Подготовка: Дифференциальные уравнения

Полная версия с разборами тем и ссылками

11 сентября 2025 г.

Содержание

1 M1. ЛОС-разностные: характеристический многочлен, частное решение, резонанс 2

2 M2. Синтез ЛОС по заданным частным решениям (минимальный порядок) 4

3 M3. Нелинейные 2D-ОДУ: равновесия, линеаризация, типы, локальный фазовый портрет (гиперболика) 5

4 M4. Линейные ОДУ 2-го порядка: снятие y', вронскиан, нормальная форма $z'' + Qz = 0$, выводы про нули 7

5 M5. ПЧП первого порядка (общее решение): характеристики, инварианты, $u = F(I_1, I_2)$ 9

6 M6. ПЧП 1-го порядка (задача Коши): нехарактеристичность, построение F по данным 10

7 M7. Системы разностных $x_{t+1} = Ax_t(+b)$: фундаментальная матрица $\Phi_t = A^t$, спектр, неоднородные случаи 11

8 M8. Вращающиеся/полярные системы: переход (x,y)→(r,θ), интегрируемые случаи 13

9 M9. Первые интегралы в 3D-системах ОДУ: поиск двух независимых и проверка 15

10 M10. Периодические коэффициенты (Флоке): монодромия, множители, утверждения вида y(x+T)=Cy(x) 16

11 Негиперболические равновесия: полярные координаты и инвариантные лучи 18

12 M11. Доказательные мини-кейсы: осцилляция и нули решений (пример: Бессель) 20

13 M12. Механические системы и устойчивость Ляпунова: $\ddot{x} = -\nabla V$, энергия 21

14 M13. Системы разностных уравнений: вариация постоянных, задача Коши 23

1 M1. ЛОС-разностные: характеристический многочлен, частное решение, резонанс

1. Тип экзаменационной задачи (полное условие)

Найдите общее решение:

$$y_{t+3} - y_{t+2} + 4y_{t+1} - 4y_t \ = \ 26 \cdot 3^t + 10t + 9,$$

где $t \in \mathbb{Z}$, $(y_t)_{t \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$).

2. Универсальный алгоритм (визуальные формулы и детерминированные шаги)

Исходные данные и обозначения (ввод). Дано ЛОС порядка $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n y_{t+n} + a_{n-1} y_{t+n-1} + \cdots + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = f(t),$$

где $a_n \neq 0,\ a_k \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), $t \in \mathbb{Z}$. Вводим: $\chi(r) := r^n + b_{n-1} r^{n-1} + \cdots + b_1 r + b_0$ — характеристический многочлен (после нормировки $a_n = 1$); $k_\chi(\lambda) \in \mathbb{N}$ — кратность корня λ в χ; $P_d(t) \in \mathbb{R}[t]$ — произвольный полином степени $\leq d$; $Q_{\lambda,\theta}(r) := r^2 - 2\lambda \cos\theta\, r + \lambda^2$.

Шаг 0. Привести уравнение к канонической форме.
Разделить на a_n (если $a_n \neq 1$) и написать

$$y_{t+n} + b_{n-1} y_{t+n-1} + \cdots + b_1 y_{t+1} + b_0 y_t = f(t).$$

Шаг 1. Построить $\chi(r)$ и зафиксировать кратности корней.
Выписать $\chi(r) = r^n + b_{n-1} r^{n-1} + \cdots + b_1 r + b_0$, найти все λ_j и $k_\chi(\lambda_j)$.

Шаг 2. Записать общее решение однородной части $y_t^{(h)}$.
Для каждого корня λ кратности $s = k_\chi(\lambda)$ включить базис

$$t^0 \lambda^t,\ t^1 \lambda^t, \ldots, t^{s-1} \lambda^t;$$

для пары $\lambda = \rho e^{i\theta}$, $\bar{\lambda} = \rho e^{-i\theta}$ — реальный базис $\rho^t \cos(\theta t),\ \rho^t \sin(\theta t)$.

Таблица соответствий (множитель $\Rightarrow$ вклад в $y^{(h)}$):

Множитель	**Вклад в y(h)**
$(r-\lambda)^s$	$P_{s-1}(t)\lambda^t$
$(r^2 - 2\rho\cos\theta\, r + \rho^2)^s$	$P_{s-1}(t)\rho^t \cos(\theta t),\ P_{s-1}(t)\rho^t \sin(\theta t)$

Шаг 3. Выбрать пробную форму $y_t^{(p)}$ по атомам $f(t)$ и признакам резонанса через χ.
Разложить $f(t)$ на атомы и применить правила из таблицы:

Атом	**Резонанс?**	**Вклад в y(p)**
λ^t	$k_\chi(\lambda) = 0?$	$A\,\lambda^t$
$P_d(t)$	$k_\chi(1) = 0?$	$c_0 + c_1 t + \cdots + c_d t^d$
$\lambda^t P_d(t)$	$k_\chi(\lambda) = 0?$	$\lambda^t(c_0 + c_1 t + \cdots + c_d t^d)$
$\lambda^t \cos(\theta t)$ $\lambda^t \sin(\theta t)$	$Q_{\lambda,\theta} \mid \chi?$	$\lambda^t(A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t))$
При резонансе:	**любая форма**	**умножить на** t^s

Шаг 4. Определить коэффициенты пробной формы.
Подставить $y^{(p)}$ в уравнение, сгруппировать по независимым типам (λ^t, t^k, $\lambda^t \cos/\sin$) и решить линейную систему на коэффициенты.

Шаг 5. Собрать общий ответ и учесть начальные условия (при наличии).
Записать $y_t = y_t^{(h)} + y_t^{(p)}$. При наличии $y_0, \dots, y_{n-1}$ подставить соответствующие t и решить систему для констант при $y^{(h)}$.

3. Сопроводительные материалы (таблицы и обозначения)

Атом $\to$ пробная форма (до резонанса):

$$\lambda^t \mapsto A\,\lambda^t, \qquad P_d(t) \mapsto c_0 + c_1 t + \cdots + c_d t^d, \qquad \lambda^t P_d(t) \mapsto \lambda^t(c_0 + c_1 t + \cdots + c_d t^d),$$

$$\lambda^t \cos(\theta t),\ \lambda^t \sin(\theta t) \mapsto \lambda^t\big(A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t)\big).$$

Правило резонанса (через χ): $s = k_\chi(1)$ для $P_d(t)$; $s = k_\chi(\lambda)$ для $\lambda^t P_d(t)$; если $Q_{\lambda,\theta} \mid \chi$, умножить триг-форму на t^s.

4. Применение алгоритма к объявленной задаче

$$y_{t+3} - y_{t+2} + 4y_{t+1} - 4y_t \ = \ 26 \cdot 3^t + 10t + 9.$$

Шаг 0. Канонический вид зафиксирован.
Уравнение уже записано как $y_{t+3} + (-1)y_{t+2} + 4y_{t+1} + (-4)y_t = f(t)$, нормировка не требуется.

Шаг 1. Построить $\chi(r)$ и кратности корней.
$\chi(r) = r^3 - r^2 + 4r - 4 = (r-1)(r^2+4)$; корни 1, $\pm 2i$, все кратности равны 1: $k_\chi(1) = 1$, $k_\chi(\pm 2i) = 1$.

Шаг 2. Записать $y_t^{(h)}$ по найденному спектру.

$$y_t^{(h)} = C_1 \cdot 1^t + 2^t\Big(C_2 \cos\tfrac{\pi t}{2} + C_3 \sin\tfrac{\pi t}{2}\Big).$$

Шаг 3. Выбрать $y_t^{(p)}$ по атомам RHS и признакам резонанса на χ.
$f(t) = 26 \cdot 3^t + P_1(t)$, где $P_1(t) = 10t + 9$.

- Для 3^t: $k_\chi(3) = 0$ (3 не корень) $\Rightarrow A \cdot 3^t$
- Для $P_1(t)$: $k_\chi(1) = 1$ (1 — корень кратности 1) $\Rightarrow t(\tilde{a}t + \tilde{b}) = \tilde{a}t^2 + \tilde{b}t$

Итого

$$y_t^{(p)} = A \cdot 3^t + a\,t^2 + b\,t.$$

Шаг 4. Найти коэффициенты пробной формы, учитывая разложение по типам.
Подстановка даёт

$$L[y^{(p)}] = 26A \cdot 3^t + 10a\,t + (9a + 5b) \overset{!}{=} 26 \cdot 3^t + 10t + 9 \Rightarrow A = 1,\ a = 1,\ b = 0.$$

Следовательно, $y_t^{(p)} = 3^t + t^2$.

Шаг 5. Собрать общий ответ и отметить, как добавляются начальные условия.

$$\boxed{y_t = C_1 + 2^t\Big(C_2 \cos\tfrac{\pi t}{2} + C_3 \sin\tfrac{\pi t}{2}\Big) + 3^t + t^2}.$$

При наличии y_0, y_1, y_2 — подставить $t = 0, 1, 2$ и решить систему для C_1, C_2, C_3.

2 М2. Синтез ЛОС по заданным частным решениям (минимальный порядок)

1. Тип экзаменационной задачи (полное условие)

Задача. Построить *линейное однородное разностное уравнение с постоянными коэффициентами* минимально возможного порядка, частными решениями которого являются

$$y_t^{(1)} = 3^t, \qquad y_t^{(2)} = 2^t \sin\frac{\pi t}{3}.$$

(Решение здесь не приводится; это контекст для главы.)

2. Универсальный алгоритм (визуальные формулы и детерминированные шаги)

Исходные данные и обозначения (ввод). Дано множество частных решений $\{y_t^{(k)}\}_{k=1}^K$ ЛОС. Требуется построить характеристический полином $p(\lambda)$ минимального порядка N такой, что все $y_t^{(k)}$ являются решениями уравнения $p(L)[y_t] = 0$, где L — оператор сдвига $Ly_t = y_{t+1}$.

Вводим: $\alpha \in \mathbb{R}$ — основание экспоненты; $\omega \in \mathbb{R}$ — частота тригонометрических функций; $s \in \mathbb{N}_0$ — степень полинома t^s; $p(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$ — характеристический полином.

Шаг 0. Распознать «атом» каждого данного решения.
Для каждого $y_t^{(k)}$ определить одну из форм: α^t; $t^s\alpha^t$; $\alpha^t\cos(\omega t)$ или $\alpha^t\sin(\omega t)$; $t^s\alpha^t\cos(\omega t)$ или $t^s\alpha^t\sin(\omega t)$.

Шаг 1. Получить характеристический множитель(и) для каждого атома.
По таблице соответствий заменить атом на множитель $p(\lambda)$ с учётом кратности $(s+1)$.

Шаг 2. Собрать общий характеристический полином минимального порядка.
Перемножить *разные* множители (комплексные корни берутся парой $\Rightarrow$ реальный квадратичный множитель). Повторы дают максимальную кратность.

Шаг 3. Записать разностное уравнение.
Привести $p(\lambda)$ к виду $\lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ и выписать

$$y_{t+N} + a_{N-1}y_{t+N-1} + \cdots + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = 0.$$

Шаг 4. Проверить минимальность и корректность.
Убедиться, что N равен сумме степеней множителей; проверить зануление $p(\lambda)$ на атомах (для тригонометрических — на $\lambda = \alpha e^{\pm i\omega}$).

3. Сопроводительные материалы (таблицы и обозначения)

Таблица соответствий (атом $\Rightarrow$ множитель $\Rightarrow$ кратность):

Атом	Множитель	Кратность
α^t	$(\lambda-\alpha)$	1
$t^s\alpha^t$	$(\lambda-\alpha)^{s+1}$	$s+1$
$\alpha^t\cos(\omega t),\ \alpha^t\sin(\omega t)$	$\lambda^2 - 2\alpha\cos\omega\,\lambda + \alpha^2$	1
$t^s\alpha^t\cos(\omega t),\ t^s\alpha^t\sin(\omega t)$	$(\lambda^2 - 2\alpha\cos\omega\,\lambda + \alpha^2)^{s+1}$	$s+1$

Быстрые значения $\cos\omega$:

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Правила сборки: (i) Пара $\{\cos, \sin\}$ с одинаковыми α, ω даёт один и тот же квадратичный множитель (не удваивать). (ii) При нескольких степенях t^s берётся максимальная кратность.

4. Применение алгоритма к объявленной задаче

Дано: $y_t^{(1)} = 3^t$, $y_t^{(2)} = 2^t \sin\frac{\pi t}{3}$.

Шаг 0. Распознать «атом» каждого данного решения.
Атомы: 3^t $(\alpha = 3)$; $2^t \sin(\pi t/3)$ $(\alpha = 2,\ \omega = \pi/3)$.

Шаг 1. Получить характеристический множитель(и) для каждого атома.
Множители: $(\lambda - 3)$ и $\lambda^2 - 2 \cdot 2\cos(\pi/3)\lambda + 2^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 4$.

Шаг 2. Собрать общий характеристический полином минимального порядка.
Сборка: $p(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 2\lambda + 4)$.

Шаг 3. Записать разностное уравнение.
Развёртка: $p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 10\lambda - 12$. Соответствующее ЛОС:

$$\boxed{y_{t+3} - 5y_{t+2} + 10y_{t+1} - 12y_t = 0}.$$

Шаг 4. Проверить минимальность и корректность.
Минимальность: порядок $N = 3$; проверка $p(3) = 0$ и $\lambda = 2e^{\pm i\pi/3}$ зануляют квадратичный множитель.

3 М3. Нелинейные 2D-ОДУ: равновесия, линеаризация, типы, локальный фазовый портрет (гиперболика)

1. Тип экзаменационной задачи (полное условие)

Условие. Найдите положения равновесия автономной системы уравнений, определите их характер, и нарисуйте фазовые портреты в окрестности положений равновесия

$$\begin{cases} \dot{x} = 2 - 2\sqrt{1 + x + y}, \\ \dot{y} = \exp\!\Big(\frac{5}{4}x + 2y + y^2\Big) - 1. \end{cases}$$

2. Универсальный алгоритм (визуальные формулы и детерминированные шаги)

Исходные данные и обозначения (ввод). Дана автономная система $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$, где $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Требуется найти положения равновесия (x_0, y_0) такие, что $f(x_0, y_0) = 0$, $g(x_0, y_0) = 0$, и классифицировать их характер.

Вводим: $J(x, y)$ — матрица Якоби; $\operatorname{tr} J = f_x + g_y$ — след; $\det J = f_x g_y - f_y g_x$ — определитель; $D = \operatorname{tr}^2 - 4\det$ — дискриминант; $\lambda_{1,2}$ — собственные значения J.

Шаг 0. Найти положения равновесия.
Решить систему $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ и найти все точки (x_0, y_0) такие, что $f(x_0, y_0) = 0$, $g(x_0, y_0) = 0$.

Шаг 1. Составить матрицу Якоби.
Вычислить частные производные и составить

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Вычислить инварианты в каждой точке равновесия.
Для каждой точки (x_0, y_0) вычислить:

$$\operatorname{tr} J(x_0, y_0), \quad \det J(x_0, y_0), \quad D = \operatorname{tr}^2 - 4\det.$$

Шаг 3. Классифицировать тип точки по детектору.
Применить правила из таблицы классификации по знакам det, D, tr.

Шаг 4. Определить устойчивость и направления.
По знаку tr и типу точки зафиксировать вход/выход; для седла отметить две сепаратрисы вдоль собственных направлений J.

Шаг 5. Нарисовать фазовый портрет.
Нанести типы точек и стрелки; при необходимости использовать изоклины $f = 0$, $g = 0$ для знаков $\dot{x}$, $\dot{y}$.

3. Сопроводительные материалы (таблицы и обозначения)

Таблица классификации равновесий:

Условие	Тип точки	Устойчивость
$\det < 0$	седло	неустойчивая
$\det > 0,\ D > 0,\ \mathrm{tr} < 0$	узел	устойчивый
$\det > 0,\ D > 0,\ \mathrm{tr} > 0$	узел	неустойчивый
$\det > 0,\ D < 0,\ \mathrm{tr} < 0$	фокус	устойчивый
$\det > 0,\ D < 0,\ \mathrm{tr} > 0$	фокус	неустойчивый
$\det > 0,\ D = 0$ или $\det = 0$	негиперболика	см. главу М10

Быстрые производные (частые атомы):

$$f(x,y) = A - B\sqrt{\Phi(x,y)}: \quad f_x = -\frac{B}{2}\Phi^{-1/2}\Phi_x, \quad f_y = -\frac{B}{2}\Phi^{-1/2}\Phi_y;$$
$$g(x,y) = e^{\Psi(x,y)} - 1: \quad g_x = e^{\Psi}\Psi_x, \quad g_y = e^{\Psi}\Psi_y.$$

Правила упрощения: Если в равновесии $g = 0$, то $e^{\Psi} = 1$ и $g_x = \Psi_x$, $g_y = \Psi_y$; если $1 + x + y = 1$, то $\sqrt{1 + x + y} = 1$ и $f_x = f_y = -1$.

4. Применение алгоритма к объявленной задаче

Дано: $\dot{x} = 2 - 2\sqrt{1 + x + y}$, $\dot{y} = \exp\Bigl(\frac{5}{4}x + 2y + y^2\Bigr) - 1$.

Шаг 0. Найти положения равновесия.
$f = 0 \ \Rightarrow\ \sqrt{1 + x + y} = 1 \ \Rightarrow\ x + y = 0.$ $\quad g = 0 \ \Rightarrow\ \frac{5}{4}x + 2y + y^2 = 0$. Подставляя $y = -x$:

$$x^2 - \tfrac{3}{4}x = 0 \ \Rightarrow\ x \in \{0, \tfrac{3}{4}\}.$$

Точки равновесия: $(0,0)$ и $(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$.

Шаг 1. Составить матрицу Якоби.
При $x + y = 0$ и $\Psi = 0$ имеем

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \frac{5}{4} & 2 + 2y \end{pmatrix}.$$

Значит $J(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \frac{5}{4} & 2 \end{pmatrix}$, $J(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Шаг 2. Вычислить инварианты в каждой точке равновесия.

$$(0,0): \ \mathrm{tr} = 1,\ \det = -\tfrac{3}{4} < 0;$$
$$(\tfrac{3}{4}, -\tfrac{3}{4}): \ \mathrm{tr} = -\tfrac{1}{2},\ \det = \tfrac{3}{4} > 0,\ D = \tfrac{1}{4} - 3 = -\tfrac{11}{4} < 0.$$

Шаг 3. Классифицировать тип точки по детектору.

$$\begin{aligned}&(0,0):\ \det<0\ \Rightarrow\ \text{седло (неустойчивая);}\\&(\tfrac{3}{4},-\tfrac{3}{4}):\ \det>0,\ D<0,\ \operatorname{tr}<0\ \Rightarrow\ \text{фокус устойчивый.}\end{aligned}$$

Шаг 4. Определить устойчивость и направления.
В $(0,0)$ — две сепаратрисы по собственным направлениям J; в $(\frac{3}{4},-\frac{3}{4})$ — спиральное вхождение.

Шаг 5. Нарисовать фазовый портрет.
Эскиз: седло в $(0,0)$ с «крестом» сепаратрис; устойчивый фокус в $(\frac{3}{4},-\frac{3}{4})$ со стрелками внутрь. Изоклина $x+y=0$ помогает ориентировать знаки $\dot{x}$.

$$\boxed{\text{Две точки равновесия: седло } (0,0) \text{ и устойчивый фокус } (\tfrac{3}{4},-\tfrac{3}{4})}$$

4 M4. Линейные ОДУ 2-го порядка: снятие y', вронскиан, нормальная форма $z''+Qz=0$, выводы про нули

1. Тип экзаменационной задачи (полное условие)

Пусть функции $p(x),q(x)\in C(\mathbb{R})$ и $q(x)<0$ для всех $x\in\mathbb{R}$. Пусть $y(x)\not\equiv 0$ — решение

$$y''(x)+p(x)\,y'(x)+q(x)\,y(x)=0.$$

Докажите: если y имеет локальный максимум в точке x_0, то $y(x_0)\le 0$.

2. Универсальный алгоритм (визуальные формулы и детерминированные шаги)

Исходные данные и обозначения (ввод). Рассматривается линейное ОДУ второго порядка

$$y''+p(x)\,y'(x)+q(x)\,y(x)=0,\quad x\in I\subset\mathbb{R},$$

где $y:I\to\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), $p,q\in C(I)$. Вводим обозначения: $\phi(x)\in C^1(I)$ — интегрирующий множитель для снятия y'; $z=\phi^{-1}y$; $Q(x)$ — эффективный потенциал в нормальной форме; $W[y_1,y_2]=y_1y_2'-y_2y_1'$ — вронскиан пары решений.

Шаг 0. Диагноз линейности и фиксация коэффициентов.
Привести уравнение к виду $y''+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0$; зафиксировать p,q. Если коэффициент при y'' зависит от y или y' (не только от x) — это *не M4*.

Шаг 1. Нормальная форма (снять y').
Взять

$$\phi(x)=\exp\Bigl(-\tfrac{1}{2}\int p(x)\,dx\Bigr),\qquad y=\phi z,$$

тогда

$$z''+Q(x)\,z=0,\qquad Q(x)=q(x)-\frac{p'(x)}{2}-\frac{p(x)^2}{4}.$$

Шаг 2. Вронскиан и независимость (Абель).
Для двух решений y_1,y_2:

$$W'=-p\,W,\qquad W(x)=W(x_0)\,\exp\Bigl(-\int_{x_0}^{x}p(t)\,dt\Bigr).$$

Критерий: $W(x_0)\neq 0\Rightarrow y_1,y_2$ линейно независимы на интервале.

Шаг 3. Качественные выводы по триггерам.

- Триггер «экстремум»: в x_0 максимума $y'(x_0)=0,\ y''(x_0)\le 0$; подставить в ОДУ.
- Триггер «≤ 1 нуля»: перейти к $z''+Qz=0$; при $Q\le 0$ интегральный приём

  $$\int_a^b zz''\,dx+\int_a^b Qz^2\,dx=0\Rightarrow -\int_a^b (z')^2\,dx+\int_a^b Qz^2\,dx=0,$$

  что исключает два нуля у нетривиального решения.

Шаг 4. Итог (коробочная формулировка).
Записать использованные ϕ, Q или W и сформулировать вывод в $\boxed{\cdots}$.

3. Сопроводительные материалы (таблицы и обозначения)

Детектор линейности (сторожок).

Признак	Вывод
$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$ с $a_i=a_i(x)$	линейное (наш класс М4)
Коэффициент при y'' зависит от y или y'	не М4 (нельзя Абеля/ФС)

Памятка формул М4.

$$\phi(x)=\exp\Bigl(-\tfrac{1}{2}\int p\Bigr),\qquad Q=q-\tfrac{1}{2}p'-\tfrac{1}{4}p^2,\qquad W(x)=W(x_0)\exp\Bigl(-\int_{x_0}^{x}p\Bigr).$$

Детектор ветки шага 3 (какой приём включать).

Признак в условии	Действие
есть максимум/минимум и знак q	экстремум-тест: $y'=0,$ подстановка в ОДУ
нужно « ≤ 1 нуля»	$z''+Qz=0,\ Q\le 0\ \Rightarrow$ интегральный приём
независимость пары	формула Абеля для W

4. Применение алгоритма к объявленной задаче

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0,\qquad q(x)<0\ \forall x\in\mathbb{R},\quad y\not\equiv 0.$$

Шаг 0. Диагноз линейности и фиксация коэффициентов.
Уравнение уже в виде $y''+py'+qy=0$; задан знак $q<0$.

Шаг 1. Нормальная форма (снять y').
Для экстремума переход не обязателен; оставляем исходную форму.

Шаг 2. Вронскиан и независимость (Абель).
Не используется в данном выводе.

Шаг 3. Качественные выводы по триггерам.
Триггер «экстремум»: в точке локального максимума x_0 имеем $y'(x_0)=0$, $y''(x_0)\le 0$. Подстановка даёт

$$y''(x_0)=-p(x_0)y'(x_0)-q(x_0)y(x_0)=-q(x_0)y(x_0).$$

При $q(x_0)<0$ из $y(x_0)>0$ следовало бы $y''(x_0)>0$ — противоречие. Значит $y(x_0)\le 0$.

Шаг 4. Итог (коробочная формулировка).

$$\boxed{\text{Положительный локальный максимум невозможен при } q(x)<0}.$$

5 M5. ПЧП первого порядка (общее решение): характеристики, инварианты, $u = F(I_1, I_2)$

1. Тип экзаменационной задачи (полное условие)

Найдите общее решение уравнения

$$x\,\frac{\partial u}{\partial x} + y\,\frac{\partial u}{\partial y} + (x+y)\,z\,\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ u:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\ (\text{или } \mathbb{C}).$$

2. Универсальный алгоритм (визуальные формулы и детерминированные шаги)

Исходные данные и обозначения (ввод). Рассматривается однородное ПЧП первого порядка

$$a(x,y,z)\,u_x + b(x,y,z)\,u_y + c(x,y,z)\,u_z = 0,$$

где $a,b,c\in C^1$. Вектор характеристик $V=(a,b,c)$.

Шаг 1. Записать систему характеристик.

$$\frac{dx}{ds}=a, \qquad \frac{dy}{ds}=b, \qquad \frac{dz}{ds}=c, \quad \text{или} \quad \frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{dz}{c}.$$

Шаг 2. Найти первый инвариант I_1 по $\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}$.
Решить $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b}{a}$ (см. детектор D1–D5) и получить $I_1=\text{const}$.

Шаг 3. Найти второй инвариант I_2.
Использовать связь с z: если $c\equiv 0 \Rightarrow I_2 = z$; если $c=\mu(x,y)\,z \Rightarrow I_2 = z\exp(-\int\mu\,ds)$; если $c=\mu(x,y)\Rightarrow I_2 = z-\int\mu\,ds$.

Шаг 4. Записать общее решение.

$$u(x,y,z)=F\big(I_1(x,y,z),\ I_2(x,y,z)\big).$$

Шаг 5. Проверить независимость I_1, I_2 и область корректности.
Требуется $dI_1\wedge dI_2\neq 0$ на рассматриваемой области.

3. Сопроводительные материалы (таблицы и обозначения)

Паттерн (a,b)	**Признак**	$\mathbf{I_1}$
Радиальный масштаб	$a:b=x:y$	y/x
Вращение	$a:b=y:-x$	x^2+y^2
Диагональный линейный	$a=\alpha x,\ b=\beta y$	$y/x^{\beta/\alpha}$
Общий линейный	$a=\alpha x+\beta y,\ b=\gamma x+\delta y$	$\eta/\xi^{\lambda_2/\lambda_1}$ через СВ $M^\top$
Однородность порядка d	a,b однородны степени d	$x\,G(y/x)$

Вид $c(x,y,z)$	**Действие**	$\mathbf{I_2}$
$c\equiv 0$	$dz/ds=0$	z
$c=\mu(x,y)\,z$	$d\ln z/ds=\mu(x,y)$	$z\,e^{-\int\mu\,ds}$
$c=\mu(x,y)$	$dz/ds=\mu(x,y)$	$z-\int\mu\,ds$

4. Применение алгоритма к объявленной задаче

$$x\,u_x + y\,u_y + (x+y)\,z\,u_z = 0.$$

Шаг 1. Характеристики.
$\dot{x} = x,\ \dot{y} = y,\ \dot{z} = (x+y)z.$

Шаг 2. I_1 из $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ (детектор: радиальный).
$\ln y - \ln x = C \Rightarrow I_1 = \dfrac{y}{x}.$

Шаг 3. I_2 для $c = (x+y)z$.
$\dfrac{d\ln z}{ds} = x+y,\ \dfrac{d(x+y)}{ds} = x+y \Rightarrow \dfrac{d}{ds}\big(\ln z - (x+y)\big) = 0$. Значит $I_2 = z\,e^{-(x+y)}$.

Шаг 4. Общее решение.

$$u(x,y,z) = F\Big(\frac{y}{x},\ z\,e^{-(x+y)}\Big).$$

Шаг 5. Независимость/область.
$d(y/x) \wedge d(ze^{-(x+y)}) \neq 0$ при $x \neq 0$. Итог корректен на $\{x \neq 0\}$.

6 M6. ПЧП 1-го порядка (задача Коши): нехарактеристичность, построение F по данным

1. Тип экзаменационной задачи (полное условие)

Даны две задачи Коши для уравнения

$$y\,z_x - x\,z_y = 0:$$

а) $z = 2y$ при $x = 1$; б) $z = 2y$ при $x = 1+y$. Искать решение в окрестности $(1,0)$. Проверить условия теоремы существования–единственности.

2. Универсальный алгоритм (визуальные формулы и детерминированные шаги)

Исходные данные и обозначения (ввод). Дано квазилинейное ПЧП 1-го порядка $a(x,y)z_x + b(x,y)z_y = 0$, где $a, b \in C^1(\Omega \subset \mathbb{R}^2)$, и начальные данные на кривой $\gamma : s \mapsto (x(s), y(s))$: $z(\gamma(s)) = \varphi(s)$.

Вводим: $I_1(x,y)$ — первый интеграл (инвариант); $\Delta(s)$ — определитель нехарактеристичности; $\gamma'(s)$ — касательный вектор к кривой; F — произвольная функция.

Шаг 0. Найти характеристики.
Решить систему $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{a}$ и найти первый интеграл $I_1(x,y) = C_1$.

Шаг 1. Записать общее решение.
Общее решение имеет вид $z(x,y) = F(I_1(x,y))$, где F — произвольная функция.

Шаг 2. Сшить с начальными данными.
Подставить кривую γ в общее решение: $F(I_1(\gamma(s))) = \varphi(s)$. Если $\Delta \neq 0$, то $s = \sigma(I)$ локально и

$$z(x,y) = \varphi(\sigma(I_1(x,y))).$$

Шаг 3. Проверить нехарактеристичность.
Вычислить $\Delta(s) = a(\gamma)y'(s) - b(\gamma)x'(s)$. Проверить условие $(a,b) \not\parallel \gamma'(s) \iff \Delta \neq 0$.

Шаг 4. Сформулировать итог.
$\Delta \neq 0 \Rightarrow$ единственность; $\Delta = 0 \Rightarrow$ ветвление или неединственность.

3. Сопроводительные материалы (таблицы и обозначения)

Быстрые инварианты:

Коэффициенты (a,b)	**Уравнение** $\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}$	**Инвариант** $I_1(x,y)$
$(y,\ -x)$	$-\frac{x}{y}$	x^2+y^2
$(x,\ y)$	$\frac{y}{x}$	$\frac{y}{x}$
$(\alpha x,\ \beta y)$	$\frac{\beta y}{\alpha x}$	$\frac{y}{x^{\beta/\alpha}}$
$(\alpha x+\beta y,\ \gamma x+\delta y)$	$\frac{\gamma x+\delta y}{\alpha x+\beta y}$	линейная замена $\Rightarrow \frac{\eta}{\xi^{\lambda_2/\lambda_1}}$

Условие нехарактеристичности: $\Delta(s)=a(\gamma)y'(s)-b(\gamma)x'(s)\neq 0$.

Правила диагностики: В виде $g(x,y)=0$: $ag_x+bg_y\neq 0$ на γ.

4. Применение алгоритма к объявленной задаче

Дано: $y\,z_x-x\,z_y=0$ с двумя задачами Коши в окрестности $(1,0)$.

Шаг 0. Найти характеристики.
$a=y,\ b=-x\Rightarrow dy/dx=-x/y\Rightarrow I_1=x^2+y^2$.

Шаг 1. Записать общее решение.
Общее решение: $z=F(x^2+y^2)$.

Шаг 2. Сшить с начальными данными.
(а) $x=1,\ z=2y$:
$I_1|_{x=1}=1+y^2,\quad \Delta=y\cdot 1-(-1)\cdot 0=y$.
В $(1,0)$: $\Delta=0$ (характеристическая).
Инверсия многозначна: $y=\pm\sqrt{I-1}\Rightarrow$

$$\boxed{z=2\,\mathrm{sgn}(y)\sqrt{x^2+y^2-1}}$$

(неединственность у $y=0$).

(б) $x=1+y,\ z=2y$:
$I_1|_{x=1+y}=1+2y+2y^2,\quad \Delta=2y+1$.
В $(1,0)$: $\Delta=1\neq 0$ (нехарактеристическая).
$I=1+2s+2s^2\Rightarrow s=\frac{-1+\sqrt{2I-1}}{2}$ (ветвь у $s\approx 0$).

$$\boxed{z(x,y)=-1+\sqrt{2(x^2+y^2)-1}}$$

(единственно в окрестности $(1,0)$).

7 M7. Системы разностных $x_{t+1}=Ax_t(+b)$: фундаментальная матрица $\Phi_t=A^t$, спектр, неоднородные случаи

1. Тип экзаменационной задачи (полное условие)

Решите систему разностных уравнений

$$\begin{cases} x_{t+1}=2x_t+y_t+1, \\ y_{t+1}=-\,y_t-1, \end{cases}\qquad t\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\quad \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2.$$

В матричном виде: $X_{t+1}=AX_t+b$, $A=\left(\begin{smallmatrix}2&1\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$, $b=\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)$.

2. Универсальный алгоритм (визуальные формулы и детерминированные шаги)

Исходные данные и обозначения (ввод). Дана система $X_{t+1} = AX_t + b_t$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b_t \in \mathbb{R}^n$. Обозначим $\Phi_t := A^t$ $(\Phi_0 = I)$. Спектр A: $\{\lambda_j\}$, жордановы блоки J_j.

Шаг 0. Стандартный вид и отделение однородной части.
Записать $X_{t+1} - AX_t = b_t$. Для $b_t \equiv 0$: $X_t = \Phi_t C$.

Шаг 1. Спектр A и выбор ветки для Φ_t.
Найти собственные значения/кратности и выбрать: диагонализация, жордановы блоки или реальный блок для комплексной пары.

Шаг 2. Построение $\Phi_t = A^t$.
Использовать:

$$\Phi_t = \begin{cases} S\Lambda^t S^{-1}, & A = S\Lambda S^{-1}, \\ \lambda^t \sum_{k=0}^{m-1} \binom{t}{k} N^k, & A \sim J = \lambda(I+N),\ N^m = 0, \\ \rho^t S R(\theta t) S^{-1}, & \lambda = \rho e^{\pm i\theta}, \\ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)^t = \left(\begin{smallmatrix} a^t & b\sum_{k=0}^{t-1} a^{t-1-k} d^k \\ 0 & d^t \end{smallmatrix}\right), & \text{(верхнетреугольная } 2\times 2). \end{cases}$$

Шаг 3. Неоднородная часть (вариация постоянных).

$$X_t = \Phi_t X_0 + \sum_{k=0}^{t-1} \Phi_{t-1-k}\, b_k.$$

Для $b_t \equiv b$:

$$X_t = \Phi_t(X_0 - X_*) + X_*, \qquad (I - A)X_* = b.$$

Если $1 \in \sigma(A)$, то $(I - A)$ вырождена: использовать сумму $\sum \Phi_{t-1-k} b$.

Шаг 4. Сборка с начальным условием.
Подставить Φ_t, X_0, при b константном — найденный X_*.

Шаг 5. Контроль по спектру.
$|\lambda| < 1$ даёт затухание по соответствующему направлению, $|\lambda| > 1$ — рост; $\lambda = 1$ требует резонансной проверки.

3. Сопроводительные материалы (таблицы и правила)

Ситуация	**Признак**	$\boldsymbol{\Phi_t}$
Диагонализуемая	$A = S\Lambda S^{-1}$	$S\Lambda^t S^{-1}$
Жорданов блок λ	$A = SJS^{-1}$	$\lambda^t \sum_{k=0}^{m-1} \binom{t}{k} N^k$
Комплексная пара	$Q_{\rho,\theta}(A) = 0$	$\rho^t S R(\theta t) S^{-1}$
Верхнетреугольная 2×2	$A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} a^t & b\sum a^{t-1-k} d^k \\ 0 & d^t \end{smallmatrix}\right)$

$\mathbf{1} \notin \sigma(\mathbf{A})$	$\det(I - A) \neq 0$	$X_* = (I - A)^{-1} b,\ X_t = \Phi_t(X_0 - X_*) + X_*$
$\mathbf{1} \in \sigma(\mathbf{A})$	$\det(I - A) = 0$	нет единств. X_*; $X_t = \Phi_t X_0 + \sum_{k=0}^{t-1} \Phi_{t-1-k} b$

4. Применение алгоритма к объявленной задаче

Шаг 0. Стандартный вид.
$X_{t+1} = AX_t + b$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $b = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Шаг 1. Спектр и ветка.
$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1$ (простые).

Шаг 2. Фундаментальная матрица.

$$A^t = \begin{pmatrix} 2^t & \sum_{k=0}^{t-1} 2^{\,t-1-k}(-1)^k \\ 0 & (-1)^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^t & \dfrac{2^t - (-1)^t}{3} \\ 0 & (-1)^t \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Неоднородность (константная).
$1 \notin \sigma(A) \Rightarrow X_* = (I - A)^{-1}b$, где

$$(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad X_* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Шаг 4. Сборка.

$$\boxed{X_t = A^t\big(X_0 - X_*\big) + X_*}.$$

Шаг 5. Контроль.
Компонента по $\lambda = 2$ растёт как 2^t; по $\lambda = -1$ — ограниченная знакопеременная.

8 M8. Вращающиеся/полярные системы: переход (x,y)→(r,θ), интегрируемые случаи

1. Тип экзаменационной задачи (полное условие)

Исследовать фазовый портрет

$$\begin{cases} \dot{x} = a\,y + x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = -a\,x + y(x^2 + y^2), \end{cases}$$

в окрестности $(0, 0)$ для всех $a \in \mathbb{R}$. *Указание:* перейти в полярные координаты. Определить тип начала координат для линеаризованной системы.

2. Универсальный алгоритм (визуальные формулы и детерминированные шаги)

Исходные данные и обозначения (ввод). Дана система $\dot{x} = f(x, y),\ \dot{y} = g(x, y)$ в декартовых координатах. Вводим полярные координаты: $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$, где $r > 0$. Вводим функции: $H(x, y) := \frac{xf+yg}{x^2+y^2}$ — радиальная компонента; $A(x, y) := -\frac{xg-yf}{x^2+y^2}$ — угловая компонента. Тогда $\dot{r} = r\,H,\ \dot{\theta} = A$.

Шаг 0. Перейти к полярным координатам.
Использовать формулы преобразования:

$$\boxed{\dot{r} = \frac{xf + yg}{r}, \qquad \dot{\theta} = \frac{xg - yf}{r^2}}$$

или через введённые функции:

$$\boxed{\dot{r} = r\,H, \quad \dot{\theta} = A}$$

Шаг 1. Вычислить функции H и A.
Найти $H(x, y) = \frac{xf+yg}{x^2+y^2}$ и $A(x, y) = -\frac{xg-yf}{x^2+y^2}$.

Шаг 2. Определить порядки малости у $r = 0$.
Разложить $H(r, \theta) = h_k(\theta)\, r^k + o(r^k)$ и $A(r, \theta) = a_0 + a_1(\theta)\, r + \ldots$ при $r \to 0$.

Шаг 3. Классифицировать тип равновесия по знаку h_k.
Анализировать $\dot r = r\, H$:

- Если $k = 0$ и $h_0 \neq 0$: $\dot r \sim h_0 r$
  - $h_0 < 0$: устойчивый фокус
  - $h_0 > 0$: неустойчивый фокус
- Если $k \geq 1$: $\dot r \sim h_k(\theta)\, r^{k+1}$ — негиперболическое равновесие
  - $h_k(\theta) > 0$: радиальный разлёт
  - $h_k(\theta) < 0$: радиальное притяжение

Анализировать $\dot\theta \sim a_0$: при $a_0 \neq 0$ — равномерное вращение (знак a_0 задаёт направление).

Шаг 4. Проверить линеаризацию.
Вычислить якобиан $J(0, 0) = \left(\begin{smallmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{smallmatrix}\right)$. Если $\sigma(J) = \{\pm i a_0\}$ — центр для линейной части, устойчивость определяет H.

Шаг 5. Построить эскиз фазового портрета.
Нарисовать стрелки по знакам $\operatorname{sgn}(\dot r)$ и $\operatorname{sgn}(\dot\theta)$. Кривая $\dot r = 0 \Leftrightarrow H = 0$ — радиальные барьеры.

3. Сопроводительные материалы (таблицы и обозначения)

Основные формулы преобразования:

$$\boxed{xf + yg = r^2 H}, \qquad \boxed{xg - yf = -\, r^2 A}.$$

Классификация по порядку малости H:

$$H(r, \theta) \sim \begin{cases} h_0 \ (\neq 0) & \Rightarrow\ \dot r \sim h_0 r \ \Rightarrow \begin{cases} h_0 < 0: & \text{устойчивый фокус}, \\ h_0 > 0: & \text{неустойчивый фокус}, \end{cases} \\ h_k(\theta)\, r^k,\ k \geq 1 & \Rightarrow\ \dot r \sim h_k(\theta)\, r^{k+1} \ \text{(негиперболика)} \end{cases}$$

Специальный случай: Если $f = a\, y + x\, \Phi,\ g = -a\, x + y\, \Phi$, то

$$\boxed{\dot r = r\, \Phi, \quad \dot\theta = -a}.$$

4. Применение алгоритма к объявленной задаче

$$\begin{cases} \dot x = a\, y + x(x^2 + y^2), \\ \dot y = -a\, x + y(x^2 + y^2), \end{cases}$$

Шаг 0. Перейти к полярным координатам.
Используем формулы: $f(x, y) = a\, y + x(x^2 + y^2)$, $g(x, y) = -a\, x + y(x^2 + y^2)$.

Шаг 1. Вычислить функции H и A.

$$H = \frac{x(ay + xr^2) + y(-ax + yr^2)}{r^2} = \frac{ar^2 \sin\theta\cos\theta + ar^2 \sin\theta\cos\theta + r^4}{r^2} = r^2$$

$$A = -\frac{x(-ax + yr^2) - y(ay + xr^2)}{r^2} = -\frac{-ar^2\cos^2\theta - ar^2\sin^2\theta}{r^2} = a$$

Шаг 2. Определить порядки малости у $r = 0$.
$H = r^2 \Rightarrow k = 2,\ h_2 \equiv 1 > 0;\ A \equiv a.$

Шаг 3. Классифицировать тип равновесия.
$\dot{r} = r^3 > 0$ при $r > 0 \Rightarrow$ радиальный разлёт (негиперболическая неустойчивость). $\dot{\theta} = a \Rightarrow$ равномерное вращение (знак a задаёт направление).

Шаг 4. Проверить линеаризацию.
$J(0,0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\sigma(J) = \{\pm ia\} \Rightarrow$ центр для линейной части ($a \neq 0$); истинная динамика — разлёт из-за r^3.

Шаг 5. Построить эскиз фазового портрета.
Эскиз: расходящиеся спирали при $a \neq 0$; при $a = 0$ — чисто радиальный разлёт ($\dot{r} = r^3,\ \dot{\theta} \equiv 0$).

$\boxed{\text{При } a \neq 0\text{: расходящиеся спирали; при } a = 0\text{: радиальный разлёт}}$

9 M9. Первые интегралы в 3D-системах ОДУ: поиск двух независимых и проверка

1. Тип экзаменационной задачи (полное условие)

Найдите два независимых первых интеграла и проверьте их независимость для системы

$$\dot{x} = yz, \qquad \dot{y} = z, \qquad \dot{z} = -y,$$

где $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Укажите область, где полученная пара интегралов независима.

2. Универсальный алгоритм (визуальные формулы и детерминированные шаги)

Исходные данные и обозначения (ввод). Пусть

$$\dot{x} = f_1(x, y, z), \quad \dot{y} = f_2(x, y, z), \quad \dot{z} = f_3(x, y, z),$$

$f_i \in C^1$. Первый интеграл I удовлетворяет $\dfrac{d}{dt} I = \nabla I \cdot (f_1, f_2, f_3) = 0$.

Шаг 1. Выделить «быструю» 2D-подсистему.
Проверить пары (y, z), (x, y), (x, z) на простой вид (вращение, масштаб, линейная/однородная структура) и выбрать удобную.

Шаг 2. Построить первый интеграл I_1 для выбранной пары.
По детекторам (см. таблицу D): при вращении $(\alpha z, -\alpha y)$ взять $I_1 = y^2 + z^2$; при масштабе $(\alpha y, \beta z)$ взять $I_1 = z/y^{\beta/\alpha}$; в линейном случае перейти к базису собственных векторов. Проверить $\dot{I}_1 = 0$.

Шаг 3. Построить второй интеграл I_2 через «линейно-квадратичный анзац».
Если $f_1 = f_1(y, z)$, попробовать $I_2 = x - F(y, z)$ с $F = ay^2 + bz^2 + c\,yz$ и потребовать

$$\dot{I}_2 = \dot{x} - (F_y \dot{y} + F_z \dot{z}) \equiv 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (2ay + cz) f_2 + (2bz + cy) f_3 \equiv f_1.$$

Решить линейную систему на a, b, c. При неудаче циклически переставить переменные.

Шаг 4. Проверить независимость пары (I_1, I_2).
Убедиться, что $\nabla I_1 \times \nabla I_2 \neq 0$ (или $dI_1 \wedge dI_2 \neq 0$) в интересующей области.

Шаг 5. Сформулировать результат.
Записать $\boxed{I_1 = C_1,\ I_2 = C_2}$ и область валидности (где независимость не нарушается).

3. Сопроводительные материалы (таблицы и обозначения)

Пара	**Признак**	**Инвариант** I_1
$(\dot y, \dot z) = (\alpha z, -\alpha y)$	вращение	$y^2 + z^2$
$(\dot y, \dot z) = (\alpha y, \beta z)$	масштаб	$z/y^{\beta/\alpha}$
$(\dot y, \dot z) = (Ay + Bz, Cy + Dz)$	линейная	$\eta/\xi^{\lambda_2/\lambda_1}$ в базисе левых СВ

Q-анзац для I_2: при $f_1 = f_1(y, z)$ берем $I_2 = x - F(y, z)$, $F = ay^2 + bz^2 + c\,yz$ и решаем

$$(2ay + cz)\,f_2 + (2bz + cy)\,f_3 \equiv f_1.$$

Если не решается — переставляем роли переменных и повторяем.

4. Применение алгоритма к объявленной задаче

$$\dot x = yz, \qquad \dot y = z, \qquad \dot z = -y.$$

Шаг 1. Выделяем пару.
$(\dot y, \dot z) = (z, -y)$ — вращение.

Шаг 2. Первый интеграл I_1.
$I_1 = y^2 + z^2$, так как $\dot I_1 = 2y\dot y + 2z\dot z = 2yz + 2z(-y) = 0$.

Шаг 3. Второй интеграл I_2 через анзац.
$f_1(y, z) = yz$. Ищем $I_2 = x - F(y, z)$, $F = ay^2 + bz^2 + c\,yz$ из

$$(2ay + cz)z + (2bz + cy)(-y) \equiv yz.$$

Получаем $a = \frac{1}{2},\ b = 0,\ c = 0$, значит $F = \frac{1}{2}y^2$ и

$$I_2 = x - \tfrac{1}{2}y^2.$$

Шаг 4. Независимость.
$\nabla I_1 = (0, 2y, 2z),\ \nabla I_2 = (1, -y, 0)$,

$$\nabla I_1 \times \nabla I_2 = (0, -2z, -2y) \neq 0 \text{ при } (y, z) \neq (0, 0).$$

Шаг 5. Результат.

$$\boxed{I_1 = y^2 + z^2 = C_1, \qquad I_2 = x - \tfrac{1}{2}y^2 = C_2}$$

Независимость выполняется на множестве $\{(y, z) \neq (0, 0)\}$.

10 M10. Периодические коэффициенты (Флоке): монодромия, множители, сдвиг решения

1. Тип экзаменационной задачи (полное условие)

Пусть $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и 1-периодична: $q(x + 1) = q(x)$. Пусть $y \not\equiv 0$ — решение

$$y'' + q(x)\,y = 0, \qquad x \in \mathbb{R},$$

с краевыми условиями $y(0) = 0,\ y(1) = 0$. Докажите, что существует $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ такое, что

$$y(x + 1) = C\,y(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

и выразите C через $y'(0), y'(1)$.

2. Универсальный алгоритм (визуальные формулы и детерминированные шаги)

Исходные данные и обозначения (ввод). Система $Y'(x) = B(x)Y(x)$, $B(x+T) = B(x)$, либо скалярное $y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$ с периодом $T > 0$. $\Phi(0) = I$, $M = \Phi(T)$ — монодромия, её собственные числа ρ_j — множители Флоке. Для скаляра: $u(0) = 1, u'(0) = 0;\ v(0) = 0, v'(0) = 1$.

Шаг 1. Нормализация к системной форме.
Для скаляра перейти к $Y' = B(x)Y$, $Y = (y, y')^\top$, $B(x) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & -p(x) \end{smallmatrix}\right)$, период T зафиксирован.

Шаг 2. Фундаментальные решения на $[0, T]$ и монодромия M.
Собрать M как $M = \left(\begin{smallmatrix} u(T) & v(T) \\ u'(T) & v'(T) \end{smallmatrix}\right)$ (или $\Phi'(x) = B(x)\Phi(x)$, $\Phi(0) = I$).

Шаг 3. Инварианты: $\det M$.
$\det M = \exp\big(\int_0^T \operatorname{tr} B(x)\,dx\big)$. Для $y'' + p\,y' + q\,y = 0$: $\det M = \exp\big(-\int_0^T p(x)\,dx\big)$. Для $y'' + q\,y = 0$: $\det M = 1$.

Шаг 4. Множители Флоке и классификация.
$\rho_{1,2}$ — корни $\lambda^2 - (\operatorname{tr} M)\lambda + \det M = 0$, далее классифицировать по $|\operatorname{tr} M|$ и $\det M$.

Шаг 5. Утверждение о сдвиге.
При данных $y(0) = 0, y(T) = 0$ имеем $y = \alpha v$ и $v(T) = 0$. По единственности задачи Коши: $v(x+T) = v'(T)\,v(x)$. Следовательно,

$$y(x+T) = C\,y(x), \qquad C = \frac{y'(T)}{y'(0)} = v'(T).$$

3. Сопроводительные материалы (таблицы и обозначения)

Модель	$\operatorname{tr} B(x)$	$\det M$
$Y' = B(x)Y$	$\operatorname{tr} B(x)$	$\exp\big(\int_0^T \operatorname{tr} B\big)$
$y'' + p\,y' + q\,y = 0$	$-p(x)$	$\exp\big(-\int_0^T p\big)$
$y'' + q\,y = 0$	0	1

$\det M$	$\lvert\operatorname{tr} M\rvert$	Поведение
> 0	$< 2\sqrt{\det M}$	Комплексная пара ρ: квазипериодичность
> 0	$> 2\sqrt{\det M}$	Две вещественные: рост/затухание по направлениям
> 0	$= 2\sqrt{\det M}$	Кратный множитель ($\pm\sqrt{\det M}$)

$$\boxed{\text{Если } y(0) = y(T) = 0, \text{ то } y(x+T) = C\,y(x),\ C = \frac{y'(T)}{y'(0)}}$$

4. Применение алгоритма к объявленной задаче

Шаг 1. Норма: $y'' + q(x)y = 0$, $T = 1$.

Шаг 2. Базис u, v, монодромия $M = \left(\begin{smallmatrix} u(1) & v(1) \\ u'(1) & v'(1) \end{smallmatrix}\right)$.

Шаг 3. $\det M = 1$.

Шаг 4. $\rho_{1,2}$ — корни $\lambda^2 - (u(1) + v'(1))\lambda + 1 = 0$.

Шаг 5. Из $y(0) = y(1) = 0 \Rightarrow y = \alpha v$, $v(1) = 0$. Тогда $y(x+1) = v'(1)\,y(x)$, то есть

$$\boxed{y(x+1) = C\,y(x), \quad C = \frac{y'(1)}{y'(0)} = v'(1)}.$$

11 M11. Доказательные мини-кейсы: осцилляция и нули решений (пример: Бессель)

1. Тип экзаменационной задачи (полное условие)

Докажите, что всякое нетривиальное решение уравнения Бесселя

$$x^2y'' + xy' + \Big(x^2 - \tfrac{1}{2}\Big)y = 0$$

имеет бесконечно много нулей на промежутке $x > 0$.

2. Универсальный алгоритм (визуальные формулы и детерминированные шаги)

Исходные данные и обозначения (ввод). Рассматривается $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, $p, q \in C^1[X_0, \infty)$. Нормальная форма: $y = \phi z$, где

$$\phi(x) = \exp\Big(-\tfrac{1}{2}\int p(x)\,dx\Big), \qquad Q(x) = q(x) - \frac{p'(x)}{2} - \frac{p(x)^2}{4},$$

и z удовлетворяет $z'' + Q(x)z = 0$.

Шаг 1. Привести к нормальной форме $z'' + Q(x)z = 0$.
Вычислить p, q; взять $\phi = \exp(-\frac{1}{2}\int p)$, положить $y = \phi z$ и $Q = q - \frac{1}{2}p' - \frac{1}{4}p^2$.

Шаг 2. Зафиксировать численный детектор по Q на хвосте.
Найти $X_1 \geq X_0$ и $\alpha > 0$ такие, что на $[X_1, \infty)$ выполнено, например, $Q(x) \geq \alpha^2$ или $Q(x) \leq 0$.

Шаг 3. Выбрать эталон для сравнения.
При $Q \geq \alpha^2 > 0$ — эталон $v'' + \alpha^2 v = 0$; при $Q \leq 0$ — эталон $v'' = 0$.

Шаг 4. Сравнение на $[X_1, \infty)$ и вывод о нулях.
Если $Q \geq \alpha^2$, то у z бесконечно много нулей; если $Q \leq 0$, то у z не более одного нуля.

Шаг 5. Перевести вывод к y и зафиксировать область.
Так как $\phi \neq 0$ на $[X_1, \infty)$, нули y совпадают с нулями z.

3. Сопроводительные материалы (таблицы и обозначения)

Нормализация: $\phi = \exp\Big(-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int p\Big),\ Q = q - \dfrac{p'}{2} - \dfrac{p^2}{4},\ z = \dfrac{y}{\phi}.$

Условие на Q	Эталон	Вывод о нулях
$Q(x) \geq \alpha^2 > 0$	$v'' + \alpha^2 v = 0$	беск. много нулей у z
$Q(x) \leq 0$	$v'' = 0$	не более одного нуля у z

4. Применение алгоритма к объявленной задаче

Шаг 1. Нормальная форма.
$x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{2})y = 0 \Rightarrow y'' + \frac{1}{x}y' + \big(1 - \frac{1}{2x^2}\big)y = 0.$

$$\phi = x^{-1/2}, \qquad Q(x) = 1 - \frac{1}{4x^2}.$$

Шаг 2. Детектор по Q.
Для $x \geq 1$: $Q(x) \geq \frac{3}{4}$, берём $\alpha = \sqrt{3}/2$.

Шаг 3. Эталон.
$v'' + \alpha^2 v = 0.$

Шаг 4. Сравнение и вывод.
На $[1, \infty)$ выполнено $Q \geq \alpha^2 > 0 \Rightarrow$ у любого нетривиального решения z бесконечно много нулей.

Шаг 5. Возврат к y.
$\phi = x^{-1/2} \neq 0$ при $x > 0 \Rightarrow$ у y бесконечно много нулей на $x > 0$.

12 M12. Механические системы и устойчивость Ляпунова: $\ddot{x} = -\nabla V$, энергия

1. Тип экзаменационной задачи (полное условие)

Дано: $\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V(\mathbf{x})$, $V \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $V(\mathbf{0}) = \min V$, $V(\mathbf{x}) > 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. **Требуется:** найти положение равновесия и доказать его устойчивость.

2. Универсальный алгоритм (визуальные формулы и детерминированные шаги)

Исходные данные и обозначения (ввод). Дана механическая система $\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V(\mathbf{x})$. Вводим переменные: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — координаты, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ — скорости. Вводим энергию: $E(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{v}\|^2 + V(\mathbf{x})$. Вводим гессиан: $H = \nabla^2 V(\mathbf{0})$ — матрица вторых производных потенциала в точке равновесия.

Шаг 0. Проверить потенциальность системы.
Проверить: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x}) \;\Leftrightarrow\; \partial_{x_j} f_i = \partial_{x_i} f_j \quad (\forall i, j)$.

Шаг 1. Найти положения равновесия.
$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0},\; \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \iff \mathbf{v} = \mathbf{0},\; \nabla V(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. При строгом минимуме V в $\mathbf{0}$: $\boxed{\mathbf{x}_* = \mathbf{0}}$.

Шаг 2. Проверить сохранение энергии.
$\dot{E} = \dot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \nabla V \cdot \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \cdot (-\nabla V) + \nabla V \cdot \mathbf{v} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{E(t) \equiv E(0)}$.

Шаг 3. Доказать положительную определённость энергии.
$V(\mathbf{0}) = 0,\; V(\mathbf{x}) > 0\; (\mathbf{x} \neq 0) \Rightarrow \boxed{E(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \geq 0,\; E = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{v}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})}$.

Шаг 4. Использовать субуровни энергии для оценки траекторий.
$m(\varepsilon) := \min_{\|\mathbf{x}\| = \varepsilon} V(\mathbf{x}) > 0$. Если $E(0) < m(\varepsilon)$, то $E(t) \equiv E(0) < m(\varepsilon)$ и $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \; \forall t \geq 0$.

Шаг 5. Доказать устойчивость по Ляпунову.
$\forall \varepsilon > 0\; \exists \delta(\varepsilon) > 0 :\; \|(\mathbf{x}(0), \mathbf{v}(0))\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \; \forall t \geq 0$.

$$\boxed{(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \text{ устойчиво по Ляпунову (не асимптотически)}}$$

3. Сопроводительные материалы (таблицы и обозначения)

Детектор потенциальности:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x}) \;\Leftrightarrow\; \partial_{x_j} f_i = \partial_{x_i} f_j \quad (\forall i, j)$$

Локальная квадратичная аппроксимация потенциала:

$$\nabla V(\mathbf{0}) = \mathbf{0},\; H = \nabla^2 V(\mathbf{0}),\; H \succ 0 \Rightarrow V(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}\, \mathbf{x}^\top H \mathbf{x} + o(\|\mathbf{x}\|^2)$$

$$\Rightarrow \exists m > 0 : V(\mathbf{x}) \geq \tfrac{m}{2}\|\mathbf{x}\|^2 \text{ (в малой окрестности)}$$

Энергетический кандидат Ляпунова:

$$\boxed{E(\mathbf{x},\mathbf{v}) = \tfrac{1}{2}\|\mathbf{v}\|^2 + V(\mathbf{x})}, \quad \boxed{\dot{E} = 0}$$

Свойства субуровней энергии: $\mathcal{L}_c := \{(\mathbf{x},\mathbf{v}) : E(\mathbf{x},\mathbf{v}) \le c\}$ — замкнутые множества; при малых c лежат в окрестности $(\mathbf{0},\mathbf{0})$.

Критерии устойчивости:

Условие	**Вывод**
$V(\mathbf{0}) = 0$, $V(\mathbf{x}) > 0$ при $\mathbf{x} \neq 0$	устойчивость по Ляпунову
$H = \nabla^2 V(\mathbf{0}) \succ 0$	локальная устойчивость
$\dot{E} = 0$	консервативная система

4. Применение алгоритма к объявленной задаче

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V(\mathbf{x}), \quad V(\mathbf{0}) = \min V, \quad V(\mathbf{x}) > 0 \text{ при } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

Шаг 0. Проверить потенциальность системы.
Система задана в потенциальной форме: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x})$.

Шаг 1. Найти положения равновесия.
$\nabla V(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}_* = \mathbf{0}$.

Шаг 2. Проверить сохранение энергии.
$E = \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 + V(\mathbf{x})$, $\dot{E} = 0$.

Шаг 3. Доказать положительную определённость энергии.
$V(\mathbf{x}) \ge 0$, $= 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow E \ge 0$, нуль только в $(\mathbf{0},\mathbf{0})$.

Шаг 4. Использовать субуровни энергии для оценки траекторий.
$m(\varepsilon) = \min_{\|\mathbf{x}\|=\varepsilon} V(\mathbf{x}) > 0$, $E(0) < m(\varepsilon) \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$.

Шаг 5. Доказать устойчивость по Ляпунову.
$\boxed{(\mathbf{0},\mathbf{0}) \text{ устойчиво по Ляпунову}}$.

13 M13. Системы разностных уравнений: вариация постоянных, задача Коши

1. Тип экзаменационной задачи (полное условие)

Условие.

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Найти фундаментальную матрицу Φ_t. (б) Полагая $\binom{x_t}{y_t} = \Phi_t \binom{c_1^t}{c_2^t}$, выписать уравнения для c_1^t, c_2^t (не решать).

2. Универсальный алгоритм (визуальные формулы и детерминированные шаги)

Исходные данные и обозначения (ввод). $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x_t \in \mathbb{R}^n$, $b_t \in \mathbb{R}^n$. Определяем фундаментальную матрицу: $\Phi_t := A^t$. Спектральное разложение: $A = V\Lambda V^{-1}$, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Спектр: $A = V\Lambda V^{-1}$, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Шаг 1. Спектр.
Найти λ_j и базис $\{v_j\}$: $(A-\lambda_j I)v_j = 0$. Критерий: $\sum_j \dim\ker(A-\lambda_j I) = n \Rightarrow$ диагонализуемо.

Шаг 2. A в степени t.

$$A^t = V\Lambda^t V^{-1}, \quad \Lambda^t = \mathrm{diag}(\lambda_1^t, \dots, \lambda_n^t).$$

Если $\lambda = \rho e^{\pm i\theta}$: на $\mathbb{R}^2$ блок $S = \begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}$, $a + ib = \lambda$,

$$S^t = \rho^t \begin{pmatrix} \cos(\theta t) & -\sin(\theta t) \\ \sin(\theta t) & \cos(\theta t) \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Φ_t и однородная система.

$$x_{t+1} = Ax_t \ \Rightarrow\ x_t = \Phi_t x_0, \quad \Phi_t = A^t.$$

Шаг 4. Вариация постоянных.
Полагаем $x_t = \Phi_t c^{\,t}$. Тогда

$$\Phi_{t+1} c^{\,t+1} = \Phi_{t+1} c^{\,t} + b_t \ \Rightarrow\ \boxed{c^{\,t+1} - c^{\,t} = \Phi_{t+1}^{-1} b_t}.$$

Эквивалентно: $x_t = A^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} A^{t-1-k} b_k$.

Шаг 5. Частные случаи.
Если $b_t \equiv b$ и $I - A$ обратима: $x_t = A^t(x_0 - (I-A)^{-1}b) + (I-A)^{-1}b$. Если $\lambda < 0$: $\lambda^t = (-1)^t|\lambda|^t$. Пара $\rho e^{\pm i\theta}$: блок $\rho^t R(\theta t)$.

3. Сопроводительные материалы (таблицы и обозначения)

Спектр A	Формула для A^t
$\lambda_j \in \mathbb{R}$ простые	$V\,\mathrm{diag}(\lambda_1^t, \dots, \lambda_n^t)V^{-1}$
$\rho e^{\pm i\theta}$	$W\big(\rho^t \begin{smallmatrix} \cos\theta t & -\sin\theta t \\ \sin\theta t & \cos\theta t \end{smallmatrix}\big)W^{-1}$
смешанный	блочно по строкам выше

$$\Phi_t^{-1} = V\ \mathrm{diag}(\lambda_1^{-t}, \dots, \lambda_n^{-t})\, V^{-1}.$$

4. Применение алгоритма к объявленной задаче

Шаг 1. Спектр.
$\widehat{A} = \begin{smallmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{smallmatrix} \Rightarrow \sigma(\widehat{A}) = \{2, -4\}$, $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (1,-1)$. $\sigma(A) = \{1, -2\}$ (диагонализуемо).

Шаг 2. A в степени t.

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \mathrm{diag}(1, -2), \quad V^{-1} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\Phi_t = A^t = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + (-2)^t & 1 - (-2)^t \\ 1 - (-2)^t & 1 + (-2)^t \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Φ_t и однородная система.
$x_t = \Phi_t x_0$.

Шаг 4. Вариация постоянных.

$$c^{t+1} - c^{t} = \Phi_{t+1}^{-1} b, \quad \Phi_{t+1}^{-1} = V \operatorname{diag}\bigl(1, (-2)^{-(t+1)}\bigr) V^{-1}.$$

$$\Phi_{t+1}^{-1} b = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + (-2)^{-(t+1)} & 1 - (-2)^{-(t+1)} \\ 1 - (-2)^{-(t+1)} & 1 + (-2)^{-(t+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\frac{1}{2})^{t+1} \\ -(-\frac{1}{2})^{t+1} \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{c_1^{t+1} - c_1^{t} = (-\tfrac{1}{2})^{t+1}, \qquad c_2^{t+1} - c_2^{t} = -(-\tfrac{1}{2})^{t+1}}.$$

Шаг 5. Частные случаи.
$(I - A)$ необратима (есть $\lambda = 1$) $\Rightarrow$ стационарная формула неприменима; используем вариацию постоянных как выше.