

### Вариант $\omega$

1. Решите нелинейную систему уравнений, предварительно найдя оба первых интеграла (их независимость подлежит проверке)

$$\begin{cases} \dot{x} = z^2 - y^2, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -y, \end{cases} \quad \text{Система рассматривается в области } z > y > x > 0.$$

2. Решите задачу Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$(x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 2xy \frac{\partial u}{\partial y} + xz \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \text{и } u = \left(\frac{x}{z}\right)^2 \text{ при } y = z.$$

3. Пусть  $P(a, b, c)$  однородный многочлен от трёх переменных. Рассмотрите уравнение второго порядка

$$P(y, y', y'') = 0.$$

Докажите, что введение вспомогательной функции  $z$ , согласно формуле  $y = e^z$ , понижает порядок этого уравнения на единицу.

4. Дана система разностных уравнений второго порядка

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

- а) Найдите фундаментальную матрицу этой системы  $\Phi_t$ .  
б) Чтобы найти решение неоднородной системы, воспользуйтесь методом вариации постоянных, полагая

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \Phi_t \begin{pmatrix} c_1^t \\ c_2^t \end{pmatrix}.$$

Выпишите уравнения, которым удовлетворяют последовательности  $c_1^t$  и  $c_2^t$ , не решая их.

5. Решите разностное уравнение

$$y_{t+2} - 9y_t = (5t - 8) 2^t + 3^t.$$