

Экзамен по курсу Дифференциальные и разностные уравнения

Экзамен длится 120 минут

1. Решите разностное уравнение $y_{t+3} - y_{t+2} + 4y_{t+1} - 4y_t = 26 \cdot 3^t + 10t + 9$.

2. Решите систему разностных уравнений $\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}$, где матрица

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \text{ собственное значение имеет кратность } 3.$$

3. Пусть функция $q(x)$ непрерывна на всей оси и периодична с периодом

1. Пусть $y(x)$ нетривиальное решение уравнения $y'' + q(x)y(x) = 0$,

удовлетворяющее условию $y(0) = y(1) = 0$. Докажите, что $y(x+1) = Cy(x)$ при некотором C .

4. Найдите положения равновесия автономной системы уравнений, определите их характер, и нарисуйте фазовые портреты в окрестности

$$\text{положений равновесия } \begin{cases} \dot{x} = 2 - 2\sqrt{1+x+y} \\ \dot{y} = \exp\left(\frac{5}{4}x + 2y + y^2\right) - 1 \end{cases}.$$

5. Решите однородное уравнение в частных производных первого порядка

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + (2xy - y^2) \frac{\partial u}{\partial y} + (2xz - yz) \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$