Подготовка: Дифференциальные уравнения

Полная версия с разборами тем и ссылками

11 сентября 2025 г.

Содержание

1 Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами (ЛОС)

1. Тип экзаменационной задачи (полное условие)

Найдите общее решение:

$$y_{t+3} - y_{t+2} + 4y_{t+1} - 4y_t \ = \ 26 \cdot 3^t + 10t + 9,$$

где $t \in \mathbb{Z}$, $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$).

2. Универсальный алгоритм (визуальные формулы и детерминированные шаги)

Исходные данные и обозначения (ввод). Дано ЛОС порядка $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n y_{t+n} + a_{n-1} y_{t+n-1} + \cdots + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = f(t),$$

где $a_n \neq 0,\ a_k \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), $\ t \in \mathbb{Z}$. Вводим: $\chi(r) := r^n + b_{n-1} r^{n-1} + \cdots + b_1 r + b_0$ — характеристический многочлен (после нормировки $a_n = 1$); $k_\chi(\lambda) \in \mathbb{N}$ — кратность корня λ в χ; $P_d(t) \in \mathbb{R}[t]$ — произвольный полином степени $\le d$; $Q_{\lambda,\theta}(r) := r^2 - 2\lambda\cos\theta\, r + \lambda^2$.

Шаг 0. Привести уравнение к канонической форме.
Разделить на a_n (если $a_n \neq 1$) и написать

$$y_{t+n} + b_{n-1} y_{t+n-1} + \cdots + b_1 y_{t+1} + b_0 y_t = f(t).$$

Шаг 1. Построить $\chi(r)$ и зафиксировать кратности корней.
Выписать $\chi(r) = r^n + b_{n-1} r^{n-1} + \cdots + b_1 r + b_0$, найти все λ_j и $k_\chi(\lambda_j)$.

Шаг 2. Записать общее решение однородной части $y_t^{(h)}$.
Для каждого корня λ кратности $s = k_\chi(\lambda)$ включить базис

$$t^0\lambda^t,\ t^1\lambda^t, \ldots, t^{s-1}\lambda^t;$$

для пары $\lambda = \rho e^{i\theta}$, $\bar\lambda = \rho e^{-i\theta}$ — реальный базис $\rho^t\cos(\theta t),\ \rho^t\sin(\theta t)$.

Таблица соответствий (множитель $\Rightarrow$ вклад в $y^{(h)}$):

Множитель	Вклад в y(h)
$(r-\lambda)^s$	$P_{s-1}(t)\lambda^t$
$(r^2 - 2\rho\cos\theta\, r + \rho^2)^s$	$P_{s-1}(t)\rho^t\cos(\theta t),\ P_{s-1}(t)\rho^t\sin(\theta t)$

Шаг 3. Выбрать пробную форму $y_t^{(p)}$ по атомам $f(t)$ и признакам резонанса через χ.
Разложить $f(t)$ на атомы и применить правила из таблицы:

Атом	Резонанс?	Вклад в y(p)
λ^t	$k_\chi(\lambda) = 0$?	$A\,\lambda^t$
$P_d(t)$	$k_\chi(1) = 0$?	$c_0 + c_1 t + \cdots + c_d t^d$
$\lambda^t P_d(t)$	$k_\chi(\lambda) = 0$?	$\lambda^t(c_0 + c_1 t + \cdots + c_d t^d)$
$\lambda^t\cos(\theta t)$ $\lambda^t\sin(\theta t)$	$Q_{\lambda,\theta} \mid \chi$?	$\lambda^t(A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t))$
При резонансе:	**любая форма**	**умножить на** t^s

Шаг 4. Определить коэффициенты пробной формы.
Подставить $y^{(p)}$ в уравнение, сгруппировать по независимым типам (λ^t, t^k, $\lambda^t\cos/\sin$) и решить линейную систему на коэффициенты.

Шаг 5. Собрать общий ответ и учесть начальные условия (при наличии).
Записать $y_t = y_t^{(h)} + y_t^{(p)}$. При наличии $y_0, \ldots, y_{n-1}$ подставить соответствующие t и решить систему для констант при $y^{(h)}$.

3. Сопроводительные материалы (таблицы и обозначения)

Атом $\to$ пробная форма (до резонанса):

$$\lambda^t \mapsto A\,\lambda^t, \qquad P_d(t) \mapsto c_0 + c_1 t + \cdots + c_d t^d, \qquad \lambda^t P_d(t) \mapsto \lambda^t(c_0 + c_1 t + \cdots + c_d t^d),$$

$$\lambda^t \cos(\theta t),\ \lambda^t \sin(\theta t) \mapsto \lambda^t\big(A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t)\big).$$

Правило резонанса (через χ): $s = k_\chi(1)$ для $P_d(t)$; $s = k_\chi(\lambda)$ для $\lambda^t P_d(t)$; если $Q_{\lambda,\theta} \mid \chi$, умножить триг-форму на t^s.

4. Применение алгоритма к объявленной задаче

$$y_{t+3} - y_{t+2} + 4y_{t+1} - 4y_t \ = \ 26 \cdot 3^t + 10t + 9.$$

Шаг 0. Канонический вид зафиксирован.
Уравнение уже записано как $y_{t+3} + (-1)y_{t+2} + 4y_{t+1} + (-4)y_t = f(t)$, нормировка не требуется.

Шаг 1. Построить $\chi(r)$ и кратности корней.
$\chi(r) = r^3 - r^2 + 4r - 4 = (r-1)(r^2+4)$; корни $1, \pm 2i$, все кратности равны 1: $k_\chi(1) = 1$, $k_\chi(\pm 2i) = 1$.

Шаг 2. Записать $y_t^{(h)}$ по найденному спектру.

$$y_t^{(h)} = C_1 \cdot 1^t + 2^t\Big(C_2 \cos\tfrac{\pi t}{2} + C_3 \sin\tfrac{\pi t}{2}\Big).$$

Шаг 3. Выбрать $y_t^{(p)}$ по атомам RHS и признакам резонанса на χ.
$f(t) = 26 \cdot 3^t + P_1(t)$, где $P_1(t) = 10t + 9$.

- Для 3^t: $k_\chi(3) = 0$ (3 не корень) $\Rightarrow A \cdot 3^t$
- Для $P_1(t)$: $k_\chi(1) = 1$ (1 — корень кратности 1) $\Rightarrow t(\tilde{a}t + \tilde{b}) = \tilde{a}t^2 + \tilde{b}t$

Итого

$$y_t^{(p)} = A \cdot 3^t + a\,t^2 + b\,t.$$

Шаг 4. Найти коэффициенты пробной формы, учитывая разложение по типам.
Подстановка даёт

$$L[y^{(p)}] = 26A \cdot 3^t + 10a\,t + (9a + 5b) \overset{!}{=} 26 \cdot 3^t + 10t + 9 \Rightarrow A = 1,\ a = 1,\ b = 0.$$

Следовательно, $y_t^{(p)} = 3^t + t^2$.

Шаг 5. Собрать общий ответ и отметить, как добавляются начальные условия.

$$\boxed{y_t = C_1 + 2^t\Big(C_2 \cos\tfrac{\pi t}{2} + C_3 \sin\tfrac{\pi t}{2}\Big) + 3^t + t^2}.$$

При наличии y_0, y_1, y_2 — подставить $t = 0, 1, 2$ и решить систему для C_1, C_2, C_3.

2 Синтез разностного уравнения по заданным решениям

1. Тип экзаменационной задачи (полное условие)

Задача. Построить *линейное однородное разностное уравнение с постоянными коэффициентами* минимально возможного порядка, частными решениями которого являются

$$y_t^{(1)} = 3^t, \qquad y_t^{(2)} = 2^t \sin\frac{\pi t}{3}.$$

(Решение здесь не приводится; это контекст для главы.)

2. Универсальный алгоритм (визуальные формулы и детерминированные шаги)

Исходные данные и обозначения (ввод). Дано множество частных решений $\{y_t^{(k)}\}_{k=1}^K$ ЛОС. Требуется построить характеристический полином $p(\lambda)$ минимального порядка N такой, что все $y_t^{(k)}$ являются решениями уравнения $p(L)[y_t] = 0$, где L — оператор сдвига $Ly_t = y_{t+1}$.

Вводим: $\alpha \in \mathbb{R}$ — основание экспоненты; $\omega \in \mathbb{R}$ — частота тригонометрических функций; $s \in \mathbb{N}_0$ — степень полинома t^s; $p(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$ — характеристический полином.

Шаг 0. Распознать «атом» каждого данного решения.
Для каждого $y_t^{(k)}$ определить одну из форм: α^t; $t^s\alpha^t$; $\alpha^t\cos(\omega t)$ или $\alpha^t\sin(\omega t)$; $t^s\alpha^t\cos(\omega t)$ или $t^s\alpha^t\sin(\omega t)$.

Шаг 1. Получить характеристический множитель(и) для каждого атома.
По таблице соответствий заменить атом на множитель $p(\lambda)$ с учётом кратности $(s+1)$.

Шаг 2. Собрать общий характеристический полином минимального порядка.
Перемножить *разные* множители (комплексные корни берутся парой $\Rightarrow$ реальный квадратичный множитель). Повторы дают максимальную кратность.

Шаг 3. Записать разностное уравнение.
Привести $p(\lambda)$ к виду $\lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ и выписать

$$y_{t+N} + a_{N-1}y_{t+N-1} + \cdots + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = 0.$$

Шаг 4. Проверить минимальность и корректность.
Убедиться, что N равен сумме степеней множителей; проверить зануление $p(\lambda)$ на атомах (для тригонометрических — на $\lambda = \alpha e^{\pm i\omega}$).

3. Сопроводительные материалы (таблицы и обозначения)

Таблица соответствий (атом $\Rightarrow$ множитель $\Rightarrow$ кратность):

Атом	Множитель	Кратность
α^t	$(\lambda-\alpha)$	1
$t^s\alpha^t$	$(\lambda-\alpha)^{s+1}$	$s+1$
$\alpha^t\cos(\omega t), \alpha^t\sin(\omega t)$	$\lambda^2 - 2\alpha\cos\omega\,\lambda + \alpha^2$	1
$t^s\alpha^t\cos(\omega t), t^s\alpha^t\sin(\omega t)$	$(\lambda^2 - 2\alpha\cos\omega\,\lambda + \alpha^2)^{s+1}$	$s+1$

Быстрые значения $\cos\omega$**:**

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Правила сборки: (i) Пара $\{\cos, \sin\}$ с одинаковыми α, ω даёт один и тот же квадратичный множитель (не удваивать). (ii) При нескольких степенях t^s берётся максимальная кратность.

4. Применение алгоритма к объявленной задаче

Дано: $y_t^{(1)} = 3^t$, $y_t^{(2)} = 2^t \sin\frac{\pi t}{3}$.

Шаг 0. Распознать «атом» каждого данного решения.
Атомы: 3^t $(\alpha = 3)$; $2^t \sin(\pi t/3)$ $(\alpha = 2,\ \omega = \pi/3)$.

Шаг 1. Получить характеристический множитель(и) для каждого атома.
Множители: $(\lambda - 3)$ и $\lambda^2 - 2 \cdot 2\cos(\pi/3)\lambda + 2^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 4$.

Шаг 2. Собрать общий характеристический полином минимального порядка.
Сборка: $p(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 2\lambda + 4)$.

Шаг 3. Записать разностное уравнение.
Развёртка: $p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 10\lambda - 12$. Соответствующее ЛОС:

$$\boxed{y_{t+3} - 5y_{t+2} + 10y_{t+1} - 12y_t = 0}.$$

Шаг 4. Проверить минимальность и корректность.
Минимальность: порядок $N = 3$; проверка $p(3) = 0$ и $\lambda = 2e^{\pm i\pi/3}$ зануляют квадратичный множитель.

3 Нелинейные 2D-системы: равновесия, линеаризация, классификация

1. Тип экзаменационной задачи (полное условие)

Условие. Найдите положения равновесия автономной системы уравнений, определите их характер, и нарисуйте фазовые портреты в окрестности положений равновесия

$$\begin{cases} \dot{x} = 2 - 2\sqrt{1 + x + y}, \\ \dot{y} = \exp\Big(\frac{5}{4}x + 2y + y^2\Big) - 1. \end{cases}$$

2. Универсальный алгоритм (визуальные формулы и детерминированные шаги)

Исходные данные и обозначения (ввод). Дана автономная система $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$, где $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Требуется найти положения равновесия (x_0, y_0) такие, что $f(x_0, y_0) = 0$, $g(x_0, y_0) = 0$, и классифицировать их характер.

Вводим: $J(x, y)$ — матрица Якоби; $\operatorname{tr} J = f_x + g_y$ — след; $\det J = f_x g_y - f_y g_x$ — определитель; $D = \operatorname{tr}^2 - 4\det$ — дискриминант; $\lambda_{1,2}$ — собственные значения J.

Шаг 0. Найти положения равновесия.
Решить систему $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ и найти все точки (x_0, y_0) такие, что $f(x_0, y_0) = 0$, $g(x_0, y_0) = 0$.

Шаг 1. Составить матрицу Якоби.
Вычислить частные производные и составить

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Вычислить инварианты в каждой точке равновесия.
Для каждой точки (x_0, y_0) вычислить:

$$\operatorname{tr} J(x_0, y_0), \quad \det J(x_0, y_0), \quad D = \operatorname{tr}^2 - 4\det.$$

Шаг 3. Классифицировать тип точки по детектору.
Применить правила из таблицы классификации по знакам $\det$, D, tr.

Шаг 4. Определить устойчивость и направления.
По знаку tr и типу точки зафиксировать вход/выход; для седла отметить две сепаратрисы вдоль собственных направлений J.

Шаг 5. Нарисовать фазовый портрет.
Нанести типы точек и стрелки; при необходимости использовать изоклины $f = 0$, $g = 0$ для знаков $\dot{x}$, $\dot{y}$.

3. Сопроводительные материалы (таблицы и обозначения)

Таблица классификации равновесий:

Условие	Тип точки	Устойчивость
$\det < 0$	седло	неустойчивая
$\det > 0,\ D > 0,\ \mathrm{tr} < 0$	узел	устойчивый
$\det > 0,\ D > 0,\ \mathrm{tr} > 0$	узел	неустойчивый
$\det > 0,\ D < 0,\ \mathrm{tr} < 0$	фокус	устойчивый
$\det > 0,\ D < 0,\ \mathrm{tr} > 0$	фокус	неустойчивый
$\det > 0,\ D = 0$ или $\det = 0$	негиперболика	см. главу M10

Быстрые производные (частые атомы):

$$f(x,y) = A - B\sqrt{\Phi(x,y)}: \quad f_x = -\frac{B}{2}\Phi^{-1/2}\Phi_x, \quad f_y = -\frac{B}{2}\Phi^{-1/2}\Phi_y;$$
$$g(x,y) = e^{\Psi(x,y)} - 1: \quad g_x = e^{\Psi}\Psi_x, \quad g_y = e^{\Psi}\Psi_y.$$

Правила упрощения: Если в равновесии $g = 0$, то $e^{\Psi} = 1$ и $g_x = \Psi_x$, $g_y = \Psi_y$; если $1 + x + y = 1$, то $\sqrt{1 + x + y} = 1$ и $f_x = f_y = -1$.

4. Применение алгоритма к объявленной задаче

Дано: $\dot{x} = 2 - 2\sqrt{1 + x + y}$, $\dot{y} = \exp\!\left(\frac{5}{4}x + 2y + y^2\right) - 1$.

Шаг 0. Найти положения равновесия.
$f = 0 \ \Rightarrow\ \sqrt{1 + x + y} = 1 \ \Rightarrow\ x + y = 0.$ $\quad g = 0 \ \Rightarrow\ \frac{5}{4}x + 2y + y^2 = 0$. Подставляя $y = -x$:

$$x^2 - \tfrac{3}{4}x = 0 \ \Rightarrow\ x \in \{0, \tfrac{3}{4}\}.$$

Точки равновесия: $(0,0)$ и $(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$.

Шаг 1. Составить матрицу Якоби.
При $x + y = 0$ и $\Psi = 0$ имеем

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \frac{5}{4} & 2 + 2y \end{pmatrix}.$$

Значит $J(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \frac{5}{4} & 2 \end{pmatrix}$, $J(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Шаг 2. Вычислить инварианты в каждой точке равновесия.

$$(0,0): \ \mathrm{tr} = 1,\ \det = -\tfrac{3}{4} < 0;$$
$$(\tfrac{3}{4}, -\tfrac{3}{4}): \ \mathrm{tr} = -\tfrac{1}{2},\ \det = \tfrac{3}{4} > 0,\ D = \tfrac{1}{4} - 3 = -\tfrac{11}{4} < 0.$$

Шаг 3. Классифицировать тип точки по детектору.

$$(0,0): \ \det<0 \ \Rightarrow \ \text{седло (неустойчивая);}$$
$$(\tfrac{3}{4},-\tfrac{3}{4}): \ \det>0, \ D<0, \ \operatorname{tr}<0 \ \Rightarrow \ \text{фокус устойчивый.}$$

Шаг 4. Определить устойчивость и направления.
В $(0,0)$ — две сепаратрисы по собственным направлениям J; в $(\frac{3}{4},-\frac{3}{4})$ — спиральное вхождение.

Шаг 5. Нарисовать фазовый портрет.
Эскиз: седло в $(0,0)$ с «крестом» сепаратрис; устойчивый фокус в $(\frac{3}{4},-\frac{3}{4})$ со стрелками внутрь. Изоклина $x+y=0$ помогает ориентировать знаки $\dot{x}$.

$$\boxed{\text{Две точки равновесия: седло } (0,0) \text{ и устойчивый фокус } (\tfrac{3}{4},-\tfrac{3}{4})}$$

4 Линейные ОДУ 2-го порядка: нормальная форма, вронскиан, короткие доказательства

1. Тип экзаменационной задачи (полное условие)

Стейтмент. Пусть функции $p(x), q(x)$ непрерывны на $\mathbb{R}$ и $q(x)<0$ для всех x. Пусть $y(x)$ — нетривиальное решение

$$y''+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0.$$

Покажите, что если решение принимает максимальное значение в некоторой точке, то это значение не может быть больше 0.

2. Универсальный алгоритм (визуальные формулы и детерминированные шаги)

Исходные данные и обозначения (ввод). Дано линейное ОДУ 2-го порядка $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, где $p,q\in C(\mathbb{R})$. Требуется доказать качественные свойства решений (экстремумы, нули, устойчивость).

Вводим: $\phi(x)$ — интегрирующий множитель; $Q(x)$ — эффективный потенциал; $W(x)$ — вронскиан; $z(x)$ — решение в нормальной форме; x_0 — точка экстремума или нуля.

Шаг 0. Нормализация: увидеть p,q.
Привести уравнение к виду $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ и зафиксировать знаки $p(x)$, $q(x)$.

Шаг 1. Нормальная форма: убрать y' при необходимости.
Взять

$$\phi(x)=\exp\Big(-\tfrac{1}{2}\int p(x)\,dx\Big), \quad y=\phi z,$$

тогда

$$z''+Q(x)z=0, \qquad Q(x)=q-\frac{p'}{2}-\frac{p^2}{4}.$$

Шаг 2. Вронскиан: независимость/масштаб.
Формула Абеля:

$$W(x)=W(x_0)\,\exp\Big(-\int_{x_0}^{x}p(t)\,dt\Big).$$

Шаг 3. Локальные/качественные выводы: «максимум/минимум/нули».

- *Триггер «экстремум».* В точке максимума x_0: $y'(x_0) = 0,\ y''(x_0) \le 0$. Подставить в уравнение.
- *Триггер «≤ 1 нуля».* Перейти к $z'' + Qz = 0$; при $Q \le 0$:

$$\int_a^b zz''\,dx + \int_a^b Qz^2\,dx = 0 \Rightarrow -\int_a^b (z')^2\,dx + \int_a^b Qz^2\,dx = 0,$$

  что невозможно при двух нулях.

Шаг 4. Итог: короткая формулировка.
Выписать использованные ϕ, Q и/или W и сформулировать вывод.

3. Сопроводительные материалы (таблицы и обозначения)

Детектор ветки Шага 3:

Признак в условии	Действие
Есть «максимум/минимум», дан знак q	Экстремум-тест: $y' = 0$, знак y'', подстановка в ОДУ
Требуется «не более одного нуля»	Шаг 1 $\Rightarrow z'' + Qz = 0$, при $Q \le 0$ интегральный аргумент
Нужно проверить фундаментальность пары	Абель: $W(x) = W(x_0)e^{-\int p}$

Памятка формул М4:

$$\phi(x) = \exp\Big(-\tfrac{1}{2}\int p\Big), \qquad Q = q - \tfrac{1}{2}p' - \tfrac{1}{4}p^2, \qquad W(x) = W(x_0)\exp\Big(-\int_{x_0}^x p(t)\,dt\Big).$$

Правила экстремума: В точке локального максимума x_0: $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) \le 0$; в точке локального минимума: $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) \ge 0$.

4. Применение алгоритма к объявленной задаче

Дано: $y''+p(x)y'+q(x)y = 0$, где $q(x) < 0$ для всех x, и $y(x)$ — нетривиальное решение с максимумом в точке x_0.

Шаг 0. Нормализация: увидеть p, q.
Уравнение уже в виде $y'' + p\,y' + q\,y = 0$ с $q(x) < 0$ для всех x.

Шаг 1. Нормальная форма: убрать y' при необходимости.
Переход к z не требуется для данного доказательства.

Шаг 2. Вронскиан: независимость/масштаб.
Вронскиан не нужен для данного доказательства.

Шаг 3. Локальные/качественные выводы: «максимум/минимум/нули».
В точке локального максимума x_0: $y'(x_0) = 0,\ y''(x_0) \le 0$. Подставляя в уравнение:

$$y''(x_0) = -p(x_0)\,y'(x_0) - q(x_0)\,y(x_0) = -q(x_0)\,y(x_0).$$

При $q(x_0) < 0$ из $y(x_0) > 0$ следовало бы $y''(x_0) > 0$, что противоречит максимуму. Значит $y(x_0) \le 0$.

Шаг 4. Итог: короткая формулировка.

$$\boxed{\text{Положительный локальный максимум невозможен при } q(x) < 0}$$

5 ПЧП 1-го порядка (задача Коши по кривой)

1. Тип экзаменационной задачи (полное условие)

Даны две задачи Коши для уравнения

$$y\,z_x - x\,z_y = 0 :$$

а) $z = 2y$ при $x = 1$; б) $z = 2y$ при $x = 1 + y$. Искать решение в окрестности $(1, 0)$. Проверить условия теоремы существования–единственности.

2. Универсальный алгоритм (визуальные формулы и детерминированные шаги)

Исходные данные и обозначения (ввод). Дано квазилинейное ПЧП 1-го порядка $a(x, y)z_x + b(x, y)z_y = 0$, где $a, b \in C^1(\Omega \subset \mathbb{R}^2)$, и начальные данные на кривой $\gamma : s \mapsto (x(s), y(s))$: $z(\gamma(s)) = \varphi(s)$.

Вводим: $I_1(x, y)$ — первый интеграл (инвариант); $\Delta(s)$ — определитель нехарактеристичности; $\gamma'(s)$ — касательный вектор к кривой; F — произвольная функция.

Шаг 0. Найти характеристики.
Решить систему $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{a}$ и найти первый интеграл $I_1(x, y) = C_1$.

Шаг 1. Записать общее решение.
Общее решение имеет вид $z(x, y) = F(I_1(x, y))$, где F — произвольная функция.

Шаг 2. Сшить с начальными данными.
Подставить кривую γ в общее решение: $F(I_1(\gamma(s))) = \varphi(s)$. Если $\Delta \neq 0$, то $s = \sigma(I)$ локально и

$$z(x, y) = \varphi(\sigma(I_1(x, y))).$$

Шаг 3. Проверить нехарактеристичность.
Вычислить $\Delta(s) = a(\gamma)y'(s) - b(\gamma)x'(s)$. Проверить условие $(a, b) \not\parallel \gamma'(s) \;\Leftrightarrow\; \Delta \neq 0$.

Шаг 4. Сформулировать итог.
$\Delta \neq 0 \Rightarrow$ единственность; $\Delta = 0 \Rightarrow$ ветвление или неединственность.

3. Сопроводительные материалы (таблицы и обозначения)

Быстрые инварианты:

Коэффициенты (a, b)	**Уравнение** $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$	**Инвариант** $I_1(x, y)$
$(y,\ -x)$	$-\frac{x}{y}$	$x^2 + y^2$
$(x,\ y)$	$\frac{y}{x}$	$\frac{y}{x}$
$(\alpha x,\ \beta y)$	$\frac{\beta y}{\alpha x}$	$\dfrac{y}{x^{\beta/\alpha}}$
$(\alpha x + \beta y,\ \gamma x + \delta y)$	$\frac{\gamma x+\delta y}{\alpha x+\beta y}$	линейная замена $\Rightarrow \frac{\eta}{\xi^{\lambda_2/\lambda_1}}$

Условие нехарактеристичности: $\Delta(s) = a(\gamma)y'(s) - b(\gamma)x'(s) \neq 0$.

Правила диагностики: В виде $g(x, y) = 0$: $ag_x + bg_y \neq 0$ на γ.

4. Применение алгоритма к объявленной задаче

Дано: $y\,z_x - x\,z_y = 0$ с двумя задачами Коши в окрестности $(1, 0)$.

Шаг 0. Найти характеристики.
$a = y,\ b = -x \Rightarrow dy/dx = -x/y \Rightarrow I_1 = x^2 + y^2$.

Шаг 1. Записать общее решение.
Общее решение: $z = F(x^2 + y^2)$.

Шаг 2. Сшить с начальными данными.
(а) $x = 1,\ z = 2y$:
$I_1|_{x=1} = 1 + y^2, \quad \Delta = y \cdot 1 - (-1) \cdot 0 = y$.
В $(1, 0)$: $\Delta = 0$ (характеристическая).
Инверсия многозначна: $y = \pm\sqrt{I - 1} \Rightarrow$

$$\boxed{z = 2\,\mathrm{sgn}(y)\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$$

(неединственность у $y = 0$).

(б) $x = 1 + y,\ z = 2y$:
$I_1|_{x=1+y} = 1 + 2y + 2y^2, \quad \Delta = 2y + 1$.
В $(1, 0)$: $\Delta = 1 \neq 0$ (нехарактеристическая).
$I = 1 + 2s + 2s^2 \Rightarrow s = \frac{-1+\sqrt{2I-1}}{2}$ (ветвь у $s \approx 0$).

$$\boxed{z(x, y) = -1 + \sqrt{2(x^2 + y^2) - 1}}$$

(единственно в окрестности $(1, 0)$).

6 Глава M6. Системы разностных: диагонализуемые матрицы, Phi t равно A в степени t, вариация постоянных

1) Тип экзаменационной задачи

Условие.

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(а) Найти фундаментальную матрицу Φ_t. (б) Полагая $\binom{x_t}{y_t} = \Phi_t \binom{c_1^t}{c_2^t}$, выписать уравнения для c_1^t, c_2^t (не решать).

2) Универсальный алгоритм (формулы)

Ввод. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x_t \in \mathbb{R}^n$, $b_t \in \mathbb{R}^n$. $\Phi_t := A^t$. Спектр: $A = V\Lambda V^{-1}$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Шаг 1. Спектр. Найти λ_j и базис $\{v_j\}$: $(A - \lambda_j I)v_j = 0$. $\sum_j \dim\ker(A - \lambda_j I) = n \Rightarrow$ диагонализуемо.

Шаг 2. A в степени t.

$$A^t = V\Lambda^t V^{-1}, \quad \Lambda^t = \mathrm{diag}(\lambda_1^t, \ldots, \lambda_n^t).$$

Если $\lambda = \rho e^{\pm i\theta}$: на $\mathbb{R}^2$ блок $S = \begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}$, $a + ib = \lambda$,

$$S^t = \rho^t \begin{pmatrix} \cos(\theta t) & -\sin(\theta t) \\ \sin(\theta t) & \cos(\theta t) \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Phi t и однородная система.

$$x_{t+1} = Ax_t \;\Rightarrow\; x_t = \Phi_t x_0, \quad \Phi_t = A^t.$$

Шаг 4. Вариация постоянных. Полагаем $x_t = \Phi_t c^t$. Тогда

$$\Phi_{t+1}c^{t+1} = \Phi_{t+1}c^t + b_t \;\Rightarrow\; \boxed{c^{t+1} - c^t = \Phi_{t+1}^{-1} b_t}.$$

Эквивалентно: $x_t = A^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} A^{t-1-k} b_k$.

Шаг 5. Частные случаи. Если $b_t \equiv b$ и $I - A$ обратима: $x_t = A^t(x_0 - (I-A)^{-1}b) + (I-A)^{-1}b$. Если $\lambda < 0$: $\lambda^t = (-1)^t|\lambda|^t$. Пара $\rho e^{\pm i\theta}$: блок $\rho^t R(\theta t)$.

3) Сопроводительные материалы

Спектр A	Формула для A^t
$\lambda_j \in \mathbb{R}$ простые	$V\,\mathrm{diag}(\lambda_1^t, \dots, \lambda_n^t)V^{-1}$
$\rho e^{\pm i\theta}$	$W\big(\rho^t \begin{smallmatrix}\cos\theta t & -\sin\theta t\\ \sin\theta t & \cos\theta t\end{smallmatrix}\big)W^{-1}$
смешанный	блочно по строкам выше

$$\Phi_t^{-1} = V\ \mathrm{diag}(\lambda_1^{-t}, \dots, \lambda_n^{-t})\, V^{-1}.$$

4) Применение алгоритма к условию

Шаг 1. $\widehat{A} = \begin{smallmatrix}-1 & 3\\ 3 & -1\end{smallmatrix} \Rightarrow \sigma(\widehat{A}) = \{2, -4\}$, $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (1,-1)$. $\sigma(A) = \{1, -2\}$ (диагонализуемо).

Шаг 2.

$$V = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \quad \Lambda = \mathrm{diag}(1, -2), \quad V^{-1} = \tfrac12\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

$$\Phi_t = A^t = \tfrac12\begin{pmatrix}1 + (-2)^t & 1 - (-2)^t\\ 1 - (-2)^t & 1 + (-2)^t\end{pmatrix}.$$

Шаг 3. $x_t = \Phi_t x_0$.

Шаг 4.

$$c^{t+1} - c^t = \Phi_{t+1}^{-1} b, \quad \Phi_{t+1}^{-1} = V\,\mathrm{diag}\big(1, (-2)^{-(t+1)}\big)V^{-1}.$$

$$\Phi_{t+1}^{-1} b = \frac12\begin{pmatrix}1 + (-2)^{-(t+1)} & 1 - (-2)^{-(t+1)}\\ 1 - (-2)^{-(t+1)} & 1 + (-2)^{-(t+1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-\frac12)^{t+1}\\ -(-\frac12)^{t+1}\end{pmatrix}.$$

$$\boxed{c_1^{t+1} - c_1^t = (-\tfrac12)^{t+1}, \qquad c_2^{t+1} - c_2^t = -(-\tfrac12)^{t+1}}.$$

Шаг 5. $(I - A)$ необратима (есть $\lambda = 1$) $\Rightarrow$ стационарная формула неприменима; используем вариацию постоянных как выше.

7 Нелинейные 2D-системы: линеаризация, классификация по tr, det, D

1. Тип экзаменационной задачи (полное условие)

Стейтмент. Найдите положения равновесия автономной системы, определите их характер и набросайте фазовые портреты в окрестности равновесий:

$$\begin{cases}\dot{x} = 2 - 2\sqrt{1 + x + y}\,,\\ \dot{y} = \exp\!\big(\frac54 x + 2y + y^2\big) - 1.\end{cases}$$

2. Универсальный алгоритм (визуальные формулы и детерминированные шаги)

Исходные данные и обозначения (ввод). Дана автономная система $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$, где $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Требуется найти положения равновесия (x_*, y_*) такие, что $f(x_*, y_*) = 0$, $g(x_*, y_*) = 0$, и классифицировать их характер по линеаризации.

Вводим: J — матрица Якоби; $\operatorname{tr} J = f_x + g_y$ — след; $\det J = f_x g_y - f_y g_x$ — определитель; $D = \operatorname{tr}^2 - 4\det$ — дискриминант; $\lambda_{1,2}$ — собственные значения J.

Шаг 0. Найти положения равновесия.
Решить систему $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ и найти все точки (x_*, y_*) такие, что $f(x_*, y_*) = 0$, $g(x_*, y_*) = 0$.

Шаг 1. Вычислить матрицу Якоби.
Вычислить частные производные и составить

$$J = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \Big|_{(x_*, y_*)}.$$

Шаг 2. Вычислить инварианты в каждой точке равновесия.
Посчитать

$$\operatorname{tr} J = f_x + g_y, \qquad \det J = f_x g_y - f_y g_x, \qquad D = \operatorname{tr}^2 - 4\det,$$

и применить таблицу классификации.

Шаг 3. Определить стабильность и направления.

- $\det < 0$: седло (неустойчиво).
- $\det > 0$, $D > 0$: узел; знак tr даёт устойчивость.
- $\det > 0$, $D < 0$: фокус; знак tr даёт устойчивость.

Шаг 4. Нарисовать локальный эскиз.
Нанести тип точки и стрелки вход/выход; для седла — сепаратрисы по собственным векторам J.

Примечание. Если $\det J \neq 0$ (гиперболическая точка), линеаризация локально адекватна типу (Хартман–Гробман).

3. Сопроводительные материалы (таблицы и обозначения)

Классификация по $\det,\ \operatorname{tr},\ D$**:**

Условие	Тип точки	Устойчивость
$\det < 0$	седло	неустойчивая
$\det > 0,\ D > 0,\ \operatorname{tr} < 0$	узел	устойчивый
$\det > 0,\ D > 0,\ \operatorname{tr} > 0$	узел	неустойчивый
$\det > 0,\ D < 0,\ \operatorname{tr} < 0$	фокус	устойчивый
$\det > 0,\ D < 0,\ \operatorname{tr} > 0$	фокус	неустойчивый

Детектор гиперболичности: $\det J \neq 0 \quad \Rightarrow$ линеаризация достаточна для локального типа.

Правила границ: Границы $\det = 0$ или $D = 0$ — вне рамок М7 (негиперболика).

4. Применение алгоритма к объявленной задаче

Дано: $\dot{x} = 2 - 2\sqrt{1 + x + y}$, $\dot{y} = \exp\left(\frac{5}{4}x + 2y + y^2\right) - 1$.

Шаг 0. Найти положения равновесия.
$f=0 \Rightarrow x+y=0$. $g=0 \Rightarrow \frac{5}{4}x+2y+y^2=0$. Совместно: точки $(0,0)$ и $(\frac{3}{4},-\frac{3}{4})$.

Шаг 1. Вычислить матрицу Якоби.

$$f_x = f_y = -\frac{1}{\sqrt{1+x+y}}, \quad g_x = \tfrac{5}{4}e^{\Phi}, \quad g_y = (2+2y)e^{\Phi}, \ \ \Phi = \tfrac{5}{4}x+2y+y^2.$$

В равновесиях $\sqrt{1+x+y}=1,\ e^{\Phi}=1$.

Шаг 2. Вычислить инварианты в каждой точке равновесия.
Для $(0,0)$: $J=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ \frac{5}{4} & 2\end{pmatrix}$, $\mathrm{tr}=1$, $\det=-\frac{3}{4}<0$.
Для $(\frac{3}{4},-\frac{3}{4})$: $J=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ \frac{5}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\mathrm{tr}=-\frac{1}{2}$, $\det=\frac{3}{4}>0$, $D=\frac{1}{4}-3=-\frac{11}{4}<0$.

Шаг 3. Определить стабильность и направления.
Для $(0,0)$: $\det<0 \Rightarrow$ **седло (неустойчивая)**.
Для $(\frac{3}{4},-\frac{3}{4})$: $\det>0,\ D<0,\ \mathrm{tr}<0 \Rightarrow$ **устойчивый фокус**.

Шаг 4. Нарисовать локальный эскиз.
Седло в $(0,0)$: одна устойчивая и одна неустойчивая сепаратриса. Фокус в $(\frac{3}{4},-\frac{3}{4})$: затухающие спирали.

$$\boxed{\text{Две точки равновесия: седло } (0,0) \text{ и устойчивый фокус } (\tfrac{3}{4},-\tfrac{3}{4})}$$

8 Вращающиеся системы и полярные координаты: $(x,y)\to(r,\theta)$, $\dot r,\dot\theta$, классификация

1. Тип экзаменационной задачи (полное условие)

Исследовать фазовый портрет

$$\begin{cases}\dot x = a\,y + x(x^2+y^2),\\ \dot y = -a\,x + y(x^2+y^2),\end{cases}$$

в окрестности $(0,0)$ для всех $a\in\mathbb{R}$. *Указание:* перейти в полярные координаты. Определить тип начала координат для линеаризованной системы.

2. Универсальный алгоритм (визуальные формулы и детерминированные шаги)

Исходные данные и обозначения (ввод). Дана система $\dot x = f(x,y),\ \dot y = g(x,y)$ в декартовых координатах. Вводим полярные координаты: $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$, где $r>0$. Вводим функции: $H(x,y) := \frac{xf+yg}{x^2+y^2}$ — радиальная компонента; $A(x,y) := -\frac{xg-yf}{x^2+y^2}$ — угловая компонента. Тогда $\dot r = r\,H,\ \dot\theta = A$.

Шаг 0. Перейти к полярным координатам.
Использовать формулы преобразования:

$$\boxed{\dot r = \frac{xf+yg}{r}, \qquad \dot\theta = \frac{xg-yf}{r^2}}$$

или через введённые функции:

$$\boxed{\dot r = r\,H, \quad \dot\theta = A}$$

Шаг 1. Вычислить функции H и A.
Найти $H(x,y) = \frac{xf+yg}{x^2+y^2}$ и $A(x,y) = -\frac{xg-yf}{x^2+y^2}$.

Шаг 2. Определить порядки малости у $r=0$.
Разложить $H(r,\theta) = h_k(\theta)\,r^k + o(r^k)$ и $A(r,\theta) = a_0 + a_1(\theta)\,r + \ldots$ при $r \to 0$.

Шаг 3. Классифицировать тип равновесия по знаку h_k.
Анализировать $\dot r = r\,H$:

- Если $k=0$ и $h_0 \neq 0$: $\dot r \sim h_0 r$
  - $h_0 < 0$: устойчивый фокус
  - $h_0 > 0$: неустойчивый фокус
- Если $k \geq 1$: $\dot r \sim h_k(\theta)\,r^{k+1}$ — негиперболическое равновесие
  - $h_k(\theta) > 0$: радиальный разлёт
  - $h_k(\theta) < 0$: радиальное притяжение

Анализировать $\dot\theta \sim a_0$: при $a_0 \neq 0$ — равномерное вращение (знак a_0 задаёт направление).

Шаг 4. Проверить линеаризацию.
Вычислить якобиан $J(0,0) = \left(\begin{smallmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{smallmatrix}\right)$. Если $\sigma(J) = \{\pm i a_0\}$ — центр для линейной части, устойчивость определяет H.

Шаг 5. Построить эскиз фазового портрета.
Нарисовать стрелки по знакам $\operatorname{sgn}(\dot r)$ и $\operatorname{sgn}(\dot\theta)$. Кривая $\dot r = 0 \Leftrightarrow H = 0$ — радиальные барьеры.

3. Сопроводительные материалы (таблицы и обозначения)

Основные формулы преобразования:

$$\boxed{xf + yg = r^2 H}, \qquad \boxed{xg - yf = -\,r^2 A}.$$

Классификация по порядку малости H:

$$H(r,\theta) \sim \begin{cases} h_0 \ (\neq 0) & \Rightarrow\ \dot r \sim h_0 r \ \Rightarrow \begin{cases} h_0 < 0: \ \text{устойчивый фокус,} \\ h_0 > 0: \ \text{неустойчивый фокус,} \end{cases} \\ h_k(\theta)\,r^k,\ k \geq 1 & \Rightarrow\ \dot r \sim h_k(\theta)\,r^{k+1} \ \text{(негиперболика)} \end{cases}$$

Специальный случай: Если $f = a\,y + x\,\Phi,\ g = -a\,x + y\,\Phi$, то

$$\boxed{\dot r = r\,\Phi, \quad \dot\theta = -a}.$$

4. Применение алгоритма к объявленной задаче

$$\begin{cases} \dot x = a\,y + x(x^2+y^2), \\ \dot y = -a\,x + y(x^2+y^2), \end{cases}$$

Шаг 0. Перейти к полярным координатам.
Используем формулы: $f(x,y) = a\,y + x(x^2+y^2)$, $g(x,y) = -a\,x + y(x^2+y^2)$.

Шаг 1. Вычислить функции H и A.

$$H = \frac{x(ay + xr^2) + y(-ax + yr^2)}{r^2} = \frac{ar^2 \sin\theta\cos\theta + ar^2 \sin\theta\cos\theta + r^4}{r^2} = r^2$$
$$A = -\frac{x(-ax + yr^2) - y(ay + xr^2)}{r^2} = -\frac{-ar^2\cos^2\theta - ar^2\sin^2\theta}{r^2} = a$$

Шаг 2. Определить порядки малости у $r = 0$.
$H = r^2 \Rightarrow k = 2,\ h_2 \equiv 1 > 0$; $A \equiv a$.

Шаг 3. Классифицировать тип равновесия.
$\dot r = r^3 > 0$ при $r > 0 \Rightarrow$ радиальный разлёт (негиперболическая неустойчивость). $\dot\theta = a \Rightarrow$ равномерное вращение (знак a задаёт направление).

Шаг 4. Проверить линеаризацию.
$J(0,0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\sigma(J) = \{\pm ia\} \Rightarrow$ центр для линейной части ($a \neq 0$); истинная динамика — разлёт из-за r^3.

Шаг 5. Построить эскиз фазового портрета.
Эскиз: расходящиеся спирали при $a \neq 0$; при $a = 0$ — чисто радиальный разлёт ($\dot r = r^3,\ \dot\theta \equiv 0$).

$\boxed{\text{При } a \neq 0\text{: расходящиеся спирали; при } a = 0\text{: радиальный разлёт}}$

9 Линейные ОДУ 2-го порядка: вронскиан, Абель, детектор линейности

1. Тип экзаменационной задачи (полное условие)

Дано уравнение
$$(x + 2y)\, y'' - 3\, y' + y\sqrt{1 - x} = 0.$$

Пусть $y_1(x)$ — решение, удовлетворяющее $y_1(0) = 0$, $y_1'(0) = 1$; $y_2(x)$ — другое решение, удовлетворяющее $y_2(0) = 3$, $y_2'(0) = 2$. Составляют ли эти решения фундаментальную систему? Обоснуйте. Найдите $W[y_1, y_2](-1)$.

2. Универсальный алгоритм (визуальные формулы и детерминированные шаги)

Исходные данные и обозначения (ввод). Дано уравнение $F(x, y, y', y'') = 0$. Вводим линейный канон: $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, где $a_2 \neq 0$. Вводим коэффициенты: $p := \frac{a_1}{a_2}$, $q := \frac{a_0}{a_2}$. Вводим вронскиан: $W[y_1, y_2] = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$.

Шаг 0. Проверить линейность уравнения.
Проверить: $\exists\, a_0, a_1, a_2$ (зависят только от x), что $F \equiv a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y$. Эквивалентные условия:

$$F_{y''y''} \equiv 0, \quad \partial_y F_{y''} \equiv 0,\ \partial_{y'} F_{y''} \equiv 0, \quad F - y'' F_{y''} \text{ линеен по } (y', y) \text{ с коэффициентами от } x.$$

Шаг 1. Привести к каноническому виду (если линейно).
Записать $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, где $p = \frac{a_1}{a_2}$, $q = \frac{a_0}{a_2}$.

Шаг 2. Применить формулу Абеля для вронскиана (только линейный случай).
Использовать:

$$\boxed{W' = -pW}, \qquad \boxed{W(x) = W(x_0)\exp\Big(-\int_{x_0}^{x} p\Big)}$$

Шаг 3. Проверить фундаментальность системы решений (только линейный случай).
Если y_1, y_2 — решения линейного уравнения, то:

$$\boxed{W(x_0) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \text{решения независимы на интервале}}$$

Шаг 4. Обработать нелинейный случай.
Если уравнение нелинейное, то:

- Понятие фундаментальной системы неприменимо
- Формула Абеля неприменима
- Вычислимо лишь $W(x_0) = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0)$ локально

Шаг 5. Вычислить вронскиан в заданной точке.
Использовать начальные данные: если $y_1(x_0) = \alpha_1$, $y_1'(x_0) = \beta_1$, $y_2(x_0) = \alpha_2$, $y_2'(x_0) = \beta_2$, то

$$W(x_0) = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$$

3. Сопроводительные материалы (таблицы и обозначения)

Детектор линейности/нелинейности:

Признак	Вывод
$F_{y''y''} \not\equiv 0$	нелинейное
$\partial_y F_{y''} \neq 0$ или $\partial_{y'} F_{y''} \neq 0$	нелинейное
$\partial_{(y')^2}\big(F - y''F_{y''}\big) \neq 0$ или $\partial_{y^2}\big(F - y''F_{y''}\big) \neq 0$	нелинейное
или $\partial_{y,y'}\big(F - y''F_{y''}\big) \neq 0$	нелинейное

Формула Абеля (линейный канон):

$$W' = -pW, \qquad W(x) = W(x_0)\exp\Big(-\int_{x_0}^{x} p\Big), \qquad p = \frac{a_1}{a_2}$$

Вычисление вронскиана по начальным данным: Если $y_1(x_0) = \alpha_1$, $y_1'(x_0) = \beta_1$, $y_2(x_0) = \alpha_2$, $y_2'(x_0) = \beta_2$, то

$$W(x_0) = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$$

4. Применение алгоритма к объявленной задаче

$$(x + 2y)\,y'' - 3\,y' + y\sqrt{1-x} = 0$$

Шаг 0. Проверить линейность уравнения.
$F = (x+2y)y'' - 3y' + y\sqrt{1-x}$, $F_{y''} = x + 2y$, $\partial_y F_{y''} = 2 \neq 0$.

$$\boxed{\text{нелинейное}}$$

Шаг 1. Привести к каноническому виду.
Невозможно получить $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$.

Шаг 2. Применить формулу Абеля.
$\boxed{\text{неприменимо для нелинейного уравнения}}$

Шаг 3. Проверить фундаментальность системы решений.
$\boxed{\text{некорректно для нелинейного уравнения}}$

Шаг 4. Обработать нелинейный случай.
Понятие фундаментальной системы неприменимо; формула Абеля неприменима.

Шаг 5. Вычислить вронскиан в заданной точке.
При $x = 0$: $W(0) = \det\begin{pmatrix}0 & 3\\1 & 2\end{pmatrix} = -3$. Требуемое $W(-1)$ без линейности не выводится из данных: $\boxed{W(-1) \text{ не определяется без явного решения}}$.

10 Негиперболические равновесия: полярные координаты и инвариантные лучи

1. Тип экзаменационной задачи (полное условие)

Исследуйте фазовый портрет (определите тип траекторий) нелинейной системы

$$\begin{cases}\dot{x} = a\,y + x(x^2 + y^2),\\ \dot{y} = -a\,x + y(x^2 + y^2),\end{cases}$$

в окрестности начала координат для всех значений параметра a. *Указание.* Переход к полярным координатам.

2. Универсальный алгоритм (визуальные формулы и детерминированные шаги)

Исходные данные и обозначения (ввод). Дана система $\dot{x} = f(x,y),\ \dot{y} = g(x,y)$. Вводим якобиан: $J(0,0) = \begin{pmatrix}f_x & f_y\\ g_x & g_y\end{pmatrix}$ в точке $(0,0)$. Вводим собственные значения: $\lambda_{1,2}$ — корни характеристического уравнения $\det(J - \lambda I) = 0$. Вводим полярные координаты: $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$, где $r > 0$. Вводим функции: $\mathrm{Rad} = xf + yg$ — радиальная компонента; $\mathrm{Tan} = xg - yf$ — тангенциальная компонента.

Шаг 0. Диагностировать негиперболичность.
Вычислить $J(0,0)$ и $\lambda_{1,2}$. Если $\Re\lambda = 0$ или $\det J = 0$ — негиперболическое равновесие $\Rightarrow$ переходить к полярным координатам.

Шаг 1. Проверить представимость в виде «вращение+радиал».
Проверить, можно ли представить систему как:

$$(f,g) = \Omega(r^2)\,J\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + R(r^2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix},\ r^2 = x^2 + y^2$$

Шаг 2. Перейти к полярным координатам.
Использовать формулы:

$$\dot{r} = \frac{xf + yg}{r} = \frac{\mathrm{Rad}}{r}, \qquad \dot{\theta} = \frac{xg - yf}{r^2} = \frac{\mathrm{Tan}}{r^2}$$

Получить $\dot{r} = R(r)$, $\dot{\theta} = \Omega(r)$.

Шаг 3. Определить порядки малости у $r = 0$.
Разложить: $\dot{r} = \alpha r^k + o(r^k)$ $(k \geq 2)$, $\dot{\theta} = \beta + \gamma r^\ell + o(r^\ell)$.

Шаг 4. Классифицировать тип равновесия по знакам α и β.

- $\beta \neq 0,\ \alpha > 0$ — неустойчивый спиральный источник
- $\beta \neq 0,\ \alpha < 0$ — устойчивый спиральный сток
- $\beta = 0,\ \alpha > 0$ — радиальный источник (инвариантные лучи $\theta = \mathrm{const}$)
- $\beta = 0,\ \alpha < 0$ — радиальный сток

Шаг 5. Построить эскиз фазового портрета.
Указать знак вращения по β и монотонность $r(t)$ по знаку α; отметить инвариантные кривые при $\beta = 0$.

3. Сопроводительные материалы (таблицы и обозначения)

Быстрый полярный тест:

$$\mathrm{Rad} = xf + yg, \quad \mathrm{Tan} = xg - yf$$

Если $\mathrm{Rad} = r^2 \cdot \tilde{R}(r^2)$ и $\mathrm{Tan} = r^2 \cdot \tilde{\Omega}(r^2)$, то $\dot{r} = \tilde{R}(r)$, $\dot{\theta} = \tilde{\Omega}(r)$.

Таблица локальной классификации:

Случай	$\dot{r}$	$\dot{\theta}$	**Тип у** $r = 0$
Спиральный источник	$\alpha r^k,\ \alpha > 0$	$\beta \neq 0$	неустойчивый спираль
Спиральный сток	$\alpha r^k,\ \alpha < 0$	$\beta \neq 0$	устойчивый спираль
Радиальный источник	$\alpha r^k,\ \alpha > 0$	$\beta = 0$	лучи инвариантны, исход
Радиальный сток	$\alpha r^k,\ \alpha < 0$	$\beta = 0$	лучи инвариантны, вход

Формулы преобразования в полярные координаты:

$$\boxed{\dot{r} = \frac{xf + yg}{r}}, \qquad \boxed{\dot{\theta} = \frac{xg - yf}{r^2}}$$

4. Применение алгоритма к объявленной задаче

$$\begin{cases} \dot{x} = a\,y + x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = -a\,x + y(x^2 + y^2), \end{cases}$$

Шаг 0. Диагностировать негиперболичность.
$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm ia$ — негиперболическое равновесие.

Шаг 1. Проверить представимость в виде «вращение+радиал».
$(f, g) = a\,J\binom{x}{y} + r^2\binom{x}{y}$ — система имеет вид «вращение+радиал».

Шаг 2. Перейти к полярным координатам.

$$\dot{r} = \frac{x(ay + xr^2) + y(-ax + yr^2)}{r} = \frac{r^4}{r} = r^3$$

$$\dot{\theta} = \frac{x(-ax + yr^2) - y(ay + xr^2)}{r^2} = \frac{-ar^2}{r^2} = -a$$

Шаг 3. Определить порядки малости у $r = 0$.
$\alpha = 1 > 0,\ k = 3$; $\beta = -a$.

Шаг 4. Классифицировать тип равновесия.

- Если $a \neq 0$: $\beta = -a \neq 0,\ \alpha = 1 > 0$ — неустойчивый спиральный источник (вращение со знаком $-a$)
- Если $a = 0$: $\beta = 0,\ \alpha = 1 > 0$ — радиальный источник ($\theta = \mathrm{const}$ инвариантно, r растёт)

Шаг 5. Построить эскиз фазового портрета.
При $a \neq 0$: из нуля выходят спирали, $r(t)$ монотонно растёт. При $a = 0$: исход по лучам $\theta = \mathrm{const}$.

$\boxed{\text{При } a \neq 0\text{: неустойчивый спиральный источник; при } a = 0\text{: радиальный источник}}$

11 Периодические коэффициенты, сдвиг, монодромия, Флоке

1. Тип экзаменационной задачи (полное условие)

Пусть $q \in C(\mathbb{R})$ периодична с периодом 1. Пусть $y \not\equiv 0$ — решение

$$y''(x) + q(x)\,y(x) = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Доказать: $\exists C \in \mathbb{R}:$ $\boxed{y(x+1) = C\,y(x)\ \forall x}$.

2. Универсальный алгоритм (визуальные формулы и детерминированные шаги)

Исходные данные и обозначения (ввод). Дано уравнение $y''(x) + q(x)\,y(x) = 0$, где $q(x+T) = q(x)$ с периодом $T > 0$. Вводим векторную форму: $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, $X' = A(x)X$, где $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & 0 \end{pmatrix}$. Вводим фундаментальную матрицу: $Y'(x) = A(x)Y(x)$, $Y(0) = I$. Вводим монодромию: $M := Y(T)$. По формуле Абеля: $\boxed{\det M = 1}$.

Шаг 0. Проверить периодичность коэффициентов.
Убедиться, что $q(x+T) = q(x)$ для некоторого $T > 0$.

Шаг 1. Применить сдвиг к решению.
Определить $y_T(x) := y(x+T)$. Тогда $y_T'' + q\,y_T = 0$ (так как q периодична).

Шаг 2. Найти 1D-подпространство при граничных условиях.
Если $y(0) = 0$, выбрать базисное решение u: $u(0) = 0,\ u'(0) = 1$. Тогда $\mathcal{S}_0 = \{\alpha u\ :\ \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Шаг 3. Доказать скалярность сдвига на $\mathcal{S}_0$.
Если $y(0) = y(T) = 0$ и $y = \beta u \neq 0$, то $u(T) = 0$ и $\exists\,\alpha :\ u(x+T) = \alpha\,u(x)$. Сравнивая производные в нуле: $\alpha = \dfrac{u'(T)}{u'(0)} = u'(T)$.

Шаг 4. Вывести формулу для коэффициента C.

$$\boxed{y(x+T) = C\,y(x), \quad C = u'(T) = \frac{y'(T)}{y'(0)}}$$

Шаг 5. Связать с матрицей монодромии.
Выбрать базис (u, v): $u(0) = 0, u'(0) = 1;\ v(0) = 1, v'(0) = 0$.

$$M = Y(T) = \begin{pmatrix} v(T) & u(T) \\ v'(T) & u'(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(T) & 0 \\ v'(T) & C \end{pmatrix}$$

Из $\det M = 1$: $v(T) = C^{-1}$. Собственные числа: $\rho_1 = C,\ \rho_2 = C^{-1}$.

3. Сопроводительные материалы (таблицы и обозначения)

Основные свойства монодромии:

$$Y(x+T) = Y(x)M, \quad \det M = 1, \quad \sigma(M) = \{\rho_1, \rho_2\},\ \rho_1\rho_2 = 1$$

Классификация по собственным числам монодромии:

Условие	$\rho_{1,2}$	Поведение решений
$\lvert \operatorname{tr} M \rvert < 2$	$e^{\pm i\theta}$	ограниченные осцилляции
$\lvert \operatorname{tr} M \rvert = 2$	± 1	пороговый случай
$\lvert \operatorname{tr} M \rvert > 2$	$\rho_{1,2} \in \mathbb{R}$, $\rho_1 = \rho_2^{-1}$, $\rho_1 > 1$	рост/затухание

Специальный случай $y(0) = y(T) = 0$:

$$u(T) = 0 \;\Rightarrow\; M = \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ * & C \end{pmatrix}, \qquad \boxed{y(x+T) = C\,y(x),\; C = u'(T) = \frac{y'(T)}{y'(0)}}$$

Формула Абеля для периодических систем:

$$\boxed{\det Y(x) = \det Y(0) \exp\left(\int_0^x \operatorname{tr} A(s)\,ds\right)}$$

Для $A(x) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & 0 \end{smallmatrix}\right)$: $\operatorname{tr} A(x) = 0$, поэтому $\det M = 1$.

4. Применение алгоритма к объявленной задаче

$$y''(x) + q(x)\,y(x) = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad T = 1$$

Шаг 0. Проверить периодичность коэффициентов.
$q(x+1) = q(x)$ — условие выполнено.

Шаг 1. Применить сдвиг к решению.
$y_1(x) = y(x+1) \Rightarrow y_1'' + q\,y_1 = 0$.

Шаг 2. Найти 1D-подпространство при граничных условиях.
$u(0) = 0,\; u'(0) = 1 \Rightarrow \mathcal{S}_0 = \{\alpha u\}$.

Шаг 3. Доказать скалярность сдвига на $\mathcal{S}_0$.
$y = \beta u \neq 0,\; y(1) = 0 \Rightarrow u(1) = 0$.

Шаг 4. Вывести формулу для коэффициента C.
$u(x+1) = C\,u(x),\; C = u'(1) \Rightarrow y(x+1) = C\,y(x)$.

Шаг 5. Связать с матрицей монодромии.
$M = Y(1) = \left(\begin{smallmatrix} v(1) & 0 \\ v'(1) & C \end{smallmatrix}\right)$, $\det M = 1 \Rightarrow v(1) = C^{-1}$, $\sigma(M) = \{C, C^{-1}\}$.

Итог:

$$\boxed{y(x+1) = \frac{y'(1)}{y'(0)}\,y(x)}$$

12 Механические системы и устойчивость потенциала

1. Тип экзаменационной задачи (полное условие)

Дано: $\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V(\mathbf{x})$, $V \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $V(\mathbf{0}) = \min V$, $V(\mathbf{x}) > 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. **Требуется:** найти положение равновесия и доказать его устойчивость.

2. Универсальный алгоритм (визуальные формулы и детерминированные шаги)

Исходные данные и обозначения (ввод). Дана механическая система $\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V(\mathbf{x})$. Вводим переменные: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — координаты, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ — скорости. Вводим энергию: $E(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{v}\|^2 + V(\mathbf{x})$. Вводим гессиан: $H = \nabla^2 V(\mathbf{0})$ — матрица вторых производных потенциала в точке равновесия.

Шаг 0. Проверить потенциальность системы.
Проверить: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x}) \;\Leftrightarrow\; \partial_{x_j} f_i = \partial_{x_i} f_j \quad (\forall i, j)$.

Шаг 1. Найти положения равновесия.
$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0},\ \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \iff \mathbf{v} = \mathbf{0},\ \nabla V(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. При строгом минимуме V в $\mathbf{0}$: $\boxed{\mathbf{x}_* = \mathbf{0}}$.

Шаг 2. Проверить сохранение энергии.
$\dot{E} = \dot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \nabla V \cdot \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \cdot (-\nabla V) + \nabla V \cdot \mathbf{v} = 0 \ \Rightarrow\ \boxed{E(t) \equiv E(0)}$.

Шаг 3. Доказать положительную определённость энергии.
$V(\mathbf{0}) = 0,\ V(\mathbf{x}) > 0\ (\mathbf{x} \neq 0) \Rightarrow \boxed{E(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \geq 0,\ E = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{v}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})}$.

Шаг 4. Использовать субуровни энергии для оценки траекторий.
$m(\varepsilon) := \min_{\|\mathbf{x}\| = \varepsilon} V(\mathbf{x}) > 0$. Если $E(0) < m(\varepsilon)$, то $E(t) \equiv E(0) < m(\varepsilon)$ и $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon\ \forall t \geq 0$.

Шаг 5. Доказать устойчивость по Ляпунову.
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 :\ \|(\mathbf{x}(0), \mathbf{v}(0))\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon\ \forall t \geq 0$.

$$\boxed{(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \text{ устойчиво по Ляпунову (не асимптотически)}}$$

3. Сопроводительные материалы (таблицы и обозначения)

Детектор потенциальности:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x}) \ \Leftrightarrow\ \partial_{x_j} f_i = \partial_{x_i} f_j \quad (\forall i, j)$$

Локальная квадратичная аппроксимация потенциала:

$$\nabla V(\mathbf{0}) = \mathbf{0},\ H = \nabla^2 V(\mathbf{0}),\ H \succ 0 \Rightarrow V(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{x}^\top H \mathbf{x} + o(\|\mathbf{x}\|^2)$$

$$\Rightarrow \exists m > 0 : V(\mathbf{x}) \geq \tfrac{m}{2}\|\mathbf{x}\|^2 \text{ (в малой окрестности)}$$

Энергетический кандидат Ляпунова:

$$\boxed{E(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \tfrac{1}{2}\|\mathbf{v}\|^2 + V(\mathbf{x})}, \qquad \boxed{\dot{E} = 0}$$

Свойства субуровней энергии: $\mathcal{L}_c := \{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) : E(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \leq c\}$ — замкнутые множества; при малых c лежат в окрестности $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

Критерии устойчивости:

Условие	Вывод
$V(\mathbf{0}) = 0$, $V(\mathbf{x}) > 0$ при $\mathbf{x} \neq 0$	устойчивость по Ляпунову
$H = \nabla^2 V(\mathbf{0}) \succ 0$	локальная устойчивость
$\dot{E} = 0$	консервативная система

4. Применение алгоритма к объявленной задаче

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V(\mathbf{x}), \quad V(\mathbf{0}) = \min V, \quad V(\mathbf{x}) > 0 \text{ при } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

Шаг 0. Проверить потенциальность системы.
Система задана в потенциальной форме: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x})$.

Шаг 1. Найти положения равновесия.
$\nabla V(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}_* = \mathbf{0}$.

Шаг 2. Проверить сохранение энергии.
$E = \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 + V(\mathbf{x})$, $\dot{E} = 0$.

Шаг 3. Доказать положительную определённость энергии.
$V(\mathbf{x}) \geq 0$, $= 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow E \geq 0$, нуль только в $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

Шаг 4. Использовать субуровни энергии для оценки траекторий.
$m(\varepsilon) = \min_{\|\mathbf{x}\|=\varepsilon} V(\mathbf{x}) > 0$, $E(0) < m(\varepsilon) \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$.

Шаг 5. Доказать устойчивость по Ляпунову.
$\boxed{(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \text{ устойчиво по Ляпунову}}$.

13 ПЧП 1-го порядка: задача Коши

1. Тип экзаменационной задачи (полное условие)

Даны две задачи Коши для уравнения

$$y\,\frac{\partial z}{\partial x} - x\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0:$$

а) $z = 2y$ при $x = 1$; б) $z = 2y$ при $x = 1 + y$. В обеих задачах решение ищем в окрестности точки $(1, 0)$. Найдите решение этих задач, если это возможно. Проверьте условия теоремы существования и единственности (нехарактеристичность начальной линии).

2. Универсальный алгоритм (визуальные формулы и детерминированные шаги)

Исходные данные и обозначения (ввод). Дано ПЧП 1-го порядка в виде $a\,u_x + b\,u_y + c\,u_z = 0$. Вводим вектор коэффициентов: $A = (a, b, c)$. Вводим начальное многообразие: $\Sigma : S = 0$ (3D) или $\Gamma : g = 0$ (2D). Вводим нормаль: $n = \nabla S$ (3D) или $n = (g_x, g_y)$ (2D). Вводим инварианты: I_1, I_2 — первоинтегралы системы характеристик.

Шаг 0. Нормализовать уравнение и проверить нехарактеристичность.
Привести ПЧП к виду $a\,u_x + b\,u_y + c\,u_z = 0$, положить $A = (a, b, c)$. Проверить тест нехарактеристичности:

- 3D: $A \cdot n \neq 0$ на Σ
- 2D: $a\,g_x + b\,g_y \neq 0$ на Γ

Шаг 1. Найти систему характеристик.

$$\dot{x} = a, \qquad \dot{y} = b, \qquad \dot{z} = c, \qquad \frac{d}{ds}u(x(s), y(s), z(s)) = 0$$

Шаг 2. Найти инварианты (первоинтегралы).
Из $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{c}$ находим первоинтегралы I_1, I_2 (или I_1 в 2D). Общий вид решения: $u = F(I_1, I_2)$ (3D) или $u = F(I_1)$ (2D).

Шаг 3. Определить функцию F по начальным данным.
Ограничиваем инварианты на начальное многообразие: $F(I_1|_\Sigma, I_2|_\Sigma) = u|_\Sigma$ (3D) или $F(I_1|_\Gamma) = u|_\Gamma$ (2D). Локальная обратимость отображения параметров в инварианты эквивалентна нехарактеристичности.

Шаг 4. Записать решение и указать область единственности.
Записать u через найденный F и указать область единственности (где тест нехарактеристичности выполняется).

3. Сопроводительные материалы (таблицы и обозначения)

Тест нехарактеристичности:

- 3D: $A \cdot n \neq 0$ на $\Sigma \Rightarrow$ локальная единственность
- 2D: $a\, g_x + b\, g_y \neq 0$ на $\Gamma \Rightarrow$ локальная единственность

Быстрые детекторы инвариантов (для (x, y)):

Тип поля	Инвариант
Вращение $(a, b) = (y, -x)$	$I_1 = x^2 + y^2$
Масштаб $(a, b) = (x, y)$	$I_1 = y/x$
Диагональ $(\alpha x, \beta y)$	$I_1 = y/x^{\beta/\alpha}$
Общий линейный случай	по собственным векторам $M^\top$ или через $v = y/x$

Система характеристик:

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{c} = ds$$

Общий вид решения:

- 3D: $u = F(I_1, I_2)$, где I_1, I_2 — независимые инварианты
- 2D: $u = F(I_1)$, где I_1 — инвариант

4. Применение алгоритма к объявленной задаче

$$y\,\frac{\partial z}{\partial x} - x\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Шаг 0. Нормализовать уравнение и проверить нехарактеристичность.
$A = (y, -x)$ (поле вращения), значит $I_1 = x^2 + y^2$ и $z = F(I_1)$.

Шаг 1. Найти систему характеристик.
$\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$, $\dot{z} = 0$ — окружности $x^2 + y^2 = \mathrm{const}$.

Шаг 2. Найти инварианты.
$I_1 = x^2 + y^2$ — единственный инвариант, $z = F(x^2 + y^2)$.

Шаг 3. Определить функцию F по начальным данным.

- **(а) Данные $z = 2y$ при $x = 1$:**
  Тест: $g = x - 1 \Rightarrow a\, g_x + b\, g_y = y$. В $(1, 0)$: $= 0$ (характеристично).
  На $x = 1$: $F(1 + y^2) = 2y$ — не функция одного аргумента около $y = 0$.
  Итог: единственности нет; возможны ветви, например

  $$z(x, y) = \pm\, 2\sqrt{x^2 + y^2 - 1} \quad (x^2 + y^2 > 1)$$

- **(б) Данные $z = 2y$ при $x = 1 + y$:**
  Тест: $g = x - 1 - y \Rightarrow a\, g_x + b\, g_y = y + x$. В $(1, 0)$: $= 1 \neq 0$ (нехарактеристично).
  На $x = 1 + y$: $I_1 = 1 + 2y + 2y^2$, поэтому $F(1 + 2y + 2y^2) = 2y$.
  Локально (около $y = 0$) $y \mapsto 1 + 2y + 2y^2$ обратима, и

  $$z(x, y) = F(x^2 + y^2) = -1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{8(x^2 + y^2) - 4}$$

  (ветвь выбрана так, чтобы $z(1, 0) = 0$ и на начальной кривой $z = 2y$).

Шаг 4. Записать решение и указать область единственности.

- **(а):** Решение не единственно в окрестности $(1, 0)$
- **(б):** Единственность — в области, где начальная кривая пересекает каждую окружность $x^2 + y^2 = \text{const}$ единожды