Planck Strahlungsgesetz

Wir möchten das Planck Strahlungsgesetz aus der Photonen-Zustandsdichte herleiten. Wir betrachen Bosonenteilchen für die gilt

$$\omega = c|\vec{k}| \qquad \epsilon = \hbar\omega = \hbar ck \tag{1}$$

Die Definition der Zustandsdichte für 3 Dimensionen lautet

$$\mathcal{N}(\epsilon) = \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}} \delta(\epsilon - \epsilon(\vec{k})) \tag{2}$$

Machen wir die klassische Ersetzung der Summe durch das Integral so folgt

$$\mathcal{N}(\epsilon) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\delta(\epsilon - \epsilon(\vec{k})) \tag{3}$$

Wir nehmen dazu die Kugelkoordinaten $d^3k = k^2 dk \sin\theta d\theta d\phi$ und da die Zustandsdichte nicht von Winkeln abhängt, liefert die Integration $\int \sin\theta d\theta d\phi = 4\pi$. Dies in Gleichung (3) eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(\epsilon) &= \frac{2}{(2\pi)^2}\int dk k^2 \delta(\epsilon - \epsilon(\vec{k})) \qquad \text{mit } k = \frac{\epsilon}{\hbar c}, \quad dk = \frac{1}{\hbar c}d\epsilon \\
&= \frac{2}{(2\pi)^2}\int \frac{1}{\hbar c}d\epsilon \frac{\epsilon^2}{\hbar^2 c^2}\delta(\epsilon - \epsilon(\vec{k})) \\
&= \frac{2}{(2\pi)^2\hbar^3 c^3}\int d\epsilon \epsilon^2 \delta(\epsilon - \epsilon(\vec{k})) \\
&= \frac{2\epsilon^2}{(2\pi)^2\hbar^3 c^3}
\end{aligned} \tag{4}$$

Wir müssen noch berücksichtigen dass es 2 Polarisationen für das Licht gibt, deswegen müssen wir das Ergebnis mit Faktor 2 multiplizieren und erhalten somit

$$\mathcal{N}(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{\pi^2\hbar^3 c^3} \tag{5}$$

Für die weitere Berechnung ist es geschickt die Zustandsdichte in Abhängigkeit der Kreisfrequenz ω auszudrücken. Mit Hilfe der Gleichung (1) erhalten wir

$$\mathcal{N}(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2\hbar c^3} \tag{6}$$

Das Plancksche-Gesetz beschreibt die Energiedichte pro Frequenzintervall. Die Innere Energie lässt sich bestimmen mit

$$U = V\int d\epsilon\, \mathcal{N}(\epsilon)\epsilon \frac{1}{e^{\beta\epsilon} - 1} \tag{7}$$

Ersetzen wir die Abhängigkeit von ϵ durch die Abhängigkeit von ω so folgt

$$U = \hbar^2 V\int d\omega\, \mathcal{N}(\epsilon)\omega \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \qquad \text{mit } \epsilon = \hbar\omega, \quad d\epsilon = \hbar d\omega \tag{8}$$

Betrachten wir ferner die Innere Energie pro Frequenz-Intervall

$$u(\omega) = \frac{dU}{d\omega} = \hbar^2 V \mathcal{N}(\epsilon)\omega \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \tag{9}$$

Setzen wir noch die Zustandsdichte aus Gleichung (6) ein

$$
\begin{aligned}
u(\omega) &= \hbar^2 V \frac{\omega^2}{\pi^2 \hbar c^3} \omega \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \\
&= V \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}
\end{aligned} \tag{10}
$$

Im wesentlichen stellt die Gleichung (10) das schon aus der klassischen Physik bekannte **plancksche Strahlungsgesetz** dar. In der Literatur wird das plancksche Strahlungsgesetz oft als Energiedichte pro Frequenzintervall und pro Volumen angegeben. Damit ändert sich die Gleichung (10) zu

$$
\boxed{u(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}} \tag{11}
$$

Als weiteres betrachten wir zwei Grenzfälle.

$\hbar\omega \ll k_B T$ Hieraus folgt

$$
\begin{aligned}
u(\omega) &= \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\underbrace{\exp\{\frac{\hbar\omega}{k_B T}\}}_{\approx 1 + \frac{\hbar\omega}{k_B T} + \cdots} - 1} \\
&\approx \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{1 + \frac{\hbar\omega}{k_B T} - 1} \\
&= \frac{k_B T \omega^2}{\pi^2 c^3}
\end{aligned} \tag{12}
$$

Die Gleichung (12) ist als **Rayleigh-Jeans-Gesetz** bekannt. Es zeigt die sogenannte Ultraviolett-Katastrophe (UV-Katastrophe), da es für große Frequenzen ω divergiert also $u(\omega \to \infty) = \infty$. Dies würde bedeuten dass unendlich viel Leistung bei einem Schwarz-Körper abgestrahlt würde. Was gegen die Energieerhaltung spricht.

$\hbar\omega \gg k_B T$ Hierraus folgt

$$
\begin{aligned}
u(\omega) &= \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\underbrace{\exp\{\frac{\hbar\omega}{k_B T}\}}_{\text{groß gegenüber der -1, somit vernachlässige -1}} - 1} \\
&\approx \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}
\end{aligned} \tag{13}
$$

Diese Gleichung (13) ist unter dem Begriff **Wiensches Strahlungsgesetz** bekannt.

Die Funktion $\frac{x^3}{e^x - 1}$ hat bei $x = 2.82$ ihr einziges Maximum. Daraus folgt das Wiensche Verschiebungsgesetz

$$
\hbar\omega_{\text{max}} = 2.82 k_B T \tag{14}
$$

das eine strickte Proportionalität zwischen ω_{max} und T.
Das Wiensche Verschiebungsgesetz gibt an, bei welcher Frequenz ω_{max} ein nach dem planckschen Strahlungsgesetz strahlender schwarzer Körper je nach seiner Temperatur die größte Strahlungsleistung oder die größte Photonenrate abgibt.
Als Beispiel betrachte die Sonne als näherungsweise Schwarzen-Strahler. Die maximale Frequenz der von der Sonne abgestrahlten Lichts beträgt

$$
\omega_{max} = 2\pi f = 2\pi \cdot 3.4 \cdot 10^{14} Hz \tag{15}
$$

In die Beziehung (14) eingesetzt und nach T umgestellt ergibt

$$T = \frac{\hbar\omega_{\max}}{2.82 \cdot k_B} = \frac{2\pi\hbar \cdot 3.4 \cdot 10^{14} Hz}{2.82 \cdot k_B} \approx 5789K \tag{16}$$

Damit erhalten die Oberflächentemperatur der Sonne die ca. bei $T = 5800K$ liegt. Die tatsächliche Temperatur dürfte davon abweichen, weil die Sonne kein idealer schwarzer Körper ist.

Referenzen

- http://t1.physik.tu-dortmund.de/uhrig/teaching/tus_ws0910/tus-ws0910.pdf
- http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/~rachel/MV_StatPhys.pdf
- http://de.wikipedia.org/wiki/Sonne
- http://de.wikipedia.org/wiki/Wiensches_Verschiebungsgesetz
- http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/viewtopic.php?topic=99503