

Streuung

Wir betrachten die einfallende Stromdichte J_{ein} (Anzahl der Teilchen pro Zeiteinheit und Fläche), das an einem Punktteilchen mit einem Zentralpotential, gestreut wird. Ein Detektor misst eine Teilmenge des gestreuten Teilchenstroms J_{gestr} im dem Raumwinkel θ und Abstand r . Die Ströme sind offenbar proportional zu einander:

$$J_{\text{gestr}} \propto J_{\text{ein}} \quad (1)$$

und die Proportionalitätskonstante $\frac{d\sigma}{dA}$ bestimmt die Menge der Teilchen pro Zeit die am Detektor ankommen.

$$J_{\text{gestr}} = \frac{d\sigma}{dA} J_{\text{ein}} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\sigma}{dA} = \frac{J_{\text{gestr}}}{J_{\text{ein}}} \quad (3)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega r^2} = \frac{J_{\text{gestr}}}{J_{\text{ein}}} \quad (4)$$

$$(5)$$

Diese Größe ist noch vom Abstand r^2 Abhängig. Multipliziert man die Gleichung (2) mit r^2 so erhält man den differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{J_{\text{gestr}} r^2}{J_{\text{ein}}}} \quad (6)$$

Um den differentiellen Wirkungsquerschnitt bestimmen zu können müssen wir als nächstes die Zustandsfunktion der einlaufenden und gestreuten Teilchen herleiten. Betrachte das Einfallende Teilchen als ebene Wellen Pakete. Die dazugehörige Schrödinger Gleichung lautet:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \right] \psi = E\psi \quad (7)$$

Die Gleichung können wir auch im Schwerpunkt- und Relativpunkt-System ausdrücken:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_M^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_\mu^2 + V(r) \right] \psi = E\psi \quad (8)$$

Da der Schwerpunkt sich wie ein freies Teilchen verhält, ist der Relativ-Anteil für uns von interesse, damit verkürzt sich die Gleichung (8) zu:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_\mu^2 + V(r) \right] \psi = E\psi \quad (9)$$

Damit reduziert sich das Problem der Streuung auf die Lösung dieser Gleichung. Wir werden zeigen dass der differentieller Wirkungsquerschnitt durch asymptotische Lösung bestimmt werden. Das bedeutet, wir betrachten die beiden Fälle wo das Teilchen aus $-\infty$ kommend und nach der Kollision für sehr große r .

Mit der Lösung der Gleichung (9) können wir die Wahrscheinlichkeit bestimmen dass das Teilchen μ pro Raumwinkel $d\Omega$ und pro Zeiteinheit in ein Raumwinkel $d\Omega$ in die Richtung (θ, ϕ) gestreut wird. Diese Wahrscheinlichkeit ist durch den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ gegeben.

Für die weitere Betrachtung nehmen wir an, dass das Potential $V(r)$ schnell genug abfällt. So dass es möglich wird eine begrenzende Region a anzunehmen, wo das Potential ungleich Null ist und außerhalb dieser Region vernachlässigbar ist also $V(r) = 0$. Man nennt es auch die Streu-Region. Nun betrachten wir den Fall dass das einfallende Teilchen sich vor der Kollision noch weit weg befindet. Für diesen Fall $V(r) = 0$, d.h. $r > a$, reduziert sich die Gleichung (9) auf:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_\mu^2 - E \right] \phi_{\text{ein}} = 0 \quad | \cdot - \frac{2\mu}{\hbar^2} \quad (10)$$

$$\left[\nabla_\mu^2 + \underbrace{\frac{2\mu}{\hbar^2} E}_{k_0^2} \right] \phi_{\text{ein}} = 0 \quad (11)$$

$$[\nabla_\mu^2 + k_0^2] \phi_{\text{ein}} = 0 \quad (12)$$

Aus der Gleichung ist zu entnehmen, dass das Teilchen sich wie ein freies Teilchen verhält und die Lösungen sind die bekannten ebenen Wellen:

$$\phi_{\text{ein}}(\vec{r}) = A e^{i\vec{k}_0 \vec{r}} \quad (13)$$

Nach dem das Teilchen mit dem Target kollidiert ist, also nach der Wechselwirkung (Streuung), entsteht eine gestreute Wellenfunktion, die im Falle einer isotropischen Potential sich wie eine Kugelwelle verhält mit der Form $\frac{e^{i\vec{k} \vec{r}}}{r}$. Im Allgemeinen jedoch ist die gestreute Welle nicht spärlich symmetrisch, ihre Amplitude hängt von dem Richtung (θ, ϕ) ab. Damit gilt:

$$\phi_{\text{gestr}} = A f(\theta, \phi) \frac{e^{i\vec{k} \vec{r}}}{r} \quad (14)$$

Referenzen

- Claude Cohen-Tannoudji Quantenmechanik Band 2
- Zettili Quanten Mechanics
- Rollnik Quantentheorie 2