Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych drugiego rzędu z warunkami brzegowymi

Weronika Lara

11 maja 2019

Rozdział 1

Wstęp

Cytując [1, Rozdział 3, sekcja 2]

Rozdział 2

Preliminaria

2.1 Oznaczenia w pracy

W całości pracy stosowane są następujące oznaczenia dla powszechnie znanych pojęć.

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)$ - oznaczać będzie pochodna funkcji f po zmiennej t. W szczególności $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}$ oznaczać będzie n-tą pochodną po tejże zmiennej.
- t, x, y, u - W przekroju pracy rozważane są równania zwyczajne oraz cząstkowe. W przypadku równań zwyczajnych najczęściej symbolem t oznaczać będziemy zmienną, natomiast x będzie używane do oznaczania poszukiwanej funkcji. W przypadku równań cząstkowych natomiast symbolami t, x, y oznaczać będziemy zmienne (czasami również $x_1, \ldots, x_n$) natomiast u oznaczać będzie naszą nieznaną i poszukiwaną funkcję.

2.2 Elementy rachunku różniczkowego i całkowego

2.3 Elementy analizy funkcjonalne

2.4 Równania różniczkowe zwyczajne

Definicja 1.
Niech $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. Postacią ogólną równania różniczkowego zwyczajnego nazywamy równianie:

$$F(t, x(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t), ..., \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}x(t)) = 0,$$

gdzie $x \in \mathrm{C}^k\left((a,b);\mathbb{R}^n\right)$ dla $F\colon D \to \mathbb{R}^n$ i D zbioru otwartego w $\mathbb{R}^{1+(k+1)n}$. Rzędem takiego równania nazywamy wtedy liczbę naturalną k.

Powyższa postać równania różniczkowego nie jest jednak najpowszechniej spotykaną. Powyższą postać możnaby utożsamiać z postacią uwikłaną funkcji. Częściej natomiast interesują nas równania różniczkowe zadane w postaci jawnej.

Definicja 2 (Postać jawna równania różniczkowego zwyczajnego)**.**
Równaniem różniczkowym zwyczajnym w postaci jawnej nazwiemy równanie postaci

$$\frac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d}t^k} = f\left(t, x, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}t^{k-1}}x\right),$$

którego rozwiązaniem jest funkcja $x \in \mathrm{C}^k\left((a,b),\mathbb{R}^n\right)$.

W dalszej części pracy zakładać będziemy, że nasze równania różniczkowe zawsze będą w postaci jawnej.

2.4.1 Równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu

Skupmy na chwilę naszą uwagę jedynie na równaniu różniczkowym rzędu pierwszego. Wtedy równanie takie przyjmuje oczywiście postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x = f(t, x(t)), t \in (a, b),$$

gdzie $(a, b) \subset \mathbb{R}$ jest dowolnym nietrywialnym i ograniczonym przedziałem w $\mathbb{R}$, oraz $f\colon (a, b) \times G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ będące funkcją ciągłą. G jest tu pewnym zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^m$.

Interesować nas będzie następująca klasa problemów nazywana zagadnieniami początkowymi lub zagadnienia Cauchy'ego.

Problem 3 (Zagadnienie Cauchy'ego)**.**
Zagadnienie Cauchy'ego nazywamy równanie różniczkowe zwyczajne z warunkiem początkowym postaci:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x &= f(t, x), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

gdzie $t_0 \in (a, b)$, $x_0 \in G$ są ustalone z góry.

Rozdział 3

Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych

3.1 Ogólna teoria numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych

Teoria równań różniczkowych dostarcza nam wielu narzędzi do rozwiązywania swoich równań. Nie pozwala jednak na rozwiązywanie znacznej ilości problemów napotykanych w zadaniach inżynierskich. Problemem są tutaj często skomplikowane postacie funkcji, ilość zmiennych definiowanych w problemie, czy też nieprzychylne obliczeniom wartości współczynników w równaniu. Spotyka się również sytuacje w których równania różniczkowe określają brak istnienia rozwiązania, tymczasem symulacje inżynierskie zdarzają się przeczyć temu faktowi. W takich sytuacjach cenione są metody przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych, obecnie głównie z wykorzystaniem komputerów.

Aby umożliwić komputerowi rozwiazanie wybranego równania różniczkowego należy jednak pokanać kilka przeszkód. Zauważmy, że równania różniczkowe definiowane są niemal wyłącznie na ciągłych przedziałach dziedziny. Ponadto same przestrzenie naszych rozwiązań (przestrzenie funkcyjne) same posiadają nieskończenie, nieprzeliczalnie wiele, różnych funkcji. Stąd aby uzyskać przybliżone rozwiązanie wybranego równania różniczkowego, należy rozważyć podobny do niego model dyskretny - nazywany często jego dyskretyzacją.

W teorii numerycznych równań różniczkowych spotyka sie dwa rodzaje dyskretyzacji.

- dyskretyzacja w dziedzinie,
- dyskretyzacja w przestrzeni funkcyjnej.

W drugim rodzaju dysktretyzacji przestrzeń funkcji jest zastępowana skończoną liczbą kombinacji funkcji generujących. Funkcje generujące są wybierane na podstawie pewnych zestawów kryteriów. Jedną z najczęsciej spotykanych rodzajów funkcji generujących są tzw. elementy skończone. Tym rodzajem dyskretyzacji nie będziemy zajmować się wogóle w tej pracy.

Dyskretyzacja w dziedzinie oznacza zastąpienie ciągłego obszaru dziedziny za pomocą skończonej siatki punktów [1]. Funkcja będąca rozwiązaniem jest wtedy przybliżana za pomocą stablicowanej postaci, zaś na wykresie aproksymowana jest przez łamaną łączącą kolejne punkty wykresu. W tej pracy skupimy się wyłącznie na tym rodzaju dyskretyzacji.

Dyskretyzacje w dziedzinie pozostawiają bogatą rodzinę modeli. Różnice pomiędzy tymi modelami najczęściej dotyczą sposobu aproksymowania operatora pochodnej, ewentualnie ilości składowych przy rozwijaniu wartości funkcji w szeregi potęgowe.

[1] nazywanej często 'grid'

3.2 Numeryczne rozwiązywanie równań zwyczajnych

W sekcji tej rozważamy zagadnienie Cauchy'ego (patrz problem 3) pierwszego rzędu.

Omówmy kilka najprostszych schematów przybliżonego rozwiązywania takich równań.

3.2.1 Schemat otwarty Eulera

Definicja 4 (Przybliżenie pochodnej dla schematu otwartego).
Przybliżeniem pochodnej w modelach dyskretyzacji opartych o schemat otwarty Eulera nazywamy przybliżenie pochodnej funkcji

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x \approx \frac{x(t+h) - x(t)}{h},$$

gdzie $h > 0, h \in \mathbb{R}$ jest ustalonym krokiem.

Algorytm 5 (Schemat otwarty Eulera).
Następujące postępowanie służące do rozwiązywania zagadnienia 3 nazywamy schametam otwartym Eulera:

1. *Ustalamy N ilość punktów w dziedzinie równania.*
2. *Ustalamy $h > 0$ rozmiar kroku.*
3. *Generujemy dyskretyzację dziedziny $t_0 = t_0$, $t_1 = t_0 + h$, $\ldots$, $t_N = t_{N-1} + h$.*
4. *Ustalamy $x(t_0) = x_0$ zgodnie z warunkiem początkowym.*
5. *Dla kolejny $n \in \{0, \ldots, N-1\}$ stosujemy wzór*

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + hf(t_n, x(t_n)).$$

Wykorzystanie powyższego algorytmu zaprezentowaliśmy w przykładzie 8.

3.3 Teoria zbieżności schematów jednokrokowych

Teoria zbieżnosci schematów jednokrokowych jest teorią odmienną od teorii dla schematów wielokrokowych liniowych.

Istotnym pojęciem jest tu zgodność schematu jednokrokowego - inaczej konsystentność, którą definiujemy następująco:

Definicja 6.
Schemat jednokrokowy jest zgodny (konsystentny) jeśli :

g jest ciągłą ze względu na wszystkie zmienne

$g(0, t, x, x) = f(t, x)$ dla każdego (t, x)

g jest lipschtizowska ze względu na zmienne x_n i $x_n + 1$ tzn, istnieje stała $L > 0$ taka, że dla wszystkich $x_1, x_2, y_1, y_2 \in U_{x0}$

$|g(h, t, x_1, x_2) - g(h, t, y_1, y_2)| \leqslant L \sum k = 1^2 |x_k - y_k|$

Twierdzenie 7.
Jeśli rozwiązanie zagadnienia początkowego 3 $x \in C^{p+1}([t_0, T])$, schemat jednokrokowy jest zgodny i jest rzędu $p \geqslant 1$, to ten schemat jest zbieżny z rzędem p.

Dowód. Dowód zostanie przedstawiony tylko dla schematów otwartych rzędu p tzn. $g(h,t,x,y) = g(h,t,x)$. Oznaczmy przez $E_n = x_n - x(t_n)$, czyli błąd pomiędzy obliczonym schematem przybliżeniem rozwiązania dla czasu t_n, a dokładną wartością rozwiązania $x(t_n)$. Niech $\tau_n = e_h(t_n) = x(t_{n+1}) - x(t_n) - h(g(h,t_n,x_n)$ czyli τ_n to lokalny błąd schematu dla czasu t_n. Wtedy otrzymujemy, że $E_n = E_{n-1} + h(g(h,t_{n-1},x_{n-1}) - g(h,t_{n-1},x(t_{n-1}))) - \tau_{n-1}$, a stąd korzystając ze zgodności schematu, a dokładniej lipschtizowskości funkcji g, 6, otrzymujemy $|E_n| \leqslant (1+h*L)|E_{n-1}| + |\tau_{n-1}|$. Z indukcji matematycznej otrzymujemy : $|E_n| \leqslant (1+h*L)^n|E_0| + \sum k = 0^{n-1}(1+h*L)^{n-k-1}|\tau_k|$

Korzystając z tego, że ($|1+x| \leqslant e^{|x|}$) $(1+h*L)^n \leqslant e^{n*h*L} \leqslant e^{L*(T-t_0)}$ dla n takich, że $h*n \leqslant T - t_0$ widzimy, że

$|E_n| \leqslant e^{L*(T-t_0)}(|E_0| + \sum k = 0^{n-1}|\tau_k|)$ Zauważmy, że $E_0 = 0$. Widzimy tez, że $|\tau_n| \leqslant e_h$. Ponieważ schemat ma rząd p i $x \in C^{p+1}$, to $e_h = O(h^{p+1})$ zatem $|E_n| \leqslant e^{L*(T-t_0)}n * e_n \leqslant e^{L*(T-t_0)}\frac{T-t_0}{h}O(h^{p+1)=O(h^p)}$.

□

W szczególności zbieżność z rzędem p oznacza dla ustalonego $t \in [t_0, T]$ i $n*h = t$, że $|x_n^h - x(t)| = O(h^p) \to 0 h \to 0 (n \to \infty)$.

Rozdział 4

Cześć praktyczna

4.1 Schemat otwarty Eulera

Przykład 8 (Przykład)**.**

Rozdział 5

Podsumowanie

Bibliografia

[1] Andrzej Palczewski. Równania różniczkowe zwyczajne. *PWN, Warszawa*, 2004.