

Landau Niveaus

Wir betrachten ein Teilchen im Magnetfeld. Das konstante Magnetfeld zeigt in z-Richtung $\vec{B} = (0, 0, B_0)$. Das Vektorpotential ist nach Landau-Eichung ($\nabla \cdot \vec{A} = 0$) somit $\vec{A} = (-yB_0, 0, 0)$. Der Hamiltonoperator lautet:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2$$

In Quantenmechanischer Schreibweise:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2$$

Einsetzen des Hamiltonoperators in die Schrödinger-Gleichung:

$$H\psi = E\psi$$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \vec{A} \right) \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \vec{A} \right) \psi = E\psi$$

$$\frac{1}{2m} \left(-\hbar^2 \nabla^2 - \frac{\hbar q}{ic} \nabla \vec{A} - \frac{\hbar q}{ic} \vec{A} \nabla + \frac{q^2}{c^2} \vec{A}^2 \right) \psi = E\psi$$

$$\frac{1}{2m} \left(-\hbar^2 \nabla^2 \psi - \frac{\hbar q}{ic} \underbrace{\nabla \vec{A} \psi}_{(\nabla \vec{A})\psi + \vec{A} \cdot (\nabla \psi)} - \frac{\hbar q}{ic} \vec{A} \nabla \psi + \frac{q^2}{c^2} \vec{A}^2 \psi \right) = E\psi$$

Nach der Landau Eichung ist der Term $(\nabla \vec{A})\psi = 0$

$$\frac{1}{2m} \left(-\hbar^2 \nabla^2 \psi - \frac{\hbar q}{ic} \vec{A} \cdot (\nabla \psi) - \frac{\hbar q}{ic} \vec{A} \nabla \psi + \frac{q^2}{c^2} \vec{A}^2 \psi \right) = E\psi$$

$$\frac{1}{2m} \left(-\hbar^2 \nabla^2 \psi - \frac{2\hbar q}{ic} \vec{A} \cdot (\nabla \psi) + \frac{q^2}{c^2} \vec{A}^2 \psi \right) = E\psi$$

Einsetzen des Vektorfeldes ergibt nur noch eine Ableitung in die x-Richtung:

$$\frac{1}{2m} \left(-\hbar^2 \nabla^2 \psi + \frac{2\hbar q}{ic} y B_0 \frac{\partial}{\partial x} \psi + \frac{q^2}{c^2} y^2 B_0^2 \psi \right) = E\psi$$

Mit der Annahme vom $\psi(x, y, z) = e^{\frac{i}{\hbar} p_x x} \cdot \phi(y) \cdot e^{\frac{i}{\hbar} p_z z}$ können wir erstmal $\nabla^2 \psi$ ausrechnen NR:

$$\nabla \psi = \begin{pmatrix} \frac{i p_x}{\hbar} e^{\frac{i p_x x}{\hbar}} \cdot \phi(y) e^{\frac{i}{\hbar} p_z z} \\ e^{\frac{i p_x x}{\hbar}} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \phi(y) e^{\frac{i}{\hbar} p_z z} \\ \frac{i p_z}{\hbar} e^{\frac{i p_x x}{\hbar}} \cdot \phi(y) e^{\frac{i}{\hbar} p_z z} \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 \psi = -\frac{p_x^2}{\hbar^2} e^{\frac{i p_x x}{\hbar}} \phi(y) e^{\frac{i}{\hbar} p_z z} + e^{\frac{i p_x x}{\hbar}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi(y) e^{\frac{i}{\hbar} p_z z} - \frac{p_z^2}{\hbar^2} e^{\frac{i p_x x}{\hbar}} \phi(y) e^{\frac{i}{\hbar} p_z z}$$

Ebenso die Ableitung nach x NR:

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi = \frac{i}{\hbar} p_x e^{\frac{i p_x x}{\hbar}} \cdot \phi(y) e^{\frac{i}{\hbar} p_z z}$$

Die NR in wieder in die SGL einsetzen:

$$\frac{1}{2m} \left(p_x^2 e^{ip_x x/\hbar} \phi(y) e^{\frac{i}{\hbar} p_z z} - \hbar^2 e^{ip_x x/\hbar} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi(y) e^{\frac{i}{\hbar} p_z z} + p_z^2 e^{ip_x x/\hbar} \phi(y) e^{\frac{i}{\hbar} p_z z} + \frac{2\hbar q}{ic} y B_0 \frac{i}{\hbar} p_x e^{\frac{i}{\hbar} p_x x} \cdot \phi(y) e^{\frac{i}{\hbar} p_z z} + \frac{q^2}{c^2} y^2 B_0^2 \psi \right) = E \psi$$

Gleichung durch $e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x} e^{\frac{i}{\hbar} p_0 z}$ teilen:

$$\frac{1}{2m} \left(p_x^2 \phi(y) - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi(y) + p_z^2 \phi(y) + \frac{2q}{c} y B_0 p_0 \phi(y) + \frac{q^2}{c^2} y^2 B_0^2 \phi(y) \right) = E \phi(y)$$

$$\frac{1}{2m} \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi(y) + \underbrace{\left[p_x^2 + \frac{2q}{c} y B_0 p_x + \frac{q^2}{c^2} y^2 B_0^2 \right]}_{\text{Binomische Formel}} \phi(y) + p_z^2 \phi(y) \right) = E \phi(y)$$

$$\frac{1}{2m} \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi(y) + \left(\frac{q}{c} B_0 \cdot y + p_x \right)^2 \phi(y) + p_z^2 \phi(y) \right) = E \phi(y)$$

$$-\hbar^2 \frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi(y) + \frac{q^2 B_0^2}{2mc^2} \left(y + \frac{p_x c}{q B_0} \right)^2 \phi(y) + \frac{p_z^2}{2m} \phi(y) = E \phi(y)$$

Mit der Zyklotronfrequenz $\omega_c = \frac{qB_0}{cm}$ und $y_0 = \frac{p_x}{m\omega_c}$

$$-\hbar^2 \left(\underbrace{\frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{m\omega_c^2}{2} (y + y_0)^2}_{\text{Harmonischer Oszillator}} + \underbrace{\frac{p_z^2}{2m}}_{\text{freies Teilchen}} \right) \phi(y) = E \phi(y)$$

Vergleiche mit dem Harmonischen Oszillator in y-Richtung: $H = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} y^2$ Ergeben sich die Eigenwerte dazu:

$$\boxed{E_n^{\text{Landau}} = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{p_z^2}{2m}} \quad (1)$$

Wir haben eine Wellenfunktion die in x und z Richtung eine Ebene Welle ist und in y Richtung die Lösung eines Harmonischen Oszillators darstellt. Die Auszeichnung der y Richtung liegt an der von uns gewählten Eichung bzw. dem gewählten Vektorpotential $\vec{A} = (-yB_0, 0, 0)$. Wie auch immer man die Eichung wählt, das entscheidende ist, dass das Magnetfeld die Ausbreitung der freier ebener Wellen nur in Feldrichtung erlaubt. In unserem Fall ist es die z Richtung. Wie man aus der Gleichung (1) sieht, sind die Energieeigenwerte unendlichfach entartet. Nur die x-y-Ebene ist quantisiert.