Quantisierung des Strahlungsfeldes

Wir wollen das Vektorpotential $\vec{A}$ als Operator ausdrücken. Dazu betrachten wir die Wellengleichung für eine Elektromagnetische Welle im Vakuum

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = 0 \qquad \text{mit } \Box \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \quad \rightarrow \quad \Box \vec{A} = 0 \tag{1}$$

Eine Lösung für die Wellengleichung (1) wäre z.B. eine *ebene Welle*

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = A\hat{\epsilon}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} + A^*\hat{\epsilon}^* e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \tag{2}$$

Die Vektoren $\hat{\epsilon}$ sind die sogenannten Polarisationsvektoren der Welle. Sie stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung $\vec{k}$. Deswegen bleiben nur noch zwei Raumrichtungen in die sie zeigen können übrig. Betrachte z.B. eine linear polarisierte ebene Welle die sich in z-Richtung ausbreitet. Damit lautet der Wellevektor $\vec{k} = (0, 0, k)^T$. Für den Polarisationsvektor bleiben zwei Möglichkeiten übrig. Entweder zeigt er in x-Richtung mit $\hat{\epsilon} = (1, 0, 0)^T$ oder in y-Richtung $\hat{\epsilon} = (0, 1, 0)^T$.
Wir betrachten ein Strahlungsfeld mit allen möglichen $\vec{k}$-Werten. Das bedeutet eine Überlagerung aller $\vec{k}$-Werte. Dazu müssen wir die Gleichung (2) über $\vec{k}$ integrieren. Dabei müssen wir noch über zwei Moden $m = 1, 2$ Summieren. Diese Stehen für das elektrische und magnetische Feld.

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{m=1,2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\vec{A}_m(\vec{k})\hat{\epsilon}_m(\vec{k})e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} + \vec{A}^*_m(k)\hat{\epsilon}^*_m(\vec{k})e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right] \tag{3}$$

Der Faktor $\frac{1}{(2\pi)^2}$ rührt von einer Fouriertransformation des Vektorpotentials im Impulsraum $\vec{A}(\vec{k})$ zu Vektorpotential im Ortsraum $\vec{A}(\vec{r})$ her.