Короткие ответы к задачам M1–M5

M1. Разностные ЛОС с постоянными коэффициентами

Задача 1

$$y_{t+4} - 2y_{t+3} - y_{t+2} + 2y_{t+1} = 3 \cdot 2^t + (t^2 - 1)(-1)^t + 5.$$

Характеристический многочлен: $(r-2)(r-1)(r+1)r$.

$$\begin{aligned} y_t &= C_0\, 0^t + C_1\, 1^t + C_2(-1)^t + C_3\, 2^t \\ &\quad + \tfrac{1}{4}\, t\, 2^t + (-1)^t\big(\tfrac{1}{18}t^3 - \tfrac{7}{18}t^2 + \tfrac{35}{54}t\big) - \tfrac{5}{2}\, t. \end{aligned}$$

Задача 2

$$\begin{aligned} &y_{t+5} + y_{t+4} - 6y_{t+3} - 6y_{t+2} + 8y_{t+1} + 8y_t \\ &\quad = 2^t \cos\frac{\pi t}{2} + t\, 3^t. \end{aligned}$$

Корни ЛОС: $r \in \{2, -1, -2, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

$$\begin{aligned} y_t &= C_1\, 2^t + C_2(-1)^t + C_3(-2)^t + C_4(\sqrt{2})^t + C_5(-\sqrt{2})^t \\ &\quad + 2^t\left(\tfrac{1}{240}\cos\frac{\pi t}{2} + \tfrac{1}{120}\sin\frac{\pi t}{2}\right) + 3^t\big(\tfrac{1}{140}\, t - \tfrac{969}{19600}\big)\,. \end{aligned}$$

Примечание. Для однозначности решения нужна ещё одна нач. величина (порядок 5).

Задача 3

$$y_{t+3} - 3y_{t+2} + 3y_{t+1} - y_t = (t^2 + 4) \cdot 1^t + t(-2)^t.$$

Левая часть $(E-1)^3$. Общее решение:

$$y_t = A + Bt + Ct^2 + \big(\tfrac{1}{60}t^5 - \tfrac{1}{8}t^4 + t^3\big) + (-2)^t\big(-\tfrac{1}{27}t + \tfrac{2}{27}\big)\,.$$

M2. Синтез разностного уравнения

Задача 1

Частные решения: $2^t,\ t2^t,\ (-2)^t \sin\frac{\pi t}{3}$.
Ответ: характеристический многочлен

$$(r-2)^2\,(r^2 + 2r + 4),$$

уравнение минимального порядка 4:

$$y_{t+4} - 2y_{t+3} - 8y_{t+1} + 16y_t = 0.$$

Задача 2

Решения: $3^t,\ t3^t,\ 2^t\cos\frac{\pi t}{4},\ 2^t\sin\frac{\pi t}{4}$.
Ответ: многочлен

$$(r-3)^2\,(r^2-2\sqrt{2}\,r+4),$$

порядок 4 (коэффициенты допускают $\sqrt{2}$).

Задача 3

Решения: $(-1)^t,\ t(-1)^t,\ t^2(-1)^t,\ 5^t$.
Ответ: многочлен

$$(r+1)^3(r-5)=r^4-2r^3-12r^2-14r-5,$$

соответствующее ЛОС:

$$y_{t+4}-2y_{t+3}-12y_{t+2}-14y_{t+1}-5y_t=0.$$

М3. Нелинейные 2D: равновесия и типы (гиперболика)

Задача 1

$$\dot{x}=y-x+x^2+xy,\qquad \dot{y}=-x+2y-xy.$$

Равновесия:

$$(0,0),\quad (2-\sqrt{3},\ 2/\sqrt{3}-1),\quad (2+\sqrt{3},\ -1-2/\sqrt{3}).$$

Типы:

$$(0,0)\text{ — седло};\quad (2-\sqrt{3},2/\sqrt{3}-1)\text{ — неустойчивый фокус};$$
$$(2+\sqrt{3},-1-2/\sqrt{3})\text{ — седло}.$$

Задача 2

$$\dot{x}=a\,y+x(r^2-1),\quad \dot{y}=-a\,x+y(r^2-1),\quad r^2=x^2+y^2.$$

В начале координат: $J=\begin{pmatrix}-1 & a\\ -a & -1\end{pmatrix}$, $\mathrm{tr}=-2$, $\det=1+a^2>0$, $D<0\Rightarrow$ **устойчивый фокус** при любом a.

Задача 3

$$\dot{x}=2y-x-2,\qquad \dot{y}=-2x+y-2.$$

Единственное равновесие $\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$. Линеаризация: $J=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, $\mathrm{tr}=0$, $\det=3>0$, $D<0$ $\Rightarrow$ **центр**.

M4. Линейные ОДУ-2: снятие y', вронскиан, нули

Задача 1

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \Big(\frac{5}{x^2} + 1\Big)y = 0, \quad x > 0.$$

$\phi = x^{-1}$, $z = y/\phi$, $z'' + Qz = 0$ с $Q = -\frac{5}{x^2} - 1 \le 0$.
$W(x) = W(1)\,x^{-2}$. Любое нетривиальное решение имеет ≤ 1 нуль на $(0,\infty)$.

Задача 2

$$y'' + 4y' + (3 + e^{-x})y = 0.$$

$\phi = e^{-2x}$, $Q = e^{-x} - 1 \le 0$.
$W(x) = W(0)\,e^{-4x}$. $\Rightarrow$ у решения ≤ 1 нуль на $\mathbb{R}$.

Задача 3

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0, \quad x > 0.$$

$\phi = x^{-\alpha/2}$, $Q = \dfrac{4\beta + 2\alpha - \alpha^2}{4x^2}$.
$W(x) = W(x_0)\,(x_0/x)^{\alpha}$. Условие «$\le 1$ нуль»: $4\beta + 2\alpha - \alpha^2 \le 0$.

M5. ПЧП первого порядка: $u = F(I_1, I_2)$

Задача 1

$$(x+y)u_x + (2y-x)u_y = 0.$$

Инварианты: из $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y-x}{x+y}$ при $v = y/x$ получаем

$$\int \frac{1+v}{v^2-v+1}\,dv = -\ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad I_1 = x\,\exp\Big(\tfrac{1}{2}\ln(v^2-v+1) + \sqrt{3}\,\arctan\tfrac{2v-1}{\sqrt{3}}\Big).$$

Второй инвариант $I_2 = z$. Итог: $u = F(I_1, I_2)$.

Задача 2

$$x\,u_x + y\,u_y + (x+y)z\,u_z = 0.$$

Инварианты: $I_1 = \dfrac{y}{x}$ (масштабность), $I_2 = z\,e^{-(x+y)}$. Итог: $u = F\Big(\dfrac{y}{x},\, z\,e^{-(x+y)}\Big)$.

Задача 3

$$(2xy)u_x + (y^2 - x^2)u_y + (x-y)u_z = 0.$$

Инварианты: $I_1 = \dfrac{x^2+y^2}{x}$ (при $v = y/x$ получаем $d\ln(v^2+1) = -d\ln x$), и $I_2 = z + \ln|x+y|$ (так как $z' = (x-y)$ и $(x+y)' = 2xy + y^2 - x^2 = (y-x)(x+y)$). Итог: $u = F\left(\dfrac{x^2+y^2}{x},\ z + \ln|x+y|\right)$.