Lorentz-Transformation der Dirac-Gleichung

Wir wollen nun die Lorantz-Transformation der Dirac-Gleichung betrachten. Dabei errinern wir uns dass die 4-Dimensionale Vektoren sich wie folgt transformieren

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{1}$$

Und die vierer-Ableitung transfomiert sich wie ein kovarianter Vektor. Beweis

$$\partial'_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\nu} \tag{2}$$

Wir multiplizieren Gleichung (1) mit Λ^{-1}

$$x^{\nu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} x'^{\mu} \tag{3}$$

Diese Gleichung (3) in Gleichung (2) eingesetzt

$$\begin{aligned}
\partial'_{\mu} &= \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\nu} \\
&= \frac{\partial(\Lambda_{\mu}{}^{\nu} x'^{\mu})}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\nu} \\
&= \Lambda_{\mu}{}^{\nu} \frac{\partial(x'^{\mu})}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\nu} \\
&= \Lambda_{\mu}{}^{\nu} \partial_{\nu}
\end{aligned} \tag{4}$$

Wie man in der Gleichung (4) sieht transformiert sich die vierer-Ableitung kovariant. Als nebenprodukt dieser Rechung ergibt sich folgende nützliche Relation

$$\Lambda_{\mu}{}^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \tag{5}$$

Betrachten wir die zwei Intertialsysteme IS und IS' so gilt für die einzelten komponenten

IS	IS'
x^{μ}	$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$
∂_{μ}	$\partial'_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} \partial_{\nu}$
$\psi(x)$	???
$(i\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - \frac{mc}{\hbar})\psi(x) = 0$	$(i\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} - \frac{mc}{\hbar})\psi'(x') = 0$

Table 1: Lorentz-Transformation der einzelnen Komponenten der Dirac-Gleichung

Wie man ersehen kann, fehlt die Transformation für die vierkomponentiger Dirac-Spinor Funktion $\psi(x)$ (die vier Komponenten nicht mit den 4 Dimensionen der Raumzeit zu verwechseln!) Dies wollen wir nun näher ergründen indem wir versuchen in der Tabelle 1 aus der linken Dirac-Gleichung auf die rechte zu kommen.
Das wollen wir zeigen dadurch dass es zu jeder Lorentz-Transformation eine lineare Abbildung $S(\Lambda)$ des Spinoren gibt, so das gilt

$$\psi'(x) = S(\Lambda)\psi(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x') \tag{6}$$

Die Menge $\{S(\Lambda)\}$ bilden die Darstellung der Lorentz-Gruppe mit der allgemeinen Gruppeneigenschaften

$$\boxed{S(\Lambda_1\Lambda_2) = S(\Lambda_1)S(\Lambda_2) \Rightarrow S(\mathbb{1}) = \mathbb{1}, \quad S(\Lambda^{-1}) = (S(\Lambda))^{-1}} \tag{7}$$

Ersetze ψ mit ψ' aus (6) und multipliziere die Dirac-Gleichung mit $S(\Lambda)$ von links so ergibt sich

$$S(\Lambda)\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{mc}{\hbar}\right) S(\Lambda^{-1})\psi'(x') = 0$$
$$\left(iS(\Lambda)\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} S(\Lambda^{-1}) - \frac{mc}{\hbar}\underbrace{S(\Lambda)S(\Lambda^{-1})}_{\mathbb{1}}\right)\psi'(x') = 0$$
$$\left(iS(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1}) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^\mu}}_{\Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}} - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi'(x') = 0$$
$$\left(i\underbrace{S(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1})\Lambda^\nu{}_\mu}_{\gamma^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi'(x') = 0 \tag{8}$$
$$\tag{9}$$

$S(\Lambda^{-1})$ vertauscht offensichtlich mit $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ (wieso?). Vergleicht man nun aus Tabelle 1 die Gestrichelte Dirac-Funktion, so stellt man fest, dass die Größe $S(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1})\Lambda^\nu{}_\mu$ die Matritze γ^μ ergeben muss, also

$$\gamma^\mu = S(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1})\Lambda^\nu{}_\mu \tag{10}$$

Multipliziere die Gleichung (10) mit $S(\Lambda^{-1})$ von links und mit $S(\Lambda)$ von rechts, so ergibt sich

$$\begin{aligned} S(\Lambda^{-1})\cdot| \qquad \gamma^\mu &= S(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1})\Lambda^\nu{}_\mu \qquad |\cdot S(\Lambda) \\ S(\Lambda^{-1})\gamma^\mu S(\Lambda) &= \underbrace{S(\Lambda^{-1})S(\Lambda)}_{\mathbb{1}}\gamma^\mu S(\Lambda^{-1})\Lambda^\nu{}_\mu S(\Lambda) \\ S(\Lambda^{-1})\gamma^\mu S(\Lambda) &= \gamma^\mu \underbrace{S(\Lambda^{-1})S(\Lambda)}_{\mathbb{1}}\Lambda^\nu{}_\mu \\ \Leftrightarrow \Lambda^\nu{}_\mu\gamma^\mu &= S(\Lambda^{-1})\gamma^\nu S(\Lambda) \end{aligned} \tag{11}$$

die Bedingung für die Transformationsmatrix $S(\Lambda)$. Hier wurde vorausgesetzt das $\Lambda^\nu{}_\mu$ und $S(\Lambda)$ vertauschen.

Konstruktion der S Matrix

Wir wollen die Transformationsmatrix $S(\Lambda)$ bestimmen. Dazu betrachten wir die infinitesimale Lorenztransformationen. Für eine Lorenztransformation setzen wir an

$$\Lambda^\mu{}_\nu = e^{\omega^\mu{}_\nu} \tag{12}$$

Jetzt entwickeln wir die e-Funktion bis zu 1-ter Ordnung

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \mathbb{1} + \omega^\mu{}_\nu + \mathcal{O}\left((\omega^\mu{}_\nu)^2\right) \tag{13}$$

Betrachten wir nun die infinitesimale Transformationen, d.h $\omega \to \delta\omega$ und vernachlässige Terme höherer Ordnung $\delta\omega^2 \ldots$

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \mathbb{1} + \delta\omega^\mu{}_\nu \tag{14}$$

Analog setzen wir für die Spinor-Transformationsmatrix $S(\Lambda)$

$$S(\Lambda) = e^\tau \tag{15}$$

Die gleiche Rechnung wie (12) bis (14) führt auf

$$S(\Lambda) = \mathbb{1} + \delta\tau \tag{16}$$

Die Kehrwertmatrix von $S(\Lambda)$ ist

$$S(\Lambda^{-1}) = S^{-1}(\Lambda) = e^{-\tau} \tag{17}$$

Die infinitisimale Rechnung von (17) liefert

$$S(\Lambda^{-1}) = \mathbb{1} - \delta\tau \tag{18}$$

Setzen wir die Gleichungen (14), (16) und (18) in (11) ein, so ergibt sich eine Beziehung für die infinitesimale Größen

$$\begin{aligned}
(\mathbb{1} + \delta\omega^{\mu}{}_{\nu})\gamma^{\mu} &= (\mathbb{1} - \delta\tau)\gamma^{\nu}(\mathbb{1} + \delta\tau) \\
\gamma^{\mu} + \delta\omega^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\mu} &= (\gamma^{\nu} - \delta\tau\gamma^{\nu})(\mathbb{1} + \delta\tau) \\
\cancel{\gamma^{\mu}} + \delta\omega^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\mu} &= \cancel{\gamma^{\nu}} + \gamma^{\nu}\delta\tau - \delta\tau\gamma^{\nu} - \underbrace{\delta\tau^2\gamma^{\nu}}_{\approx 0} \\
\delta\omega^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\mu} &= [\gamma^{\nu}, \delta\tau]
\end{aligned} \tag{19}$$

Mit der Beziehung

$$\delta\omega^{\mu}{}_{\nu} = -\delta\omega_{\nu}{}^{\mu} \tag{20}$$

Läst sich die Gleichung (19) schreiben

$$\boxed{[\delta\tau, \gamma^{\nu}] = \gamma^{\mu}\delta\omega_{\nu}{}^{\mu}} \tag{21}$$

Desweiteren gilt dass die Norm von ψ bei Lorenz-Transformation invariant seien soll, d.h. $\psi' = S\psi$. Das bedeutet die Länge von ψ' und ψ muss gleich sein. Das heißt für die Transformationsmatrix

$$\det S = \pm 1 \tag{22}$$

Wir betrachten nur die eigentliche Transformationen $\det S = 1$ und lassen die Spiegelungen $\det S = -1$ weg. Mit $\det e^{A} = e^{\mathrm{tr} A}$

$$1 = \det S = e^{\mathrm{tr}\,\tau} = 1 + \mathrm{tr}\tau + \mathcal{O}(\tau^2) \tag{23}$$

Betrachte wieder den infinitesimalen Fall

$$1 = 1 + \mathrm{tr}\,\delta\tau \tag{24}$$

Aus dieser Gleichung folgt dass

$$\mathrm{tr}\,\delta\tau = 0 \tag{25}$$

seien muss. Die Lösung der Gleichung (21) und (25) lautet (TODO)

$$\delta\tau = -\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\delta\omega^{\mu\nu} \tag{26}$$

mit

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}] \tag{27}$$

Für den nicht infinitesimalen Fall lautet die Gleichung (26)

$$\tau = -\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} \tag{28}$$

Setzt man diese in unseren Ansatz (15) ein so lautet die Transformations-Matrix $S(\Lambda)$

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}} \tag{29}$$

Referenzen

- Rollnik Quantentheorie 2