

Klein-Gordon-Gleichung

Die Klein-Gordon-Gleichung ist eine relativistische Gleichung und beschreibt Teilchen mit Spin 0 z.B: π -Mesonen und K^0 -Mesonen. Sie folgt aus dem Korrespondenzprinzip (klassisch)

$$\vec{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \quad (1)$$

bzw. kovarianter Schreibweise (relativistisch)

$$p_\mu \rightarrow i\hbar \partial_\mu \quad (2)$$

Betrachten wir die Länge eines Impulses im Laborsystem IS

$$p^2 = p_\mu p^\mu = (p_0, -\vec{p})(p_0, \vec{p}) = p_0^2 - \vec{p}^2$$

mit $p_0 = \frac{E}{c}$

$$p_\mu p^\mu = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^2 \quad (3)$$

Die Energie für ein Teilchen in seinem Ruhesystem IS' ist $E = mc^2$ (mit m für Ruhe-Energie) und $\vec{p}' = 0$ setzen wir die Gleichung in (3) ein so erhalten wir

$$p'_\mu p'^\mu = m^2 c^2 \quad (4)$$

Setzt man nun die beiden Gleichungen (3) und (4) gleich (Erhaltung der Länge des Impulses in allen Inertialsystemen) IS=IS' und stellt sie nach E um somit folgt

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2 \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (6)$$

Die negative Energien in Gleichung (6) führt zu der Annahme von Antiteilchen.

Setzen wir das Korrespondenzprinzip für die Energie $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ und den Impuls $p \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$ in die Gleichung (5) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^2 &= m^2 c^2 \\ \left(\frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - (-i\hbar \vec{\nabla})^2 &= m^2 c^2 \\ -\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hbar^2 \vec{\nabla}^2 &= m^2 c^2 \quad | : -\hbar^2 \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 &= -\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Führen wir den **d'Alembert-Operator** ein $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ und multiplizieren wir die Gleichung (7) mit der Wellenfunktion ψ von rechts, so ergibt das die **Klein-Gordon-Gleichung**

$$\left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \right] \psi = 0 \quad (8)$$

Die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie, erhält aber zwei fundamentale Probleme. Ohne deren Bewältigung die Gleichung physikalisch unhaltbar ist.

Das **erste Problem** ist, dass die Lösung der Klein-Gordon-Gleichung auch negative Energien zulässt. Dies

wollen wir näher untersuchen.

Die Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung sind ebene Wellen mit der Form

$$\psi(x) = N e^{-ipx/\hbar} \quad (9)$$

mit $p \cdot x = p^\mu x_\mu = Et - \vec{p}\vec{x}$, eingesetzt in (9)

$$\psi(x) = N e^{\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{x})} \quad (10)$$

Setzen wir nun die ebene Welle in die Klein-Gordon-Gleichung (8) ein

$$\left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] N e^{\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{x})} = 0 \quad (11)$$

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) e^{\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{x})} + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 e^{\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{x})} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{x})} - \nabla^2 e^{\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{x})} + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 e^{\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{x})} = 0 \quad (13)$$

$$-\frac{E^2}{c^2 \hbar^2} e^{\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{x})} + \frac{1}{\hbar^2} p^2 e^{\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{x})} + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 e^{\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{x})} = 0 \quad (14)$$

$$-\frac{E^2}{c^2} + p^2 + m^2 c^2 = 0 \quad (15)$$

$$\Leftrightarrow E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (16)$$

Durch ziehen der Wurzel auf beiden Seiten erhält man

$$E = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (17)$$

Die selbe Energie wie Gleichung (6). Lösungen der negativer Energie des Energiespektrums ist nach unten nicht beschränkt. Formal liegt das darin begründet, dass die Klein-Gordon-Gleichung eine DGL 2-Ordnung nach der Zeit ist. Es stellt sich also das Problem der Interpretation der negativen Energie. Was später mit Antiteilchen begründet wird.

Das **zweite Problem** der Klein-Gordon-Gleichung ist dass sie negative Wahrscheinlichkeitsdichten hervorbringt. Dies wollen wir nun näher untersuchen.

Zur Herleitung einer Kontinuitätsgleichung multipliziert man die Klein-Gordon-Gleichung von links mit ψ^*

$$\psi^* \left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi = 0 \quad (18)$$

und zieht davon die komplex konjugierte Gleichung

$$\psi \left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi^* = 0 \quad (19)$$

ab. Somit folgt

$$\psi^* \left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi - \psi \left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi^* = 0 \quad (20)$$

$$\psi^* \square \psi + \cancel{\left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 |\psi|^2} - \psi \square \psi^* - \cancel{\left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 |\psi|^2} = 0 \quad (21)$$

$$\psi^* \square \psi - \psi \square \psi^* = 0 \quad (22)$$

$$(23)$$

Mit $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu$ eingesetzt mit

$$\begin{aligned} \psi^* \partial_\mu \partial^\mu \psi - \psi \partial_\mu \partial^\mu \psi^* &= 0 \\ \partial_\mu (\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*) &= 0 \quad \text{Produktregel ?} \end{aligned} \quad (24)$$

Setzt man in die Gleichung (24) die Entsprechung für die partielle Ableitungen ein

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right), \quad \partial^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \quad (25)$$

so ergibt das

$$\begin{aligned} \partial_0(\psi^* \partial^0 \psi - \psi \partial^0 \psi^*) + \vec{\nabla}(-\psi^* \vec{\nabla} \psi + \psi \vec{\nabla} \psi^*) &= 0 \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}(\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^*) + \vec{\nabla}(-\psi^* \vec{\nabla} \psi + \psi \vec{\nabla} \psi^*) &= 0 \quad | \cdot -1 \\ -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}(\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^*) + \vec{\nabla}(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Multipliziert man die Gleichung (26) mit $\frac{\hbar}{2mi}$ somit folgt eine ähnliche Form für die Kontinuitätsgleichung in nicht relativistischen Fall

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left[\frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \right) \right]}_{\rho} + \vec{\nabla} \underbrace{\left[\frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) \right]}_{\vec{j}} = 0 \quad (27)$$

Vergleichen wir die Gleichung (27) mit der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (28)$$

So erhalten wir für die Wahrscheinlichkeitsdichte ρ

$$\rho = \left[\frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \right) \right] \quad (29)$$

Und für die Wahrscheinlichkeitsstromdichte

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) \quad (30)$$

Um zu sehen dass die Wahrscheinlichkeitsdichte ρ auch negativ werden kann, betrachte zunächst die Schrödinger Gleichung sowie die komplexkonjugierte davon

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{i}{\hbar} H \psi = -\frac{i}{\hbar} E \psi \quad (31)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi^* = \frac{i}{\hbar} E \psi^* \quad (32)$$

Eingesetzt in (29)

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(-\frac{i}{\hbar} E \psi^* \psi - \frac{i}{\hbar} E \psi \psi^* \right) \quad (33)$$

$$= \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(-\frac{i2}{\hbar} E |\psi|^2 \right) \quad (34)$$

$$= \frac{E}{mc^2} |\psi|^2 \quad (35)$$

$$(36)$$

Da wir wissen das $E < 0$ werden kann folgt daraus dass die Wahrscheinlichkeitsstromdichte ρ ebenfalls kleiner Null wird. Daraus folgt ρ kann **nicht** die Bedeutung einer Wahrscheinlichkeitsdichte haben, sondern eventuell einer Ladungsdichte. Zur Begründung dass ρ eine mögliche Ladungsdichte ist betrachten wir die Zustände mit $E > 0$ z.B. π^+ und $E < 0$ z.B. π^- (Antiteilchen von π^+ . Im Fall $\rho > 0$ dominieren die π^+ Teilchen. Also ist die Ladungsdichte positiv. Im Fall $\rho < 0$ dominieren π^- Teilchen, also wird die Ladungsdichte negativ. Somit ist ρ proportional zu elektrischen Ladungsdichte.

Die klein-Gordon-Gleichung ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in t , deshalb können die Anfangswerte von ψ und $\frac{\partial}{\partial t} \psi$ unabhängig vorgegeben werden, so dass ρ als Funktion von \vec{x} sowohl positiv wie auch negativ sein kann.

Referenzen

- Schwabl QMII
- Rollnik Quantentheorie 2