Короткие ответы к задачам Gen-1

M1. Разностные ЛОС с постоянными коэффициентами

Задача 1

$$y_{t+4}-2y_{t+3}-y_{t+2}+2y_{t+1}=3\cdot 2^t+(t^2-1)(-1)^t+5.$$

Характеристический многочлен: $(r-2)(r-1)(r+1)r$.

$$\begin{aligned} y_t &= C_0\,0^t+C_1\,1^t+C_2(-1)^t+C_3\,2^t \\ &\quad +\tfrac14\,t\,2^t+(-1)^t\big(\tfrac{1}{18}t^3-\tfrac{7}{18}t^2+\tfrac{35}{54}t\big)-\tfrac52\,t. \end{aligned}$$

Задача 2

$$\begin{aligned} y_{t+5}+y_{t+4}-6y_{t+3}-6y_{t+2}+8y_{t+1}+8y_t \\ =2^t\cos\frac{\pi t}{2}+t\,3^t. \end{aligned}$$

Корни ЛОС: $r\in\{2,-1,-2,\sqrt2,-\sqrt2\}$.

$$\begin{aligned} y_t &= C_1\,2^t+C_2(-1)^t+C_3(-2)^t+C_4(\sqrt2)^t+C_5(-\sqrt2)^t \\ &\quad +2^t\left(\tfrac{1}{240}\cos\frac{\pi t}{2}+\tfrac{1}{120}\sin\frac{\pi t}{2}\right)+3^t\big(\tfrac{1}{140}\,t-\tfrac{969}{19600}\big)\,. \end{aligned}$$

Примечание. Для однозначности решения нужна ещё одна нач. величина (порядок 5).

Задача 3

$$y_{t+3}-3y_{t+2}+3y_{t+1}-y_t=(t^2+4)\cdot 1^t+t(-2)^t.$$

Левая часть $(E-1)^3$. Общее решение:

$$y_t=A+Bt+Ct^2+\big(\tfrac{1}{60}t^5-\tfrac18 t^4+t^3\big)+(-2)^t\big(-\tfrac{1}{27}t+\tfrac{2}{27}\big)\,.$$

M2. Синтез разностного уравнения

Задача 1

Частные решения: $2^t,\ t2^t,\ (-2)^t\sin\frac{\pi t}{3}$.
Ответ: характеристический многочлен

$$(r-2)^2\,(r^2+2r+4),$$

уравнение минимального порядка 4:

$$y_{t+4}-2y_{t+3}-8y_{t+1}+16y_t=0.$$

Задача 2

Решения: $3^t,\ t3^t,\ 2^t\cos\frac{\pi t}{4},\ 2^t\sin\frac{\pi t}{4}$.
Ответ: многочлен
$$(r-3)^2\,(r^2-2\sqrt{2}\,r+4),$$
порядок 4 (коэффициенты допускают $\sqrt{2}$).

Задача 3

Решения: $(-1)^t,\ t(-1)^t,\ t^2(-1)^t,\ 5^t$.
Ответ: многочлен
$$(r+1)^3(r-5)=r^4-2r^3-12r^2-14r-5,$$
соответствующее ЛОС:
$$y_{t+4}-2y_{t+3}-12y_{t+2}-14y_{t+1}-5y_t=0.$$

M3. Нелинейные 2D: равновесия и типы (гиперболика)

Задача 1

$$\dot{x}=y-x+x^2+xy, \qquad \dot{y}=-x+2y-xy.$$
Равновесия:
$$(0,0), \quad (2-\sqrt{3},\ 2/\sqrt{3}-1), \quad (2+\sqrt{3},\ -1-2/\sqrt{3}).$$
Типы:
$$(0,0) \text{ — седло;} \quad (2-\sqrt{3},2/\sqrt{3}-1) \text{ — неустойчивый фокус;}$$
$$(2+\sqrt{3},-1-2/\sqrt{3}) \text{ — седло.}$$

Задача 2

$$\dot{x}=a\,y+x(r^2-1), \quad \dot{y}=-a\,x+y(r^2-1), \quad r^2=x^2+y^2.$$
В начале координат: $J=\begin{pmatrix}-1 & a\\ -a & -1\end{pmatrix}$, $\mathrm{tr}=-2$, $\det=1+a^2>0$, $D<0 \Rightarrow$ **устойчивый фокус** при любом a.

Задача 3

$$\dot{x}=2y-x-2, \qquad \dot{y}=-2x+y-2.$$
Единственное равновесие $\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$. Линеаризация: $J=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, $\mathrm{tr}=0$, $\det=3>0$, $D<0$ $\Rightarrow$ **центр**.

M4. Линейные ОДУ-2: снятие y', вронскиан, нули

Задача 1

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \Big(\frac{5}{x^2} + 1\Big)y = 0, \quad x > 0.$$

$\phi = x^{-1}$, $z = y/\phi$, $z'' + Qz = 0$ с $Q = -\frac{5}{x^2} - 1 \le 0$.
$W(x) = W(1)\,x^{-2}$. Любое нетривиальное решение имеет ≤ 1 нуль на $(0, \infty)$.

Задача 2

$$y'' + 4y' + (3 + e^{-x})y = 0.$$

$\phi = e^{-2x}$, $Q = e^{-x} - 1 \le 0$.
$W(x) = W(0)\,e^{-4x}$. $\Rightarrow$ у решения ≤ 1 нуль на $\mathbb{R}$.

Задача 3

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0, \quad x > 0.$$

$\phi = x^{-\alpha/2}$, $Q = \dfrac{4\beta + 2\alpha - \alpha^2}{4x^2}$.
$W(x) = W(x_0)\,(x_0/x)^{\alpha}$. Условие «$\le 1$ нуль»: $4\beta + 2\alpha - \alpha^2 \le 0$.

M5. ПЧП первого порядка: $u = F(I_1, I_2)$

Задача 1

$$(x + y)u_x + (2y - x)u_y = 0.$$

Инварианты: из $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y - x}{x + y}$ при $v = y/x$ получаем

$$\int \frac{1 + v}{v^2 - v + 1}\,dv = -\ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad I_1 = x\,\exp\Big(\tfrac{1}{2}\ln(v^2 - v + 1) + \sqrt{3}\,\arctan\tfrac{2v-1}{\sqrt{3}}\Big).$$

Второй инвариант $I_2 = z$. Итог: $u = F(I_1, I_2)$.

Задача 2

$$x\,u_x + y\,u_y + (x + y)z\,u_z = 0.$$

Инварианты: $I_1 = \dfrac{y}{x}$ (масштабность), $I_2 = z\,e^{-(x+y)}$. Итог: $u = F\Big(\dfrac{y}{x},\, z\,e^{-(x+y)}\Big)$.

Задача 3

$$(2xy)u_x + (y^2 - x^2)u_y + (x - y)u_z = 0.$$

Инварианты: $I_1 = \dfrac{x^2 + y^2}{x}$ (при $v = y/x$ получаем $d\ln(v^2+1) = -d\ln x$), и $I_2 = z + \ln|x+y|$ (так как $z' = (x-y)$ и $(x+y)' = 2xy + y^2 - x^2 = (y-x)(x+y)$). Итог: $u = F\left(\dfrac{x^2+y^2}{x},\ z + \ln|x+y|\right)$.

M6. Первые интегралы в 3D-системах

Задача 1

$\dot{x} = yz,\ \dot{y} = zx,\ \dot{z} = xy.$
Интегралы: $I_1 = x^2 - y^2,\ I_2 = x^2 - z^2$ (постоянны, т.к. $\frac{d}{dt}(x^2 - y^2) = 2xyz - 2xyz = 0$, аналогично для $x^2 - z^2$).
Интегральные поверхности: пересечения квадрик $x^2 - y^2 = C_1,\ x^2 - z^2 = C_2$.

Задача 2

$\dot{x} = y^2 - z^2,\ \dot{y} = zx,\ \dot{z} = xy.$
Интеграл 1: $I_1 = y^2 - z^2$ (как в задаче 1). Тогда $\dot{x} = I_1 = \mathrm{const}$.
Интеграл 2:

$$I_2 = \ln\frac{y-z}{y+z} + \frac{x^2}{y^2 - z^2},$$

т.к. $\frac{d}{dt}\ln\frac{y-z}{y+z} = -2x$, а $\frac{d}{dt}\left(\frac{x^2}{I_1}\right) = \frac{2x\dot{x}}{I_1} = 2x$.
Поверхности: $y^2 - z^2 = C_1,\ \ln\frac{y-z}{y+z} + \frac{x^2}{C_1} = C_2$.

Задача 3

$\dot{x} = y + z,\ \dot{y} = z + x,\ \dot{z} = x + y.$
Собственный базис: $v_1 = (1,1,1)$, $\lambda_1 = 2$; $v_2 = (1,-1,0)$, $v_3 = (1,0,-1)$, $\lambda_{2,3} = -1$.
Координаты: $\xi = \frac{x+y+z}{3},\ \eta = \frac{x-2y+z}{3},\ \zeta = \frac{x+y-2z}{3}$.
Интегралы: $I_1 = \dfrac{\zeta}{\eta},\quad I_2 = \eta^2\,\xi$ (т.к. $\dot{\eta} = -\eta,\ \dot{\zeta} = -\zeta,\ \dot{\xi} = 2\xi$).
В явном виде: $I_1 = \dfrac{x+y-2z}{x-2y+z},\ \ I_2 = \dfrac{(x-2y+z)^2(x+y+z)}{27}$.

M7. Нелинейные 2D: равновесия, линеаризация, портрет

Задача 1

$\dot{x} = x - x^2 - y - y^2,\ \dot{y} = 2x - 3y + xy.$
Равновесия: $(0,0)$ и $\big(x_*, y_*\big) \approx (0.1911,\ 0.1361)$.

Якоби в $(0,0)$: $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$, собств. значения $-1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow$ **седло**.
В (x_*, y_*): собственные $\approx (-1.5627,\ -0.6284) \Rightarrow$ **устойчивый узел**.

Задача 2

$\dot{x} = y - x(x^2 + b),\ \dot{y} = -x - y(y^2 + b)$.
$J(0,0) = \begin{pmatrix}-b & 1\\ -1 & -b\end{pmatrix}$, $\lambda = -b \pm i$.
Классификация: $b > 0$ — устойчивый фокус; $b < 0$ — неустойчивый фокус; $b = 0$ — линейно центр, но нелинейные кубики дают $\dot{r} = -(x^4 + y^4)/r < 0$ при $r \neq 0 \Rightarrow$ **асимптотически устойчивый фокус**.

Задача 3

$\dot{x} = (x - y)(1 - xy),\ \dot{y} = (x + y)(1 + x^2)$.
Единственное равновесие: $(0,0)$.
$J(0,0) = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $\lambda = 1 \pm i \Rightarrow$ **неустойчивый фокус**.

M8. Полярные координаты, $\dot{r}, \dot{\theta}$

Задача 1

$\dot{x} = a\,y + x(r^2 - 1),\ \dot{y} = -a\,x + y(r^2 - 1)$.
В полярных: $\dot{r} = r(r^2 - 1)$, $\dot{\theta} = -a$.
Динамика: $r = 0$ устойчив, $r = 1$ неустойчивый цикл; при $r > 1$ — уход на бесконечность; угловая скорость постоянна.

Задача 2

$\dot{x} = x(1 - r^2) + \omega y,\ \dot{y} = y(1 - r^2) - \omega x$.
В полярных: $\dot{r} = r(1 - r^2)$, $\dot{\theta} = -\omega$.
Динамика: $r = 0$ неустойчив, $r = 1$ **устойчивый предельный цикл**.

Задача 3

$\dot{x} = (r^2 - 2)x + \Omega y,\ \dot{y} = (r^2 - 2)y - \Omega x$.
В полярных: $\dot{r} = r(r^2 - 2)$, $\dot{\theta} = -\Omega$.
Динамика: $r = 0$ устойчив, $r = \sqrt{2}$ неустойчивый цикл; $r > \sqrt{2}$ — разлёт.

M9. Линейные ОДУ-2: вронскиан и независимость

Задача 1

$p(x) = \dfrac{2}{x} + e^{-x}$.
$W(1) = y_1(1)y_2'(1) - y_1'(1)y_2(1) = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$.

$$W(x) = W(1)\exp\Big(-\int_1^x \Big(\frac{2}{t} + e^{-t}\Big)dt\Big) = -\,x^{-2}\,e^{e^{-x}-e^{-1}} \neq 0.$$

Вывод: фундаментальная пара на $(0,\infty)$.

Задача 2

$p \in C[0,1]$, $y_1(0) = 0, y_1'(0) = 1$, $y_2(0) = 1, y_2'(0) = \alpha$.
$W(0) = -1 \Rightarrow W(x) \neq 0$ на $[0,1]$ при любом α.

$$W(1) = -\exp\Big(-\int_0^1 p(t)\,dt\Big).$$

Пара фундаментальна для всех α.

Задача 3

$p(x) = 4$. $W(x) = W(0)\,e^{-4x} \neq 0$.
Вывод: линейная независимость в одной точке $\Rightarrow$ независимость на всей $\mathbb{R}$.

M10. Подстановка $y = u\phi(x)$, форма $z'' + Qz = 0$, нули

Задача 1

$y'' + \dfrac{2}{x}y' + \big(\frac{1}{3}x^2 - \frac{7}{x^2}\big)y = 0$, $x > 0$.
$\phi = x^{-1}$, $z = y/\phi$, $Q(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{7}{x^2}$.
Замечание по нулям: Q меняет знак, поэтому утверждение «≤ 1 нуль на $(0,\infty)$» *в общем неверно*; у решений имеется бесконечно много нулей (осцилляция при больших x).

Задача 2

$y'' + 2\tanh x\, y' + (1 - \operatorname{sech}^2 x)\, y = 0$.
$\phi = \operatorname{sech} x$, $Q(x) = 1 - 2\operatorname{sech}^2 x - \tanh^2 x = -\operatorname{sech}^2 x \leq 0$.
Вывод: у нетривиального решения **не более одного нуля** на $\mathbb{R}$.

Задача 3

$x > 0$: $x^2y'' + (\alpha+1)xy' + \big(\beta - \frac{\gamma}{x^2}\big)y = 0$.
После снятия y':

$$Q(x) = \frac{\beta + \frac{1-\alpha^2}{4}}{x^2} - \frac{\gamma}{x^4}.$$

Достаточные (и по краям необходимые) условия «≤ 1 нуля»:

$$\gamma \ge 0, \qquad \beta \le \frac{\alpha^2-1}{4}.$$

M11. Периодические коэффициенты, монодромия

Задача 1

$q(x+T) = q(x)$, $y(0) = y(T) = 0$. Тогда $y_1(x) = y(x+T)$ тоже решение и $y_1(0) = 0$.
Пространство решений с $y(0) = 0$ одномерно $\Rightarrow y(x+T) = C\,y(x)$.
Константа: $C = \dfrac{y'(T)}{y'(0)} \ne 0$.

Задача 2

$y'' + (2+\cos x)y = 0$, период 2π. Фундаментальная матрица $\Phi(2\pi)$ имеет $\det = 1$.
Множители Флоке: корни $\mu_{1,2}$ уравнения $\mu^2 - \Delta\,\mu + 1 = 0$, где $\Delta = \operatorname{tr}\Phi(2\pi) \in \mathbb{R}$.
Виды: (i) $|\Delta| < 2$: $\mu = e^{\pm i\theta}$ (устойчивый, «эллиптический»); (ii) $|\Delta| > 2$: вещественные взаимно обратные; (iii) $|\Delta| = 2$: кратный ± 1.

Задача 3

$q(x+\pi) = q(x)$, $y(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$. Тогда вектор $(y(\pi), 0)$ — результат действия монодромии на $(0, y'(0))$.
На краях зон спектра монодромия имеет $\mu = \pm 1 \Rightarrow y(x+\pi) = \pm y(x)$. Оба варианта возможны (в зависимости от знака μ).

M12. Потенциальные системы и устойчивость

Задача 1

$\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V(\mathbf{x})$, $V \ge 0$, минимум в $\mathbf{0}$.
Ляпунов: $E = \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 + V(\mathbf{x})$, $\dot{E} = 0 \Rightarrow$ **устойчивость**.
Асимптотическая устойчивость невозможна без диссипации: E сохраняется.

Задача 2

$V = \frac{1}{4}(r^2-1)^2 + \varepsilon xy$, $r^2 = x^2 + y^2$, $|\varepsilon| \ll 1$.
Критические точки: $r^2 = 1 \pm \varepsilon$, при $r^2 = 1 - \varepsilon$ имеем $y = x$, при $r^2 = 1 + \varepsilon$ — $y = -x$.

Точки: $(\pm a,\pm a)$, $a=\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}}$; $(\pm b,\mp b)$, $b=\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2}}$.
Гессиан в $(\pm a,\pm a)$: собственные $2(1-\varepsilon)$ и -2ε.
В $(\pm b,\mp b)$: собственные $2(1+\varepsilon)$ и 2ε.
Классика: при $\varepsilon>0$: $(\pm b,\mp b)$ — **минимумы**, $(\pm a,\pm a)$ — **седла**; при $\varepsilon<0$ — наоборот.

Задача 3

$\ddot{\mathbf{x}}+\gamma\dot{\mathbf{x}}=-\nabla V(\mathbf{x})$, $\gamma>0$, $V(\mathbf{x})\ge c\|\mathbf{x}\|^2$ близ нуля.
Ляпунов: $E=\frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{x}}\|^2+V(\mathbf{x})$, $\dot E=-\gamma\|\dot{\mathbf{x}}\|^2\le 0$.
С учётом $V\ge c\|\mathbf{x}\|^2$ и инвариантности по Ляпунову–ЛаСаллю $\Rightarrow$ **асимптотически устойчиво**.

M13. Системы разностных: вариация постоянных, A^t

Задача 1

$A=\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\binom{1}{-1}$, $\mathbf{x}_{t+1}=A\mathbf{x}_t+\mathbf{b}\,2^t$, $\mathbf{x}_0=\binom{0}{1}$.
$A^t=\begin{pmatrix}2\cdot 2^t-1 & 1-2^t\\ 2\cdot 2^t-2 & 2-2^t\end{pmatrix}$.

$$\mathbf{x}_t=A^t\mathbf{x}_0+\sum_{k=0}^{t-1}A^{t-1-k}\mathbf{b}\,2^k=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\,2^t t-3\cdot 2^t+3\\ \frac{3}{2}\,2^t t-5\cdot 2^t+6\end{pmatrix}.$$

Задача 2

$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}=2I+N$, $N^3=0$.

$$A^t=2^t\Big(I+\tfrac{t}{2}N+\tfrac{t(t-1)}{8}N^2\Big)=2^t\begin{pmatrix}1&\frac{t}{2}&\frac{t(t-1)}{8}\\0&1&\frac{t}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Общее решение: $\mathbf{x}_t=A^t\mathbf{x}_0$. Рост нормы $\sim C\,2^t t^2$.
Мин. полином: $(\lambda-2)^3$.

Задача 3

$\mathbf{x}_{t+1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}\mathbf{x}_t+\binom{(-1)^t}{t\,2^t}$, $\mathbf{x}_0=\mathbf{0}$.
Собств. значения матрицы: 2 и -1 (резонанс с правой частью).

$$\mathbf{x}_t=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}(-1)^t t-\frac{5}{18}(-1)^t+\frac{1}{8}\,2^t t^2-\frac{7}{24}\,2^t t+\frac{5}{18}\,2^t\\ \frac{1}{2}(-1)^t t-\frac{1}{18}(-1)^t+\frac{1}{8}\,2^t t^2+\frac{1}{24}\,2^t t+\frac{1}{18}\,2^t\end{pmatrix}.$$