

Die Dirac Gleichung

Die Möglichkeit $\rho = \psi^* \psi$ für die Wahrscheinlichkeitsdichte zu schreiben folgt aus der Tatsache, dass die Zeitableitung in der nicht relativistischen Schrödinger-Gleichung nur in 1-Ordnung auftritt. Im Vergleich nimmt ρ in der Klein-Gordon Gleichung auch negative Werte an, dort ist die zeitliche Ableitung von 2-Ordnung.

Es gilt nun eine Differential Gleichung 1-Ordnung in der Zeit der Form

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H \psi \quad (1)$$

die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = (mc)^2 \quad (2)$$

für ein freies Teilchen erfüllt. Die Betrachtungen im Zusammenhang mit der Klein-Gordon-Gleichung haben gezeigt, dass man dieses Problem für eine einfache skalare Wellenfunktion ψ nicht lösen kann. Diracs Idee war eine mehrdimensionale Wellenfunktion einzuführen .

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_n(x) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Des weiteren muss die Gleichung (1) folgende Forderungen erfüllen:

- Die Komponenten von ψ müssen die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen, so dass der Hamilton-Operator die relativistische Beziehung $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ erfüllt.
- Es existiert ein erhaltener Viererstrom, dessen nullte Komponente eine positive Dichte ist.
- Die Gleichung muss Lorentz-kovariant sein. Das bedeutet, dass sie unter Transformation ihre Form behält. Bezugssystem unabhängig. Damit dies erfüllt ist muss gelten: Da die zeitliche Ableitung nur in 1-Ordnung auftritt, muss auch die räumliche Ableitung in 1-Ordnung auftreten.

Der Ansatz für den Hamiltonoperator H sollte so sein dass

$$H^2 = E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (4)$$

das Quadrat der relativistischen Energie im Quadrat gleich ist. Folgender allgemeiner Ansatz erfüllt diese Bedingung

$$H = c(\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z) + \beta m^2 c^4 = c \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta m^2 c^4 \quad (5)$$

Die unbekannten Koeffizienten α_i, β können nicht einfach Zahlen sein, da sonst die Gleichung nicht einmal forminvariant gegenüber räumlichen Drehungen ist (D.h. die Form der Gleichung ändert sich je nachdem wie man das Koordinatensystem wählt). α_i, β müssen hermitesche Matrizen sein damit H hermitesch ist. Daraus folgt α_i, β müssen $N \times N$ Matrizen sein.

Um die unbekannten Matrizen α_i, β zu bestimmen gehen wir von der Klein-Gordon Gleichung aus

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x) = \underbrace{c^2(\vec{p}^2 + m^2 c^2)}_{H^2} \psi(x) \quad (6)$$

$$\stackrel{!}{=} \left(c \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta m^2 c^4 \right)^2 \psi(x) \quad (7)$$

$$= [c \sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j + \beta m c^2] \cdot [c \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta m c^2] \psi(p) \quad (8)$$

$$= c^2 \left[\sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j + \beta m c \right] \cdot \left[\sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta m c \right] \psi(p) \quad (9)$$

$$= c^2 \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j \beta m c + \beta m c \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta^2 m^2 c^2 \right) \psi(p) \quad (10)$$

$$= c^2 \left(\sum_{i,j=1}^3 \alpha_i \alpha_j p_i p_j + \sum_{i=1}^3 (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i m c + \beta^2 m^2 c^2 \right) \psi(p) \quad (11)$$

Der Koeffizientenvergleich zwischen $c^2(\vec{p}^2 + m^2 c^2)$ und $c^2 \left(\sum_{i,j=1}^3 \alpha_i \alpha_j p_i p_j + \sum_{i=1}^3 (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i m c + \beta^2 m^2 c^2 \right)$ liefert

- $\boxed{\beta^2 = 1}$

- Antikommutator:

$$\boxed{\{\alpha_i, \beta\} = 0} \quad (12)$$

Damit der Mischterm $(\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i m c$ verschwindet

- $i \neq j$: z.B. $\{\alpha_i, \alpha_j\} = 0$ damit die unterschiedlichen Terme $p_i p_j = \delta_{ij}$ verschwinden
- $i = j$: $\alpha_x^2 p_x^2 + \alpha_y^2 p_y^2 + \alpha_z^2 p_z^2 = \vec{p}^2 \Rightarrow \alpha_i^2 = 1$

$$\Rightarrow \boxed{\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}} \quad (13)$$

- \hat{p}_i, \hat{H} hermitesch $\Rightarrow \vec{\alpha}, \beta$ hermitesch
- $\alpha_i^2 = 1, \beta^2 = 1 \Rightarrow$ Eigenwerte von α_i, β sind ± 1
- $\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \quad | \cdot \beta$

$$\Rightarrow \alpha_i = -\beta \alpha_i \beta \Rightarrow \text{Tr}[\alpha_i] = -\text{Tr}[\beta \alpha_i \beta] = -\text{Tr}[\alpha_i \beta^2] = -\text{Tr}[\alpha_i]$$

Die Eigenwerte von α_i und β wie oben schon erwähnt ± 1 . D.h. wir haben für $+1$ genau so viele Eigenwerte wie für -1 . Es kommen also nur Matrizen in den Dimensionen $N = 2, 4, 6, \dots$ in Frage. Für den Fall $N = 2$ können die Paulimatrizen σ_i mit den Eigenwerten ± 1 benutzt werden. Sie erlauben jedoch nur 6 Antikommutator Beziehungen zu beschreiben. Benötigt werden aber 9, nämlich $6 \times (13)$ und $3 \times (12)$. Welche durch 4 dimensionale Matrizen ($4 \times 4 = 16$) ausreichend beschrieben werden.

β diagonal mit den Eigenwerten ± 1 also wähle

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Um die α_i zu bestimmen, nutzen wir, dass α_i hermitesch ist und der Antikommutator (12) zwischen α_i und β gleich Null ist. Allgemeiner Ansatz für α

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (15)$$

Mit der Beziehung dass die Spur von α_i gleich Null sein muss

$$\begin{aligned}\{\alpha_i, \beta\} &= \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \\ \Leftrightarrow \alpha_i \beta &= -\beta \alpha_i \quad | \cdot \beta \\ \underbrace{\alpha_i \beta^2}_{=1} &= -\beta \alpha_i \beta\end{aligned}\tag{16}$$

Die Spur von (16) ergibt

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\alpha_i) &= -\text{Tr}(\beta \alpha_i \beta) = -\text{Tr}(\alpha_i \beta^2) = -\text{Tr}(\alpha_i) \\ \Leftrightarrow \text{Tr} \alpha_i &= -\text{Tr} \alpha_i \\ \Rightarrow \text{Tr} \alpha_i &= 0\end{aligned}\tag{17}$$

Für hermitesche 2D Matrix gilt $C = B^\dagger$ und aus Spurenfreiheit folgt $A = D = 0$.

$$\Rightarrow \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & B_i \\ B_i^\dagger & 0 \end{pmatrix}\tag{18}$$

Setze für $B = \tau_i$. Aus (13)

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = \begin{pmatrix} 0 & B_i \\ B_i^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_j \\ B_j^\dagger & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B_j \\ B_j^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_i \\ B_i^\dagger & 0 \end{pmatrix}\tag{19}$$

$$= \begin{pmatrix} B_i B_j^\dagger & 0 \\ 0 & B_i^\dagger B_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_j B_i^\dagger & 0 \\ 0 & B_j^\dagger B_i \end{pmatrix}\tag{20}$$

$$= \begin{pmatrix} B_i B_j^\dagger + B_j B_i^\dagger & 0 \\ 0 & B_i^\dagger B_j + B_j^\dagger B_i \end{pmatrix}\tag{21}$$

$$\tag{22}$$

Versuchen wir für B_i die Paulimatrizen einzusetzen

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = \begin{pmatrix} \sigma_i \sigma_j^\dagger + \sigma_j \sigma_i^\dagger & 0 \\ 0 & \sigma_i^\dagger \sigma_j + \sigma_j^\dagger \sigma_i \end{pmatrix} \quad \text{Paulimatrizen hermitesch } \sigma_i^\dagger = \sigma_i\tag{23}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i \end{pmatrix} \quad \text{mit } \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{1}\tag{24}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\delta_{ij}\mathbb{1} & 0 \\ 0 & 2\delta_{ij}\mathbb{1} \end{pmatrix}\tag{25}$$

$$= 2\delta_{ij}\mathbb{1}\tag{26}$$

Damit erfüllen die Paulimatrizen die Antikommutator-Beziehung $\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}$. Somit können wir für B_i die Paulimatrizen nutzen. Zusammenfassend lässt sich schreiben

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}; \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}}\tag{27}$$

Die Dirac Gleichung (1) lässt sich mit den Hamiltonoperator (5) und den gefundenen Matrizen α_i und β nun wie folgt schreiben

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = c \left(\vec{\alpha} \cdot \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \beta mc \right) \psi(x)}\tag{28}$$

Alternativ gibt es die Dirac-Gleichung in kovarianter Form, dazu bringen wir alle Terme auf eine Seite

$$\begin{aligned}
\frac{\beta}{\hbar c} \cdot | \quad & \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - c\vec{\alpha} \cdot \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \beta mc^2 \right) \psi(x) = 0 \\
& \left(\beta \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \beta \vec{\alpha} \frac{1}{i} \vec{\nabla} - \underbrace{\beta^2}_{\mathbf{1}} \frac{mc}{\hbar} \right) \psi(x) = 0 \\
& \left(i \underbrace{\beta}_{\gamma^0} \underbrace{\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}}_{\partial_0} + i \underbrace{\beta \vec{\alpha}}_{\vec{\gamma}} \vec{\nabla} - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi(x) = 0 \\
& \left(i \underbrace{(\gamma^0 \partial_0 + \vec{\gamma} \vec{\nabla})}_{\gamma^\mu \partial_\mu} - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi(x) = 0
\end{aligned} \tag{29}$$

Damit erhalten wir die Dirac-Gleichung in kovarianter Form

$$\boxed{\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi = 0} \tag{30}$$

Wobei die γ^μ die Gamma-Matrizen sind für die gilt

$$\boxed{
\begin{aligned}
\gamma^0 &= \beta \\
\gamma^i &= \beta \alpha_i \\
\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu} \\
\{\gamma^i, \gamma^j\} &= -2\delta_{ij}
\end{aligned}
} \tag{31}$$

Mit

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = \underbrace{\beta \alpha_i \beta}_{-\beta \alpha_i} \alpha_j + \underbrace{\beta \alpha_j \beta}_{-\beta \alpha_j} \alpha_i = -\{\alpha_i, \alpha_j\} = -2\delta_{ij} \tag{32}$$

Kontinuitätsgleichung aus der Dirac-Gleichung

Das Problem der Klein-Gordon Gleichung war, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte negativ werden konnte. Das hat Dirac dazu veranlasst eine Gleichung zu finden, die einen Positiven Wahrscheinlichkeitsstrom liefert. Dies wollen wir näher untersuchen, indem wir die Kontinuitätsgleichung aufstellen. Wir gehen von der Gleichung (28) aus und multiplizieren sie von der linken Seite mit ψ^\dagger

$$\psi^\dagger \cdot | \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi + \beta mc^2 \psi \tag{33}$$

Und analog mit ψ die adjungierte Dirac Gleichung von der rechten Seite

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} = -\frac{\hbar c}{i} (\vec{\nabla} \psi^\dagger) \vec{\alpha} + \beta mc^2 \psi^\dagger \quad | \cdot \psi \tag{34}$$

Differenz der beiden Gleichungen 33 – 34:

$$\begin{aligned}
\underbrace{i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} \psi^\dagger \right) \psi + i\hbar \psi^\dagger \left(\frac{\partial}{\partial t} \psi \right)}_{\text{Produktregel} \quad = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi)} &= \underbrace{\frac{\hbar c}{i} (\psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi + (\vec{\nabla} \psi^\dagger) \vec{\alpha} \psi)}_{\text{Produktregel} \quad = -c \vec{\nabla} (\psi^\dagger \vec{\alpha} \psi)} \\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) &= -c \vec{\nabla} (\psi^\dagger \vec{\alpha} \psi)
\end{aligned} \tag{35}$$

Damit sieht die Kontinuitätsgleichung wie folgt aus

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\psi^\dagger \psi)}_{\rho} + \vec{\nabla} \cdot \underbrace{(c\psi^\dagger \vec{\alpha} \psi)}_{\vec{j}} = 0} \quad (36)$$

Mit der positiven Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\rho = \psi^\dagger \psi = \sum_i |\psi_i|^2 \geq 0 \quad (37)$$

Und dem Wahrscheinlichkeits-Strom in kovarianter Form

$$j^\mu = (c\rho, \vec{j}) \quad (38)$$

$$= (c \underbrace{\psi^\dagger \psi}_{\equiv \rho}, c\psi^\dagger \beta \vec{\alpha} \psi) \quad (39)$$

$$= (c\psi^\dagger \underbrace{\beta \gamma^0}_{\mathbb{1}} \psi, c\psi^\dagger \beta \vec{\gamma} \psi) \quad (40)$$

$$= c\psi^\dagger \beta \gamma^\mu \psi \quad (41)$$

$$= \bar{c}\psi \gamma^\mu \psi \quad (42)$$

wobei $\bar{\psi} = \psi^\dagger \beta = \psi^\dagger \gamma^0$ der Pauli adjungierte Spinor ist.

Referenzen

- Wachter Relativistische Quantenmechanik
- Schwabl Quantenmechanik für Fortgeschrittene
- Rollnik Quantentheorie 2