Zeitliche Entwicklung eines kohärenten Zustandes

Wir wollen nun die kohärenten Zustände eines harmonischen Oszillators $|\alpha\rangle$

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{1}$$

zeitlich entwickeln und zeigen, dass diese kohärent bleiben.
Aus dem Separationsansatz der zeitabhängigen Schrödinger Gleichung wissen wir:

$$\begin{aligned}
|\alpha(t)\rangle &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Ht\right)|\alpha\rangle && (2)\\
&= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Ht\right) e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle && (3)\\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Ht\right)|n\rangle && (4)\\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_n t\right)|n\rangle && (5)
\end{aligned}$$

Mit der allgemeinen Lösung für die Energieeigenwerte des harmonischen Oszillators $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
|\alpha(t)\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hbar\omega(n+\frac{1}{2})t\right)|n\rangle && (6)\\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-i\omega\frac{1}{2}t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega nt}|n\rangle && (7)\\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-i\omega\frac{1}{2}t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\alpha e^{-i\omega t}\right)^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle && (8)
\end{aligned}$$

Da $|e^{-i\omega t}| = 1$ können wir statt $|\alpha|^2$ auch $|\alpha e^{-i\omega t}|^2$ schreiben. Damit sieht die Gleichung (8) wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
|\alpha(t)\rangle &= e^{-\frac{|\alpha e^{-i\omega t}|^2}{2}} e^{-i\omega\frac{1}{2}t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\alpha e^{-i\omega t}\right)^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle && (9)\\
&= e^{-\frac{1}{2}i\omega t} \underbrace{\left(e^{-\frac{|\alpha e^{-i\omega t}|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\alpha e^{-i\omega t}\right)^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle\right)}_{\text{vergleiche mit (1)}} && (10)\\
&= e^{-i\frac{1}{2}\omega t}|\alpha e^{-i\omega t}\rangle && (11)
\end{aligned}$$

Um zu zeigen dass der Zustand für alle Zeiten kohärent bleibt, wendet man den Absteigeoperator auf (9) an und erhält den Eigenwert $\alpha e^{-i\omega t}$:

$$\begin{aligned}
a|\alpha(t)\rangle &= \alpha e^{-i\omega t}|\alpha(t)\rangle && (12)\\
& && (13)
\end{aligned}$$

Zeitliche Oszillation

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle\alpha(t)|a^\dagger + a|\alpha(t)\rangle && (14)\\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\langle\alpha(t)|a^\dagger|\alpha(t)\rangle + \langle\alpha(t)a|\alpha(t)\rangle) \qquad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R} && (15)\\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\alpha e^{i\omega t} + \alpha e^{-i\omega t}) && (16)\\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}2\alpha\cos(\omega t) && (17)\\
&= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\alpha\cos(\omega t) && (18)
\end{aligned}$$

Der Ortserwartungswert oszilliert mit der Frequenz ω zwischen $-\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\alpha$ und $\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\alpha$ hin und her.
Analoge Rechnung für den Impulserwartungswert liefert:

$$\langle p \rangle = -\sqrt{2\hbar m\omega} \cdot \alpha \sin(\omega t) \tag{19}$$

Die Erwartungswerte für Ort und Impuls verhalten sich demnach genauso wie eine klassische harmonische Osillation. Man kann ebenso den Zustammenhang zwischen Orts- und Impuls-Operator wie in der klassischen Mechanik herstellen:

$$m\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} m\alpha\omega(-\sin(\omega t)) = -\sqrt{2\hbar m\omega} \cdot \alpha \sin(\omega t) \equiv \langle p \rangle \tag{20}$$

Referenzen

- www.physik.uni-regensburg.de/forschung/schwarz/QOptik/Wurm.pdf
- http://www2009.ph.tum.de/studium/betrieb/ferienkurse/2009s/qm/diml.pdf