

Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych drugiego rzędu z warunkami brzegowymi

Weronika Lara

17 maja 2019

Rozdział 1

Wstęp

Cytując [1, Rozdział 3, sekcja 2]

Rozdział 2

Preliminaria

2.1 Oznaczenia w pracy

W całości pracy stosowane są następujące oznaczenia dla powszechnie znanych pojęć.

- $\frac{d}{dt}f(t)$ - oznaczać będzie pochodną funkcji f po zmiennej t . W szczególności $\frac{d^n}{dt^n}$ oznaczać będzie n -tą pochodną po tejże zmiennej.
- t, x, y, u - W przekroju pracy rozważane są równania zwyczajne oraz cząstkowe. W przypadku równań zwyczajnych najczęściej symbolem t oznaczać będziemy zmienną, natomiast x będzie używane do oznaczania poszukiwanej funkcji. W przypadku równań cząstkowych natomiast symbolami t, x, y oznaczać będziemy zmienne (czasami również x_1, \dots, x_n) natomiast u oznaczać będzie naszą nieznaną i poszukiwaną funkcję.

2.2 Elementy rachunku różniczkowego i całkowego

2.3 Elementy analizy funkcjonalnej

Definicja 1.

Niech X będzie przestrzenią nad ciałem $K \in \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$

Funkcję $\| \cdot \|$ nazywamy normą na X jeśli spełnione są następujące warunki

$$M1 \quad \forall x \in X (\|x\| = 0 \implies x = \emptyset)$$

$$M2 \quad \forall \alpha \in K \forall x \in X \quad \|x \cdot \alpha\| = \|\alpha\| \cdot \|x\|$$

$$M3 \quad \forall x, y \in X \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

2.4 Równania różniczkowe zwyczajne

Definicja 2.

Niech $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$. Postacią ogólną równania różniczkowego zwyczajnego nazywamy równanie:

$$F(t, x(t), \frac{d}{dt}x(t), \dots, \frac{d^k}{dt^k}x(t)) = 0,$$

gdzie $x \in C^k((a, b); \mathbb{R}^n)$ dla $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ i D zbioru otwartego w $\mathbb{R}^{1+(k+1)n}$. Rzędem takiego równania nazywamy wtedy liczbę naturalną k .

Powyższa postać równania różniczkowego nie jest jednak najpowszechniej spotykaną. Powyższą postać można by utożsamiać z postacią uwikłaną funkcji. Częściej natomiast interesują nas równania różniczkowe zadane w postaci jawnej.

Definicja 3 (Postać jawna równania różniczkowego zwyczajnego).

Równaniem różniczkowym zwyczajnym w postaci jawnej nazwiemy równanie postaci

$$\frac{d^k x}{dt^k} = f\left(t, x, \frac{d}{dt}x, \dots, \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}x\right),$$

którego rozwiązaniem jest funkcja $x \in C^k((a, b), \mathbb{R}^n)$.

W dalszej części pracy zakładać będziemy, że nasze równania różniczkowe zawsze będą w postaci jawnej.

2.4.1 Równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu

Skupmy na chwilę naszą uwagę jedynie na równaniu różniczkowym rzędu pierwszego. Wtedy równanie takie przyjmuje oczywiście postać

$$\frac{d}{dt}x = f(t, x(t)), t \in (a, b),$$

gdzie $(a, b) \subset \mathbb{R}$ jest dowolnym nietrywialnym i ograniczonym przedziałem w \mathbb{R} , oraz $f: (a, b) \times G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ będące funkcją ciągłą. G jest tu pewnym zbiorem otwartym w \mathbb{R}^m .

Interesować nas będzie następująca klasa problemów nazywana zagadnieniami początkowymi lub zagadnienia Cauchy'ego.

Problem 4 (Zagadnienie Cauchy'ego).

Zagadnienie Cauchy'ego nazywamy równanie różniczkowe zwyczajne z warunkiem początkowym postaci:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= f(t, x), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

gdzie $t_0 \in (a, b)$, $x_0 \in G$ są ustalone z góry.

Rozdział 3

Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych

3.1 Ogólna teoria numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych

Teoria równań różniczkowych dostarcza nam wielu narzędzi do rozwiązywania swoich równań. Nie pozwala jednak na rozwiązywanie znacznej ilości problemów napotykanym w zadaniach inżynierskich. Problemem są tutaj często skomplikowane postacie funkcji, ilość zmiennych definiowanych w problemie, czy też nieprzychylnie obliczeniom wartości współczynników w równaniu. Spotyka się również sytuacje w których równania różniczkowe określają brak istnienia rozwiązania, tymczasem symulacje inżynierskie zdarzają się przeczyć temu faktowi. W takich sytuacjach cenione są metody przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych, obecnie głównie z wykorzystaniem komputerów.

Aby umożliwić komputerowi rozwiązanie wybranego równania różniczkowego należy jednak pokonać kilka przeszkód. Zauważmy, że równania różniczkowe definiowane są niemal wyłącznie na ciągłych przedziałach dziedziny. Ponadto same przestrzenie naszych rozwiązań (przestrzenie funkcyjne) same posiadają nieskończenie, nieprzeliczalnie wiele, różnych funkcji. Stąd aby użyć przybliżonego rozwiązania wybranego równania różniczkowego, należy rozważyć podobny do niego model dyskretny - nazywany często jego dyskretyzacją.

W teorii numerycznych równań różniczkowych spotyka się dwa rodzaje dyskretyzacji.

- dyskretyzacja w dziedzinie,
- dyskretyzacja w przestrzeni funkcyjnej.

W drugim rodzaju dyskretyzacji przestrzeń funkcji jest zastępowana skończoną liczbą kombinacji funkcji generujących. Funkcje generujące są wybierane na podstawie pewnych zestawów kryteriów. Jedną z najczęściej spotykanych rodzajów funkcji generujących są tzw. elementy skończone. Tym rodzajem dyskretyzacji nie będziemy zajmować się w ogóle w tej pracy.

Dyskretyzacja w dziedzinie oznacza zastąpienie ciągłego obszaru dziedziny za pomocą skończonej siatki punktów¹. Funkcja będąca rozwiązaniem jest wtedy przybliżana za pomocą tablicowanej postaci, zaś na wykresie aproksymowana jest przez łamaną łączącą kolejne punkty wykresu. W tej pracy skupimy się wyłącznie na tym rodzaju dyskretyzacji.

Dyskretyzacje w dziedzinie pozostawiają bogatą rodzinę modeli. Różnice pomiędzy tymi modelami najczęściej dotyczą sposobu aproksymowania operatora pochodnej, ewentualnie ilości składowych przy rozwijaniu wartości funkcji w szeregi potęgowe.

¹nazywanej często 'grid'

3.2 Numeryczne rozwiązywanie równań zwyczajnych

W sekcji tej rozważamy zagadnienie Cauchy'ego (patrz problem 4) pierwszego rzędu.

Twierdzenie 5 (Peano).

Jeśli jest funkcją ciągłą na otoczeniu (t_0, x_0) , to istnieje rozwiązanie (4) określone w pewnym otoczeniu t_0 .

Twierdzenie 6 (Picarda - Lindelfa).

Jeśli f jest funkcją ciągłą na otoczeniu (t_0, x_0) oraz f jest funkcją Lipschitzowską względem x w pewnej kuli $B((t_0, x_0), \delta)$, tzn.

$$\exists L \geq 0 \forall ((t, x), (t, y)) \in B((t_0, x_0), \delta) \quad \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|$$

to istnieje $c > 0$ i $\epsilon \in C^1((t_0 - c, t_0 + c), \mathbb{R}^n)$ takie, że x jest jednoznacznym rozwiązaniem (4).

Omówmy kilka najprostszych schematów przybliżonego rozwiązywania takich równań.

3.2.1 Schemat otwarty Eulera

Definicja 7 (Przybliżenie pochodnej dla schematu otwartego).

Przybliżeniem pochodnej w modelach dyskretyzacji opartych o schemat otwarty Eulera nazywamy przybliżenie pochodnej funkcji

$$\frac{d}{dt}x \approx \frac{x(t+h) - x(t)}{h},$$

gdzie $h > 0, h \in \mathbb{R}$ jest ustalonym krokiem.

Algorytm 8 (Schemat otwarty Eulera).

Następujące postępowanie służące do rozwiązywania zagadnienia 4 nazywamy schematem otwartym Eulera:

1. Ustalamy N ilość punktów w dziedzinie równania.
2. Ustalamy $h > 0$ rozmiar kroku.
3. Generujemy dyskretyzację dziedziny $t_0 = t_0, t_1 = t_0 + h, \dots, t_N = t_{N-1} + h$.
4. Ustalamy $x(t_0) = x_0$ zgodnie z warunkiem początkowym.
5. Dla kolejnego $n \in \{0, \dots, N-1\}$ stosujemy wzór

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + hf(t_n, x(t_n)).$$

Wykorzystanie powyższego algorytmu zaprezentowaliśmy w przykładzie 11.

3.3 Teoria zbieżności schematów jednokrokowych

Definicja 9.

Dla zadania początkowego (4) schematem jednokrokowym dla stałego kroku $h = \frac{T-t_0}{N}$ nazywamy równanie różnicowe:

$$x_{n+1} = x_n + h\phi(h, t_n, x_n, n) \quad n = 0, \dots, N$$

gdzie $t_j = t_0 + jh$ a ϕ jest funkcją ciągłą określoną na $[0, H) \times [t_0, T) \times U_{x_0} \times U_{x_0}$ dla U_{x_0} otoczenia x_0 .

Teoria zbieżności schematów jednokrokowych jest teorią odmienną od teorii dla schematów wielokrokowych liniowych.

Istotnym pojęciem jest tu zgodność schematu jednokrokowego - inaczej konsystentność, którą definiujemy następująco:

Definicja 10.

Schemat jednokrokový jest zgodny (konsystentny) jeśli :

g jest ciągłą ze względu na wszystkie zmienne

$g(0, t, x, x) = f(t, x)$ dla każdego (t, x)

g jest lipschitzowska ze względu na zmienne x_n i $x_n + 1$ tzn, istnieje stała $L > 0$ taka, że dla wszystkich $x_1, x_2, y_1, y_2 \in U_{x_0}$

$$|g(h, t, x_1, x_2) - g(h, t, y_1, y_2)| \leq L \sum_{k=1}^2 |x_k - y_k|$$

Twierdzenie 11.

Jeśli rozwiązanie zagadnienia początkowego $x \in C^{p+1}([t_0, T])$, schemat jednokrokový jest zgodny i jest rzędu $p \geq 1$, to ten schemat jest zbieżny z rzędem p .

Dowód. Dowód zostanie przedstawiony tylko dla schematów otwartych rzędu p tzn. $g(h, t, x, y) = g(h, t, x)$. Oznaczmy przez $E_n = x_n - x(t_n)$, czyli błąd pomiędzy obliczonym schematem przybliżeniem rozwiązania dla czasu t_n , a dokładną wartością rozwiązania $x(t_n)$. Niech $\tau_n = e_h(t_n) = x(t_{n+1}) - x(t_n) - h(g(h, t_n, x_n))$ czyli τ_n to lokalny błąd schematu dla czasu t_n . Wtedy otrzymujemy, że $E_n = E_{n-1} + h(g(h, t_{n-1}, x_{n-1}) - g(h, t_{n-1}, x(t_{n-1}))) - \tau_{n-1}$, a stąd korzystając ze zgodności schematu, a dokładniej lipschitzowskości funkcji g , 9, otrzymujemy $|E_n| \leq (1 + h * L)|E_{n-1}| + |\tau_{n-1}|$. Z indukcji matematycznej otrzymujemy : $|E_n| \leq (1 + h * L)^n |E_0| + \sum_{k=0}^{n-1} (1 + h * L)^{n-k-1} |\tau_k|$

Korzystając z tego, że $(|1 + x| \leq e^{|x|})$ $(1 + h * L)^n \leq e^{n * h * L} \leq e^{L * (T - t_0)}$ dla n takich, że $h * n \leq T - t_0$ widzimy, że

$|E_n| \leq e^{L * (T - t_0)} (|E_0| + \sum_{k=0}^{n-1} |\tau_k|)$ Zauważmy, że $E_0 = 0$. Widzimy też, że $|\tau_n| \leq e_h$. Ponieważ schemat ma rząd p i $x \in C^{p+1}$, to $e_h = O(h^{p+1})$ zatem $|E_n| \leq e^{L * (T - t_0)} n * e_n \leq e^{L * (T - t_0)} \frac{T - t_0}{h} O(h^{p+1}) = O(h^p)$.

□

*W szczególności zbieżność z rzędem p oznacza dla ustalonego $t \in [t_0, T]$ i $n * h = t$, że $|x_n^h - x(t)| = O(h^p) \rightarrow 0$ $h \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).*

Rozdział 4

Cześć praktyczna

4.1 Schemat otwarty Eulera

Przykład 12 (Przykład).

Rozdział 5

Podsumowanie

Bibliografia

[1] *Andrzej Palczewski. Równania różniczkowe zwyczajne.* PWN, Warszawa, 2004.