Kohärente Zustände des harmonischen Oszillators

Für den harmonischen Oszillator existiert eine Klasse von Zuständen, die mit gewisser Berechtigung als 'Quasi-klassische' Zustände angesehen werden. Diese kohärenten Zustände sollen hier näher betrachtet werden.
Die Zustände $|\alpha\rangle$ sind Eigenzustände des Auf- und Absteige-Operators. Es gilt:

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \qquad \langle\alpha|\alpha\rangle = 1 \qquad \alpha \in \mathbb{C} \tag{1}$$

Nun wollen wir herausfinden wie sich $|\alpha\rangle$ als Liniarkombination von Energieeigenzuständen darstellen lassen.

$$|\alpha\rangle = \mathbb{1}|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \underbrace{\langle n|\alpha\rangle}_{c_n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle \tag{2}$$

Wenden wir nun den Absteige-Operator auf den Zustand an:

$$a|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a|n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\sqrt{n}|n-1\rangle \tag{3}$$

Ersetze n mit $n+1$

$$a|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{c_{n+1}\sqrt{n+1}}|n\rangle \stackrel{!}{=} \underbrace{\alpha|\alpha\rangle}_{(1)} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \underline{\alpha c_n}|n\rangle}_{(2)} \tag{4}$$

Durch Vergleich von den beiden unterstrichenen Teilchen der Formel (4) erhalten wir folgende Rekusionsformel:

$$c_{n+1}\sqrt{n+1} = \alpha c_n \tag{5}$$

Ersetze n mit $n-1$:

$$c_n\sqrt{n} = \alpha c_{n-1} \tag{6}$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} c_{n-1} \tag{7}$$

$$c_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{1}} c_0 \tag{8}$$

$$c_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} c_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\frac{\alpha}{\sqrt{1}} c_0 \tag{9}$$

$$c_3 = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} c_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\frac{\alpha}{\sqrt{1}} c_0 \tag{10}$$

$$\vdots \tag{11}$$

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0 \tag{12}$$

c_n in Gleichung (2) eingesetzt ergibt:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0|n\rangle \tag{13}$$

Bestimmen des c_0 durch Normierungsbedinung:

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}}_{e^{|\alpha|^2}} |c_0|^2 \underbrace{\langle n|n\rangle}_{=1} \tag{14}$$

$$= e^{|\alpha|^2}|c_0|^2 \stackrel{!}{=} 1 \tag{15}$$

$$\Leftrightarrow c_0 = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \tag{16}$$

Eingesetzt in (13):

$$\boxed{|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle} \tag{17}$$

In Fock-Raum-Schreibweise ergibt sich der kohärente Zustand $|\alpha\rangle$ als unendliche Linearkombination von Zuständen fester Teilchenzahl (Fock-Zustände) $|n\rangle$.