adjungierter Pauli-Spinor

Um den Adjungierten Pauli-Spinor zu bestimmen wollen wir die adjungierte Dirac-Gleichung herleiten. Dazu gehen wir von der nicht adjungierten freien Dirac-Gleichung aus

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{mc}{\hbar}\psi = 0 \tag{1}$$

Nun adjungieren wir diese Gleichung

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu \psi)^\dagger - \frac{mc}{\hbar}\psi^\dagger &= 0 \\ -i(\partial_\mu \psi)^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger - \frac{mc}{\hbar}\psi^\dagger &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Nun machen wir eine kleine Nebenrechnung

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu)^\dagger &= (\beta, \beta\alpha_1, \beta\alpha_2, \beta\alpha_3)^\dagger \\ &= (\beta^\dagger, (\beta\alpha_1)^\dagger, (\beta\alpha_2)^\dagger, (\beta\alpha_3)^\dagger) \\ &= (\beta^\dagger, (\alpha_1)^\dagger(\beta)^\dagger, (\alpha_2)^\dagger(\beta)^\dagger, (\alpha_3)^\dagger(\beta)^\dagger) \quad \text{mit } \beta^\dagger = \beta \text{ und } (\alpha_i)^\dagger = \alpha_i \\ &= (\mathbb{1}\cdot\beta, \mathbb{1}\cdot\alpha_1\beta, \mathbb{1}\cdot\alpha_2\beta, \mathbb{1}\cdot\alpha_3\beta) \\ &= (\beta\cdot\beta\cdot\beta, \beta\cdot\beta\cdot\alpha_1\beta, \beta\cdot\beta\cdot\alpha_2\beta, \beta\cdot\beta\cdot\alpha_3\beta) \\ &= \beta\cdot\underbrace{(\beta, \beta\cdot\alpha_1, \beta\cdot\alpha_2, \beta\cdot\alpha_3)}_{\gamma^\mu}\cdot\beta \end{aligned} \tag{3}$$

Wir bekommen aus der Gleichung (3) eine wichtige Relation mit $\beta = \gamma^0$

$$\boxed{(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0} \tag{4}$$

Setzen wir nun diese Relation in die Gleichung (2) ein und multiplizieren von rechts mit γ^0

$$\begin{aligned} -i(\partial_\mu\psi)^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 - \frac{mc}{\hbar}\psi^\dagger &= 0 \qquad |\cdot\gamma^0 \\ -i(\partial_\mu \underbrace{\psi^\dagger\gamma^0}_{\overline{\psi}})\gamma^\mu\mathbb{1} - \frac{mc}{\hbar}\underbrace{\psi^\dagger\gamma^0}_{\overline{\psi}} &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Damit sieht unsere adjungierte Dirac-Gleichung wie folgt aus

$$-i(\partial_\mu\overline{\psi})\gamma^\mu - \frac{mc}{\hbar}\overline{\psi} = 0 \tag{6}$$

Mit dem **adjungierten Paulispinor**

$$\boxed{\overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0} \tag{7}$$

Unter Lorenztranformation verhält sich der adjungierte Paulispinor $\overline{\psi}$ invers zu dem Dirac-Spinor ψ

$$\overline{\psi}' = \psi'^\dagger\gamma^0 = (S(\Lambda)\psi)^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger S(\Lambda)^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger\mathbb{1}S(\Lambda)^\dagger\gamma^0 = \underbrace{\psi^\dagger\gamma^0}_{\overline{\psi}}\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger\gamma^0 = \overline{\psi}\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger\gamma^0 \tag{8}$$

Machen wir eine kleine Nebenrechnung. Mit Hilfe der schon bekannten Beziehung, die sich aus der lorenztransformierten Dirac-Gleichung ergibt

$$\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu = S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) \tag{9}$$

Die adjungierte dieser Gleichung lautet

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\gamma^{\nu})^{\dagger} = S^{\dagger}(\Lambda)(\gamma^{\mu})^{\dagger}S(\Lambda)^{-1\dagger} \tag{10}$$

Mit Hilfe der Beziehung (4) in die Gleichung (10) ein und mit γ^0 von links und rechts multipliziert ergibt

$$\begin{aligned}\gamma^0\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\gamma^0\gamma^{\nu}\gamma^0\gamma^0 &= \gamma^0 S^{\dagger}(\Lambda)\gamma^0\gamma^{\nu}\gamma^0 S(\Lambda)^{-1\dagger}\gamma^0\\ \underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{\mathbb{1}}\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu}\underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{\mathbb{1}} &= \gamma^0 S^{\dagger}(\Lambda)\gamma^0\gamma^{\nu}\gamma^0 S(\Lambda)^{-1\dagger}\gamma^0\\ \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu} &= \gamma^0 S^{\dagger}(\Lambda)\gamma^0\gamma^{\nu}\gamma^0 S(\Lambda)^{-1\dagger}\gamma^0 \overset{(9)}{=} S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu}S(\Lambda)\end{aligned} \tag{11}$$

Mit der Beziehung $(\gamma^0)^{-1} = \gamma^0$ folgt aus der Gleichung (11)

$$\gamma^0 S^{\dagger}(\Lambda)\gamma^0\gamma^{\nu}(\gamma^0 S(\Lambda)^{\dagger}\gamma^0)^{-1} = S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu}S(\Lambda) \tag{12}$$

mit $S(\Lambda)$ von rechts und $S^{-1}(\Lambda)$ von links multipliziert folgt

$$\begin{aligned}S(\Lambda)\gamma^0 S^{\dagger}(\Lambda)\gamma^0\gamma^{\nu}(\gamma^0 S(\Lambda)^{\dagger}\gamma^0)^{-1}S^{-1}(\Lambda) &= \underbrace{S(\Lambda)S^{-1}(\Lambda)}_{\mathbb{1}}\gamma^{\mu}\underbrace{S(\Lambda)S^{-1}(\Lambda)}_{\mathbb{1}}\\ \Big(S(\Lambda)\gamma^0 S^{\dagger}(\Lambda)\gamma^0\Big)\gamma^{\nu}\Big(S(\Lambda)\gamma^0 S(\Lambda)^{\dagger}\gamma^0\Big)^{-1} &= \gamma^{\mu}\end{aligned} \tag{13}$$

Wir betrachten hierzu einen allgemeinen Fall

$$\begin{aligned}ABA^{-1} &= B \quad | \cdot A\\ AB &= BA \Leftrightarrow [A,B] = 0\end{aligned} \tag{14}$$

Für die Gleichung (13) bedeutet dass γ^{ν} auf jeden Fall mit dem Ausdruck $S(\Lambda)\gamma^0 S^{\dagger}(\Lambda)\gamma^0$ vertauscht. Da aber der Ausdruck nur aus unitären Matritzen bzw Matritzen mit der Determinante ± 1 kann dieser Ausdruck nur eine Einheitsmatrix ergeben.

$$S(\Lambda)\gamma^0 S^{\dagger}(\Lambda)\gamma^0 = \mathbb{1} \tag{15}$$

Mit $S^{-1}(\Lambda)$ von links multipliziert folgt eine wichtige Relation

$$\boxed{\gamma^0 S^{\dagger}(\Lambda)\gamma^0 = S^{-1}(\Lambda)} \tag{16}$$

Diese Relation in die Gleichung (8)

$$\boxed{\overline{\psi}' = \overline{\psi}S^{-1}(\Lambda)} \tag{17}$$

Aus der Gleichung (17) ist ersichtlich, dass der adjungierte Pauli-Spinor bei einer Lorentz-Transformation sich invers zu dem Dirac-Spinor verhält, für den gilt

$$\psi' = S(\Lambda)\psi \tag{18}$$

Diese Eigenschaft wird ausgenutzt um die sogenannte *kovariante Bilinearformen* zu bilden. Die ein definiertes Transformationsverhalten unter Lorentz-Transformation besitzen. Ein Beispiel für eine Bilinearform ist die Warscheinlichkeitsdichte $\rho(x) = \overline{\psi}(x)\psi(x)$ die sich wie folgt transformiert

$$\rho'(x') = \overline{\psi}'(x')\mathbb{1}\psi'(x') = \overline{\psi}(x)\underbrace{S^{-1}S}_{\mathbb{1}}\psi(x) = \overline{\psi}(x)\psi(x) = \rho(x) \tag{19}$$

Also transformiert sich die Wahrscheinlichkeitsdichte wie ein Skalar. Eine weitere Bilinearform ist der Wahrscheinlichtkeitsstrom $j^{\mu} = c\overline{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)$

$$j'^{\mu} = c\overline{\psi}'(x)\gamma^{\mu}\psi'(x) = c\overline{\psi}(x)\underbrace{S^{-1}\gamma^{\mu}S}_{(9)}\psi(x) = c\overline{\psi}(x)\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu}\psi(x) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\underbrace{c\overline{\psi}(x)\gamma^{\nu}\psi(x)}_{j^{\mu}} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}j^{\mu} \tag{20}$$

Damit transformiert sich der Wahrscheinlichtkeitsstrom wie ein Vierervektor.

Referenzen

- Schwabl2
- Rollnik Quantentheorie 2
- Wachter Relativistische Quantenmechanik