Задача 2

Рассмотрим блуждание на неориентированном графе. Частица (цепь Маркова) начинает в вершине 1 и далее на каждом шаге:

- с вероятностью $\alpha > 0$ остаётся в текущей вершине;
- с вероятностью $1 - \alpha$ переходит равновероятно в одну из соседних вершин.

1. Граф — путь $1-2-\cdots-k$. Описать матрицу переходов, найти инвариантные распределения, доказать эргодичность.
2. Граф — два несвязанных пути $1 - 2 - \cdots - k$ и $(k+1) - \cdots - (k+m)$. Описать матрицу переходов, найти инвариантные распределения, проверить эргодичность.
3. Граф — цикл $1-2-\cdots-k-1$. Найти инвариантное распределение и доказать эргодичность.

Обозначим пару частых фактов, на которые буду ссылаться

- **Факт A (про стационарное распределение для неориентированного графа).** Для (ленивого или неленивого) случайного блуждания на конечном неориентированном графе стационарное распределение пропорционально степеням: $\pi(v) \propto \deg(v)$.
- **Факт B (про эргодичность).** Конечная цепь Маркова эргодична $\Leftrightarrow$ она неприводима и апериодична. Здесь: неприводимость эквивалентна связности графа (по рёбрам можно добраться в любую вершину), а апериодичность при $\alpha > 0$ получается сразу, потому что есть самопереход $P_{ii} = \alpha > 0$ (значит период 1).

1) Путь $1 - 2 - \cdots - k$

Матрица переходов

Состояния: $S = \{1, 2, \dots, k\}$.

Степени вершин: $\deg(1) = \deg(k) = 1$, а для $2 \le i \le k-1$ имеем $\deg(i) = 2$.

Переходы:

$$P_{ii} = \alpha \quad \text{для всех } i.$$

Для концов:

$$P_{1,2} = 1 - \alpha, \qquad P_{k,k-1} = 1 - \alpha,$$

и других ненулевых переходов из 1 и k нет. Для внутренних вершин $2 \le i \le k-1$:

$$P_{i,i-1} = P_{i,i+1} = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Остальные элементы равны 0.

То есть P:

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1-\alpha}{2} & \alpha & \frac{1-\alpha}{2} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1-\alpha}{2} & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1-\alpha}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}.$$

Инвариантное распределение

По Факту A стационарное распределение пропорционально степеням:

$$\pi(i) = \frac{\deg(i)}{\sum_{x=1}^{k} \deg(x)}.$$

В пути $|E| = k-1$, а сумма степеней равна $2|E| = 2(k-1)$. Значит

$$\pi(1) = \pi(k) = \frac{1}{2(k-1)}, \qquad \pi(i) = \frac{2}{2(k-1)} = \frac{1}{k-1} \quad (2 \le i \le k-1).$$

Эргодичность

Путь связен $\Rightarrow$ цепь неприводима (частица может пройти по рёбрам от любой вершины к любой). Также $\alpha > 0 \Rightarrow P_{ii} = \alpha > 0$, значит цепь апериодична. По Факту B цепь эргодична. В частности, стационарное распределение единственно.

2) Два несвязанных пути $1 - 2 - \cdots - k$ и $(k+1) - \cdots - (k+m)$

Матрица переходов

Состояния: $S = \{1, 2, \ldots, k+m\}$.

Переходы возможны только внутри своей компоненты связности, поэтому матрица P блочно-диагональная:

$$P = \begin{pmatrix} P^{(1)} & 0 \\ 0 & P^{(2)} \end{pmatrix},$$

где $P^{(1)}$ — матрица из пункта 1 на вершинах $\{1, \ldots, k\}$, а $P^{(2)}$ — такая же матрица для пути на вершинах $\{k+1, \ldots, k+m\}$ (с теми же формулами, просто индексы сдвинуты).

Иными словами:

- если $i \in \{1, \ldots, k\}$, то $P_{ij} = 0$ при $j \notin \{1, \ldots, k\}$;
- если $i \in \{k+1, \ldots, k+m\}$, то $P_{ij} = 0$ при $j \notin \{k+1, \ldots, k+m\}$;
- внутри каждого блока действуют правила ленивого блуждания по соответствующему пути.

Инвариантные распределения

Здесь две замкнутые компоненты:

$$C_1 = \{1, \ldots, k\}, \qquad C_2 = \{k+1, \ldots, k+m\}.$$

Цепь не может переносить вероятность между C_1 и C_2 (между блоками нули), поэтому стационарные распределения не единственны: можно “положить” любую долю массы на первую компоненту и оставшуюся на вторую.

Пусть $\pi^{(1)}$ — стационарное распределение на C_1, продолженное нулями на C_2:

$$\pi^{(1)}(i) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(k-1)}, & i \in \{1, k\}, \\ \dfrac{1}{k-1}, & i \in \{2, \ldots, k-1\}, \\ 0, & i \in C_2. \end{cases}$$

Аналогично $\pi^{(2)}$ — стационарное распределение на C_2, продолженное нулями на C_1:

$$\pi^{(2)}(j) = \begin{cases} 0, & j \in C_1, \\ \dfrac{1}{2(m-1)}, & j \in \{k+1, k+m\}, \\ \dfrac{1}{m-1}, & j \in \{k+2, \dots, k+m-1\}. \end{cases}$$

Любое инвариантное распределение имеет вид

$$\pi = c\,\pi^{(1)} + (1-c)\,\pi^{(2)}, \qquad c \in [0,1].$$

Пояснение: c — это просто общая масса вероятности, которую π кладёт на C_1, а внутри каждой компоненты стационарность заставляет распределение быть пропорциональным степеням (Факт A), как в пункте 1.

Эргодичность

Её нет. Граф несвязен $\Rightarrow$ цепь приводима $\Rightarrow$ эргодичности нет (Факт B требует неприводимость).

Замечание про старт из вершины 1. Если $X_0 = 1 \in C_1$, то с вероятностью 1 цепь навсегда остаётся в C_1, и внутри C_1 она будет сходиться к $\pi^{(1)}$ (но на всём S цепь всё равно не эргодическая).

3) Цикл $1 - 2 - \cdots - k - 1$

Матрица переходов

Состояния: $S = \{1, 2, \dots, k\}$. У каждой вершины в цикле степень $\deg(i) = 2$. Соседи вершины i: $i-1$ и $i+1$ по модулю k (то есть $0 \equiv k$, $k+1 \equiv 1$).

Переходы:

$$P_{ii} = \alpha, \qquad P_{i,i-1} = P_{i,i+1} = \frac{1-\alpha}{2} \quad \text{(индексы по модулю } k\text{)},$$

остальные элементы 0.

Инвариантное распределение

По Факту A: $\pi(v) \propto \deg(v)$. Но степени равны, значит распределение равномерно:

$$\pi(i) = \frac{1}{k} \quad \text{для всех } i.$$

Эргодичность

Цикл связен $\Rightarrow$ цепь неприводима. $\alpha > 0 \Rightarrow$ есть самопереход в каждой вершине $\Rightarrow$ апериодичность. По Факту B цепь эргодична.