

Zustandsdichte

Die Zustandsdichte ist definiert

$$D(\epsilon) = \sum_{\vec{k}} \delta(\epsilon - \epsilon(\vec{k})) \quad (1)$$

Sie gibt die Anzahl der Systemzustände pro Energieeinheit an. Als praktisch erweist sich eine Zustandsdichte pro Volumen

$$\mathcal{N}(\epsilon) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \delta(\epsilon - \epsilon(\vec{k})) \quad (2)$$

Im folgenden wollen wir die Zustandsdichte für spinlose Teilchen in 1, 2 und 3 Dimensionen berechnen. Die Polar- bzw. Kugelkoordinaten für dk lauten in verschiedenen Dimensionen

$$d = 1 : \quad dk = dk \quad (3)$$

$$d = 2 : \quad d^2k = k dk d\phi \quad (4)$$

$$d = 3 : \quad d^3k = k^2 dk \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (5)$$

1D Zustandsdichte

Für 1 Dimension gilt für die Zustandsdichte

$$\mathcal{N}(\epsilon) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \delta(\epsilon - \epsilon(\vec{k})) \quad (6)$$

Wir nehmen an dass die Energiezustände dicht bei einander liegen, deswegen können wir die Summe als ein Integral ausdrücken. Im thermodynamischen Limes gilt

$$\frac{1}{L^d} \sum_{\vec{k}} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \quad (7)$$

Für 1-Dimension können wir die Formel (6) schreiben (mit Hilfe (5))

$$\mathcal{N}(\epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{(2\pi)} \delta(\epsilon - \epsilon(\vec{k})) \quad (8)$$

Wir möchten das Integral nach ϵ ausdrücken. Die Dispersion eines freien Teilchens lautet

$$\epsilon(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} \quad (9)$$

Nach \vec{k} umgestellt

$$k = \sqrt{\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}} \quad (10)$$

Differenziert nach $d\epsilon$

$$\frac{dk}{d\epsilon} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2 \epsilon}} \quad \Leftrightarrow \quad dk = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2 \epsilon}} d\epsilon \quad (11)$$

Eingesetzt in Gleichung (8) unter Beachtung dass das die Energie $d\epsilon$ nicht negativ werden kann, folgt die Integration $2 \cdot \int_0^\infty$

$$\mathcal{N}(\epsilon) = \int_0^\infty d\epsilon \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2 \epsilon}} \frac{1}{(2\pi)} \delta(\epsilon - \epsilon(\vec{k})) \quad (12)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \int_{-\infty}^\infty d\epsilon \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \delta(\epsilon - \epsilon(\vec{k})) \quad (13)$$

$$= \frac{\sqrt{2m}}{2\pi\hbar} \epsilon^{-\frac{1}{2}}(\vec{k}) \quad (14)$$

$$\sim \epsilon^{-\frac{1}{2}} \quad (15)$$

2D Zustandsdichte

Im 2 Dimensionalen Fall lauten die Gleichung (2) folgendermaßen

$$\mathcal{N}(\epsilon) = \frac{1}{L^2} \sum_{\vec{k}} \delta(\epsilon - \epsilon(\vec{k})) \quad (16)$$

wir ersetzen die Summe durch das Integral laut (7) lautet die Gleichung nun

$$\mathcal{N}(\epsilon) = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \delta(\epsilon - \epsilon(\vec{k})) \quad (17)$$

Mit der Relation (4) für dk in 2D

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\epsilon) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dk \, k \delta(\epsilon - \epsilon(\vec{k})) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk \, k \delta(\epsilon - \epsilon(\vec{k})) \quad \text{mit } dk = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2 \epsilon}} d\epsilon \text{ und } k = \sqrt{\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}} \\ &= \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty d\epsilon \, \delta(\epsilon - \epsilon(\vec{k})) \\ &= \frac{m}{2\pi\hbar^2} = \text{const} \end{aligned} \quad (18)$$

3D Zustandsdichte

Im 3 Dimensionalen Fall lauten die Gleichung (2) folgendermaßen

$$\mathcal{N}(\epsilon) = \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}} \delta(\epsilon - \epsilon(\vec{k})) \quad (19)$$

wir ersetzen die Summe durch das Integral laut (7) lautet die Gleichung nun

$$\mathcal{N}(\epsilon) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \delta(\epsilon - \epsilon(\vec{k})) \quad (20)$$

Mit der Relation (5) für dk in 3D

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\epsilon) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta}_{4\pi} \int_0^\infty dk \, k^2 \delta(\epsilon - \epsilon(\vec{k})) \\ &= \frac{2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \, k^2 \delta(\epsilon - \epsilon(\vec{k})) \quad \text{mit } dk = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2 \epsilon}} d\epsilon \text{ und } k^2 = \frac{2m\epsilon}{\hbar^2} \\ &= \frac{2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2 \epsilon}} d\epsilon \, \frac{2m\epsilon}{\hbar^2} \delta(\epsilon - \epsilon(\vec{k})) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty d\epsilon \, \sqrt{\epsilon} \, \delta(\epsilon - \epsilon(\vec{k})) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\epsilon(\vec{k})} \\ &\sim \sqrt{\epsilon} \end{aligned} \quad (21)$$

Die Zustandsdichte in 1,2 und 3 Dimensionen zusammengefasst

$$\begin{aligned}
 d = 1 : \quad \mathcal{N}(\epsilon) &= \frac{\sqrt{2m}}{2\pi\hbar} \epsilon^{-\frac{1}{2}}(\vec{k}) \sim \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \\
 d = 2 : \quad \mathcal{N}(\epsilon) &= \frac{m}{2\pi\hbar^2} = \text{const} \\
 d = 3 : \quad \mathcal{N}(\epsilon) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\epsilon(\vec{k})} \sim \sqrt{\epsilon}
 \end{aligned} \tag{22}$$

Betrachtet man noch den Spin des Teilchens, so lautet die Gleichung (2)

$$\mathcal{N}(\epsilon) = (2s + 1) \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \delta(\epsilon - \epsilon(\vec{k})) \tag{23}$$

Damit ändert sich die Zustandsdichte jeweils um den Faktor $2s + 1$. D.h. für Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ folgt

$$\begin{aligned}
 d = 1 : \quad \mathcal{N}(\epsilon) &= 2 \frac{\sqrt{2m}}{2\pi\hbar} \epsilon^{-\frac{1}{2}}(\vec{k}) \sim \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \\
 d = 2 : \quad \mathcal{N}(\epsilon) &= \frac{m}{\pi\hbar^2} = \text{const} \\
 d = 3 : \quad \mathcal{N}(\epsilon) &= \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\epsilon(\vec{k})} \sim \sqrt{\epsilon}
 \end{aligned} \tag{24}$$

Referenzen

- http://www.tfp.uni-karlsruhe.de/Lehre/SS2010/Uebungen_TheorieF.shtml