Ebene Wellen Lösung der Dirac-Gleichung

Für ein freies Teilchen sind Ebene Wellen die Lösung der Dirac-Gleichung. Sie haben folgende Form

$$\psi(x) = e^{-\frac{i}{\hbar}p\cdot x} w_r(\vec{p}) \qquad r = 1, 2, 3, 4 \tag{1}$$

Wobei $x_\mu = (ct, -\vec{x})$ der Vierer-Orts-Verktor und $p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p})$ der Vierer-Impuls-Vektor und $w(p)$ die Impulsabhängige Spinor-Komponente ist. Zunäst betrachten wir ein Spezialfall indem wir das Teilchen in seinem Ruhesystem betrachten.
Setzen wir den Ansatz (1) in die Dirac-Gleichung ein

$$\begin{aligned}
\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) &= 0 \qquad \text{mit}(1) \\
i\gamma^\mu \partial_\mu e^{-\frac{i}{\hbar}p\cdot x} w_r(\vec{p}) - \frac{mc}{\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}p\cdot x} w_r(\vec{p}) &= 0 \\
i\gamma^\mu \left(-\frac{ip_\mu}{\hbar}\right) e^{-\frac{i}{\hbar}p\cdot x} w_r(\vec{p}) - \frac{mc}{\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}p\cdot x} w_r(\vec{p}) &= 0 \\
\left(i\gamma^\mu \left(-\frac{ip_\mu}{\hbar}\right) - \frac{mc}{\hbar}\right) e^{-\frac{i}{\hbar}p\cdot x} w_r(\vec{p}) &= 0 \\
\left(\underbrace{\gamma^\mu p_\mu}_{\not{p}} - mc\right) \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}p\cdot x} w_r(\vec{p})}_{\psi(x)} &= 0
\end{aligned} \tag{2}$$

Damit erhält man die Dirac-Gleichung in einer verkürtzen Schreibweise

$$\boxed{(\not{p} - mc)\,\psi(x) = 0} \qquad \text{mit der Notation: } \not{p} = \gamma^\mu p_\mu \tag{3}$$

Wir betrachten zuerst das Teilchen in seinem Ruhesystem. Für ein Teilchen in Ruhe gilt $\vec{p} = 0$. Dann Sieht die Lösung (1) folgendermaßen aus

$$\psi(x) = e^{-\frac{i}{\hbar}p^0\cdot x_0} w_r(0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{E}{c}ct} w_r(0) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} w_r(0) \tag{4}$$

Und die Dirac-Gleichung vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned}
\left(\gamma^0 p_0 - mc\right) \cancel{e^{-\frac{i}{\hbar}Et}} w_r(0) &= 0 \\
\left(\gamma^0 p_0 - mc\right) w_r(0) &= 0
\end{aligned} \tag{5}$$

Die Matrix γ^0 ist

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Und $p_0 = \frac{E}{c}$ eingesetzt in Gleichung (5)

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{E}{c} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} mc\right) w_r(0) = 0 \\
&\begin{pmatrix} \frac{E}{c} - mc & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{c} - mc & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E}{c} - mc & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{E}{c} - mc \end{pmatrix} w_r(0) = 0
\end{aligned} \tag{7}$$

Die Gleichung hat 4 Lösungen zu 2 Eigenwerten mit $E = \pm mc^2$. Die Lösungen für den Eigenwert $E = +mc^2$ lauten

$$w_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für ein } \textit{Teilchen} \text{ mit Spin } \uparrow \qquad w_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für ein } \textit{Teilchen} \text{ mit Spin } \downarrow \tag{8}$$

und für den Eigenwert $E = -mc^2$

$$w_3(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für ein } \underline{\textit{Anti}}\textit{-Teilchen} \text{ mit Spin } \uparrow \qquad w_4(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für ein } \underline{\textit{Anti}}\textit{-Teilchen} \text{ mit Spin } \downarrow \tag{9}$$

Die Lösung für negative Energien spricht für die Existenz von Antiteilchen. Eine Allgemeine Lösung für ein Elektron mit Spin $\uparrow$ in seinem Ruhesystem lautet beispielsweise

$$\psi(x) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} w_1(0) \tag{10}$$

Nun möchten wir die Wellenfunktion in das Intertialsystem mit $\vec{p} \neq 0$ transformieren. Dazu benötigen wir die Lorenz-Dirac-Spinor-Transformation

$$\psi'(x) = S(\Lambda)\psi(x) \tag{11}$$

Es gilt also die $S(\Lambda)$-Matrix zu bestimmen. Die $S(\Lambda)$-Matrix ist allgemein wie folgt definiert

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}} \tag{12}$$

Die ω-Matix für ein Boost in eine beliebige Richtung wie folgt aussieht

$$\omega^{\mu\nu} = \omega \begin{pmatrix} 0 & n_1 & n_2 & n_3 \\ -n_1 & 0 & 0 & 0 \\ -n_2 & 0 & 0 & 0 \\ -n_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \omega = |\vec{v}|? \tag{13}$$

Wobei $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ ein Einheitsvektor in Richtung des Boosts ist mit $n^2 = 1$. Machen wir nun eine Nebenrechnung

$$\begin{aligned}
\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} =& \omega^{0\mu}\sigma_{0\mu} + \omega^{1\mu}\sigma_{1\mu} + \omega^{2\mu}\sigma_{2\mu} + \omega^{3\mu}\sigma_{3\mu} \\
=& \underbrace{\omega^{00}\sigma_{00}}_{=0} + \omega^{01}\sigma_{01} + \omega^{02}\sigma_{02} + \omega^{03}\sigma_{03} \\
&+ \omega^{10}\sigma_{10} + \underbrace{\omega^{11}\sigma_{11} + \omega^{12}\sigma_{12} + \omega^{13}\sigma_{13}}_{=0} \\
&+ \omega^{20}\sigma_{20} + \underbrace{\omega^{21}\sigma_{21} + \omega^{22}\sigma_{22} + \omega^{23}\sigma_{23}}_{=0} \\
&+ \omega^{30}\sigma_{30} + \underbrace{\omega^{31}\sigma_{31} + \omega^{32}\sigma_{32} + \omega^{33}\sigma_{33}}_{=0}
\end{aligned} \tag{14}$$

Nach Anwenden der einsteinischen Summenkonvention sieht man in der Gleichung (14) die Matrixstruktur aus der Gleichung (13). Lässt man die Null-Elemente weg verkürtzt sich die Gleichung auf

$$
\begin{aligned}
\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} &= \omega^{01}\sigma_{01} + \omega^{02}\sigma_{02} + \omega^{03}\sigma_{03} + \omega^{10}\sigma_{10} + \omega^{20}\sigma_{20} + \omega^{30}\sigma_{30} \\
&= \sum_{i=1}^{3} \omega^{0i}\sigma_{0i} + \sum_{j=1}^{3} \omega^{j0}\sigma_{j0} \qquad \text{mit } \omega^{j0} = -\omega^{0j} \\
&= \sum_{i=1}^{3} \omega^{0i}\sigma_{0i} - \sum_{j=1}^{3} \omega^{0j}\sigma_{j0} \qquad \text{mit } \sigma_{j0} = -\sigma_{0j} \\
&= \sum_{i=1}^{3} \omega^{0i}\sigma_{0i} + \sum_{j=1}^{3} \omega^{0j}\sigma_{0j} \\
&= 2\sum_{i=1}^{3} \omega^{0i}\sigma_{0i}
\end{aligned} \tag{15}
$$

Als eine weitere Nebenrechnung wollen wir σ_{0i} bestimmen. Allgemein gilt

$$
\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \tag{16}
$$

In unserem Fall benötigen wir für μ nur die Nullte Komponente und für ν zählen wir nur von 1 bis 3. D.h. wir können schreiben

$$
\sigma_{0i} = \frac{i}{2}[\gamma_0, \gamma_i] \tag{17}
$$

Die Gamma Matrix in kovarianter Form lautet

$$
\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu = (\beta, -\beta\vec{\alpha}) \tag{18}
$$

Dies eingesetzt in (17) ergibt

$$
\begin{aligned}
\sigma_{0i} &= \frac{i}{2}[\beta, -\beta\alpha_i] \\
&= -\frac{i}{2}(\beta\beta\alpha_i - \beta\alpha_i\beta) \qquad \text{mit } \{\beta, \alpha_i\} = 0 \rightarrow \alpha_i\beta = -\beta\alpha_i \\
&= -\frac{i}{2}(\underbrace{\beta\beta}_{\mathbb{1}}\alpha_i + \underbrace{\beta\beta}_{\mathbb{1}}\alpha_i) \qquad \text{mit } \beta^2 = \mathbb{1}_4 \\
&= -i\alpha_i
\end{aligned} \tag{19}
$$

Setzen wir diese Gleichung (19) in die Gleichung (15) ein und ersetzen ω^{0i} mit ωn_i so können wir die Summe $\sum_{i=1}^{3} \omega^{0i}\sigma_{0i}$ als ein Skalarprodukt schreiben

$$
\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} = -i2\omega\,\vec{n}\cdot\vec{\alpha} \tag{20}
$$

Nun können wir endlich die $S(\Lambda)$-Matrix berechnen indem wir die Gleichung (20) in (12) einsetzen

$$
\begin{aligned}
S(\Lambda) &= e^{-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}} \\
&= e^{-\frac{1}{2}\omega\,\vec{n}\cdot\vec{\alpha}}
\end{aligned} \tag{21}
$$

Das Teilchen bewegt sich mit dem Impuls $\vec{p}$ in einem Inertialsystem. Der Boost zeigt dabei in die entgegengesetze Richtung $-\vec{p}$. Desweiteren gilt $\vec{n} = -\hat{v} = -\hat{p}$. Diese Bedinung eigesetzt in die Gleichung (21)

$$
\begin{aligned}
S(\Lambda) &= e^{\frac{1}{2}\omega\,\hat{p}\cdot\vec{\alpha}} \\
&= \cosh\left(\frac{1}{2}\omega\,\hat{p}\cdot\vec{\alpha}\right) + \sinh\left(\frac{1}{2}\omega\,\hat{p}\cdot\vec{\alpha}\right)
\end{aligned} \tag{22}
$$

Mit der Entwicklung für $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ und $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ lautet die Gleichung weiterhin

$$S(\Lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\omega\,\hat{p}\cdot\vec{\alpha}\right)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\omega\,\hat{p}\cdot\vec{\alpha}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{23}$$

Nun wollen wir herausfinden wie sich das Skalarprodukt von $\hat{p}\cdot\vec{\alpha}$ bei verschiedenen Potenzen verhält. Für ungerade Potenzen gilt

$$\hat{p}\cdot\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{p}\cdot\vec{\sigma} \\ \hat{p}\cdot\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = (\hat{p}\cdot\vec{\alpha})^3 = (\hat{p}\cdot\vec{\alpha})^5 = (\hat{p}\cdot\vec{\alpha})^{2n+1} \tag{24}$$

Für gerade Potenzen

$$(\hat{p}\cdot\vec{\alpha})^2 = \hat{p}^2\cdot\vec{\alpha}^2 = \underbrace{\hat{p}^2}_{=1}\cdot\begin{pmatrix} \vec{\sigma}^2 & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}^2 \end{pmatrix} = \mathbb{1} = (\hat{p}\cdot\vec{\alpha})^4 = (\hat{p}\cdot\vec{\alpha})^6 = (\hat{p}\cdot\vec{\alpha})^{2n} \tag{25}$$

Damit können wir die Matritzen aus den Entwicklungen von cosh und sinh ausklammern

$$S(\Lambda) = \mathbb{1}\cosh\left(\frac{1}{2}\omega\right) + \hat{p}\cdot\vec{\alpha}\sinh\left(\frac{1}{2}\omega\right) \tag{26}$$

Referenzen

- TODO