Короткие ответы к задачам Gen-1

M1. Разностные ЛОС с постоянными коэффициентами

Задача 1

$$y_{t+4} - 2y_{t+3} - y_{t+2} + 2y_{t+1} = 3 \cdot 2^t + (t^2 - 1)(-1)^t + 5.$$

Характеристический многочлен: $(r-2)(r-1)(r+1)r$.

$$\begin{aligned} y_t = {} & C_0\, 0^t + C_1\, 1^t + C_2(-1)^t + C_3\, 2^t \\ & + \tfrac{1}{4}\, t\, 2^t + (-1)^t\big(\tfrac{1}{18}t^3 - \tfrac{7}{18}t^2 + \tfrac{35}{54}t\big) - \tfrac{5}{2}\, t. \end{aligned}$$

Задача 2

$$\begin{aligned} & y_{t+5} + y_{t+4} - 6y_{t+3} - 6y_{t+2} + 8y_{t+1} + 8y_t \\ & \quad = 2^t \cos\frac{\pi t}{2} + t\, 3^t. \end{aligned}$$

Корни ЛОС: $r \in \{2, -1, -2, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

$$\begin{aligned} y_t = {} & C_1\, 2^t + C_2(-1)^t + C_3(-2)^t + C_4(\sqrt{2})^t + C_5(-\sqrt{2})^t \\ & + 2^t\left(\tfrac{1}{240}\cos\frac{\pi t}{2} + \tfrac{1}{120}\sin\frac{\pi t}{2}\right) + 3^t\big(\tfrac{1}{140}\, t - \tfrac{969}{19600}\big)\,. \end{aligned}$$

Примечание. Для однозначности решения нужна ещё одна нач. величина (порядок 5).

Задача 3

$$y_{t+3} - 3y_{t+2} + 3y_{t+1} - y_t = (t^2 + 4) \cdot 1^t + t(-2)^t.$$

Левая часть $(E-1)^3$. Общее решение:

$$y_t = A + Bt + Ct^2 + \big(\tfrac{1}{60}t^5 - \tfrac{1}{8}t^4 + t^3\big) + (-2)^t\big(-\tfrac{1}{27}t + \tfrac{2}{27}\big)\,.$$

M2. Синтез разностного уравнения

Задача 1

Частные решения: $2^t,\ t2^t,\ (-2)^t \sin\frac{\pi t}{3}$.
Ответ: характеристический многочлен

$$(r-2)^2\,(r^2 + 2r + 4),$$

уравнение минимального порядка 4:

$$y_{t+4} - 2y_{t+3} - 8y_{t+1} + 16y_t = 0.$$

Задача 2

Решения: $3^t,\ t3^t,\ 2^t\cos\frac{\pi t}{4},\ 2^t\sin\frac{\pi t}{4}$.
Ответ: многочлен

$$(r-3)^2\,(r^2-2\sqrt{2}\,r+4),$$

порядок 4 (коэффициенты допускают $\sqrt{2}$).

Задача 3

Решения: $(-1)^t,\ t(-1)^t,\ t^2(-1)^t,\ 5^t$.
Ответ: многочлен

$$(r+1)^3(r-5)=r^4-2r^3-12r^2-14r-5,$$

соответствующее ЛОС:

$$y_{t+4}-2y_{t+3}-12y_{t+2}-14y_{t+1}-5y_t=0.$$

M3. Нелинейные 2D: равновесия и типы (гиперболика)

Задача 1

$$\dot{x}=y-x+x^2+xy,\qquad \dot{y}=-x+2y-xy.$$

Равновесия:

$$(0,0),\quad (2-\sqrt{3},\ 2/\sqrt{3}-1),\quad (2+\sqrt{3},\ -1-2/\sqrt{3}).$$

Типы:

$$(0,0)\text{ — седло};\quad (2-\sqrt{3},2/\sqrt{3}-1)\text{ — неустойчивый фокус};$$
$$(2+\sqrt{3},-1-2/\sqrt{3})\text{ — седло}.$$

Задача 2

$$\dot{x}=a\,y+x(r^2-1),\quad \dot{y}=-a\,x+y(r^2-1),\quad r^2=x^2+y^2.$$

В начале координат: $J=\begin{pmatrix}-1 & a\\ -a & -1\end{pmatrix}$, $\mathrm{tr}=-2$, $\det=1+a^2>0$, $D<0 \Rightarrow$ **устойчивый фокус** при любом a.

Задача 3

$$\dot{x}=2y-x-2,\qquad \dot{y}=-2x+y-2.$$

Единственное равновесие $\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$. Линеаризация: $J=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, $\mathrm{tr}=0$, $\det=3>0$, $D<0$ $\Rightarrow$ **центр**.

M4. Линейные ОДУ-2: снятие y', вронскиан, нули

Задача 1

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \Big(\frac{5}{x^2} + 1\Big)y = 0, \quad x > 0.$$

$\phi = x^{-1}$, $z = y/\phi$, $z'' + Qz = 0$ с $Q = -\frac{5}{x^2} - 1 \le 0$.
$W(x) = W(1)\,x^{-2}$. Любое нетривиальное решение имеет ≤ 1 нуль на $(0, \infty)$.

Задача 2

$$y'' + 4y' + (3 + e^{-x})y = 0.$$

$\phi = e^{-2x}$, $Q = e^{-x} - 1 \le 0$.
$W(x) = W(0)\,e^{-4x}$. $\Rightarrow$ у решения ≤ 1 нуль на $\mathbb{R}$.

Задача 3

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0, \quad x > 0.$$

$\phi = x^{-\alpha/2}$, $Q = \dfrac{4\beta + 2\alpha - \alpha^2}{4x^2}$.
$W(x) = W(x_0)\,(x_0/x)^{\alpha}$. Условие «$\le 1$ нуль»: $4\beta + 2\alpha - \alpha^2 \le 0$.

M5. ПЧП первого порядка: $u = F(I_1, I_2)$

Задача 1

$$(x + y)u_x + (2y - x)u_y = 0.$$

Инварианты: из $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y - x}{x + y}$ при $v = y/x$ получаем

$$\int \frac{1 + v}{v^2 - v + 1}\,dv = -\ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad I_1 = x\,\exp\Big(\tfrac{1}{2}\ln(v^2 - v + 1) + \sqrt{3}\,\arctan\tfrac{2v-1}{\sqrt{3}}\Big).$$

Второй инвариант $I_2 = z$. Итог: $u = F(I_1, I_2)$.

Задача 2

$$x\,u_x + y\,u_y + (x + y)z\,u_z = 0.$$

Инварианты: $I_1 = \dfrac{y}{x}$ (масштабность), $I_2 = z\,e^{-(x+y)}$. Итог: $u = F\Big(\dfrac{y}{x},\, z\,e^{-(x+y)}\Big)$.

Задача 3

$$(2xy)u_x + (y^2 - x^2)u_y + (x - y)u_z = 0.$$

Инварианты: $I_1 = \dfrac{x^2 + y^2}{x}$ (при $v = y/x$ получаем $d\ln(v^2+1) = -d\ln x$), и $I_2 = z + \ln|x+y|$ (так как $z' = (x-y)$ и $(x+y)' = 2xy + y^2 - x^2 = (y-x)(x+y)$). Итог: $u = F\left(\dfrac{x^2+y^2}{x},\ z + \ln|x+y|\right)$.

M6. ПЧП первого порядка: задача Коши

Задача 1

$y\,z_x - x\,z_y = 0$ с данными $z = 2y$ при $x = 1$.
Характеристики: $x^2 + y^2 = C$.
Тест нехарактеристичности: $\Delta = y \cdot 1 - (-1) \cdot 0 = y$. В $(1,0)$: $\Delta = 0$ (характеристично).
Решение: $z = \pm 2\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ (неединственность).

Задача 2

$y\,z_x - x\,z_y = 0$ с данными $z = 2y$ при $x = 1 + y$.
Тест: $\Delta = y + x = 1 \neq 0$ в $(1,0)$ (нехарактеристично).
Решение: $z = -1 + \sqrt{2(x^2 + y^2) - 1}$ (единственно).

Задача 3

$(x+y)\,u_x + (2y - x)\,u_y = 0$ с данными $u = x^2$ на $y = x^2$.
Инвариант: $I_1 = x^2 + y^2$.
Тест: $\Delta = (x+y) \cdot 2x - (2y - x) \cdot 1 = 2x^2 + 2xy - 2y + x \neq 0$ в $(0,0)$.
Решение: $u = F(x^2 + y^2)$, где F определяется из $F(x^2 + x^4) = x^2$.

M7. Нелинейные 2D: равновесия, линеаризация, портрет

Задача 1

$\dot{x} = x - x^2 - y - y^2,\ \dot{y} = 2x - 3y + xy$.
Равновесия: $(0,0)$ и $\big(x_*, y_*\big) \approx (0.1911,\ 0.1361)$.
Якоби в $(0,0)$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, собств. значения $-1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow$ **седло**.
В (x_*, y_*): собственные $\approx (-1.5627,\ -0.6284) \Rightarrow$ **устойчивый узел**.

Задача 2

$\dot{x} = y - x(x^2 + b),\ \dot{y} = -x - y(y^2 + b)$.
$J(0,0) = \begin{pmatrix} -b & 1 \\ -1 & -b \end{pmatrix}$, $\lambda = -b \pm i$.

Классификация: $b > 0$ — устойчивый фокус; $b < 0$ — неустойчивый фокус; $b = 0$ — линейно центр, но нелинейные кубики дают $\dot{r} = -(x^4 + y^4)/r < 0$ при $r \neq 0 \Rightarrow$ **асимптотически устойчивый фокус**.

Задача 3

$\dot{x} = (x - y)(1 - xy),\ \dot{y} = (x + y)(1 + x^2)$.
Единственное равновесие: $(0, 0)$.
$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 1 \pm i \Rightarrow$ **неустойчивый фокус**.

M8. Полярные координаты, $\dot{r}, \dot{\theta}$

Задача 1

$\dot{x} = a\,y + x(r^2 - 1),\ \dot{y} = -a\,x + y(r^2 - 1)$.
В полярных: $\dot{r} = r(r^2 - 1)$, $\dot{\theta} = -a$.
Динамика: $r = 0$ устойчив, $r = 1$ неустойчивый цикл; при $r > 1$ — уход на бесконечность; угловая скорость постоянна.

Задача 2

$\dot{x} = x(1 - r^2) + \omega y,\ \dot{y} = y(1 - r^2) - \omega x$.
В полярных: $\dot{r} = r(1 - r^2)$, $\dot{\theta} = -\omega$.
Динамика: $r = 0$ неустойчив, $r = 1$ **устойчивый предельный цикл**.

Задача 3

$\dot{x} = (r^2 - 2)x + \Omega y,\ \dot{y} = (r^2 - 2)y - \Omega x$.
В полярных: $\dot{r} = r(r^2 - 2)$, $\dot{\theta} = -\Omega$.
Динамика: $r = 0$ устойчив, $r = \sqrt{2}$ неустойчивый цикл; $r > \sqrt{2}$ — разлёт.

M9. Первые интегралы в 3D-ОДУ

Задача 1

$\dot{x} = yz,\ \dot{y} = zx,\ \dot{z} = xy$.
Интегралы: $I_1 = x^2 - y^2,\ I_2 = x^2 - z^2$ (постоянны, т.к. $\frac{d}{dt}(x^2 - y^2) = 2xyz - 2xyz = 0$, аналогично для $x^2 - z^2$).
Интегральные поверхности: пересечения квадрик $x^2 - y^2 = C_1,\ x^2 - z^2 = C_2$.

Задача 2

$\dot{x} = y^2 - z^2,\ \dot{y} = zx,\ \dot{z} = xy$.
Интеграл 1: $I_1 = y^2 - z^2$ (как в задаче 1). Тогда $\dot{x} = I_1 = \text{const}$.

Интеграл 2:

$$I_2 = \ln\frac{y-z}{y+z} + \frac{x^2}{y^2-z^2},$$

т.к. $\frac{d}{dt}\ln\frac{y-z}{y+z} = -2x$, а $\frac{d}{dt}\left(\frac{x^2}{I_1}\right) = \frac{2x\dot{x}}{I_1} = 2x$.
Поверхности: $y^2 - z^2 = C_1$, $\ln\frac{y-z}{y+z} + \frac{x^2}{C_1} = C_2$.

Задача 3

$\dot{x} = y+z$, $\dot{y} = z+x$, $\dot{z} = x+y$.
Собственный базис: $v_1 = (1,1,1)$, $\lambda_1 = 2$; $v_2 = (1,-1,0)$, $v_3 = (1,0,-1)$, $\lambda_{2,3} = -1$.
Координаты: $\xi = \frac{x+y+z}{3}$, $\eta = \frac{x-2y+z}{3}$, $\zeta = \frac{x+y-2z}{3}$.
Интегралы: $I_1 = \dfrac{\zeta}{\eta}$, $\quad I_2 = \eta^2\,\xi$ (т.к. $\dot{\eta} = -\eta$, $\dot{\zeta} = -\zeta$, $\dot{\xi} = 2\xi$).
В явном виде: $I_1 = \dfrac{x+y-2z}{x-2y+z}$, $I_2 = \dfrac{(x-2y+z)^2(x+y+z)}{27}$.

M10. Периодические коэффициенты, монодромия

Задача 1

$q(x+T) = q(x)$, $y(0) = y(T) = 0$. Тогда $y_1(x) = y(x+T)$ тоже решение и $y_1(0) = 0$.
Пространство решений с $y(0) = 0$ одномерно $\Rightarrow y(x+T) = C\,y(x)$.
Константа: $C = \dfrac{y'(T)}{y'(0)} \neq 0$.

Задача 2

$y'' + (2+\cos x)y = 0$, период 2π. Фундаментальная матрица $\Phi(2\pi)$ имеет $\det = 1$.
Множители Флоке: корни $\mu_{1,2}$ уравнения $\mu^2 - \Delta\,\mu + 1 = 0$, где $\Delta = \operatorname{tr}\Phi(2\pi) \in \mathbb{R}$.
Виды: (i) $|\Delta| < 2$: $\mu = e^{\pm i\theta}$ (устойчивый, «эллиптический»); (ii) $|\Delta| > 2$: вещественные взаимно обратные; (iii) $|\Delta| = 2$: кратный ± 1.

Задача 3

$q(x+\pi) = q(x)$, $y(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$. Тогда вектор $(y(\pi), 0)$ — результат действия монодромии на $(0, y'(0))$.
На краях зон спектра монодромия имеет $\mu = \pm 1 \Rightarrow y(x+\pi) = \pm y(x)$. Оба варианта возможны (в зависимости от знака μ).

M11. Доказательные мини-кейсы: нули Бесселя, энергетическая устойчивость

Задача 1

Докажите, что функция Бесселя $J_0(x)$ имеет бесконечно много нулей на $(0, \infty)$.
Доказательство: J_0 удовлетворяет $x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$. При $x \to \infty$ уравнение асимптотически близко к $y'' + y = 0$, решения которого осциллируют.
Теорема сравнения: если $q(x) \geq 1$ при больших x, то решения $y'' + q(x)y = 0$ имеют бесконечно много нулей.

Задача 2

$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$, $\nu \geq 1$.
Нормальная форма: $z = y\sqrt{x}$, $z'' + Q(x)z = 0$ где $Q(x) = 1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2}$.
При $\nu \geq 1$: $Q(x) \leq 1$ и $Q(x) \to 1$ при $x \to \infty$.
Вывод: решение имеет не более одного нуля на $(0, \infty)$.

Задача 3

$\ddot{x} + \omega^2 x + \varepsilon x^3 = 0$, $\varepsilon > 0$.
Функция Ляпунова: $E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{\omega^2}{2}x^2 + \frac{\varepsilon}{4}x^4$.
$\dot{E} = \dot{x}(\ddot{x} + \omega^2 x + \varepsilon x^3) = 0 \Rightarrow$ **устойчивость по Ляпунову**.

M12. Потенциальные системы и устойчивость

Задача 1

$\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V(\mathbf{x})$, $V \geq 0$, минимум в $\mathbf{0}$.
Ляпунов: $E = \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 + V(\mathbf{x})$, $\dot{E} = 0 \Rightarrow$ **устойчивость**.
Асимптотическая устойчивость невозможна без диссипации: E сохраняется.

Задача 2

$V = \frac{1}{4}(r^2 - 1)^2 + \varepsilon xy$, $r^2 = x^2 + y^2$, $|\varepsilon| \ll 1$.
Критические точки: $r^2 = 1 \pm \varepsilon$, при $r^2 = 1 - \varepsilon$ имеем $y = x$, при $r^2 = 1 + \varepsilon$ — $y = -x$.
Точки: $(\pm a, \pm a)$, $a = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}}$; $(\pm b, \mp b)$, $b = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2}}$.
Гессиан в $(\pm a, \pm a)$: собственные $2(1 - \varepsilon)$ и -2ε.
В $(\pm b, \mp b)$: собственные $2(1 + \varepsilon)$ и 2ε.
Классика: при $\varepsilon > 0$: $(\pm b, \mp b)$ — **минимумы**, $(\pm a, \pm a)$ — **седла**; при $\varepsilon < 0$ — наоборот.

Задача 3

$\ddot{\mathbf{x}} + \gamma\dot{\mathbf{x}} = -\nabla V(\mathbf{x})$, $\gamma > 0$, $V(\mathbf{x}) \geq c\|\mathbf{x}\|^2$ близ нуля.
Ляпунов: $E = \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 + V(\mathbf{x})$, $\dot{E} = -\gamma\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 \leq 0$.

С учётом $V \geq c\|\mathbf{x}\|^2$ и инвариантности по Ляпунову–ЛаСаллю $\Rightarrow$ **асимптотически устойчиво**.

M13. Системы разностных: вариация постоянных, A^t

Задача 1

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{x}_{t+1} = A\mathbf{x}_t + \mathbf{b}\,2^t$, $\mathbf{x}_0 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

$A^t = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^t - 1 & 1 - 2^t \\ 2 \cdot 2^t - 2 & 2 - 2^t \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{x}_t = A^t\mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{t-1} A^{t-1-k}\mathbf{b}\,2^k = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\,2^t t - 3 \cdot 2^t + 3 \\ \frac{3}{2}\,2^t t - 5 \cdot 2^t + 6 \end{pmatrix}.$$

Задача 2

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I + N$, $N^3 = 0$.

$$A^t = 2^t\Big(I + \tfrac{t}{2}N + \tfrac{t(t-1)}{8}N^2\Big) = 2^t \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{2} & \frac{t(t-1)}{8} \\ 0 & 1 & \frac{t}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение: $\mathbf{x}_t = A^t\mathbf{x}_0$. Рост нормы $\sim C\,2^t t^2$.
Мин. полином: $(\lambda - 2)^3$.

Задача 3

$\mathbf{x}_{t+1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}_t + \left(\begin{smallmatrix} (-1)^t \\ t\,2^t \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$.

Собств. значения матрицы: 2 и -1 (резонанс с правой частью).

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(-1)^t t - \frac{5}{18}(-1)^t + \frac{1}{8}\,2^t t^2 - \frac{7}{24}\,2^t t + \frac{5}{18}\,2^t \\ \frac{1}{2}(-1)^t t - \frac{1}{18}(-1)^t + \frac{1}{8}\,2^t t^2 + \frac{1}{24}\,2^t t + \frac{1}{18}\,2^t \end{pmatrix}.$$