Loretz-Transformation von Vierervektoren

Wir Betrachten einen linearen vierdimensionalen Vektoren, den sogenannten **Minkowski-Raum**. Er besteht aus 4 komponentigen Koordinatenvektoren bzw. Vierervektoren

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}, \qquad x^0 = ct \tag{1}$$

bzw. in kovarianter Schreibweise

$$x_\mu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (ct, -\vec{x}) \tag{2}$$

Aus dem Viererortsvektor lässt sich mit Hilfe des Eigenzeitdifferentials

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \tag{3}$$

herleiten. Die Vierergeschwindigkeit u^μ als Ableitung vom Ort nach der Eigenzeit

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dx^\mu}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} \tag{4}$$

der Viererimpuls p^μ aus dem Produkt aus der Ruhemasse m_0 und der Vierergeschwindigkeit

$$p^\mu = m_0 u^\mu = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc \\ \vec{p} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{5}$$

Sowie der Viererkraft F^μ als Ableitung des Viererimpuls nach der Eigenzeit

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dp^\mu}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\frac{dp^\mu}{dt} = \begin{pmatrix} c\frac{dm}{dt} \\ \vec{F} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Um zwischen den ko- und kontra-varianten Vektoren zu wechseln, benötigt man den metrischen Tensor

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Damit gilt

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \qquad x^\nu = g^{\nu\mu} x_\mu \tag{8}$$

weitere wichtige Relation

$$x^\nu = g^{\nu\mu} \underbrace{x_\mu}_{(8)} = g^{\nu\mu} g_{\mu\alpha} x^\alpha = g^\nu{}_\alpha x^\alpha \tag{9}$$

Aus der Gleichung (9) folgt

$$g^\nu{}_\alpha = \left\{\begin{matrix} 1, & \nu = \alpha \\ 0, & \nu \neq \alpha \end{matrix}\right\} = \delta^\nu_\alpha \tag{10}$$

$x' = \Lambda x$ mit $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$

Bsp: Boost in z-Richtung: $z' = \gamma(z - vt)$, $t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}z)$, $x' = x$, $y' = y$ mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$
Lorenztranformation erhält relative Länge:

$$x' \cdot x' = g_{\mu\nu}{x'}^{\mu}{x'}^{\nu} = \underbrace{\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}g_{\mu\nu}}_{g_{\rho\sigma}}x^{\rho}x^{\sigma} = x \cdot x = x^{\rho}x^{\sigma}g_{\sigma\rho}$$

Def. Eigenschaft einer Lorenztransformation

$$\Lambda_{\mu}^{\rho}\Lambda^{\mu}{}_{\sigma} = g^{\rho}{}_{\sigma} = \delta^{\rho}{}_{\sigma}$$

oder $(\Lambda^{-1})^{\rho}{}_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\rho}$
$\Rightarrow det\Lambda = \pm 1$ (Verallgemeinerung von orthogonalen Transformation)

Referenzen

- Claude Cohen-Tannoudji Quantenmechanik Band 2
- Zettili Quanten Mehanics
- Rollnik Quantentheorie 2