1 Ehrenfest-Theorem

Das Ehrenfest-Theorem besagt, dass unter bestimmten Bedingungen die klassischen Bewegungsgleichungen für die Mittelwerte der Quantenmechanik gelten.

1.1 Herleitung

Betrachte die Heisenberg-Bewegungsgleichung:

$$\frac{d}{dt}O = \frac{i}{\hbar}[H, O] + \frac{\partial}{\partial t}O$$

Die Erwartungswerte der einzelnen Operatoren durch Mittlung der Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\langle O\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [H, O]\rangle + \langle \frac{\partial}{\partial t}O\rangle$$

Nun können wir die Zeitlichen Ableitungen vom Impuls und Ort Erwartungswert berechnen mit der Annhame dass gilt $\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle p\rangle &= \frac{i}{\hbar}\langle [H, p]\rangle \qquad (1)\\
&= \frac{i}{\hbar}\langle [\frac{p^2}{2m} + V(x), p]\rangle \qquad (2)\\
&= \frac{i}{\hbar}\langle [V(x), p]\rangle \qquad (3)\\
&= \frac{i}{\hbar}\langle [V(x), \frac{\hbar}{i}\nabla]\rangle \qquad (4)\\
& \qquad (5)
\end{aligned}$$

NR:

$$\begin{aligned}
[V(x), \frac{\hbar}{i}\nabla]\psi &= \frac{\hbar}{i}V(x)\nabla\psi - \frac{\hbar}{i}\nabla(V(x)\psi) \qquad (6)\\
&= \frac{\hbar}{i}V(x)\nabla\psi - \frac{\hbar}{i}(\psi(x)(\nabla V(x)) + V(x)(\nabla\psi(x))) \qquad (7)\\
&= \cancel{\frac{\hbar}{i}V(x)\nabla\psi} - \frac{\hbar}{i}\psi(x)(\nabla V(x)) \cancel{- \frac{\hbar}{i}V(x)(\nabla\psi(x))} \qquad (8)\\
&= -\frac{\hbar}{i}\psi(x)(\nabla V(x)) \qquad (9)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow [V(x), \frac{\hbar}{i}\nabla] = -\frac{\hbar}{i}\nabla V(x)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\langle p\rangle = -\langle \nabla V(x)\rangle = \langle F(x)\rangle \qquad (10)$$

Und nun für den Ort:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle x\rangle &= \frac{i}{\hbar}\langle [H, x]\rangle \qquad (11)\\
&= \frac{i}{\hbar}\langle [\frac{p^2}{2m} + V(x), x]\rangle \qquad (12)\\
&= \frac{i}{\hbar}\frac{1}{2m}\langle [p^2, x]\rangle \qquad (13)\\
&= \frac{i}{\hbar}\frac{1}{2m}\langle p\underbrace{[p, x]}_{-i\hbar} + \underbrace{[p, x]}_{-i\hbar}p\rangle \qquad (14)\\
&= \frac{i}{\hbar}\frac{1}{2m}\langle -2i\hbar p\rangle \qquad (15)\\
&= \frac{1}{m}\langle p\rangle \qquad (16)\\
& \qquad (17)
\end{aligned}$$

Zusammengefasst:

$$m\frac{d}{dt}\langle x\rangle = \langle p\rangle \qquad \frac{d}{dt}\langle p\rangle = -\langle \nabla V(x)\rangle$$

$$\Rightarrow m\frac{d^2}{dt^2}\langle x\rangle = -\langle \nabla V(x)\rangle = \langle F(x)\rangle$$