

Landau Niveaus

Wir betrachten ein Teilchen im Magnetfeld. Das konstante Magnetfeld zeigt in z-Richtung $\vec{B} = (0, 0, B_0)$. Das Vektorpotential ist nach Landau-Eichung ($\nabla \cdot \vec{A} = 0$) somit $\vec{A} = (-yB_0, 0, 0)$. Der Hamiltonoperator lautet:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2$$

In Quantenmechanischer Schreibweise:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2$$

Einsetzen des Hamiltonoperators in die Schrödinger-Gleichung:

$$H\psi = E\psi$$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \vec{A} \right) \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \vec{A} \right) \psi = E\psi$$

$$\frac{1}{2m} \left(-\hbar^2 \nabla^2 - \frac{\hbar q}{ic} \nabla \vec{A} - \frac{\hbar q}{ic} \vec{A} \nabla + \frac{q^2}{c^2} \vec{A}^2 \right) \psi = E\psi$$

$$\frac{1}{2m} \left(-\hbar^2 \nabla^2 \psi - \frac{\hbar q}{ic} \underbrace{\nabla \vec{A} \psi}_{(\nabla \vec{A})\psi + \vec{A} \cdot (\nabla \psi)} - \frac{\hbar q}{ic} \vec{A} \nabla \psi + \frac{q^2}{c^2} \vec{A}^2 \psi \right) = E\psi$$

Nach der Landau Eichung ist der Term $(\nabla \vec{A})\psi = 0$

$$\frac{1}{2m} \left(-\hbar^2 \nabla^2 \psi - \frac{\hbar q}{ic} \vec{A} \cdot (\nabla \psi) - \frac{\hbar q}{ic} \vec{A} \nabla \psi + \frac{q^2}{c^2} \vec{A}^2 \psi \right) = E\psi$$

$$\frac{1}{2m} \left(-\hbar^2 \nabla^2 \psi - \frac{2\hbar q}{ic} \vec{A} \cdot (\nabla \psi) + \frac{q^2}{c^2} \vec{A}^2 \psi \right) = E\psi$$

Einsetzen des Vektorfeldes ergibt nur noch eine Ableitung in die x-Richtung:

$$\frac{1}{2m} \left(-\hbar^2 \nabla^2 \psi + \frac{2\hbar q}{ic} y B_0 \frac{\partial}{\partial x} \psi + \frac{q^2}{c^2} y^2 B_0^2 \psi \right) = E\psi$$

Mit der Annahme vom $\psi(x, y, z) = e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x} \cdot \phi(y)$ können wir erstmal $\nabla^2 \psi$ ausrechnen NR:

$$\nabla \psi = \begin{pmatrix} \frac{ip_0}{\hbar} e^{ip_0 x / \hbar} \cdot \phi(y) \\ e^{ip_0 x / \hbar} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \phi(y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 \psi = -\frac{p_0^2}{\hbar^2} e^{ip_0 x / \hbar} \phi(y) + e^{ip_0 x / \hbar} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi(y)$$

Ebenso die Ableitung nach x NR:

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi = \frac{i}{\hbar} p_0 e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x} \cdot \phi(y)$$

Die NR in wieder in die SGL einsetzen:

$$\frac{1}{2m} \left(\hbar^2 \frac{p_0^2}{\hbar^2} e^{ip_0 x/\hbar} \phi(y) + e^{ip_0 x/\hbar} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi(y) + \frac{2\hbar q}{ic} y B_0 \frac{i}{\hbar} p_0 e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x} \cdot \phi(y) + \frac{q^2}{c^2} y^2 B_0^2 \psi \right) = E \psi \quad | : e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x}$$

$$\frac{1}{2m} \left(p_0^2 \phi(y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi(y) + \frac{2q}{c} y B_0 p_0 \phi(y) + \frac{q^2}{c^2} y^2 B_0^2 \phi(y) \right) = E \phi(y)$$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi(y) + (p_0^2 + \frac{2q}{c} y B_0 p_0 + \frac{q^2}{c^2} y^2 B_0^2) \phi(y) \right) = E \phi(y)$$

Vergleiche mit dem Harmonischen Oszillator in y-Richtung: $H = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} y^2$