Doppelmuldenpotential

Allgemeiner Ansatz:

$$\psi_I = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \qquad \text{mit } k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar}E} \tag{1}$$

$$\psi_{II} = Ce^{qx} + De^{-qx} \qquad \text{mit } q = \sqrt{\frac{2m}{\hbar}(V-E)} \tag{2}$$

$$\psi_{III} = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx} \qquad \text{mit (siehe } \psi_I)k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar}E} \tag{3}$$

Die Randbedingung besagt, dass die Wellenfuktion am Rand des unendlichen Potentials verschwindet. Das kann man für eine Konkretisierung von Teilbereich I und III ausnutzen:

$$\begin{aligned}
\psi_I(-b) = 0 &= Ae^{-ikb} + Be^{ikb} && (4)\\
\Leftrightarrow A &= -Be^{2ikb} \qquad \text{A in 1 einsetzen} && (5)\\
\psi_I(x) &= -Be^{2ikb}e^{ikx} + Be^{-ikx} && (6)\\
&= -B(e^{2ikb}e^{ikx} - e^{-ikx}) && (7)\\
&= -Be^{ikb}(e^{ikb}e^{ikx} - e^{-ikb}e^{-ikx}) && (8)\\
&= \underbrace{-Be^{ikb}2i}_{\alpha}\sin(k(x+b)) && (9)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \psi_I(x) = \alpha\sin(k(x+b)) \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{III}(b) = 0 &= Fe^{ikb} + Ge^{-ikb} && (11)\\
\Leftrightarrow G &= -Fe^{2ikb} \qquad \text{G in 3 einsetzen} && (12)\\
\psi_{III}(x) &= Fe^{ikx} - Fe^{2ikb}e^{-ikx} && (13)\\
&= F(e^{ikx} - e^{2ikb}e^{-ikx}) && (14)\\
&= Fe^{ikb}(e^{-ikb}e^{ikx} - e^{ikb}e^{-ikx}) && (15)\\
&= \underbrace{Fe^{ikb}}_{\beta}\sin(k(x-b)) && (16)\\
&= \beta\sin(k(x-b)) && (17)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \psi_{III}(x) = \beta\sin(k(x-b)) \tag{18}$$

Für den mittleren Bereich II gilt es die Anschlussbedingungen zu anderen Bereichen zu untersuchen. Anschluss von I an II

$$\begin{aligned}
\psi_I(-a) &= \psi_{II}(-a) && (19)\\
\alpha\sin(k(b-a)) &= Ce^{-qa} + De^{qa} && (20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\psi_I(-a) &= \frac{d}{dx}\psi_{II}(-a) && (21)\\
k\alpha\cos(k(b-a)) &= qCe^{-qa} - qDe^{qa} && (22)
\end{aligned}$$

und Anschluss von II an III

$$\psi_{III}(a) = \psi_{II}(a) \tag{23}$$
$$\beta \sin(k(b+a)) = Ce^{qa} + De^{-qa} \tag{24}$$

$$\frac{d}{dx}\psi_{III}(a) = \frac{d}{dx}\psi_{II}(-a) \tag{25}$$
$$k\beta \cos(k(b+a)) = qCe^{qa} - qDe^{-qa} \tag{26}$$