Schrödinger- und Kontinuitätsgleichung

Mit Hilfe der Schrödingergleichung wollen wir die Kontinuitätsgleichng herleiten, die die Form dann:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \vec{j} = 0 \tag{1}$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\rho = \psi^* \psi$$

wird nach der Zeit abgeleitet:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \psi + \psi^* \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \tag{2}$$

mit Schrödinger Gleichung und deren Komplexkonjugierten:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} H \psi \qquad \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} \psi^* H$$

in die Gleichung (2) einsetzen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \left(\frac{i}{\hbar} \psi^* H \right) \psi + \psi^* \left(-\frac{i}{\hbar} H \psi \right) && (3) \\ &= \psi \left(\frac{i}{\hbar} H \psi^* \right) + \psi^* \left(-\frac{i}{\hbar} H \psi \right) && (4) \\ & && (5) \end{aligned}$$

Nun wird der Hamilton-Operator $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \psi \left(\frac{i}{\hbar} (-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V) \psi^* \right) + \psi^* \left(-\frac{i}{\hbar} (-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V) \psi \right) && (6) \\ &= -\frac{i\hbar}{2m} \psi \nabla^2 \psi^* + \cancel{\frac{i}{\hbar} \psi V \psi^*} + \frac{i\hbar}{2m} \psi^* \nabla^2 \psi - \cancel{\frac{i}{\hbar} \psi^* V \psi} && (7) \\ &= -\frac{i\hbar}{2m} \psi \nabla^2 \psi^* + \frac{i\hbar}{2m} \psi^* \nabla^2 \psi && (8) \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \left(-\psi \nabla^2 \psi^* + \psi^* \nabla^2 \psi \right) && (9) \end{aligned}$$

Nach der Produktregel können wir die Gleichung (9) wie folgt schreiben:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \nabla (-\psi \nabla \psi^* + \psi^* \nabla \psi) \tag{10}$$

Die man in Form der Kontinuitätsgleichung schreiben kann:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \underbrace{\frac{i\hbar}{2m} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi)}_{\vec{j}} = 0}$$

Die Änderung der Wahrscheinlichkeit dafür, das Teilchen in V anzutreffen, entspricht also genau der Ortsänderung des Wahrschenilichkeitsstroms. Die Kontinuitätsgleichung beschreibt die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit eines Teilchens welches innerhalb eines Volumens zu finden ist.