Klein-Gordon-Gleichung

Die Klein-Gordon-Gleichung ist eine relativistische Gleichung und beschreibt Teilchen mit Spin 0 z.B: π-Mesonen und K^0-Mesonen. Sie folgt aus dem Korrespondenzprinzip (klassisch)

$$\vec{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \tag{1}$$

bzw. kovarianter Schreibweise (relativistisch)

$$p_\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu \tag{2}$$

Betrachten wir die Länge eines Impulses im Laborsystem IS

$$p^2 = p_\mu p^\mu = (p_0, -\vec{p})(p_0, \vec{p}) = p_0^2 - \vec{p}^2$$

mit $p_0 = \frac{E}{c}$

$$p_\mu p^\mu = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^2 \tag{3}$$

Die Energie für ein Teilchen in seinem Ruhesystem IS' ist $E = mc^2$ (mit m für Ruhe-Energie) und $\vec{p}' = 0$ setzen wir die Gleichung in (3) ein so erhalten wir

$$p'_\mu p'^\mu = m^2c^2 \tag{4}$$

Setzt man nun die beiden Gleichungen (3) und (5) gleich (Erhaltung der Länge des Impulses in allen Inertialsystemen) IS=IS' und stellt sie nach E um somit folgt

$$\begin{aligned}\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^2 &= m^2c^2 \\ \Leftrightarrow E &= \pm\sqrt{\vec{p}^2c^2 + m^2c^4}\end{aligned} \tag{5}$$

Die negative Energien in Gleichung (5) führt zu der Annahme von Antiteilchen.
Zurück zu Gleichung (4) dem Teilchen in seinem Ruhesystem. Eine Umformung und einsetzen des Korrespondenzprinzips für den Impuls (2) liefert

$$\begin{aligned}p'_\mu p'^\mu - m^2c^2 &= 0 \\ (i\hbar)^2\partial_\mu\partial^\mu - m^2c^2 &= 0 \\ -\hbar^2\left[\partial_\mu\partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] &= 0 \\ \partial_\mu\partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 &= 0\end{aligned} \tag{6}$$

Führen wir den **d'Alembert-Operator** ein $\Box \equiv \partial_\mu\partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle$ und multiplizieren wir die Gleichung (6) mit der Wellenfunktion ψ von rechts, so ergibt das die **Klein-Gordon-Gleichung**

$$\boxed{\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\psi = 0} \tag{7}$$

Die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie, erhält aber zwei fundamentale Probleme. Ohne deren Bewältigung die Gleichung physikalisch unhaltbar ist.

Das **erste Problem** ist, dass die Lösung der Klein-Gordon-Gleichung auch negative Energieen zulässt. Dies wollen wir näher untersuchen.

Die Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung sind ebene Wellen mit der Form

$$\psi(x) = Ne^{-ipx/\hbar} \tag{8}$$

mit $p \cdot x = p^\mu x_\mu = Et - \vec{p}\vec{x}$, eingesetzt in (8)

$$\psi(x) = Ne^{\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{x})} \tag{9}$$

Setzen wir nun die ebene Welle in die Klein-Gordon-Gleichung (7) ein

$$\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] N e^{\frac{i}{\hbar}(Et-\vec{p}\vec{x})} = 0 \tag{10}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle\right) e^{\frac{i}{\hbar}(Et-\vec{p}\vec{x})} + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 e^{\frac{i}{\hbar}(Et-\vec{p}\vec{x})} = 0 \tag{11}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{\frac{i}{\hbar}(Et-\vec{p}\vec{x})} - \nabla^2 e^{\frac{i}{\hbar}(Et-\vec{p}\vec{x})} + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 e^{\frac{i}{\hbar}(Et-\vec{p}\vec{x})} = 0 \tag{12}$$

$$-\frac{E^2}{c^2\hbar^2}\cancel{e^{\frac{i}{\hbar}(Et-\vec{p}\vec{x})}} + \frac{1}{\hbar^2}p^2\cancel{e^{\frac{i}{\hbar}(Et-\vec{p}\vec{x})}} + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \cancel{e^{\frac{i}{\hbar}(Et-\vec{p}\vec{x})}} = 0 \tag{13}$$

$$-\frac{E^2}{c^2} + p^2 + m^2c^2 = 0 \tag{14}$$

$$\Leftrightarrow E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \tag{15}$$

Durch ziehen der Wurzel auf beiden Seiten erhält man

$$E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \tag{16}$$

Die selbe Energie wie Gleichung (5). Lösungen der negativer Energie des Energiespektrums ist nach unten nicht beschränkt. Formal liegt das darin begründet, dass die Klein-Gordon-Gleichung eine DGL 2-Ordnung nach der Zeit ist. Es stellt sich also das Problem der Intepretation der negativen Energie. Was später mit Antiteilchen begründet wird.

Das **zweite Problem** der Klein-Gordon-Gleichung ist dass sie negative Wahrscheinlichkeitsdichten hervorbringt. Dies wollen wir nun näher untersuchen.

Zur Herleitung einer Kontinuitätsgleichung multipliziert man die Klein-Gordon-Gleichung von links mit ψ^*

$$\psi^* \left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \psi = 0 \tag{17}$$

und zieht davon die komplex konjugierte Gleichung

$$\psi \left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \psi^* = 0 \tag{18}$$

ab. Somit folgt

$$\psi^* \left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \psi - \psi \left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \psi^* = 0 \tag{19}$$

$$\psi^*\Box\psi + \cancel{\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 |\psi|^2} - \psi\Box\psi^* - \cancel{\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 |\psi|^2} = 0 \tag{20}$$

$$\psi^*\Box\psi - \psi\Box\psi^* = 0 \tag{21}$$

$$\tag{22}$$

Mit $\Box \equiv \partial_\mu\partial^\mu$ eingesetzt mit

$$\psi^*\partial_\mu\partial^\mu\psi - \psi\partial_\mu\partial^\mu\psi^* = 0$$

$$\partial_\mu(\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\psi^*) = 0 \qquad \text{Produktregel ?} \tag{23}$$

Setzt man in die Gleichung (23) die Entsprechung für die partielle Ableitungen ein

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right), \qquad \partial^\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right) \tag{24}$$

so ergibt das

$$\partial_0(\psi^*\partial^0\psi - \psi\partial^0\psi^*) + \vec{\nabla}(-\psi^*\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\psi^*) = 0$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi - \psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^*) + \vec{\nabla}(-\psi^*\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\psi^*) = 0 \quad | \cdot -1$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi - \psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^*) + \vec{\nabla}(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*) = 0 \tag{25}$$

Multipliziert man die Gleichung (25) mit $\frac{\hbar}{2mi}$ somit folgt eine ähnliche Form für die Kontinuitätsgleichung in nicht relativistischen Fall

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left[\frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi-\psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\right)\right]}_{\rho}+\vec{\nabla}\underbrace{\frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi-\psi\vec{\nabla}\psi^*\right)}_{\vec{j}}=0 \tag{26}$$

Vergleichen wir die Gleichung (26) mit der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho+\vec{\nabla}\vec{j}=0 \tag{27}$$

So erhalten wir für die Wahrscheinlichkeitsdichte ρ

$$\rho=\left[\frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi-\psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\right)\right] \tag{28}$$

Und für die Wahrscheinlichkeitsstromdichte

$$\vec{j}=\frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi-\psi\vec{\nabla}\psi^*\right) \tag{29}$$

Um zu sehen dass die Wahrscheinlichkeitsdichte ρ auch negativ werden kann, betrachte zunächst die Schrödinger Gleichung sowie die komlexkonjugierte davon

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi=-\frac{i}{\hbar}H\psi=-\frac{i}{\hbar}E\psi \tag{30}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi^*=\frac{i}{\hbar}E\psi^* \tag{31}$$

Eingesetzt in (28)

$$\rho=\frac{i\hbar}{2mc^2}\left(-\frac{i}{\hbar}E\psi^*\psi-\frac{i}{\hbar}E\psi\psi^*\right) \tag{32}$$

$$=\frac{i\hbar}{2mc^2}\left(-\frac{i2}{\hbar}E|\psi|^2\right) \tag{33}$$

$$=\frac{E}{mc^2}|\psi|^2 \tag{34}$$

$$\tag{35}$$

Da wir wissen das $E<0$ werden kann folgt daraus dass die Wahrscheinlichkeitsstromdichte ρ ebenfalls kleiner Null wird. Daraus folgt ρ kann **nicht** die Bedeutung einer Wahrscheinlichkeitsdichte haben, sondern eventuell einer Ladungsdichte. Zur Begründung dass ρ eine mögliche Ladungsdichte ist betrachten wir die Zustande mit $E>0$ z.B. π^+ und $E<0$ z.B. π^- (Antiteilchen von π^+. Im Fall $\rho>0$ dominieren die π^+Teilchen. Also ist die Ladungsdichte positiv. Im Fall $\rho<0$ dominieren π^-Teilchen, also wird die Ladungsdichte negativ. Somit ist ρ proportional zu elektrischen Ladungsdichte.
Die klein-Gordon-Gleichung ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in t, deshalb können die Anfangswerte von ψ und $\frac{\partial}{\partial t}\psi$ unabhängig vorgegeben werden, so dass ρ als Funktion von $\vec{x}$ sowohl positiv wie auch negativ sein kann.

Referenzen

- Schwabl QMII
- Rollnik Quantentheorie 2