Schrödingergleichung

Suchen Bewegungsgleichung für $\psi(\vec{r},t)$. Forderungen:

1. DGL 1. Ordnung in der Zeit, damit $\psi(\vec{r},t)$ durch die Anfangsverteilung $\psi(\vec{r},t=0)$bestimmt ist.
2. Sie muss linear in ψ sein, damit Superpositionsprinzip gilt (d.h. Linearkombination von Lösungen stellen wieder Lösungen dar $\rightarrow$ deshalb treten Interferenzeffekte auf wie in der Optik. (Optik: Diese folgen aus der Linearität der Maxwellgleichungen)
3. Sie muss homogen sein, damit $\int_{-\infty}^{\infty} d^3r|\psi(\vec{r},t)|^2 = 1$ für alle Zeiten erfüllt bleibt.
4. Die ebenen Wellen $\psi(\vec{r},t) = c \cdot e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}-i\omega t}$ sollen Lösungen der Gleichung sein. Wobei die Energie für Photonen $E = hf = \frac{h}{2\pi}\omega = \hbar\omega$ und somit nach ω umgeformt und kinetische Energie eingesetzt $\omega = \frac{p^2}{2m\hbar}$

   $$\psi(\vec{r},t) = c \cdot e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r}-\frac{p^2}{2m}t)} \tag{1}$$

   Für diese ebenen Wellen gilt:

   $$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) &= -\frac{i}{\hbar}\cdot\frac{p^2}{2m}\psi(\vec{r},t)\\ &= -\frac{i}{\hbar}\cdot\frac{p^2}{2m}\psi(\vec{r},t)\cdot\frac{\hbar^2}{\hbar^2}\\ &= \frac{i\hbar}{2m}\cdot\underbrace{\frac{(ip)^2}{\hbar^2}\psi(\vec{r},t)}_{\nabla^2\psi(\vec{r},t)}\\ &= \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r},t)\end{aligned}$$

Aus 1.-4. erhalten wir die zeitabhängige Schrödingergleichung für ein freies Teilchen:

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\vec{r},t)} \tag{2}$$

Annahme: Teilchen der Masse m unterliegt einem Potential $V(\vec{r},t)$

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\vec{r},t) + V(\vec{r},t)\Psi(\vec{r},t)\\ &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r},t)\right]\Psi(\vec{r},t)\end{aligned}$$