Zustandsdichte

Die Zustandsdichte ist definiert

$$\boxed{D(\epsilon) = \sum_{\vec{k}} \delta(\epsilon - \epsilon(\vec{k}))} \tag{1}$$

Sie gibt die Anzahl der Systemzustäde pro Energieeinheit an. Als praktisch erweist sich eine Zustandsdichte pro Volumen und spin einzuführen

$$\mathcal{N}(\epsilon) = \frac{1}{2s+1}\frac{1}{V}\sum_{\vec{k}} \delta(\epsilon - \epsilon(\vec{k})) \tag{2}$$

Im folgenden wollen wir die Zustandsdichte für Fermionen in 1, 2 und 3 Dimensionen berechnen.

1D Zustandsdichte

Für Spin $\frac{1}{2}$-Fermionen gilt

$$\mathcal{N}(\epsilon) = \frac{1}{2V}\sum_{\vec{k}} \delta(\epsilon - \epsilon(\vec{k})) \tag{3}$$

Wir nehmen an dass die Energiezustände dicht bei einander liegen, deswegen können wir die Summe als ein Integral ausdrücken. Im thermodynamischen Limes gilt

$$\boxed{\frac{1}{L^d}\sum_{\vec{k}} \xrightarrow{L\to\infty} \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}} \tag{4}$$

Für 1-Dimension können wir die Formel (3) schreiben

$$\mathcal{N}(\epsilon) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{(2\pi)} \delta(\epsilon - \epsilon(\vec{k})) \tag{5}$$

Wir möchten das Integral nach ϵ ausdrücken. Die Dispersion eines freien Teilchens lautet

$$\epsilon(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} \tag{6}$$

Nach $\vec{k}$ umgestellt

$$k = \sqrt{\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}} \tag{7}$$

Differenziert nach $d\epsilon$

$$\frac{dk}{d\epsilon} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2\epsilon}} \qquad \Leftrightarrow \qquad dk = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2\epsilon}}d\epsilon \tag{8}$$

Eingesetzt in Gleichung (5) unter Beachtung dass das die Energie $d\epsilon$ nicht negativ werden kann, folgt die Integration $2 \cdot \int_0^\infty$

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(\epsilon) &= \int_0^\infty d\epsilon \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2\epsilon}} \frac{1}{(2\pi)} \delta(\epsilon - \epsilon(\vec{k})) && (9)\\
&= \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \delta(\epsilon - \epsilon(\vec{k})) && (10)\\
&= \frac{\sqrt{2m}}{4\pi\hbar} \epsilon^{-\frac{1}{2}}(\vec{k}) && (11)\\
&\sim \epsilon^{-\frac{1}{2}} && (12)
\end{aligned}$$

2D Zustandssumme TODO

Referenzen

- Claude Cohen-Tannoudji Quantenmechanik Band 2
- Zettili Quanten Mehanics
- Rollnik Quantentheorie 2