

ФИО _____

Группа ПМИ _____

1	2	3	4	5	Σ

Экзамен по курсу «Дифференциальные и разностные уравнения»

Экзамен длится 120 минут. Все задачи оцениваются одинаково.

Вариант ω

1. Решите нелинейную систему уравнений, предварительно найдя оба первых интеграла (их независимость подлежит проверке)

$$\begin{cases} \dot{x} = z^2 - y^2, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -y \end{cases} \quad \text{Система рассматривается в области } z > y > x > 0$$

2. Решите задачу Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$(x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 2xy \frac{\partial u}{\partial y} + xz \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{и } u = \left(\frac{x}{z}\right)^2 \text{ при } y = z.$$

3. Пусть $P(a, b, c)$ однородный многочлен от трех переменных. Рассмотрите уравнение второго порядка $P(y, y', y'') = 0$. Докажите, что введение вспомогательной функции z , согласно формуле $y = e^z$, понижает порядок этого уравнения на единицу.

4. Дана система разностных уравнений второго порядка $\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, где матрица $A = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$. а) Найдите фундаментальную матрицу этой системы Φ_t .

б) Чтобы найти решение неоднородной системы, воспользуйтесь методом

вариации постоянных, полагая $\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \Phi_t \begin{pmatrix} c_t^1 \\ c_t^2 \end{pmatrix}$. Выпишите уравнения, которым

удовлетворяют последовательности c_t^1 и c_t^2 , не решая их..

5. Решите разностное уравнение $y_{t+2} - 9y_t = (5t - 8)2^t + 3^t$