Zeitliche Entwicklung eines kohärenten Zustandes

Wir wollen nun die kohärenten Zustände eines harmonischen Oszillators $|\alpha\rangle$

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{1}$$

zeitlich entwickeln und zeigen, dass diese kohärent bleiben.
Aus dem Separationsansatz der zeitabhängigen Schrödinger Gleichung wissen wir:

$$\begin{aligned}
|\alpha(t)\rangle &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Ht\right)|\alpha\rangle && (2)\\
&= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Ht\right) e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle && (3)\\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Ht\right)|n\rangle && (4)\\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_n t\right)|n\rangle && (5)
\end{aligned}$$

Mit der allgemeinen Lösung für die Energieeigenwerte des harmonischen Oszillators $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
|\alpha(t)\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hbar\omega(n+\frac{1}{2})t\right)|n\rangle && (6)\\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-i\omega\frac{1}{2}t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega n t}|n\rangle && (7)\\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-i\omega\frac{1}{2}t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\alpha e^{-i\omega t}\right)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle && (8)
\end{aligned}$$

Da $|e^{-i\omega t}| = 1$ können wir statt $|\alpha|^2$ auch $|\alpha e^{-i\omega t}|^2$ schreiben. Damit sieht die Gleichung (8) wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
|\alpha(t)\rangle &= e^{-\frac{|\alpha e^{-i\omega t}|^2}{2}} e^{-i\omega\frac{1}{2}t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\alpha e^{-i\omega t}\right)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle && (9)\\
&= e^{-\frac{1}{2}i\omega t} \underbrace{\left(e^{-\frac{|\alpha e^{-i\omega t}|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\alpha e^{-i\omega t}\right)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle\right)}_{\text{vergleiche mit (1)}} && (10)\\
&= e^{-i\frac{1}{2}\omega t}|\alpha e^{-i\omega t}\rangle && (11)
\end{aligned}$$

Um zu zeigen dass der Zustand für alle Zeiten kohärent bleibt, wendet man den Absteigeoperator auf (9) an und erhält den Eigenwert $\alpha e^{-i\omega t}$:

$$a|\alpha(t)\rangle = \alpha e^{-i\omega t}|\alpha(t)\rangle \tag{12}$$