sieht transformiert sich die vierer-Ableitung kovariant. Als nebenprodukt dieser Rechung ergibt sich folgende nützliche Relation

$$\Lambda_{\mu}{}^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \tag{5}$$

Betrachten wir die zwei Intertialsysteme IS und IS' so gilt für die einzelten komponenten

IS	IS'
x^{μ}	${x'}^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$
∂_{μ}	$\partial'_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} \partial_{\nu}$
$\psi(x)$	???
$(i\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - \frac{mc}{\hbar})\psi(x) = 0$	$(i\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial {x'}^{\mu}} - \frac{mc}{\hbar})\psi'(x') = 0$

Table 1: Lorentz-Transformation der einzelnen Komponenten der Dirac-Gleichung

Wie man ersehen kann, fehlt die Transformation für die vierkomponentiger Dirac-Spinor Funktion $\psi(x)$ (die vier Komponenten nicht mit den 4 Dimensionen der Raumzeit zu verwechseln!) Dies wollen wir nun näher ergründen indem wir versuchen in der Tabelle 1 aus der linken Dirac-Gleichung auf die rechte zu kommen.
Das wollen wir zeigen dadurch dass es zu jeder Lorentz-Transformation eine lineare Abbildung $S(\Lambda)$ des Spinoren gibt, so das gilt

$$\psi'(x) = S(\Lambda)\psi(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x') \tag{6}$$

Die Menge $\{S(\Lambda)\}$ bilden die Darstellung der Lorentz-Gruppe mit der allgemeinen Gruppeneigenschaften

$$\boxed{S(\Lambda_1\Lambda_2) = S(\Lambda_1)S(\Lambda_2) \Rightarrow S(\mathbb{1}) = \mathbb{1}, \quad S(\Lambda^{-1}) = (S(\Lambda))^{-1}} \tag{7}$$

Ersetze ψ mit ψ' aus (6) und multipliziere die Dirac-Gleichung mit $S(\Lambda)$ von links so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
S(\Lambda)\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{mc}{\hbar}\right) S(\Lambda^{-1})\psi'(x') = 0 \\
\left(iS(\Lambda)\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} S(\Lambda^{-1}) - \frac{mc}{\hbar}\underbrace{S(\Lambda)S(\Lambda^{-1})}_{\mathbb{1}}\right)\psi'(x') = 0 \\
\left(iS(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1})\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^\mu}}_{\Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}} - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi'(x') = 0 \\
\left(i\underbrace{S(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1})\Lambda^\nu{}_\mu}_{\gamma^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi'(x') = 0
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
\tag{9}
$$

$S(\Lambda^{-1})$ vertauscht offensichtlich mit $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ (wieso?). Vergleicht man nun aus Tabelle 1 die Gestrichelte Dirac-Funktion, so stellt man fest, dass die Größe $S(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1})\Lambda^\nu{}_\mu$ die Matritze γ^μ ergeben muss, also

$$
\begin{aligned}
\gamma^\mu &= S(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1})\Lambda^\nu{}_\mu \qquad | \cdot \Lambda_\nu{}^\mu \\
\gamma^\mu \Lambda_\nu{}^\mu &= S(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1})
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Subsituiere Λ mit Λ^{-1} bzw. $\Lambda^\nu{}_\mu$ mit $\Lambda_\nu{}^\mu$

$$
\Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu = S(\Lambda^{-1})\gamma^\nu S(\Lambda) \tag{11}
$$

Referenzen

- Rollnik Quantentheorie 2