Landau Niveaus

Wir betrachten ein Teilchen im Magnetfeld. Das konstante Magnetfeld zeigt in z-Richtung $\vec{B} = (0, 0, B_0)$. Das Vektorpotential ist nach Landau-Eichung ($\nabla \cdot \vec{A} = 0$) somit $\vec{A} = (-yB_0, 0, 0)$. Der Hamiltonoperator lautet:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2$$

In Quantenmechanischer Schreibweise:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2$$

Einsetzen des Hamiltonoperators in die Schrödinger-Gleichung:

$$H\psi = E\psi$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\psi = E\psi$$

$$\frac{1}{2m}\left(-\hbar^2\nabla^2 - \frac{\hbar q}{ic}\nabla\vec{A} - \frac{\hbar q}{ic}\vec{A}\nabla + \frac{q^2}{c^2}\vec{A}^2\right)\psi = E\psi$$

$$\frac{1}{2m}\left(-\hbar^2\nabla^2\psi - \frac{\hbar q}{ic}\underbrace{\nabla\vec{A}\psi}_{(\nabla\vec{A})\psi + \vec{A}\cdot(\nabla\psi)} - \frac{\hbar q}{ic}\vec{A}\nabla\psi + \frac{q^2}{c^2}\vec{A}^2\psi\right) = E\psi$$

Nach der Landau Eichung ist der Term $(\nabla\vec{A})\psi = 0$

$$\frac{1}{2m}\left(-\hbar^2\nabla^2\psi - \frac{\hbar q}{ic}\vec{A}\cdot(\nabla\psi) - \frac{\hbar q}{ic}\vec{A}\nabla\psi + \frac{q^2}{c^2}\vec{A}^2\psi\right) = E\psi$$

$$\frac{1}{2m}\left(-\hbar^2\nabla^2\psi - \frac{2\hbar q}{ic}\vec{A}\cdot(\nabla\psi) + \frac{q^2}{c^2}\vec{A}^2\psi\right) = E\psi$$

Einsetzen des Vektorfeldes ergibt nur noch eine Ableitung in die x-Richtung:

$$\frac{1}{2m}\left(-\hbar^2\nabla^2\psi + \frac{2\hbar q}{ic}yB_0\frac{\partial}{\partial x}\psi + \frac{q^2}{c^2}y^2B_0^2\psi\right) = E\psi$$

Mit der Annahme vom $\psi(x, y, z) = e^{\frac{i}{\hbar}p_0x} \cdot \phi(y)$ können wir erstmal $\nabla^2\psi$ ausrechnen NR:

$$\nabla\psi = \begin{pmatrix} \frac{ip_0}{\hbar}e^{ip_0x/hbar} \cdot \phi(y) \\ e^{ip_0x/hbar} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\phi(y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2\psi = -\frac{p_0^2}{\hbar^2}e^{ip_0x/\hbar}\phi(y) + e^{ip_0x/\hbar}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(y)$$

Ebenso die Ableitung nach x NR:

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi = \frac{i}{\hbar}p_0e^{\frac{i}{\hbar}p_0x} \cdot \phi(y)$$

Die NR in wieder in die SGL einsetzen:

$$\frac{1}{2m}\left(\hbar^2\frac{p_0^2}{\hbar^2}e^{ip_0x/\hbar}\phi(y)+e^{ip_0x/\hbar}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(y)+\frac{2\hbar q}{ic}yB_0\frac{i}{\hbar}p_0e^{\frac{i}{\hbar}p_0x}\cdot\phi(y)+\frac{q^2}{c^2}y^2B_0^2\psi\right)=E\psi \qquad |:e^{\frac{i}{\hbar}p_0x}$$

$$\frac{1}{2m}\left(p_0^2\phi(y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(y)+\frac{2q}{c}yB_0p_0\phi(y)+\frac{q^2}{c^2}y^2B_0^2\phi(y)\right)=E\phi(y)$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(y)+(p_0^2+\frac{2q}{c}yB_0p_0+\frac{q^2}{c^2}y^2B_0^2)\phi(y)\right)=E\phi(y)$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(y)+(\frac{q}{c}B_0\cdot y+p_0)^2\phi(y)\right)=E\phi(y)$$

$$\left(\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(y)+\frac{q^2B_0^2}{2mc^2}(y+\frac{p_0c}{qB_0})^2\phi(y)\right)=E\phi(y)$$

Mit der Zyklotronfrequenz $\omega_c=\frac{qB_0}{cm}$ und $y_0=\frac{p_0}{m\omega_c}$

$$\left(\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{m\omega_c^2}{2}(y+y_0)^2\right)\phi(y)=E\phi(y)$$

Vergleiche mit dem Harmonischen Oszillator in y-Richtung: $H=\frac{p_y^2}{2m}+\frac{m\omega^2}{2}y^2$ Ergeben sich die Eigenwerte dazu:

$$E_n=\hbar\omega_c(n+\frac{1}{2})$$