Подготовка: Дифференциальные уравнения

Полная версия с разборами тем и ссылками

Содержание

1 Однородные линейные разностные уравнения

Пример. Решите однородное линейное разностное уравнение:

$$y_{t+3} - 3y_{t+2} + 6y_{t+1} - 4y_t = 0 \tag{1}$$

Определение. Линейное однородное разностное уравнение порядка k с постоянными коэффициентами:

$$a_t + c_1 a_{t-1} + c_2 a_{t-2} + \cdots + c_k a_{t-k} = 0, \quad c_k \neq 0 \tag{2}$$

Пара «уравнение + k начальных условий» задаёт единственное решение.

Идея решения – метод характеристических корней. Полагаем $a_t = r^t \Rightarrow$

$$r^t(1 + c_1 r^{-1} + c_2 r^{-2} + \cdots + c_k r^{-k}) = 0 \iff r^k + c_1 r^{k-1} + \cdots + c_k = 0 \tag{3}$$

т.е. характеристический многочлен $\chi(r) = r^k + c_1 r^{k-1} + \cdots + c_k$. Его корни целиком описывают форму общего решения.

Три базовых случая (три формы решения):

1. Различные корни $r_1, \ldots, r_k$:

$$a_t = \alpha_1 r_1^t + \cdots + \alpha_k r_k^t \tag{4}$$

2. Кратный корень r кратности m:

$$a_t = (\alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_{m-1} t^{m-1}) r^t \tag{5}$$

3. Комплексно-сопряжённые корни $r_{1,2} = \rho e^{\pm i\theta}$ (коэффициенты действительны):

$$a_t = \rho^t (A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t)) \tag{6}$$

Эти формы — стандартный результат теории ЛО-рекуррент (см. также «действительная форма» при комплексных корнях).

Подгонка под начальные условия. Подставляем $t = 0, 1, \ldots, k-1$ в общий вид, решаем линейную систему на α-коэффициенты.

2 Уравнения второго порядка

2.1 Постоянные коэффициенты

$$ay'' + by' + cy = 0; \quad ar^2 + br + c = 0 \tag{7}$$

2.2 Понижение порядка

Идеи замен: $z = y'$, либо $y'' = z\,dz/dy$.

---

by werserk