Задача

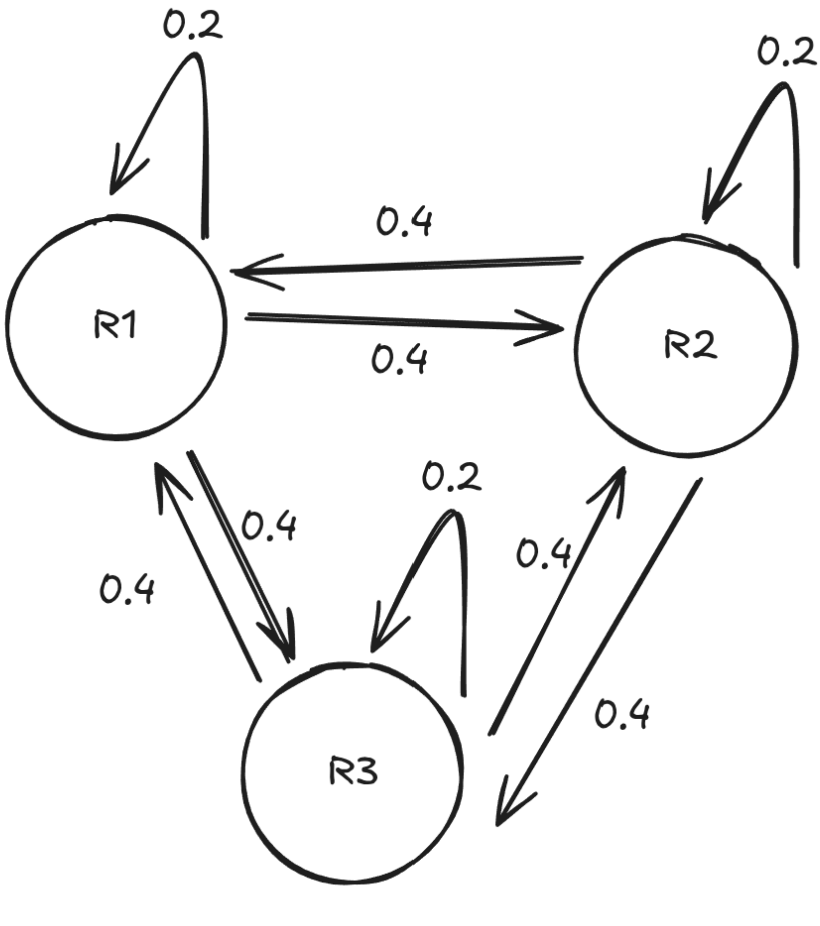
На контрольной работе, которую пишут три группы в разных аудиториях, есть по одному постоянному проверяющему и один главный проверяющий (ГП), который периодически перемещается между аудиториями. Каждую минуту ГП может переместиться, либо остаться на месте с вероятностью 0.2; его решения не зависят от истории предыдущих перемещений. Если он перемещается, то выбирает новую аудиторию случайно и равновероятно из доступных.

Будем моделировать поведение ГП как цепь Маркова.

1. Опишите явно, какие у этой цепи состояния и какая матрица перехода.
2. Если проверяющий стоит в стартовый момент в аудитории $R1$, каковы вероятности его нахождения в разных аудиториях через 10 минут?
3. Если контрольная длится 120 минут и ГП изначально следит в одной из аудиторий, какова вероятность, что на последней минуте он будет в той же аудитории?

Решение

Схема



1) Состояния и матрица переходов

Состояния. Пусть аудитории:

$$S = \{R1, R2, R3\}.$$

Определим $X_t \in S$ как аудиторию, в которой находится ГП в минуту t.

Переходы за 1 минуту. Из условия:

- с вероятностью 0.2 ГП остаётся в текущей аудитории;
- с вероятностью 0.8 он уходит в *другую* аудиторию, выбирая равновероятно одну из двух оставшихся.

Поэтому для любого i:

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = Ri \mid X_t = Ri) = 0.2,$$

а для любого $j \neq i$:

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = Rj \mid X_t = Ri) = \frac{0.8}{2} = 0.4.$$

Матрица перехода P. В порядке состояний $(R1, R2, R3)$:

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

2) Распределение через 10 минут при старте в $R1$

Стартовое распределение:

$$\mu_0 = (1, 0, 0).$$

Через n минут:

$$\mu_n = \mu_0 P^n.$$

Удобная формула для P^n (за счёт симметрии). Обозначим через J матрицу 3×3 из единиц и введём проектор на равномерное распределение:

$$\Pi = \frac{1}{3} J.$$

Тогда

$$P = -0.2\, I + 0.4\, J = \Pi + (-0.2)(I - \Pi).$$

У матриц Π и $(I - \Pi)$ выполняются тождества:

$$\Pi^2 = \Pi, \qquad (I - \Pi)^2 = (I - \Pi), \qquad \Pi(I - \Pi) = 0.$$

Отсюда для любого $n \geq 1$:

$$P^n = \Pi + (-0.2)^n\, (I - \Pi).$$

Применим это к μ_0:

$$\mu_n = \mu_0 \Pi + (-0.2)^n \big(\mu_0 - \mu_0 \Pi\big).$$

$$\mu_0 \Pi = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

$$\mu_n = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + (-0.2)^n \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Подставим $n = 10$

$$(-0.2)^{10} = 0.2^{10} = \left(\frac{1}{5}\right)^{10} = \frac{1}{9\,765\,625}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{10} = R1) &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9\,765\,625} = \frac{3\,255\,209}{9\,765\,625} \approx 0.3333334016,\\
\mathbb{P}(X_{10} = R2) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9\,765\,625} = \frac{3\,255\,208}{9\,765\,625} \approx 0.3333332992,\\
\mathbb{P}(X_{10} = R3) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9\,765\,625} = \frac{3\,255\,208}{9\,765\,625} \approx 0.3333332992.
\end{aligned}$$

3) Вероятность быть в исходной аудитории на последней минуте (120 минут)

Если стартуем в $R1$, то вероятность вернуться в $R1$ через n минут — это первая координата μ_n:

$$\mathbb{P}(X_n = R1 \mid X_0 = R1) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-0.2)^n.$$

Для $n = 120$:

$$\mathbb{P}(X_{120} = R1 \mid X_0 = R1) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot 0.2^{120} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot 5^{-120}.$$

Добавка $\frac{2}{3} \cdot 0.2^{120}$ крайне мала, поэтому практически

$$\mathbb{P}(X_{120} = \text{стартовая аудитория}) \approx \frac{1}{3}.$$