Wigner-Eckart-Theorem

Betrachte ein $T_q^{(k)}$ oder irreduziebler Tensor $k-$ter Stufe. Dieser verhält sich wie ein Zustandsvektor bei einer Drehung. D.h. dieser Tensor ist proportional zu einem Ket $T_q^{(k)} \sim |k,q\rangle$. D.h wir können folgende Linearkombination:

$$|JM\rangle = \sum_{m_1,m_2} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 \mid jm\rangle \, |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle = \sum_{m_1,m_2} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 \mid jm\rangle \, |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle \tag{1}$$

mit dem Tensor mit Hilfe der Clebsch-Gordan-Koeffizienten als Ket-Vektor ausdrücken:

$$|JM\rangle = \sum_{m,q} \langle jk; mq \mid JM\rangle \, |k,q\rangle \otimes |jm\rangle = \sum_{m,q} \langle jk; mq \mid JM\rangle \, T_q^{(k)} \, |jm\rangle \tag{2}$$

Da es noch andere Quantenzahlen vorkommen können wie Enegie multiplizieren wir die Gleichung (2) mit einem Ket $|\alpha\rangle$ der symbolisch für andere Quantenzahlen steht.

$$|\alpha\rangle \cdot |JM\rangle = |\alpha\rangle \cdot \sum_{m,q} \langle jk; mq \mid JM\rangle \, |k,q\rangle \otimes |jm\rangle \tag{3}$$

$$\Leftrightarrow |\alpha; JM\rangle = \sum_{m,q} \langle jk; mq \mid JM\rangle \, T_q^{(k)} \, |\alpha; jm\rangle \tag{4}$$

Wir möchten die Summe und Clebsch-Gordan-Koeffizienten auf die andere Seite bringen. Dazu möchten wir folgende Relation herleiten:

$$\langle JM \mid JM\rangle = \langle JM| \, \mathbb{1} \, |JM\rangle \tag{5}$$

$$= \langle JM| \left(\sum_{mq} |jk; mq\rangle \, \langle jk; mq| \right) |JM\rangle \tag{6}$$

$$= \sum_{mq} \langle JM \mid jk; mq\rangle \, \langle jk; mq \mid JM\rangle \tag{7}$$

$$= \sum_{mq} | \langle jk; mq \mid JM\rangle |^2 \tag{8}$$

$$\overset{!}{=} 1 \tag{9}$$

Die Relation lautet nun:

$$\sum_{mq} | \langle jk; mq \mid JM\rangle |^2 = 1 \tag{10}$$

Unter Ausnutzung der Relation (10) folgt für die Gleichung (3):

$$\mathbb{1} \, |\alpha; JM\rangle = \sum_{m,q} \langle jk; mq \mid JM\rangle \, T_q^{(k)} \, |\alpha; jm\rangle \tag{11}$$

$$\sum_{JM} |\alpha; JM\rangle \underbrace{\langle \alpha; JM \mid \alpha; JM\rangle}_{=1=\sum_{mq} |\langle jk; mq \mid JM\rangle|^2} = \sum_{m,q} \langle jk; mq \mid JM\rangle \, T_q^{(k)} \, |\alpha; jm\rangle \tag{12}$$

$$\sum_{JM} |\alpha; JM\rangle \cancel{\sum_{mq}} | \langle jk; mq \mid JM\rangle |^{\cancel{2}} = \cancel{\sum_{m,q} \langle jk; mq \mid JM\rangle} T_q^{(k)} \, |\alpha; jm\rangle \tag{13}$$

Damit erhalten wir:

$$T_q^{(k)} \, |\alpha; jm\rangle = \sum_{JM} |\alpha; JM\rangle \, \langle jk; mq \mid JM\rangle \tag{14}$$

Multiplizieren wir mit $\langle \alpha; jm|$:

$$\langle \alpha; jm| \, T_q^{(k)} \, |\alpha; jm\rangle = \sum_{JM} \underbrace{\langle \alpha; jm \mid \alpha; JM\rangle}_{\delta_{jJ} \delta_{mM}} \langle jk; mq \mid JM\rangle \tag{15}$$

Wegen der Orthogonalitätsbegingung bleibt von der Summe nur ein Summand übrig, bei dem gilt $j = J$ und $m = M$. Gleichung (15) können wir nun schreiben:

$$\langle\alpha; jm| T_q^{(k)} |\alpha; jm\rangle = \underbrace{\langle\alpha; jm \mid \alpha; jm\rangle}_{\text{reduziertes Matrixelement}} \langle jk; mq \mid jm\rangle \tag{16}$$

Als nächstes wollen wir beweisen, dass das reduzierte Matrixelement von der Quantenzahl m unabhängig ist. Dies lässt sich duch Anwenden des Schiebeoperators $J_\pm$ zeigen. Zur Errinerung die Eigenwertgleichung lautet:

$$J_\pm |\alpha; jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}\, |\alpha; jm \pm 1\rangle \tag{17}$$

Durch einsetzen von $J_\pm$ und durch ausgleichen von einem Vorfaktor lässt sich das reduzierte Matrixelement schreiben:

$$\langle\alpha; jm \mid \alpha; jm\rangle = \frac{1}{\sqrt{j(j+1) - m(m \mp 1)}} \langle\alpha; jm| J_\pm |\alpha; jm \mp 1\rangle \tag{18}$$

Lässt man nun $J_\pm$ einmal auf links wirken, dabei wird $(J_\pm)^\dagger = J_\mp$:

$$\langle\alpha; jm \mid \alpha; jm\rangle = \frac{\sqrt{j(j+1) - m(m \mp 1)}}{\sqrt{j(j+1) - m(m \mp 1)}} \langle\alpha; jm \mp 1 \mid \alpha; jm \mp 1\rangle \tag{19}$$

$$= \langle\alpha; jm \mp 1 \mid \alpha; jm \mp 1\rangle \tag{20}$$

Aus der Gleichung (19) sieht man dass das reduzierte Matrixelement nicht von m abhängig ist. Wir können Die Gleichung (16) schreiben

$$\langle\alpha; jm| T_q^{(k)} |\alpha; jm\rangle = \underbrace{\langle\alpha; j \mid \alpha; j\rangle}_{\text{reduziertes Matrixelement}} \langle jk; mq \mid jm\rangle \tag{21}$$

Schlussendlich erhalten wir das Wigner-Eckart-Theorem:

$$\boxed{\langle\alpha; jm| T_q^{(k)} |\alpha; jm\rangle = \langle jk; mq \mid jm\rangle \langle\alpha; j||T_k^{(q)}||\alpha; j\rangle} \tag{22}$$

Referenzen

- Zettili Quanten Mehanics
- Rollnik Quantentheorie 2