Ebene Wellen Lösung der Dirac-Gleichung

Für ein freies Teilchen sind Ebene Wellen die Lösung der Dirac-Gleichung. Sie haben folgende Form

$$\psi(x) = e^{-\frac{i}{\hbar}p\cdot x} w_r(\vec{p}) \qquad r = 1,2,3,4 \tag{1}$$

Wobei $x_\mu = (ct, -\vec{x})$ der Vierer-Orts-Verktor und $p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p})$ der Vierer-Impuls-Vektor und $w(p)$ die Impulsabhängige Spinor-Komponente ist. Zunäst betrachten wir ein Spezialfall indem wir das Teilchen in seinem Ruhesystem betrachten.
Setzen wir den Ansatz (1) in die Dirac-Gleichung ein

$$\begin{aligned}
\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) &= 0 \qquad \text{mit(1)} \\
i\gamma^\mu \partial_\mu e^{-\frac{i}{\hbar}p\cdot x} w_r(\vec{p}) - \frac{mc}{\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}p\cdot x} w_r(\vec{p}) &= 0 \\
i\gamma^\mu \left(-\frac{ip_\mu}{\hbar}\right) e^{-\frac{i}{\hbar}p\cdot x} w_r(\vec{p}) - \frac{mc}{\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}p\cdot x} w_r(\vec{p}) &= 0 \\
\left(i\gamma^\mu \left(-\frac{ip_\mu}{\hbar}\right) - \frac{mc}{\hbar}\right) e^{-\frac{i}{\hbar}p\cdot x} w_r(\vec{p}) &= 0 \\
\left(\underbrace{\gamma^\mu p_\mu}_{\not{p}} - mc\right) \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}p\cdot x} w_r(\vec{p})}_{\psi(x)} &= 0
\end{aligned} \tag{2}$$

Damit erhält man die Dirac-Gleichung in einer verkürtzen Schreibweise

$$\boxed{(\not{p} - mc)\,\psi(x) = 0} \qquad \text{mit der Notation: } \not{p} = \gamma^\mu p_\mu \tag{3}$$

Wir betrachten zuerst das Teilchen in seinem Ruhesystem. Für ein Teilchen in Ruhe gilt $\vec{p} = 0$. Dann Sieht die Lösung (1) folgendermaßen aus

$$\psi(x) = e^{-\frac{i}{\hbar}p^0\cdot x_0} w_r(0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{E}{c}ct} w_r(0) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} w_r(0) \tag{4}$$

Und die Dirac-Gleichung vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned}
\left(\gamma^0 p_0 - mc\right) \cancel{e^{-\frac{i}{\hbar}Et}} w_r(0) &= 0 \\
\left(\gamma^0 p_0 - mc\right) w_r(0) &= 0
\end{aligned} \tag{5}$$

Die Matrix γ^0 ist

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Und $p_0 = \frac{E}{c}$ eingesetzt in Gleichung (5)

$$\begin{aligned}
\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{E}{c} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} mc\right) w_r(0) &= 0 \\
\begin{pmatrix} \frac{E}{c} - mc & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{c} - mc & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E}{c} - mc & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{E}{c} - mc \end{pmatrix} w_r(0) &= 0
\end{aligned} \tag{7}$$

Die Gleichung hat 4 Lösungen zu 2 Eigenwerten mit $E = \pm mc^2$. Die Lösungen Lauten für den Eigenwert $E = +mc^2$

$$w_1(0) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{für ein } \textit{Teilchen} \text{ Spin mit } \uparrow \qquad w_2(0) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{für ein } \textit{Teilchen} \text{ Spin mit } \downarrow \tag{8}$$

und für den Eigenwert $E = -mc^2$

$$w_3(0) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{für ein } \underline{\textit{Anti}}\text{-}\textit{Teilchen} \text{ Spin mit } \uparrow \qquad w_4(0) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{für ein } \underline{\textit{Anti}}\text{-}\textit{Teilchen} \text{ Spin mit } \downarrow \tag{9}$$

Die Lösung für negative Energien spricht für die Existenz von Antiteilchen. Damit ist die Allgemeine Lösung für ein Elektron mit Spin $\uparrow$ in seinem Ruhesystem

$$\psi(x) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} w_1(0) \tag{10}$$

Referenzen

- TODO