Дифференциальные Уравнения

Краткий справочник по методам решения

1 Основные определения

1.1 Типы уравнений

- **Обыкновенные ДУ:** $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$
- **Порядок:** наивысшая производная
- **Степень:** степень старшей производной
- **Линейные:** $a_n(x)y^{(n)} + \ldots + a_0(x)y = f(x)$

1.2 Начальные условия

$$y(x_0) = y_0 \tag{1}$$
$$y'(x_0) = y_1 \tag{2}$$
$$\vdots \tag{3}$$
$$y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \tag{4}$$

2 Уравнения первого порядка

2.1 Разделяющиеся переменные

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \tag{5}$$
$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C \tag{6}$$

2.2 Однородные уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{7}$$
$$\text{Замена: } z = \frac{y}{x}, \quad y = zx \tag{8}$$

2.3 Линейные уравнения

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{9}$$
$$\text{Решение: } y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right] \tag{10}$$

2.4 Уравнение Бернулли

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1) \tag{11}$$
$$\text{Замена: } z = y^{1-n} \tag{12}$$

3 Уравнения второго порядка

3.1 Понижение порядка

- $F(x, y', y'') = 0$: замена $z = y'$
- $F(y, y', y'') = 0$: замена $z = y'$, $y'' = z\frac{dz}{dy}$

3.2 Линейные с постоянными коэффициентами

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{13}$$
$$\text{Характеристическое: } ar^2 + br + c = 0 \tag{14}$$

3.2.1 Случаи корней

- **Разные вещественные:** $y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$
- **Кратные:** $y = (C_1 + C_2x)e^{rx}$
- **Комплексные:** $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

4 Системы уравнений

4.1 Система линейных ДУ

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \tag{15}$$
$$\frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \tag{16}$$

4.2 Метод решения

1. Найти собственные значения матрицы
2. Найти собственные векторы
3. Записать общее решение

5 Численные методы

5.1 Метод Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \tag{17}$$
$$x_{n+1} = x_n + h \tag{18}$$

5.2 Метод Рунге-Кутта 4-го порядка

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n) \tag{19}$$
$$k_2 = h \cdot f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \tag{20}$$
$$k_3 = h \cdot f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \tag{21}$$
$$k_4 = h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3) \tag{22}$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{23}$$

6 Специальные функции

6.1 Функции Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \tag{24}$$
$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} \tag{25}$$

6.2 Функции Лежандра

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \tag{26}$$
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}[(x^2 - 1)^n] \tag{27}$$

7 Практические примеры

7.1 Пример 1: Разделяющиеся переменные

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \tag{28}$$
$$ydy = xdx \tag{29}$$
$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C \tag{30}$$
$$y^2 = x^2 + C_1 \tag{31}$$

7.2 Пример 2: Линейное уравнение

$$y' + 2y = e^{-x} \tag{32}$$
$$\text{Интегрирующий множитель: } \mu = e^{2x} \tag{33}$$
$$y = e^{-2x}\left[\int e^{2x} \cdot e^{-x} dx + C\right] \tag{34}$$
$$y = e^{-2x}\left[e^x + C\right] = e^{-x} + Ce^{-2x} \tag{35}$$

8 Полезные формулы

8.1 Производные

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax} \tag{36}$$
$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \tag{37}$$
$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \tag{38}$$
$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \tag{39}$$

8.2 Интегралы

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C \tag{40}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \tag{41}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \tag{42}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \tag{43}$$