

29. März 2012

Verfasst von Waldemar Heffel und Walter Werner

Streuung

Wir betrachten die einfallende Stromdichte J_{ein} (Anzahl der Teilchen pro Zeiteinheit und Fläche), das an einem Punktteilchen mit einem Zentralpotential, gestreut wird. Ein Detektor misst eine Teilmenge des gestreuten Teilchenstroms J_{gestr} im dem Raumwinkel θ und Abstand r . Die Ströme sind offenbar proportional zu einander:

$$J_{\text{gestr}} \propto J_{\text{ein}} \quad (1)$$

und die Proportionalitätskonstante $\frac{d\sigma}{dA}$ bestimmt die Menge der Teilchen pro Zeit die am Detektor ankommen.

$$\begin{aligned} J_{\text{gestr}} &= \frac{d\sigma}{dA} J_{\text{ein}} \\ \Leftrightarrow \frac{d\sigma}{dA} &= \frac{J_{\text{gestr}}}{J_{\text{ein}}} \quad \text{mit } dA = r^2 d\Omega \\ \frac{d\sigma}{d\Omega r^2} &= \frac{J_{\text{gestr}}}{J_{\text{ein}}} \end{aligned} \quad (2)$$

Diese Größe ist noch vom Abstand r^2 Abhängig. Multipliziert man die Gleichung (2) mit r^2 so erhält man den differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{J_{\text{gestr}} r^2}{J_{\text{ein}}}} \quad (3)$$

Differentieller Wirkungsquerschnitt

Um den differentiellen Wirkungsquerschnitt bestimmen zu können müssen wir als nächstes die Zustandsfunktion der einfallenden und gestreuten Teilchen herleiten. Betrachte das Einfallende Teilchen als ebene Wellen Pakete. Die dazugehörige Schrödinger Gleichung lautet:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \right] \psi = E\psi \quad (4)$$

Die Gleichung können wir auch im Schwerpunkt- und Relativpunkt-System ausdrücken:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_M^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_\mu^2 + V(r) \right] \psi = E\psi \quad (5)$$

Da der Schwerpunkt sich wie ein freies Teilchen verhält, ist der Relativ-Anteil für uns von interesse, damit verkürzt sich die Gleichung (5) zu:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_\mu^2 + V(r) \right] \psi = E\psi \quad (6)$$

Damit reduziert sich das Problem der Streuung auf die Lösung dieser Gleichung. Wir werden zeigen dass der differentiell Wirkungsquerschnitt durch asymptotische Lösung bestimmt wird. Das bedeutet, wir betrachten die beiden Fälle wo das Teilchen aus $-\infty$ kommend und nach der Kollision für sehr große r .

Mit der Lösung der Gleichung (6) können wir die Wahrscheinlichkeit bestimmen dass das Teilchen μ pro Raumwinkel $d\Omega$ und pro Zeiteinheit in ein Raumwinkel $d\Omega$ in die Richtung (θ, ϕ) gestreut wird. Diese Wahrscheinlichkeit ist durch den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ gegeben.

Für die weitere Betrachtung nehmen wir an, dass das Potential $V(r)$ schnell genug abfällt. So dass es möglich wird eine begrenzende Region a anzunehmen, wo das Potential ungleich Null ist und außerhalb dieser Region vernachlässigbar ist also $V(r) = 0$. Man nennt es auch die Streu-Region. Nun betrachten wir den Fall dass das einfallende Teilchen sich vor der Kollision noch weit weg befindet. Für diesen Fall $V(r) = 0$, d.h. $r > a$, reduziert sich die Gleichung (6) auf:

$$\begin{aligned} [-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_\mu^2 - E]\phi_{\text{ein}} &= 0 & | \cdot - \frac{2\mu}{\hbar^2} \\ [\nabla_\mu^2 + \underbrace{\frac{2\mu}{\hbar^2}E}_{k_0^2}]\phi_{\text{ein}} &= 0 \\ [\nabla_\mu^2 + k_0^2]\phi_{\text{ein}} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Aus der Gleichung ist zu entnehmen, dass das Teilchen sich wie ein freies Teilchen verhält und die Lösungen sind die bekannten ebenen Wellen:

$$\phi_{\text{ein}}(\vec{r}) = Ae^{i\vec{k}_0\vec{r}} \quad (8)$$

Nach dem das Teilchen mit dem Target kollidiert ist, also nach der Wechselwirkung (Streuung), entsteht eine gestreute Wellenfunktion, die im Falle einer isotropischen Potential sich wie eine Kugelwelle verhält mit der Form $\frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{r}$. Im Allgemeinen jedoch ist die gestreute Welle nicht sphärisch symmetrisch, ihre Amplitude hängt von der Richtung (θ, ϕ) ab. Damit gilt:

$$\phi_{\text{gestr}}(\vec{r}) = Af(\theta, \phi)\frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{r} \quad (9)$$

Die Parameter-Funktion $f(\theta, \phi)$ heißt Streuamplitude, \vec{k} ist der Wellenvektor der gestreuten Welle und θ ist der Winkel zwischen \vec{k}_0 und \vec{k} . Die gesamte Wellenfunktion ist die Summe der einlaufenden Welle ϕ_{ein} und der gestreuten Welle ϕ_{gestr}

$$\psi = \phi_{\text{ein}} + \phi_{\text{gestr}} = Ae^{i\vec{k}_0\vec{r}} + Af(\theta, \phi)\frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{r} \quad (10)$$

Nun können wir den differentiellen Wirkungsquerschnitt bestimmen indem wir die Stromdichten J_{ein} und J_{gestr} nach der allgemeinen Formel berechnen:

$$\vec{J} = \frac{i\hbar}{2m}(\phi\nabla\phi^* - \phi^*\nabla\phi) \quad (11)$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \vec{J}_{\text{ein}} &= \frac{i\hbar}{2\mu}(\phi_{\text{ein}}\nabla\phi_{\text{ein}}^* - \phi_{\text{ein}}^*\nabla\phi_{\text{ein}}) \\ &= \frac{i\hbar}{2\mu}(Ae^{i\vec{k}_0\vec{r}}\nabla Ae^{-i\vec{k}_0\vec{r}} - Ae^{-i\vec{k}_0\vec{r}}\nabla Ae^{i\vec{k}_0\vec{r}}) \\ &= \frac{i\hbar|A|^2}{2\mu}(-i\vec{k}_0e^{i\vec{k}_0\vec{r}}e^{-i\vec{k}_0\vec{r}} - i\vec{k}_0e^{-i\vec{k}_0\vec{r}}e^{i\vec{k}_0\vec{r}}) \\ &= \frac{\vec{k}_0\hbar|A|^2}{\mu} \end{aligned} \quad (12)$$

Da r groß ist kann man die Ableitungen nach den Winkeln vernachlässigen. Mathematisch gehen die Winkelableitungen mit $\frac{1}{r^3}$ schneller gegen Null im Vergleich zu Radiusableitung mit $\frac{1}{r^2}$.

$$\begin{aligned}
\vec{J}_{\text{gestr}} &= \frac{i\hbar}{2\mu} (\phi_{\text{gestr}} \nabla \phi_{\text{gestr}}^* - \phi_{\text{gestr}}^* \nabla \phi_{\text{gestr}}) \\
&= \frac{i\hbar |A|^2 |f(\theta, \phi)|^2}{2\mu} \left(\frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{r} \nabla_r \frac{e^{-i\vec{k}\vec{r}}}{r} - \frac{e^{-i\vec{k}\vec{r}}}{r} \nabla_r \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{r} \right) \quad \text{ausklammern von } f(\theta, \phi) \\
&= \frac{i\hbar |A|^2 |f(\theta, \phi)|^2}{2\mu} \left(\frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{r} \left[-i\vec{k} \frac{1}{r} e^{-i\vec{k}\vec{r}} - e^{-i\vec{k}\vec{r}} \frac{1}{r^2} \right] - \frac{e^{-i\vec{k}\vec{r}}}{r} \left[i\vec{k} \frac{1}{r} e^{i\vec{k}\vec{r}} - e^{i\vec{k}\vec{r}} \frac{1}{r^2} \right] \right) \\
&= \frac{i\hbar |A|^2 |f(\theta, \phi)|^2}{2\mu} \left(-\frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{r} i\vec{k} \frac{1}{r} e^{-i\vec{k}\vec{r}} - \cancel{\frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{r} e^{-i\vec{k}\vec{r}} \frac{1}{r^2}} - \frac{e^{-i\vec{k}\vec{r}}}{r} i\vec{k} \frac{1}{r} e^{i\vec{k}\vec{r}} + \cancel{\frac{e^{-i\vec{k}\vec{r}}}{r} e^{i\vec{k}\vec{r}} \frac{1}{r^2}} \right) \\
&= \frac{i\hbar |A|^2 |f(\theta, \phi)|^2}{2\mu} \cdot (-1) \frac{2i\vec{k}}{r^2} \\
&= \frac{\hbar |A|^2 |f(\theta, \phi)|^2}{\mu} \cdot \frac{\vec{k}}{r^2}
\end{aligned} \tag{13}$$

Setzen wir nun die beiden Stromdichten (12) (13) in (3) ein, so ergibt sich:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{J_{\text{gestr}} r^2}{J_{\text{ein}}} = \frac{\hbar |A|^2 |f(\theta, \phi)|^2 \vec{k} r^2 \mu}{\mu r^2 \vec{k}_0 \hbar |A|^2} = \frac{\vec{k}}{\vec{k}_0} |f(\theta, \phi)|^2 \tag{14}$$

Da wir nur elastische Stöße betrachten gilt Impulserhaltung, d.h. $\vec{k} \approx \vec{k}_0$ und die Gleichung reduziert sich auf:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \phi)|^2} \tag{15}$$

Aus der Gleichung (15) sieht man, dass der differentielle Wirkungsquerschnitt nur von der Streuamplitude abhängig ist. Wenn wir um die Streuamplitude wissen, dann wissen wir auch den Wirkungsquerschnitt.

Lösung mit Hilfe der Greenschen Funktion

Es gilt nun die Streuamplitude zu bestimmen. Die können wir durch die Lösung der Schrödinger Gleichung (6) erreichen. Dazu bringen wir sie in folgende Form (auch bekannt als die Helmholtz-Gleichung):

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r)\psi \tag{16}$$

Dies ist eine Differentialgleichung die wir mit Hilfe der Greenschen Funktion bestimmen können. Die Lösung der Gleichung besteht aus der Lösung der homogenen Gleichung plus die partikuläre Lösung. Für die homogene Lösung gilt:

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = 0 \tag{17}$$

Mit der Lösung:

$$\psi_{\text{homo}} = A e^{i\vec{k}\vec{r}} = \phi_{\text{ein}} \tag{18}$$

Die partikuläre Lösung können wir mit Hilfe folgenden Ansatzes bestimmen:

$$(\nabla^2 + k^2)G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \tag{19}$$

Nun multiplizieren wir die Gleichung (19) mit der 'Störung' $\frac{2\mu}{\hbar^2} V(r')\psi$ und integrieren nach \vec{r}' :

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 + k^2)G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r')\psi &= \delta(\vec{r} - \vec{r}') \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r')\psi \\
\int_{-\infty}^{\infty} (\nabla^2 + k^2)G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r')\psi d^3 r' &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r')\psi d^3 r' \\
\int_{-\infty}^{\infty} (\nabla^2 + k^2)G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r')\psi d^3 r' &= \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r)\psi
\end{aligned} \tag{20}$$

Eingesetzt (20) in (16):

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 + k^2)\psi(\vec{r}) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\nabla^2 + k^2)G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r') \psi(\vec{r}') d^3 r' \\
&\rightarrow \psi_{\text{part}}(\vec{r}) = \frac{2\mu}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} G(\vec{r}, \vec{r}') V(r') \psi(\vec{r}') d^3 r'
\end{aligned} \tag{21}$$

Betrachten wir nun die zwei Fourier-Transformationen

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{\omega}(\vec{r}-\vec{r}')} \tilde{G}(\vec{\omega}) d^3 \omega \tag{22}$$

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{\omega}(\vec{r}-\vec{r}')} \cdot 1 \cdot d^3 \omega \tag{23}$$

Setze die Beiden Gleichungen (23) (22) in (19):

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 + k^2) \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{\omega}(\vec{r}-\vec{r}')} \tilde{G}(\vec{\omega}) d^3 \omega &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{\omega}(\vec{r}-\vec{r}')} \cdot 1 \cdot d^3 \omega \\
\int (\nabla^2 + k^2) e^{i\vec{\omega}(\vec{r}-\vec{r}')} \tilde{G}(\vec{\omega}) d^3 \omega &= \int e^{i\vec{\omega}(\vec{r}-\vec{r}')} \cdot 1 \cdot d^3 \omega \\
\int \left(-\vec{\omega}^2 e^{i\vec{\omega}(\vec{r}-\vec{r}')} + k^2 e^{i\vec{\omega}(\vec{r}-\vec{r}')} \right) \tilde{G}(\vec{\omega}) d^3 \omega &= \int e^{i\vec{\omega}(\vec{r}-\vec{r}')} \cdot 1 \cdot d^3 \omega \\
\int (-\vec{\omega}^2 + k^2) e^{i\vec{\omega}(\vec{r}-\vec{r}')} \tilde{G}(\vec{\omega}) d^3 \omega &= \int e^{i\vec{\omega}(\vec{r}-\vec{r}')} \cdot 1 \cdot d^3 \omega \quad \Big| \frac{d}{d^3 \omega} \\
(-\vec{\omega}^2 + k^2) e^{i\vec{\omega}(\vec{r}-\vec{r}')} \tilde{G}(\vec{\omega}) &= e^{i\vec{\omega}(\vec{r}-\vec{r}')} \\
(-\vec{\omega}^2 + k^2) \tilde{G}(\vec{\omega}) &= 1
\end{aligned} \tag{24}$$

Die Fouriertransformierte Greensche Funktion lautet demnach:

$$\Leftrightarrow \tilde{G} = \frac{1}{k^2 - \vec{\omega}^2} \tag{25}$$

Setzen wir (25) in (22) ein:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\vec{\omega}(\vec{r}-\vec{r}')}}{k^2 - \vec{\omega}^2} d^3 \omega \tag{26}$$

Nun gilt es die Gleichung zu integrieren. Dazu benutzen wir die Kugelkoordinaten. Wir ersetzen

$$\underbrace{\vec{\omega}(\vec{r} - \vec{r}')}_{\vec{\rho}} = \vec{\omega} \cdot \vec{\rho} = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{\rho}| \cos \theta = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r} - \vec{r}'| \cos \theta$$

Nun lautet das Integral:

$$\begin{aligned}
G(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\omega \cos \theta |r-r'|}}{k^2 - \omega^2} \omega^2 d\omega \sin \theta d\theta d\phi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{\omega^2}{k^2 - \omega^2} d\omega \int_0^\pi e^{i\omega \cos \theta |r-r'|} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{\omega^2}{k^2 - \omega^2} d\omega \int_0^\pi e^{i\omega \cos \theta |r-r'|} \sin \theta d\theta
\end{aligned} \tag{27}$$

Substituiere $x = \cos \theta$:

$$\begin{aligned}
G(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{\omega^2}{k^2 - \omega^2} d\omega \int_1^{-1} e^{i\omega x|r-r'|} \sin \theta \frac{1}{-\sin \theta} dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{\omega^2}{k^2 - \omega^2} d\omega \int_{-1}^1 e^{i\omega x|r-r'|} dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{\omega^2}{k^2 - \omega^2} d\omega \left[\frac{e^{i\omega x|r-r'|}}{i\omega|r-r'|} \right]_{-1}^1 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{\omega^2}{k^2 - \omega^2} d\omega \frac{1}{i\omega|r-r'|} (e^{i\omega|r-r'|} - e^{-i\omega|r-r'|}) \\
&= \frac{1}{i(2\pi)^2|r-r'|} \int_0^\infty \frac{\omega}{k^2 - \omega^2} d\omega (e^{i\omega|r-r'|} - e^{-i\omega|r-r'|}) \\
&= \frac{1}{i(2\pi)^2|r-r'|} \int_0^\infty \frac{\omega}{k^2 - \omega^2} e^{i\omega|r-r'|} d\omega - \int_0^\infty \frac{\omega}{k^2 - \omega^2} e^{-i\omega|r-r'|} d\omega \\
&= \frac{1}{i(2\pi)^2|r-r'|} \int_0^\infty \frac{\omega}{k^2 - \omega^2} e^{i\omega|r-r'|} d\omega - \int_{-\infty}^0 \frac{-\omega}{k^2 - \omega^2} e^{-i\omega|r-r'|} d\omega \\
&= \frac{1}{i(2\pi)^2|r-r'|} \int_0^\infty \frac{\omega}{k^2 - \omega^2} e^{i\omega|r-r'|} d\omega + \int_{-\infty}^0 \frac{\omega}{k^2 - \omega^2} e^{i\omega|r-r'|} d\omega \\
&= \frac{1}{i(2\pi)^2|r-r'|} \int_{-\infty}^\infty \frac{\omega e^{i\omega|r-r'|}}{k^2 - \omega^2} d\omega
\end{aligned} \tag{28}$$

Das Integral können wir mit Hilfe des Residuen-Satzes berechnen. Es gilt:

$$\oint f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, f_k) \tag{29}$$

Das zu unserem Fall passendes Residuum

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \quad \text{mit } g(z) \text{ Zähler-Funktion und } h(z) \text{ Nenner-Funktion} \tag{30}$$

Betrachten wir nun die Funktion:

$$f(\omega) = \frac{\omega e^{i\omega|r-r'|}}{k^2 - \omega^2} \tag{31}$$

Sie hat zwei Polstellen an der Stelle $\omega = k$ und $\omega = -k$. Da unser Impuls nur in positiver Richtung verläuft, können wir die negative Lösung ignorieren. Das Residuum für $\omega = k$ lautet:

$$\text{Res}(f, k) = \left. \frac{\omega e^{i\omega|r-r'|}}{-2\omega} \right|_{\omega=k} = \frac{k e^{ik|r-r'|}}{-2k} = -\frac{1}{2} e^{ik|r-r'|} \tag{32}$$

Damit wir das Integral (29) zu:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\omega e^{i\omega|r-r'|}}{k^2 - \omega^2} d\omega = 2\pi i \text{Res}(f, k) = -\pi i e^{ik|r-r'|} \tag{33}$$

Eingesetzt in (28):

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi|r-r'|} e^{ik|r-r'|} \tag{34}$$

Setzen wir nun die Greensche Funktion (34) in (21):

$$\begin{aligned}
\psi_{\text{part}}(\vec{r}) &= \frac{2\mu}{\hbar^2} \int_{-\infty}^\infty G(\vec{r}, \vec{r}') V(r') \psi(\vec{r}') d^3 r' \\
&= -\frac{\mu}{2\pi \hbar^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} V(r') \psi(\vec{r}') d^3 r'
\end{aligned} \tag{35}$$

$$\tag{36}$$

Somit lautet die gesamte Wellenfunktion:

$$\psi = \psi_{\text{homo}} + \psi_{\text{part}} = Ae^{i\vec{k}\vec{r}} - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} V(r') \psi(\vec{r}') d^3r' \quad (37)$$

Bornsche Reihe und Näherung

Wir betrachten die Gleichung (37) um die Bornsche Reihe zu entwickeln.

$$\psi(\vec{r}) = Ae^{i\vec{k}\vec{r}} - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} V(r') \psi(\vec{r}') d^3r' \quad (38)$$

Führen wir zu jedem \vec{r}' ein Strich hinzu, so erhalten wir:

$$\psi(\vec{r}') = Ae^{i\vec{k}\vec{r}'} - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik|r'-r''|}}{|r'-r''|} V(r'') \psi(\vec{r}'') d^3r'' \quad (39)$$

Jetzt können wir die Gleichung (39) in (38) einsetzen und erhalten:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}) &= Ae^{i\vec{k}\vec{r}} - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} V(r') \left(Ae^{i\vec{k}\vec{r}'} - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik|r'-r''|}}{|r'-r''|} V(r'') \psi(\vec{r}'') d^3r'' \right) d^3r' \\ &= Ae^{i\vec{k}\vec{r}} - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} V(r') Ae^{i\vec{k}\vec{r}'} d^3r' \\ &\quad - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} V(r') \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik|r'-r''|}}{|r'-r''|} V(r'') \psi(\vec{r}'') d^3r'' \end{aligned} \quad (40)$$

Analog können wir in die Gleichung (40) zu jedem r ein Strich hinzufügen und wieder in die Gleichung (38) einsetzen. Auf diese Weise können wir Schritt für Schritt die Bornsche Reihe der Streuwellenfunktion konstruieren und eine beliebig genaue Lösung finden. Für Potentiale die schnell abfallen ist jeder folgender Term jeweils kleiner als der vorhergehende.

Für die erste Näherung beschränken wir uns auf die erste Ordnung in V , d.h. vernachlässigen des nächsthöheren r -Strich. Somit reduziert sich die Gleichung (39) auf:

$$\psi(\vec{r}') = Ae^{i\vec{k}\vec{r}'} \quad (41)$$

Eingesetzt in anfängliche Gleichung (38):

$$\psi(\vec{r}) = Ae^{i\vec{k}\vec{r}} - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} e^{i\vec{k}\vec{r}'} V(r') d^3r' \quad (42)$$

Dies ist die Bornsche Näherung in erster Ordnung.

Asymptotische Näherung der Wellenfunktion

Hier wollen wir zeigen dass die Wellenfunktion in (37) für große \vec{r} sich in die Form von der Gleichung (10) bringen lässt. In Streuexperimenten ist die Entfernung von Streupunkt zum Detektor also die Distanz \vec{r} viel viel größer als die Größe vom Detektor \vec{r}' . Wenn $r \gg r'$ dann gilt:

$$\begin{aligned} k|\vec{r} - \vec{r}'| &= k\sqrt{r^2 - 2\vec{r}\vec{r}' + r'^2} \\ &= kr\sqrt{1 - 2\frac{\hat{e}_r\vec{r}'}{r} + \frac{r'^2}{r^2}} \quad \text{Taylorentwicklung der Wurzel um } r=\infty \text{ bis 2.Ordnung} \\ &\approx kr\left(1 - \frac{\hat{e}_r\vec{r}'}{r}\right) = kr - k\hat{e}_r\vec{r}' = kr - \vec{k}\vec{r}' \end{aligned} \quad (43)$$

Weitere Approximation:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \frac{1}{|\vec{r}/r - \vec{r}'/r|} = \frac{1}{r} \frac{1}{|1 - \frac{\vec{r}'}{r}|} = \frac{1}{r} \frac{1}{|1 - \frac{\vec{r}'}{r^2}|} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2}\right) \approx \frac{1}{r} \quad (44)$$

Setzen wir die beiden Näherungen in die Gleichung (37) ein:

$$\begin{aligned}\psi(\vec{r}) &\stackrel{\vec{r} \rightarrow \infty}{=} Ae^{i\vec{k}\vec{r}} - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r} - i\vec{k}'\vec{r}'}}{r} V(r') \psi(\vec{r}') d^3r' \\ &= Ae^{i\vec{k}\vec{r}} - A \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\vec{k}'\vec{r}'} V(r') \psi(\vec{r}') d^3r' \right] \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{r}\end{aligned}\quad (45)$$

Vergleiche mit der Gleichung (10) hier nochmals aufgeführt:

$$\psi = Ae^{i\vec{k}_0\vec{r}} + Af(\theta, \phi) \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{r} \quad (46)$$

so können wir die Streuamplitude bestimmen. Für $f(\theta, \phi)$ können wir schreiben:

$$f(\theta, \phi) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\vec{k}'\vec{r}'} V(r') \psi(\vec{r}') d^3r' \quad (47)$$

Mit $\phi_{\text{ein}}^* = e^{-i\vec{k}'\vec{r}'} = \langle \phi_{\text{ein}} | \vec{r}' \rangle$ und $\psi(\vec{r}') = \langle \vec{r}' | \psi \rangle$ lässt sich die Gleichung (47) nochmals schreiben als:

$$f(\theta, \phi) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \langle \phi_{\text{ein}} | V | \psi \rangle \quad (48)$$

Damit lässt sich der Differentielle Wirkungsquerschnitt (15) schreiben als:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\mu^2}{4\pi^2\hbar^4} |\langle \phi_{\text{ein}} | V | \psi \rangle|^2 = \frac{\mu^2}{4\pi^2\hbar^4} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\vec{k}'\vec{r}'} V(r') \psi(\vec{r}') d^3r' \right|^2 \quad (49)$$

Für Bornsche Näherung in 1.Ordnung mit $\psi(\vec{r}') = e^{i\vec{k}_0\vec{r}'}$ eingesetzt in (49):

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\mu^2}{4\pi^2\hbar^4} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\vec{k}'\vec{r}'} V(r') e^{i\vec{k}_0\vec{r}'} d^3r' \right|^2 \\ &= \frac{\mu^2}{4\pi^2\hbar^4} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\vec{r}' \underbrace{(\vec{k}_0 - \vec{k})}_{\vec{K}}] V(r') d^3r' \right|^2\end{aligned}\quad (50)$$

Dabei ist $\hbar\vec{K} = \hbar(\vec{k}_0 - \vec{k})$ die Impulsübetragung.

Der Differentialwirkungsquerschnitt in Bornscher Näherung 1. Ordnung lautet somit:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\mu^2}{4\pi^2\hbar^4} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{r}' \cdot \vec{K}} V(r') d^3r' \right|^2 \quad (51)$$

Mit Hilfe der Bornschen Näherung und des differentiellen Wirkungsquerschnitts, sowie der Streurichtung (θ, ϕ) und einfallender Energie $\frac{\hbar^2 \vec{k}_0^2}{2\mu}$ lassen sich Rückschlüsse auf das Target-Potential schließen.

Betrachte nun ein **Spezialfall** $V(\vec{r}')$ sei sphärisch symmetrisch. Damit gilt $V(\vec{r}) = V(r')$. Damit können wir die Gleichung (51) die Streuamplitude folgendermaßen ausdrücken, mit $\vec{r}' \cdot \vec{K} = |\vec{r}'| \cdot |\vec{K}| \cos \theta$.

$$\begin{aligned}f(\theta, \phi) &= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty r'^2 dr' \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\phi e^{ir'K \cos \theta} V(r') \\ &= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty dr' r'^2 V(r') \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) e^{ir'K \cos \theta} \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= -\frac{\mu}{\hbar^2} \int_0^\infty dr' r'^2 V(r') \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) e^{ir'K \cos \theta}\end{aligned}\quad (52)$$

Substituiere $x = \cos \theta \rightarrow d\theta = \frac{1}{-\sin \theta} dx$

$$\begin{aligned}
f(\theta) &= -\frac{\mu}{\hbar^2} \int_0^\infty dr' r'^2 V(r') \int_{-1}^1 dx e^{ir'Kx} \\
&= -\frac{\mu}{\hbar^2} \int_0^\infty dr' r'^2 V(r') \left[\frac{e^{ir'Kx}}{ir'K} \right]_{-1}^1 \\
&= -\frac{\mu}{\hbar^2} \int_0^\infty dr' r'^2 V(r') \left(\frac{e^{ir'K}}{ir'K} - \frac{e^{-ir'K}}{ir'K} \right) \\
&= -\frac{\mu}{\hbar^2} \int_0^\infty dr' r'^2 V(r') \frac{2i}{ir'K} \sin(r'K) \\
&= -\frac{2\mu}{\hbar^2 K} \int_0^\infty dr' r' V(r') \sin(r'K)
\end{aligned} \tag{53}$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt lautet für spärlich symmetrische Potential somit:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\mu^2}{\hbar^4 K^2} \left| \int_0^\infty dr' r' V(r') \sin(r'K) \right|^2} \tag{54}$$

Beispiel Coulomb-Potential

Zur Veranschaulichung wollen wir den differentiellen Wirkungsquerschnitt für das Coulomb-Potential

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \tag{55}$$

berechnen. Setzen wir das in unsere Gleichung (54) ein:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{4\mu^2 Z_1^2 Z_2^2 e^4}{\hbar^4 K^2} \left| \int_0^\infty dr' r' \frac{1}{r'} \sin(r'K) \right|^2 \\
&= \frac{4\mu^2 Z_1^2 Z_2^2 e^4}{\hbar^4 K^2} \left| \int_0^\infty dr' \sin(r'K) \right|^2
\end{aligned} \tag{56}$$

Nebenrechnung Integral:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty dr' \sin(r'K) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^\infty dr' e^{-\lambda r'} \sin(r'K) \\
&= \frac{1}{2i} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^\infty dr' e^{-\lambda r'} \left(e^{iKr'} - e^{-iKr'} \right) \\
&= \frac{1}{2i} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^\infty dr' \left(e^{-r'(\lambda - iK)} - e^{-r'(\lambda + iK)} \right) \\
&= \frac{1}{2i} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\int_0^\infty dr' e^{-r'(\lambda - iK)} - \int_0^\infty dr' e^{-r'(\lambda + iK)} \right) \\
&= \frac{1}{2i} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\left[\frac{e^{-r'(\lambda - iK)}}{-\lambda + iK} \right]_0^\infty - \left[\frac{e^{-r'(\lambda + iK)}}{-\lambda - iK} \right]_0^\infty \right) \\
&= \frac{1}{2i} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(0 - \frac{1}{-\lambda + iK} - 0 + \frac{1}{-\lambda - iK} \right) \\
&= \frac{1}{2i} \left(-\frac{1}{iK} + \frac{1}{-iK} \right) \\
&= -\frac{1}{i} \frac{1}{iK} = \frac{1}{K}
\end{aligned} \tag{57}$$

Die Lösung des Integralls (57) mit $k_0 = k$ folgt $K = |\vec{k}_0 - \vec{k}| = 2k_0 \sin \frac{\theta}{2}$ und der Energie des einfallendes Teilchens $E = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2\mu}$ eingesetzt in (56):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\mu^2 Z_1^2 Z_2^2 e^4}{\hbar^4 K^4} = \frac{4\mu^2 Z_1^2 Z_2^2 e^4}{16\hbar^4 k_0^4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} = \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{16E^2} \sin^{-4} \left(\frac{\theta}{2} \right) \tag{58}$$

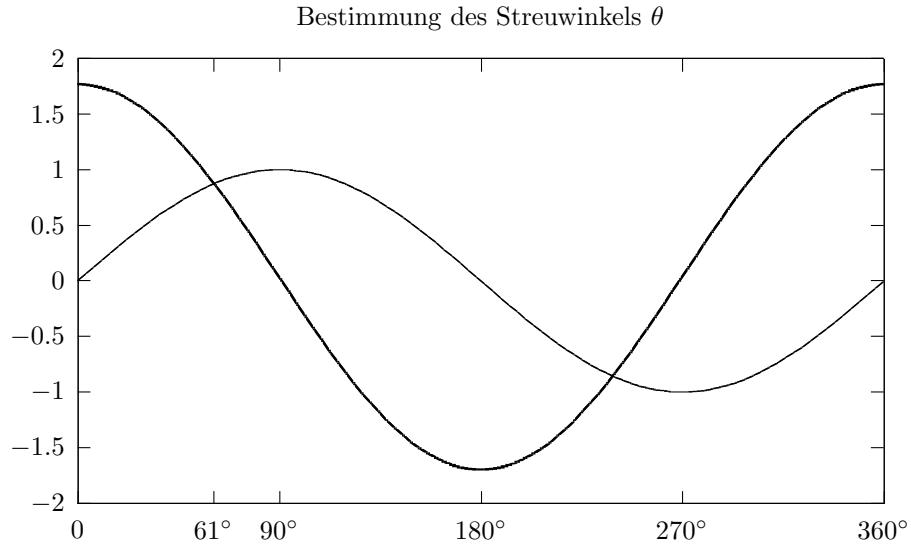


Figure 1: Graphische Lösung zur Gleichung (60), wobei die dünne Linie rechte Seite und die dickere Linie die linke Seite ist. Der erste Schnittpunkt der beiden Kurven liegt bei $\theta = 61^\circ$ und somit die Lösung bildet

Es ist möglich den Winkel θ über die Massen der Teilchen zu bestimmen. Der Zusammenhang ergibt aus den Winkeln zu den Massen sich aus dem Laborsystem θ_1 und dem Schwerpunktsystem θ (siehe Zettili 11.1.1 S.618)

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \frac{m_1}{m_2}} \quad (59)$$

Numerisches Beispiel Helium vs. Gold

Betrachten wir als Beispiel das ein Helium-Atom mit Kernladungszahl $Z_1 = 2$ und Nukleonenanzahl $A_1 = 4$ trifft auf ein Goldatom mit Kernladungszahl $Z_2 = 79$ und Nukleonenanzahl $A_2 = 197$ und wird im Laborsystem in einem Winkel $\theta_1 = 60^\circ$ gestreut. Die kinetische Energie des einfallenden Teilchens beträgt 8 MeV . Wie groß ist der differentieller Wirkungsquerschnitt?

Zunächst berechnen wir den Streuwinkel θ im Schwerpunktsystem. Das Massenverhältniss entspricht dem Quotienten der Nukleonenanzahl $\frac{m_1}{m_2} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{4}{197}$. Mit Gleichung (59) erhalten wir eine transzendente Gleichung. Den Winkel erhält man durch Graphische Lösung der beiden Funktionen:

$$\tan(60^\circ) \cos \theta + \tan(60^\circ) \frac{4}{197} = \sin \theta \quad \Rightarrow \theta = 61^\circ \quad (60)$$

Setzt man nun den Winkel θ in Gleichung (58) so ist es möglich den Wirkungsquerschnitt zu bestimmen.

Referenzen

- Claude Cohen-Tannoudji Quantenmechanik Band 2
- Zettili Quanten Mechanics