Подготовка: Дифференциальные уравнения

Полная версия с разборами тем и ссылками

Содержание

1 Однородные линейные разностные уравнения **2**

2 Неоднородные линейные разностные уравнения **2**

1 Однородные линейные разностные уравнения

Пример. Решите однородное линейное разностное уравнение:

$$y_{t+3} - 3y_{t+2} + 6y_{t+1} - 4y_t = 0 \tag{1}$$

Определение. Линейное однородное разностное уравнение порядка k с постоянными коэффициентами:

$$a_t + c_1 a_{t-1} + c_2 a_{t-2} + \cdots + c_k a_{t-k} = 0, \quad c_k \neq 0 \tag{2}$$

Пара «уравнение + k начальных условий» задаёт единственное решение.

Идея решения – метод характеристических корней. Полагаем $a_t = r^t \Rightarrow$

$$r^t(1 + c_1 r^{-1} + c_2 r^{-2} + \cdots + c_k r^{-k}) = 0 \iff r^k + c_1 r^{k-1} + \cdots + c_k = 0 \tag{3}$$

т.е. характеристический многочлен $\chi(r) = r^k + c_1 r^{k-1} + \cdots + c_k$. Его корни целиком описывают форму общего решения.

Таблица 1: Выбор формы решения по типу корней характеристического многочлена

Условия на корни	**Вклад в решение**
Простой действительный корень $r \in \mathbb{R}$	$\alpha\, r^{\,t}$
Действительный корень r кратности $m \geq 2$	$(\alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_{m-1} t^{m-1})\, r^{\,t}$
Комплексно-сопряжённая пара $r, \overline{r} = \rho e^{\pm i\theta}$ кратности m	$\sum_{\ell=0}^{m-1} t^{\ell}\, \rho^{\,t} \big(\alpha\cos(\theta t) + \beta\sin(\theta t)\big)$

Итоговое общее решение – сумма форм всех корней:

$$a_t = \sum_j \left(\sum_{m=0}^{M_j - 1} \alpha_{j,m}\, t^m\, r_j^t \right) + \sum_k \left(\sum_{m=0}^{N_k - 1} \rho_k^t\, t^m \left(\alpha\cos(\theta_k t) + \beta\sin(\theta_k t)\right) \right)$$

где r_j — действительные корни кратности M_j, $\rho_k e^{\pm i\theta_k}$ — комплексно-сопряжённые корни кратности N_k. Сумма кратностей всех корней равна порядку k.

Подгонка под начальные условия. Подставляем $t = 0, 1, \ldots, k-1$ в общий вид, решаем линейную систему на α-коэффициенты.

Алгоритм.

1. **Нормализация.** Привести уравнение к виду $a_t + \sum_{j=1}^{k} c_j a_{t-j} = 0$, $c_k \neq 0$.
2. **Характеристический многочлен.** Записать $\chi(r) = r^k + c_1 r^{k-1} + \cdots + c_k$.
3. **Корни и кратности.** Найти корни r и их кратности m ($\sum m = k$).
4. **Общий вид решения (см. табл. 1).** Для каждого корня/пары взять соответствующий вклад из таблицы и сложить их.
5. **Подгонка под начальные условия.** Подставить k заданных значений подряд и решить линейную систему для постоянных.

2 Неоднородные линейные разностные уравнения

Пример. Решите неоднородное линейное разностное уравнение:

$$y_{t+3} - 3y_{t+2} + 6y_{t+1} - 4y_t = 2^t + t \tag{4}$$

Определение. Линейное неоднородное разностное уравнение порядка k с постоянными коэффициентами:

$$a_t + c_1 a_{t-1} + c_2 a_{t-2} + \cdots + c_k a_{t-k} = f(t), \quad c_k \neq 0 \tag{5}$$

где $f(t)$ — заданная функция (неоднородность).

Структура общего решения: $a_t = a_t^{(h)} + a_t^{(p)}$, где:

- $a_t^{(h)}$ — общее решение однородного уравнения (см. раздел 1)
- $a_t^{(p)}$ — частное решение неоднородного уравнения

Метод неопределённых коэффициентов для $a_t^{(p)}$.

Пусть характеристический многочлен однородного уравнения:

$$\chi(r) = r^k + c_1 r^{k-1} + \cdots + c_k \quad \text{и} \quad \chi(r) = \prod_i (r - r_i)^{m_i} \prod_\ell Q_{\rho_\ell,\theta_\ell}(r)^{s_\ell},$$

где

$$Q_{\rho,\theta}(r) = (r - \rho e^{i\theta})(r - \rho e^{-i\theta}) = r^2 - 2\rho\cos\theta\, r + \rho^2.$$

Правило «множитель → вклад» (однородная часть):

- Линейный $(r - r_0)^m \;\Rightarrow\; \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j t^j r_0^t$.
- Квадратный $Q_{\rho,\theta}(r)^s \;\Rightarrow\; \rho^t \Big(\sum_{j=0}^{s-1} t^j \big(A_j \cos(\theta t) + B_j \sin(\theta t) \big) \Big)$.

Итог: $a_t^{(h)}$ — сумма всех таких вкладов по всем множителям χ.

Выбор формы частного решения $a_t^{(p)}$:

Обозначения: $P_n(t)$ — полином степени n; $Q_n(t), R_n(t)$ — полиномы; $\lambda \in \mathbb{C}$; s — кратность резонанса (кратность соответствующего множителя в χ).

Таблица 2: Выбор формы частного решения и проверка резонанса

Неоднородность $f(t)$	**Проверка резонанса**	**Базовая форма $a_t^{(p)}$**
$P_n(t)\,\lambda^t$	$\chi(\lambda) = 0$?	$Q_n(t)\,\lambda^t$
$\rho^t\cos(\theta t),\ \rho^t\sin(\theta t)$	$Q_{\rho,\theta}(r) \mid \chi(r)$?	$\rho^t\big(A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t)\big)$
$P_n(t)\,\rho^t\cos(\theta t)$ (или sin)	$Q_{\rho,\theta}(r) \mid \chi(r)$?	$\rho^t\big(Q_n(t)\cos(\theta t) + R_n(t)\sin(\theta t)\big)$
Чистый полином $P_n(t)$	$\chi(1) = 0$?	$Q_n(t)$

Правило резонанса: если проверка даёт резонанс кратности s, домножьте базовую форму на t^s.

Алгоритм решения неоднородного уравнения.

1. **Однородная часть.** Найти $a_t^{(h)}$ методом характеристических корней (см. раздел 1).
2. **Форма частного решения.** По таблице 2 выбрать форму $a_t^{(p)}$ с учётом правила резонанса.
3. **Подстановка.** Подставить $a_t^{(p)}$ в исходное неоднородное уравнение и найти неопределённые коэффициенты.
4. **Общее решение.** $a_t = a_t^{(h)} + a_t^{(p)}$.
5. **Начальные условия.** Подставить k заданных значений и найти константы в $a_t^{(h)}$.