Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych drugiego rzędu z warunkami brzegowymi

Weronika Lara

7 czerwca 2019

Rozdział 1

Wstęp

Cytując [1, Rozdział 3, sekcja 2]

Rozdział 2

Preliminaria

2.1 Oznaczenia w pracy

W całości pracy stosowane są następujące oznaczenia dla powszechnie znanych pojęć.

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)$ - oznaczać będzie pochodna funkcji f po zmiennej t. W szczególności $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}$ oznaczać będzie n-tą pochodną po tejże zmiennej.

- t, x, y, u - W przekroju pracy rozważane są równania zwyczajne oraz cząstkowe. W przypadku równań zwyczajnych najczęściej symbolem t oznaczać będziemy zmienną, natomiast x będzie używane do oznaczania poszukiwanej funkcji. W przypadku równań cząstkowych natomiast symbolami t, x, y oznaczać będziemy zmienne (czasami również $x_1, \ldots, x_n$) natomiast u oznaczać będzie naszą nieznaną i poszukiwaną funkcję.

2.2 Elementy rachunku różniczkowego i całkowego

2.3 Elementy analizy funkcjonalne

Definicja 1.
Niech X będzie przestrzenią nad ciałem $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Funkcję $\|\cdot\|$ nazywamy normą na X jeśli spełnione są następujące warunki

1. *Dla dowolnego $x \in X$*
$$\|x\| = 0 \implies x = \theta,$$

2. *Dla dowolnego $\alpha \in K$ oraz dowolnego $x \in X$*
$$\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \, ,$$

3. *Dla dowolnych $x, y \in X$*
$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \, .$$

2.4 Równania różniczkowe zwyczajne

Definicja 2.
Niech $F \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. Postacią ogólną równania różniczkowego zwyczajnego nazywamy równianie:

$$F(t, x(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t), ..., \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}x(t)) = 0,$$

gdzie $x \in \mathrm{C}^k\left((a,b);\mathbb{R}^n\right)$ dla $F\colon D \to \mathbb{R}^n$ i D zbioru otwartego w $\mathbb{R}^{1+(k+1)n}$. Rzędem takiego równania nazywamy wtedy liczbę naturalną k.

Powyższa postać równania różniczkowego nie jest jednak najpowszechniej spotykaną. Powyższą postać możnaby utożsamiać z postacią uwikłaną funkcji. Częściej natomiast interesują nas równania różniczkowe zadane w postaci jawnej.

Definicja 3 (Postać jawna równania różniczkowego zwyczajnego)**.**
Równaniem różniczkowym zwyczajnym w postaci jawnej nazwiemy równanie postaci

$$\frac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d}t^k} = f\left(t, x, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}t^{k-1}}x\right),$$

którego rozwiązaniem jest funkcja $x \in \mathrm{C}^k\left((a,b),\mathbb{R}^n\right)$.

W dalszej części pracy zakładać będziemy, że nasze równania różniczkowe zawsze będą w postaci jawnej.

2.4.1 Równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu

Skupmy na chwilę naszą uwagę jedynie na równaniu różniczkowym rzędu pierwszego. Wtedy równanie takie przyjmuje oczywiście postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x = f(t, x(t)), t \in (a,b),$$

gdzie $(a,b) \subset \mathbb{R}$ jest dowolnym nietrywialnym i ograniczonym przedziałem w $\mathbb{R}$, oraz $f\colon (a,b) \times G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ będące funkcją ciągłą. G jest tu pewnym zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^m$.

Interesować nas będzie następująca klasa problemów nazywana zagadnieniami początkowymi lub zagadnienia Cauchy'ego.

Problem 4 (Zagadnienie Cauchy'ego)**.**
Zagadnienie Cauchy'ego nazywamy równanie różniczkowe zwyczajne z warunkiem początkowym postaci:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x &= f(t, x), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

gdzie $t_0 \in (a,b)$, $x_0 \in G$ są ustalone z góry.

2.5 Równania różniczkowe cząstkowe

Równania różniczkowe cząstkowe są to równania, których rozwiązaniami są funkcje wielu zmiennych oraz w których pojawiają się pochodne cząstkowe. W tej części wymienimy ich główne typy, którymi będziemy posługiwali się w dalszej części pracy. Wprowadźmy oznaczenie

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}x^2}$$

dla $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ gdzie Δ i Ω jest obszarem.

2.5.1 Równania Eliptyczne

Podstawowym przykładem zagadnienia eliptycznego jest równanie Laplace'a postaci

$$-\Delta u(x) = f(x).$$

Dokładając warunek brzegowy otrzymamy równanie zwane równaniem Poissona. Szukamy tutaj $u \in^2 (\Omega) \cap (\Omega)$ takiego, że

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x) \\ u(s) &= g(s) \end{aligned}$$

dla $x \in \Omega$ i $\in \eth\Omega$. Możemy również wyróżnić ogólniejszą definicję równania eliptycznego drugiego rzędu. Rozważmy równanie różniczkowe liniowe drugiego rzędu dla ogólnego operatora liniowego drugiego rzędu L , określonego dla $u \in C^2(G)$ dla $G \subset \mathbb{R}^n$:

$$Lu = -\sum_{k,l=1}^{n} a_k l(x) \frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}x^k}(x) + c(x)u(x) = f(x)$$

gdzie $a_{kl}, b_k, c, f,$ są danymi funkcjami określonymi na $G\mathbb{R}^N$.

Definicja 5.
Mówimy, że równanie 2.5.1 jest eliptyczne w punkcie x gdy macierz $A(x) = (a_{kl}(x))_{kl=1,\cdots,n}$ jest dodatnio określona tzn dla dowolnego $\xi \in \mathbb{R}^n$ zachodzi :

$$\xi^t A(x)\xi \geqslant 0$$

Operator L jest eliptyczny w obszarze Ω jesli L jest eliptyczny w każdym punkcie obszaru Ω.

2.5.2 Równania hiperboliczne pierwszego rzędu

Dla pewnego $x \in \Omega\mathbb{R}^N$ równaniem różniczkowym hiperbolicznym pierwszego rzędu nazywamy równanie postaci:

$$F(x, u, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}u}, ..., \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}u^N}) = 0$$

gdzie $F : \Omega \times G \subset \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ i obszaru $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
W szczególności

$$F(x, u, \nabla u) = a(\vec{x})^T \nabla u + b(x)$$

dla danych funkcji $a_k, b, c : \Omega \to \mathbb{R}$.

2.5.3 Równania hiperboliczne drugiego rzędu

Dla dowolnego $t > 0$ oraz $x \in \Omega$ równaniem liniowym hiperbolicznym drugiego rzędu nazywamy równanie

$$\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}t^2} - Lu = f$$

dla operatora L eliptycznego w $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, gdzie $u_{tt} = \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t}$.

Przykład 6 (Równanie falowe)**.**
Niech $x \in \Omega\mathbb{R}^N$, dla $N = 1, 2, 3$

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} - \Delta u = f$$

2.5.4 Równania paraboliczne

Dla pewnego $t > 0$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ oraz operatora eliptycznego L równanie

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - Lu = f$$

nazywamy równaniem liniowym parabolicznym drugiego rzędu.

Przykład 7 (Równanie przewodnictwa cieplnego)**.**
Niech $t > 0$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ *dla* $N = 1, 2, 3$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - \Delta u = f$$

Rozdział 3

Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych

3.1 Ogólna teoria numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych

Teoria równań różniczkowych dostarcza nam wielu narzędzi do rozwiązywania swoich równań. Nie pozwala jednak na rozwiązywanie znacznej ilości problemów napotykanych w zadaniach inżynierskich. Problemem są tutaj często skomplikowane postacie funkcji, ilość zmiennych definiowanych w problemie, czy też nieprzychylne obliczeniom wartości współczynników w równaniu. Spotyka się również sytuacje w których równania różniczkowe określają brak istnienia rozwiązania, tymczasem symulacje inżynierskie zdarzają się przeczyć temu faktowi. W takich sytuacjach cenione są metody przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych, obecnie głównie z wykorzystaniem komputerów.

Aby umożliwić komputerowi rozwiazanie wybranego równania różniczkowego należy jednak pokanać kilka przeszkód. Zauważmy, że równania różniczkowe definiowane są niemal wyłącznie na ciągłych przedziałach dziedziny. Ponadto same przestrzenie naszych rozwiązań (przestrzenie funkcyjne) same posiadają nieskończenie, nieprzeliczalnie wiele, różnych funkcji. Stąd aby uzyskać przybliżone rozwiązanie wybranego równania różniczkowego, należy rozważyć podobny do niego model dyskretny - nazywany często jego dyskretyzacją.

W teorii numerycznych równań różniczkowych spotyka sie dwa rodzaje dyskretyzacji.

- *dyskretyzacja w dziedzinie,*
- *dyskretyzacja w przestrzeni funkcyjnej.*

W drugim rodzaju dysktretyzacji przestrzeń funkcji jest zastępowana skończoną liczbą kombinacji funkcji generujących. Funkcje generujące są wybierane na podstawie pewnych zestawów kryteriów. Jedną z najczęsciej spotykanych rodzajów funkcji generujących są tzw. elementy skończone. Tym rodzajem dyskretyzacji nie będziemy zajmować się wogóle w tej pracy.

Dyskretyzacja w dziedzinie oznacza zastąpienie ciągłego obszaru dziedziny za pomocą skończonej siatki punktów [1]. Funkcja będąca rozwiązaniem jest wtedy przybliżana za pomocą stablicowanej postaci, zaś na wykresie aproksymowana jest przez łamaną łączącą kolejne punkty wykresu. W tej pracy skupimy się wyłącznie na tym rodzaju dyskretyzacji.

Dyskretyzacje w dziedzinie pozostawiają bogatą rodzinę modeli. Różnice pomiędzy tymi modelami najczęściej dotyczą sposobu aproksymowania operatora pochodnej, ewentualnie ilości składowych przy rozwijaniu wartości funkcji w szeregi potęgowe.

[1] nazywanej często 'grid'

3.2 Numeryczne rozwiązywanie równań zwyczajnych

W sekcji tej rozważamy zagadnienie Cauchy'ego (patrz problem 4) pierwszego rzędu.

Twierdzenie 8 (Peano)**.**
Jeśli f jest funkcją ciągłą na otoczeniu (t_0, x_0), to istnieje rozwiązanie problemu 4 określone w pewnym otoczeniu t_0.

Twierdzenie 9 (Picarda - Lindelfa)**.**
Jeśli f jest funkcją ciągłą na otoczeniu (t_0, x_0) oraz f jest funkcją lipschtizowską względem x w pewnej kuli $\mathrm{B}\left((t_0, x_0); \delta\right)$. Tzn. istnieje taka $L \geqslant 0$, że dla każdych $((t, x), (t, y) \in \mathrm{B}\left((t_0, x_0); \delta\right)$ zachodzi

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leqslant L \|x - y\|$$

to istnieje $c > 0$ i $x \in \mathrm{C}^1\left((t_0 - c, t_0 + c); \mathbb{R}^n\right)$ takie,że x jest jednoznacznym rozwiązaniem (4).

Omówmy kilka najprostszych schematów przybliżonego rozwiązywania takich równań.

3.2.1 Schemat otwarty Eulera

Definicja 10 (Przybliżenie pochodnej dla schematu otwartego)**.**
Przybliżeniem pochodnej w modelach dyskretyzacji opartych o schemat otwarty Eulera nazywamy przybliżenie pochodnej funkcji

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x \approx \frac{x(t + h) - x(t)}{h},$$

gdzie $h > 0, h \in \mathbb{R}$ jest ustalonym krokiem.

Algorytm 11 (Schemat otwarty Eulera)**.**
Następujące postępowanie służące do rozwiązywania zagadnienia 4 nazywamy schametam otwartym Eulera:

1. *Ustalamy N ilość punktów w dziedzinie równania.*
2. *Ustalamy $h > 0$ rozmiar kroku.*
3. *Generujemy dyskretyzację dziedziny $t_0 = t_0$, $t_1 = t_0 + h$, $\ldots$, $t_N = t_{N-1} + h$.*
4. *Ustalamy $x(t_0) = x_0$ zgodnie z warunkiem początkowym.*
5. *Dla kolejny $n \in \{0, \ldots, N - 1\}$ stosujemy wzór*

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + hf(t_n, x(t_n)).$$

Wykorzystanie powyższego algorytmu zaprezentowaliśmy w przykładzie 14.

3.3 Teoria zbieżności schematów jednokrokowych

Definicja 12.
Schematem jednokrokowym dla problemu 4 dla stałego kroku $h = \frac{T - t_0}{N}$ nazywamy równanie różnicowe postaci:

$$x_{n+1} = x_n + h\phi(h, t_n, x_n, x_{n+1}),$$

dla $n = 0, ..., N$ oraz gdzie $t_j = t_0 + jh$, a ϕ jest funkcją ciągłą określoną na $[0, H) \times [t_0, T) \times U_{x_0} \times U_{x_0}$ gdzie U_{x_0} jest otoczeniem x_0.

Teoria zbieżnosci schematów jednokrokowych jest teorią odmienną od teorii dla schematów wielokrokowych liniowych.

Istotnym pojęciem jest tu zgodność schematu jednokrokowego - inaczej konsystentność, którą definiujemy następująco:

Definicja 13 (Zgodność schematu różnicowego)**.**
Schemat jednokrokowy jest zgodny (konsystentny) jeśli :

- ϕ *jest ciągłą ze względu na wszystkie zmienne,*
- $\pi(0,t,x,x) = f(t,x)$ *dla każdego* (t,x)*,*
- ϕ *jest lipschtizowska ze względu na zmienne* x_n *i* x_{n+1} *tzn, istnieje stała* $L > 0$ *taka, że dla wszystkich* $x_1, x_2, y_1, y_2 \in U_{x_0}$ *zachodzi*

$$|\phi(h,t,x_1,x_2) - \phi(h,t,y_1,y_2)| \leqslant L \sum_{k=1}^{2} |x_k - y_k|$$

Twierdzenie 14 (O zbieżności schematu różnicowego)**.**
Jeśli rozwiązanie zagadnienia początkowego 4 $x \in C^{p+1}([t_0,T])$*, schemat jednokrokowy jest zgodny i jest rzędu* $p \geqslant 1$*, to ten schemat jest zbieżny z rzędem* p*.*

Dowód twierdzenia 13 dla schematów otwartych

Dowód zostanie przedstawiony tylko dla schematów otwartych rzędu p *tzn.* $g(h,t,x,y) = g(h,t,x)$*. Oznaczmy przez* $E_n = x_n - x(t_n)$*, czyli błąd pomiędzy obliczonym schematem przybliżeniem rozwiązania dla czasu* t_n*, a dokładną wartością rozwiązania* $x(t_n)$*. Niech* $\tau_n = e_h(t_n) = x(t_{n+1}) - x(t_n) - h(g(h,t_n,x_n)$ *czyli* τ_n *to lokalny błąd schematu dla czasu* t_n*. Wtedy otrzymujemy, że* $E_n = E_{n-1} + h(g(h,t_{n-1},x_{n-1}) - g(h,t_{n-1},x(t_{n-1}))) - \tau_{n-1}$*, a stąd korzystając ze zgodności schematu, a dokładniej lipschtizowskości funkcji* g*, oraz definicji 12, otrzymujemy*

$$|E_n| \leqslant (1 + h \cdot L)|E_{n-1}| + |\tau_{n-1}|.$$

Z indukcji matematycznej otrzymujemy:

$$|E_n| \leqslant (1 + h \cdot L)^n |E_0| + \sum_{k=0}^{n-1} (1 + h \cdot L)^{n-k-1} |\tau_k|$$

Korzystając z tego, że $|1 + x| \leqslant e^{|x|}$ *oraz*

$$(1 + h \cdot L)^n \leqslant e^{n \cdot h \cdot L} \leqslant e^{L \cdot (T - t_0)}$$

dla n *takich, że* $h \cdot n \leqslant T - t_0$ *widzimy, że*

$$|E_n| \leqslant e^{L \cdot (T - t_0)} \left(|E_0| + \sum_{k=0}^{n-1} |\tau_k| \right)$$

Zauważmy, że $E_0 = 0$*. Widzimy też, że*

$$|\tau_n| \leqslant e_h.$$

Ponieważ schemat ma rząd p *i* $x \in C^{p+1}$*, to* $e_h = O(h^{p+1})$ *zatem*

$$|E_n| \leqslant e^{L \cdot (T - t_0)} n \cdot e_n \leqslant e^{L \cdot (T - t_0)} \frac{T - t_0}{h} O(h^{p+1}) = O(h^p).$$

□

Uwaga.
W szczególności zbieżność z rzędem p *oznacza dla ustalonego* $t \in [t_0, T]$ *i* $n \cdot h = t$*, że*

$$|x_n^h - x(t)| = O(h^p) \to 0h = 0,$$

gdy $n \to \infty$.

Rozdział 4

Cześć praktyczna

4.1 Schemat otwarty Eulera

Przykład 15 (Przykład).

Rozdział 5

Podsumowanie

Bibliografia

[1] Andrzej Palczewski. Równania różniczkowe zwyczajne. PWN, Warszawa*, 2004.*