Подготовка: Дифференциальные уравнения

Полная версия с разборами тем и ссылками

11 сентября 2025 г.

Содержание

1 Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами (ЛОС)

1. Тип экзаменационной задачи (полное условие)

Найдите общее решение:

$$y_{t+3} - y_{t+2} + 4y_{t+1} - 4y_t \ = \ 26 \cdot 3^t + 10t + 9,$$

где $t \in \mathbb{Z}$, $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$).

2. Универсальный алгоритм (визуальные формулы и детерминированные шаги)

Исходные данные и обозначения (ввод). Дано ЛОС порядка $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n y_{t+n} + a_{n-1} y_{t+n-1} + \cdots + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = f(t),$$

где $a_n \neq 0,\ a_k \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), $t \in \mathbb{Z}$. Вводим: $\chi(r) := r^n + b_{n-1}r^{n-1} + \cdots + b_1 r + b_0$ — характеристический многочлен (после нормировки $a_n = 1$); $k_\chi(\lambda) \in \mathbb{N}$ — кратность корня λ в χ; $P_d(t) \in \mathbb{R}[t]$ — произвольный полином степени $\le d$; $Q_{\lambda,\theta}(r) := r^2 - 2\lambda\cos\theta\, r + \lambda^2$.

Шаг 0. Привести уравнение к канонической форме.
Разделить на a_n (если $a_n \neq 1$) и написать

$$y_{t+n} + b_{n-1} y_{t+n-1} + \cdots + b_1 y_{t+1} + b_0 y_t = f(t).$$

Шаг 1. Построить $\chi(r)$ и зафиксировать кратности корней.
Выписать $\chi(r) = r^n + b_{n-1}r^{n-1} + \cdots + b_1 r + b_0$, найти все λ_j и $k_\chi(\lambda_j)$.

Шаг 2. Записать общее решение однородной части $y_t^{(h)}$.
Для каждого корня λ кратности $s = k_\chi(\lambda)$ включить базис

$$t^0\lambda^t,\ t^1\lambda^t, \ldots, t^{s-1}\lambda^t;$$

для пары $\lambda = \rho e^{i\theta}$, $\bar\lambda = \rho e^{-i\theta}$ — реальный базис $\rho^t\cos(\theta t),\ \rho^t \sin(\theta t)$.

Таблица соответствий (множитель ⇒ вклад в $y^{(h)}$):

Множитель	Вклад в y(h)
$(r-\lambda)^s$	$P_{s-1}(t)\lambda^t$
$(r^2 - 2\rho\cos\theta\, r + \rho^2)^s$	$P_{s-1}(t)\rho^t\cos(\theta t),\ P_{s-1}(t)\rho^t\sin(\theta t)$

Шаг 3. Выбрать пробную форму $y_t^{(p)}$ по атомам $f(t)$ и признакам резонанса через χ.
Разложить $f(t)$ на атомы и применить правила из таблицы:

Атом	Резонанс?	Вклад в y(p)
λ^t	$k_\chi(\lambda) = 0?$	$A\,\lambda^t$
$P_d(t)$	$k_\chi(1) = 0?$	$\sum_{k=0}^d c_k t^k$
$\lambda^t P_d(t)$	$k_\chi(\lambda) = 0?$	$\lambda^t \sum_{k=0}^d c_k t^k$
$\lambda^t\cos(\theta t)$ $\lambda^t\sin(\theta t)$	$Q_{\lambda,\theta} \mid \chi?$	$\lambda^t(A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t))$
При резонансе:	**любая форма**	**умножить на** t^s

Шаг 4. Определить коэффициенты пробной формы.
Подставить $y^{(p)}$ в уравнение, сгруппировать по независимым типам (λ^t, t^k, $\lambda^t\cos/\sin$) и решить линейную систему на коэффициенты.

Шаг 5. Собрать общий ответ и учесть начальные условия (при наличии).
Записать $y_t = y_t^{(h)} + y_t^{(p)}$. При наличии $y_0, \dots, y_{n-1}$ подставить соответствующие t и решить систему для констант при $y^{(h)}$.

3. Сопроводительные материалы (таблицы и обозначения)

Атом $\to$ пробная форма (до резонанса):

$$\lambda^t \mapsto A\,\lambda^t, \qquad P_d(t) \mapsto \sum_{k=0}^{d} c_k t^k, \qquad \lambda^t P_d(t) \mapsto \lambda^t \sum_{k=0}^{d} c_k t^k,$$

$$\lambda^t \cos(\theta t),\ \lambda^t \sin(\theta t) \mapsto \lambda^t \big(A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t)\big).$$

Правило резонанса (через χ): $s = k_\chi(1)$ для $P_d(t)$; $s = k_\chi(\lambda)$ для $\lambda^t P_d(t)$; если $Q_{\lambda,\theta} \mid \chi$, умножить триг-форму на t^s.

4. Применение алгоритма к объявленной задаче

$$y_{t+3} - y_{t+2} + 4y_{t+1} - 4y_t \;=\; 26 \cdot 3^t + 10t + 9.$$

Шаг 0. Канонический вид зафиксирован.
Уравнение уже записано как $y_{t+3} + (-1)y_{t+2} + 4y_{t+1} + (-4)y_t = f(t)$, нормировка не требуется.

Шаг 1. Построить $\chi(r)$ и кратности корней.
$\chi(r) = r^3 - r^2 + 4r - 4 = (r-1)(r^2+4)$; корни $1, \pm 2i$, все кратности равны 1: $k_\chi(1) = 1$, $k_\chi(\pm 2i) = 1$.

Шаг 2. Записать $y_t^{(h)}$ по найденному спектру.

$$y_t^{(h)} = C_1 \cdot 1^t + 2^t \Big(C_2 \cos\tfrac{\pi t}{2} + C_3 \sin\tfrac{\pi t}{2}\Big).$$

Шаг 3. Выбрать $y_t^{(p)}$ по атомам RHS и признакам резонанса на χ.
$f(t) = 26 \cdot 3^t + P_1(t)$, где $P_1(t) = 10t + 9$.

- Для 3^t: $k_\chi(3) = 0$ (3 не корень) $\Rightarrow A \cdot 3^t$
- Для $P_1(t)$: $k_\chi(1) = 1$ (1 — корень кратности 1) $\Rightarrow t(\tilde a t + \tilde b) = \tilde a t^2 + \tilde b t$

Итого

$$y_t^{(p)} = A \cdot 3^t + a\,t^2 + b\,t.$$

Шаг 4. Найти коэффициенты пробной формы, учитывая разложение по типам.
Подстановка даёт

$$L[y^{(p)}] = 26A \cdot 3^t + 10a\,t + (9a + 5b) \overset{!}{=} 26 \cdot 3^t + 10t + 9 \Rightarrow A = 1,\ a = 1,\ b = 0.$$

Следовательно, $y_t^{(p)} = 3^t + t^2$.

Шаг 5. Собрать общий ответ и отметить, как добавляются начальные условия.

$$\boxed{y_t = C_1 + 2^t \Big(C_2 \cos\tfrac{\pi t}{2} + C_3 \sin\tfrac{\pi t}{2}\Big) + 3^t + t^2}.$$

При наличии y_0, y_1, y_2 — подставить $t = 0, 1, 2$ и решить систему для C_1, C_2, C_3.