

Die Dirac Gleichung

Die Möglichkeit $\rho = \psi^* \psi$ für die Wahrscheinlichkeitsdichte zu schreiben folgt aus der Tatsache, dass die Zeitableitung in der nicht relativistischen Schrödinger-Gleichung nur in 1-Ordnung auftritt. Im Vergleich nimmt ρ in der Klein-Gordon Gleichung auch negative Werte an, dort ist die zeitliche Ableitung von 2-Ordnung.

Es gilt nun eine Differential Gleichung 1-Ordnung in der Zeit der Form

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H \psi \quad (1)$$

die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = (mc)^2 \quad (2)$$

für ein freies Teilchen erfüllt. Die Betrachtungen im Zusammenhang mit der Klein-Gordon-Gleichung haben gezeigt, dass man dieses Problem für eine einfache skalare Wellenfunktion ψ nicht lösen kann. Diracs Idee war eine mehrdimensionale Wellenfunktion einzuführen .

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_n(x) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Des weiteren muss die Gleichung (1) folgende Forderungen erfüllen:

- Die Komponenten von ψ müssen die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen, so dass der Hamilton-Operator die relativistische Beziehung $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ erfüllt.
- Es existiert ein erhaltener Viererstrom, dessen nullte Komponente eine positive Dichte ist.
- Die Gleichung muss Lorentz-kovariant sein. Das bedeutet, dass sie unter Transformation ihre Form behält. Bezugssystem unabhängig. Damit dies erfüllt ist muss gelten: Da die zeitliche Ableitung nur in 1-Ordnung auftritt, muss auch die räumliche Ableitung in 1-Ordnung auftreten.

Der Ansatz für den Hamiltonoperator H sollte so sein dass

$$H^2 = E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (4)$$

das Quadrat der relativistischen Energie im Quadrat gleich ist. Folgender allgemeiner Ansatz erfüllt diese Bedingung

$$H = c(\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z) + \beta m^2 c^4 = c \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta m^2 c^4 \quad (5)$$

Die unbekannten Koeffizienten α_i, β können nicht einfach Zahlen sein, da sonst die Gleichung nicht einmal forminvariant gegenüber räumlichen Drehungen ist (D.h. die Form der Gleichung ändert sich je nachdem wie man das Koordinatensystem wählt). α_i, β müssen hermitesche Matrizen sein damit H hermitesch ist. Daraus folgt α_i, β müssen $N \times N$ Matrizen sein.

Um die unbekannten Matrizen α_i, β zu bestimmen gehen wir von der Klein-Gordon Gleichung aus

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x) = \underbrace{c^2(\vec{p}^2 + m^2 c^2)}_{H^2} \psi(x) \quad (6)$$

$$\stackrel{!}{=} \left(c \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta m^2 c^4 \right)^2 \psi(x) \quad (7)$$

$$= [c \sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j + \beta m c^2] \cdot [c \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta m c^2] \psi(p) \quad (8)$$

$$= c^2 \left[\sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j + \beta m c \right] \cdot \left[\sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta m c \right] \psi(p) \quad (9)$$

$$= c^2 \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j \beta m c + \beta m c \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta^2 m^2 c^2 \right) \psi(p) \quad (10)$$

$$= c^2 \left(\sum_{i,j=1}^3 \alpha_i \alpha_j p_i p_j + \sum_{i=1}^3 (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i m c + \beta^2 m^2 c^2 \right) \psi(p) \quad (11)$$

Der Koeffizientenvergleich zwischen $c^2(\vec{p}^2 + m^2 c^2)$ und $c^2 \left(\sum_{i,j=1}^3 \alpha_i \alpha_j p_i p_j + \sum_{i=1}^3 (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i m c + \beta^2 m^2 c^2 \right)$ liefert

- $\boxed{\beta^2 = 1}$

- Antikommutator:

$$\boxed{\{\alpha_i, \beta\} = 0} \quad (12)$$

Damit der Mischterm $(\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i m c$ verschwindet

- $i \neq j$: z.B. $\{\alpha_i, \alpha_j\} = 0$ damit die unterschiedlichen Terme $p_i p_j = \delta_{ij}$ verschwinden
- $i = j$: $\alpha_x^2 p_x^2 + \alpha_y^2 p_y^2 + \alpha_z^2 p_z^2 = \vec{p}^2 \Rightarrow \alpha_i^2 = 1$

$$\Rightarrow \boxed{\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}} \quad (13)$$

- \hat{p}_i, \hat{H} hermitesch $\Rightarrow \vec{\alpha}, \beta$ hermitesch
- $\alpha_i^2 = 1, \beta^2 = 1 \Rightarrow$ Eigenwerte von α_i, β sind ± 1
- $\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \quad | \cdot \beta$

$$\Rightarrow \alpha_i = -\beta \alpha_i \beta \Rightarrow \text{Tr}[\alpha_i] = -\text{Tr}[\beta \alpha_i \beta] = -\text{Tr}[\alpha_i \beta^2] = -\text{Tr}[\alpha_i]$$

Die Eigenwerte von α_i und β wie oben schon erwähnt ± 1 . D.h. wir haben für $+1$ genau so viele Eigenwerte wie für -1 . Es kommen also nur Matrizen in den Dimensionen $N = 2, 4, 6, \dots$ in Frage. Für den Fall $N = 2$ können die Paulimatrizen σ_i mit den Eigenwerten ± 1 benutzt werden. Sie erlauben jedoch nur 6 Antikommutator Beziehungen zu beschreiben. Benötigt werden aber 9, nämlich $6 \times (13)$ und $3 \times (12)$. Welche durch 4 dimensionale Matrizen ($4 \times 4 = 16$) ausreichend beschrieben werden.

β diagonal mit den Eigenwerten ± 1 also wähle

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Um die α_i zu bestimmen, nutzen wir, dass α_i hermitesch ist und der Antikommutator (12) zwischen α_i und β gleich Null ist. Allgemeiner Ansatz für α

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (15)$$

Mit der Beziehung dass die Spur von α_i gleich Null sein muss

$$\begin{aligned}\{\alpha_i, \beta\} &= \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \\ \Leftrightarrow \alpha_i \beta &= -\beta \alpha_i \quad | \cdot \beta \\ \underbrace{\alpha_i \beta^2}_{=1} &= -\beta \alpha_i \beta\end{aligned}\tag{16}$$

Die Spur von (16) ergibt

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\alpha_i) &= -\text{Tr}(\beta \alpha_i \beta) = -\text{Tr}(\alpha_i \beta^2) = -\text{Tr}(\alpha_i) \\ \Leftrightarrow \text{Tr} \alpha_i &= -\text{Tr} \alpha_i \\ \Rightarrow \text{Tr} \alpha_i &= 0\end{aligned}\tag{17}$$

Für hermitesche 2D Matrix gilt $C = B^\dagger$ und aus Spurenfreiheit folgt $A = D = 0$.

$$\Rightarrow \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\dagger & 0 \end{pmatrix}\tag{18}$$

Setze für $B = \tau_i$. Aus (13)

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \Leftrightarrow \tau_i \tau_j^\dagger + \tau_j \tau_i^\dagger = 2\delta_{ij}\tag{19}$$

Lösung $\tau_i = \sigma_i =$ Pauli Matrizen

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}}\tag{20}$$

Die Dirac Gleichung lässt sich nun schreiben

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = c(\vec{\alpha} \cdot \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \beta mc) \psi(x) \quad | \cdot \frac{\beta}{\hbar c}\tag{21}$$

Alternativ gibt es sie in kovarianter Form

$$\begin{aligned}\Rightarrow i\beta \underbrace{\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t}}_{\frac{\partial}{\partial x^0}} \psi + i \underbrace{\beta \vec{\alpha}_i}_{\gamma^i} \cdot \underbrace{\vec{\nabla}_i}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \psi - \frac{mc}{\hbar} \psi &= 0 \\ \Rightarrow (i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{mc}{\hbar}) \psi &= 0 \\ \boxed{\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right) \psi} &= 0\end{aligned}\tag{22}$$

Wobei die γ^μ die Gamma-Matrizen sind für die gilt $\gamma^0 = \beta$; $\gamma^i = \beta \alpha_i$

Referenzen

- Wachter Relativistische Quantenmechanik
- Schwabl Quantenmechanik für Fortgeschrittene
- Rollnik Quantentheorie 2