Landau Niveaus

Wir betrachten ein Teilchen im Magnetfeld. Das konstante Magnetfeld zeigt in z-Richtung $\vec{B} = (0, 0, B_0)$. Das Vektorpotential ist nach Landau-Eichung ($\nabla \cdot \vec{A} = 0$) somit $\vec{A} = (-yB_0, 0, 0)$. Der Hamiltonoperator lautet:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2$$

In Quantenmechanischer Schreibweise:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2$$

Einsetzen des Hamiltonoperators in die Schrödinger-Gleichung:

$$H\psi = E\psi$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\psi = E\psi$$

$$\frac{1}{2m}\left(-\hbar^2\nabla^2 - \frac{\hbar q}{ic}\nabla\vec{A} - \frac{\hbar q}{ic}\vec{A}\nabla + \frac{q^2}{c^2}\vec{A}^2\right)\psi = E\psi$$

$$\frac{1}{2m}\left(-\hbar^2\nabla^2\psi - \frac{\hbar q}{ic}\underbrace{\nabla\vec{A}\psi}_{(\nabla\vec{A})\psi + \vec{A}\cdot(\nabla\psi)} - \frac{\hbar q}{ic}\vec{A}\nabla\psi + \frac{q^2}{c^2}\vec{A}^2\psi\right) = E\psi$$

Nach der Landau Eichung ist der Term $(\nabla\vec{A})\psi = 0$

$$\frac{1}{2m}\left(-\hbar^2\nabla^2\psi - \frac{\hbar q}{ic}\vec{A}\cdot(\nabla\psi) - \frac{\hbar q}{ic}\vec{A}\nabla\psi + \frac{q^2}{c^2}\vec{A}^2\psi\right) = E\psi$$

$$\frac{1}{2m}\left(-\hbar^2\nabla^2\psi - \frac{2\hbar q}{ic}\vec{A}\cdot(\nabla\psi) + \frac{q^2}{c^2}\vec{A}^2\psi\right) = E\psi$$

Einsetzen des Vektorfeldes ergibt nur noch eine Ableitung in die x-Richtung:

$$\frac{1}{2m}\left(-\hbar^2\nabla^2\psi + \frac{2\hbar q}{ic}yB_0\frac{\partial}{\partial x}\psi + \frac{q^2}{c^2}y^2B_0^2\psi\right) = E\psi$$

Mit der Annahme vom $\psi(x, y, z) = e^{\frac{i}{\hbar}p_x x} \cdot \phi(y) \cdot e^{\frac{i}{\hbar}p_z z}$ können wir erstmal $\nabla^2\psi$ ausrechnen NR:

$$\nabla\psi = \begin{pmatrix} \frac{ip_x}{\hbar}e^{ip_x x/\hbar} \cdot \phi(y)e^{\frac{i}{\hbar}p_z z} \\ e^{ip_x x/\hbar} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\phi(y)e^{\frac{i}{\hbar}p_z z} \\ \frac{ip_z}{\hbar}e^{ip_x x/\hbar} \cdot \phi(y)e^{\frac{i}{\hbar}p_z z} \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2\psi = -\frac{p_x^2}{\hbar^2}e^{ip_x x/\hbar}\phi(y)e^{\frac{i}{\hbar}p_z z} + e^{ip_x x/\hbar}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(y)e^{\frac{i}{\hbar}p_z z} - \frac{p_z^2}{\hbar^2}e^{ip_x x/\hbar}\phi(y)e^{\frac{i}{\hbar}p_z z}$$

Ebenso die Ableitung nach x NR:

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi = \frac{i}{\hbar}p_x e^{\frac{i}{\hbar}p_x x} \cdot \phi(y)e^{\frac{i}{\hbar}p_z z}$$

Die NR in wieder in die SGL einsetzen:

$$\frac{1}{2m}\left(p_x^2 e^{ip_x x/\hbar}\phi(y)e^{\frac{i}{\hbar}p_z z} - \hbar^2 e^{ip_x x/\hbar}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(y)e^{\frac{i}{\hbar}p_z z} + p_z^2 e^{ip_x x/\hbar}\phi(y)e^{\frac{i}{\hbar}p_z z}\right.$$
$$\left. + \frac{2\hbar q}{ic} y B_0 \frac{i}{\hbar} p_x e^{\frac{i}{\hbar}p_x x}\cdot\phi(y)e^{\frac{i}{\hbar}p_z z} + \frac{q^2}{c^2}y^2 B_0^2\psi\right) = E\psi$$

Gleichung durch $e^{\frac{i}{\hbar}p_0 x}e^{\frac{i}{\hbar}p_0 z}$ teilen:

$$\frac{1}{2m}\left(p_x^2\phi(y) - \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(y) + p_z^2\phi(y) + \frac{2q}{c}yB_0 p_x\phi(y) + \frac{q^2}{c^2}y^2B_0^2\phi(y)\right) = E\phi(y)$$

$$\frac{1}{2m}\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(y) + \underbrace{\left[p_x^2 + \frac{2q}{c}yB_0p_x + \frac{q^2}{c^2}y^2B_0^2\right]}_{\text{Binomische Formel}}\phi(y) + p_z^2\phi(y)\right) = E\phi(y)$$

$$\frac{1}{2m}\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(y) + (\frac{q}{c}B_0\cdot y + p_x)^2\phi(y) + p_z^2\phi(y)\right) = E\phi(y)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(y) + \frac{q^2B_0^2}{2mc^2}(y + \frac{p_x c}{qB_0})^2\phi(y) + \frac{p_z^2}{2m}\phi(y) = E\phi(y)$$

Mit der Zyklotronfrequenz $\omega_c = \frac{qB_0}{cm}$ und $y_0 = \frac{p_x}{m\omega_c}$

$$\left(\underbrace{\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{m\omega_c^2}{2}(y+y_0)^2}_{\text{Harmonischer Oszillator}} + \underbrace{\frac{p_z^2}{2m}}_{\text{freies Teilchen}}\right)\phi(y) = E\phi(y)$$

Vergleiche mit dem Harmonischen Oszillator in y-Richtung: $H = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}y^2$ Ergeben sich die Eigenwerte dazu:

$$\boxed{E_n^{\text{Landau}} = \hbar\omega_c(n+\frac{1}{2}) + \frac{p_z^2}{2m}} \tag{1}$$

Wir haben eine Wellenfunktion die in x und z Richtung eine Ebene Welle ist und in y Richtung die Lösung eines Harmonischen Oszillators darstellt. Die Auszeichnung der y Richtung liegt an der von uns gewählten Eichung bzw. dem gewählten Vektorpotential $\vec{A} = (-yB_0, 0, 0)$. Wie auch immer man die Eichung wählt, das entscheidende ist, dass das Magneteld die Ausbreitung der freier ebener Wellen nur in Feldrichtung erlaubt. In unserem Fall ist es die z Richtung. Wie man aus der Gleichung (1) sieht, sind die Energieeigenwerte unendlichfach entartet. Nur die x-y-Ebene ist quantisiert.