

# Подготовка: Дифференциальные уравнения

Полная версия с разборами тем и ссылками

---

## Содержание

<b>1</b>	<b>Разностные уравнения</b>	<b>2</b>
1.1	Однородные линейные разностные уравнения . . . . .	2
1.2	Минимальная ЛОРУ: метод аннигиляторов . . . . .	3
1.3	Неоднородные линейные разностные уравнения . . . . .	4
1.4	Системы разностных уравнений . . . . .	6

# 1 Разностные уравнения

## Определение

**Разностное уравнение** — соотношение между элементами последовательности (или векторной последовательности), задающее правило перехода от шага  $t$  к  $t+1$  или к нескольким последующим шагам. В этом разделе: ЛОРУ (линейные однородные разностные уравнения) и их расширения.

## 1.1 Однородные линейные разностные уравнения

**Пример.** Решите однородное линейное разностное уравнение:

$$y_{t+3} - 3y_{t+2} + 6y_{t+1} - 4y_t = 0 \quad (1)$$

**Определение.** Линейное однородное разностное уравнение порядка  $k$  с постоянными коэффициентами:

$$a_t + c_1 a_{t-1} + c_2 a_{t-2} + \dots + c_k a_{t-k} = 0, \quad c_k \neq 0 \quad (2)$$

Пара «уравнение +  $k$  начальных условий» задаёт единственное решение.

**Идея решения: метод характеристических корней.** Полагаем  $a_t = r^t \Rightarrow$

$$r^t(1 + c_1 r^{-1} + c_2 r^{-2} + \dots + c_k r^{-k}) = 0 \iff r^k + c_1 r^{k-1} + \dots + c_k = 0 \quad (3)$$

т.е. характеристический многочлен  $\chi(r) = r^k + c_1 r^{k-1} + \dots + c_k$ . Его корни целиком описывают форму общего решения.

*Обозначения:*  $p_j(t), q_j(t)$  — полиномы по  $t$  степени  $\leq j$ .

Таблица 1: Выбор формы решения по типу корней характеристического многочлена

Условия на корни	Вклад в решение
Действительный корень $r$ кратности $m \geq 1$	$p_{m-1}(t) r^t$
Комплексно-сопряжённая пара $\rho e^{\pm i\theta}$ кратности $s \geq 1$	$\rho^t (p_{s-1}(t) \cos(\theta t) + q_{s-1}(t) \sin(\theta t))$

*Итоговое общее решение — сумма форм всех корней:*

$$a_t = \sum_j p_{m_j-1}(t) r_j^t + \sum_k \rho_k^t (p_{s_k-1}(t) \cos(\theta_k t) + q_{s_k-1}(t) \sin(\theta_k t)),$$

где  $r_j$  — действительные корни кратности  $m_j$ ,  $\rho_k e^{\pm i\theta_k}$  — комплексно-сопряжённые корни кратности  $s_k$ . Сумма кратностей всех корней равна порядку  $k$ .

**Начальные условия.** Подставляем  $t = 0, 1, \dots, k-1$  в общий вид, решаем линейную систему на  $\alpha$ -коэффициенты.

## Алгоритм.

- Нормализация.** Привести уравнение к виду  $a_t + \sum_{j=1}^k c_j a_{t-j} = 0$ ,  $c_k \neq 0$ .
- Характеристический многочлен.** Записать  $\chi(r) = r^k + c_1 r^{k-1} + \dots + c_k$ .
- Корни и кратности.** Найти корни  $r$  и их кратности  $m$  ( $\sum m = k$ ).
- Общий вид решения (см. таблицу 1).** Для каждого корня/пары взять соответствующий вклад из таблицы и сложить их.
- Подгонка под начальные условия.** Подставить  $k$  заданных значений подряд и решить линейную систему для постоянных.

## 1.2 Минимальная ЛОРУ: метод аннигиляторов

### TL;DR

Минимальная ЛОРУ (линейное однородное разностное уравнение с постоянными коэффициентами), для которой данные последовательности являются решениями, строится так:

1. к каждой заданной последовательности приписать аннигилятор (многочлен от  $E$ );
2. взять НОК этих аннигиляторов как многочлен  $L(\lambda)$ ;
3. развернуть  $L(E)y = 0$  в явную рекурренту. Степень  $L$  — минимальный порядок.

### Методика

Пусть даны частные решения  $y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$ .

**Атом  $\rightarrow$  аннигилятор** Для каждой последовательности выпишите минимальный аннигилирующий многочлен:

Таблица 2: Атом  $\rightarrow$  аннигилятор

Атом (последовательность)	Минимальный аннигилятор $L(\lambda)$
$r^t$	$(\lambda - r)$
$t^k r^t$	$(\lambda - r)^{k+1}$
$\rho^t \cos(\omega t), \rho^t \sin(\omega t)$	$Q_{\rho, \omega}(\lambda) = \lambda^2 - 2\rho \cos \omega \lambda + \rho^2$
$t^k \rho^t \cos / \sin(\omega t)$	$Q_{\rho, \omega}(\lambda)^{k+1}$
$t^k$	$(\lambda - 1)^{k+1}$
$(-1)^t$	$(\lambda + 1)$

**Шаг 2. Собрать общий аннигилятор** Возьмём НОК (наименьший общий кратный) всех многочленов из шага 1:

$$L(\lambda) = \text{lcm}(L_1(\lambda), \dots, L_m(\lambda)).$$

При одинаковых базах/частотах выбирается максимальная кратность (а не сумма).

**Шаг 3. Развернуть в рекуррент** Если  $L(\lambda) = \lambda^k + c_1 \lambda^{k-1} + \dots + c_k$ , то искомое уравнение:

$$y_{t+k} + c_1 y_{t+k-1} + \dots + c_k y_t = 0.$$

**Минимальность.** Любой многочлен  $P(E)$ , который зануляет все данные последовательности, обязан делиться на  $L(E)$ . Поэтому  $\deg L$  — минимально возможный порядок.

### Пример

**Простой пример.** Дано:  $y_t^{(1)} = 3^t$ ,  $y_t^{(2)} = (-2)^t$ .

**Шаг 1:** Аннигиляторы:  $(\lambda - 3)$  и  $(\lambda + 2)$ .

**Шаг 2:** НОК:  $(\lambda - 3)(\lambda + 2) = \lambda^2 - \lambda - 6$ .

**Шаг 3:** Развёртка:  $y_{t+2} - y_{t+1} - 6y_t = 0$ .

Проверка: обе последовательности являются решениями; порядок 2 минимален.

**Пример**

**Пример посложнее.** Дано:  $y_t^{(1)} = 2^t$ ,  $y_t^{(2)} = t2^t$ ,  $y_t^{(3)} = (-1)^t$ ,  $y_t^{(4)} = 3^t \cos \frac{\pi t}{3}$ .

**Шаг 1. Аннигиляторы**

Для  $2^t$ :  $(\lambda - 2)$ . Для  $t2^t$ :  $(\lambda - 2)^2$ . Для  $(-1)^t$ :  $(\lambda + 1)$ . Для  $3^t \cos \frac{\pi t}{3}$ :  $Q_{3,\pi/3}(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 9$ .

**Шаг 2. НОК**

Учитываем максимальную кратность по базе 2:  $L(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 9)$ .

**Шаг 3. Развёртка**

Сначала  $(\lambda - 2)^2(\lambda + 1) = (\lambda^2 - 4\lambda + 4)(\lambda + 1) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$ . Затем умножаем на  $\lambda^2 - 3\lambda + 9$  и получаем  $L(\lambda) = \lambda^5 - 6\lambda^4 + 18\lambda^3 - 23\lambda^2 - 12\lambda + 36$ . Отсюда рекуррентное соотношение:

$$y_{t+5} - 6y_{t+4} + 18y_{t+3} - 23y_{t+2} - 12y_{t+1} + 36y_t = 0.$$

*Комментарий:* это и есть минимальная ЛОРУ, аннигилятор которой равен  $L(\lambda)$ .

**1.3 Неоднородные линейные разностные уравнения**

**Пример.** Решите неоднородное линейное разностное уравнение:

$$y_{t+3} - 3y_{t+2} + 6y_{t+1} - 4y_t = 2^t + t \quad (4)$$

**Определение.** Линейное неоднородное разностное уравнение порядка  $k$  с постоянными коэффициентами:

$$a_t + c_1 a_{t-1} + c_2 a_{t-2} + \dots + c_k a_{t-k} = f(t), \quad c_k \neq 0 \quad (5)$$

где  $f(t)$  — заданная функция (неоднородность).

**Структура общего решения:**  $a_t = a_t^{(h)} + a_t^{(p)}$ , где:

- $a_t^{(h)}$  — общее решение однородного уравнения (см. раздел 1.1)
- $a_t^{(p)}$  — частное решение неоднородного уравнения

**Метод неопределённых коэффициентов для  $a_t^{(p)}$ .**

Пусть характеристический многочлен однородного уравнения:

$$\chi(r) = r^k + c_1 r^{k-1} + \dots + c_k \quad \text{и} \quad \chi(r) = \prod_i (r - r_i)^{m_i} \prod_\ell Q_{\rho_\ell, \theta_\ell}(r)^{s_\ell},$$

где

$$Q_{\rho, \theta}(r) = (r - \rho e^{i\theta})(r - \rho e^{-i\theta}) = r^2 - 2\rho \cos \theta r + \rho^2.$$

**Правило «множитель  $\rightarrow$  вклад» (однородная часть):**

- Линейный  $(r - r_0)^m \Rightarrow \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j t^j r_0^t$ .
- Квадратный  $Q_{\rho, \theta}(r)^s \Rightarrow \rho^t \left( \sum_{j=0}^{s-1} t^j (a_j \cos(\theta t) + b_j \sin(\theta t)) \right)$ .

**Итог:**  $a_t^{(h)}$  — сумма всех таких вкладов по всем множителям  $\chi$ .

**Выбор формы частного решения  $a_t^{(p)}$ :**

*Обозначения:*  $P_n(t)$  — полином степени  $n$ ;  $Q_n(t), R_n(t)$  — полиномы;  $\lambda \in \mathbb{C}$ ;  $s$  — кратность резонанса (кратность соответствующего множителя в  $\chi$ ).

**Правило резонанса:** если проверка даёт резонанс кратности  $s$ , домножьте базовую форму на  $t^s$ .

Таблица 3: Выбор формы частного решения и проверка резонанса

Неоднородность $f(t)$	Проверка резонанса	Базовая форма $a_t^{(p)}$
$P_n(t) \lambda^t$	$\chi(\lambda) = 0?$	$Q_n(t) \lambda^t$
$\rho^t \cos(\theta t), \rho^t \sin(\theta t)$	$Q_{\rho, \theta}(r) \mid \chi(r)?$	$\rho^t (A \cos(\theta t) + B \sin(\theta t))$
$P_n(t) \rho^t \cos(\theta t)$ (или $\sin$ )	$Q_{\rho, \theta}(r) \mid \chi(r)?$	$\rho^t (Q_n(t) \cos(\theta t) + R_n(t) \sin(\theta t))$
Чистый полином $P_n(t)$	$\chi(1) = 0?$	$Q_n(t)$

**Алгоритм решения неоднородного уравнения.**

1. **Однородная часть.** Найти  $a_t^{(h)}$  методом характеристических корней (см. раздел 1.1).
2. **Форма частного решения.** По таблице 3 выбрать форму  $a_t^{(p)}$  с учётом правила резонанса.
3. **Подстановка.** Подставить  $a_t^{(p)}$  в исходное неоднородное уравнение и найти неопределённые коэффициенты.
4. **Общее решение.**  $a_t = a_t^{(h)} + a_t^{(p)}$ .
5. **Начальные условия.** Подставить  $k$  заданных значений и найти константы в  $a_t^{(h)}$ .

**Пример.** Решите разностное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами:

$$y_{t+3} - 3y_{t+2} + 6y_{t+1} - 4y_t = 2^t + t$$

Найти общее решение  $y_t$ .

**Решение.**

**1) Однородная часть.** Характеристический многочлен:

$$\chi(r) = r^3 - 3r^2 + 6r - 4 = (r - 1)(r^2 - 2r + 4),$$

корни:  $r_1 = 1$ ,  $r_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{3} = 2e^{\pm i\pi/3}$ .

Отсюда

$$y_t^{(h)} = C_1 + 2^t \left( C_2 \cos \frac{\pi t}{3} + C_3 \sin \frac{\pi t}{3} \right).$$

**2) Частное решение  $y_t^{(p)}$ .** Правая часть  $f(t) = 2^t + t$  — сумма двух типов.

Экспонента  $2^t$ :  $\chi(2) = 8 - 12 + 12 - 4 = 4 \neq 0 \Rightarrow$  резонанса нет, берём  $y_{(1)}^{(p)} = \alpha 2^t$ .

Полином  $t$ :  $\chi(1) = 0$  (кратность 1)  $\Rightarrow$  резонанс порядка  $s = 1$ . Базовая форма для  $P_1(t)$  —  $At + B$ , домножаем на  $t$ :

$$y_{(2)}^{(p)} = t(At + B) = At^2 + Bt.$$

Итого

$$y_t^{(p)} = \alpha 2^t + At^2 + Bt.$$

**3) Подстановка и определение коэффициентов.** Обозначим линейный оператор:

$$\mathcal{L}[y_t] = y_{t+3} - 3y_{t+2} + 6y_{t+1} - 4y_t.$$

Для экспоненты:  $\mathcal{L}[2^t] = \chi(2) 2^t = 4 \cdot 2^t \Rightarrow 4\alpha 2^t = 2^t$ , значит  $\alpha = \frac{1}{4}$ .

Для полинома  $At^2 + Bt$  прямой подсчёт даёт:

$$\mathcal{L}[At^2 + Bt] = 6A t + (3A + 3B).$$

Требуем  $\mathcal{L}[At^2 + Bt] = t$ , откуда

$$6A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{6}, \quad 3A + 3B = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{6}.$$

Следовательно,

$$y_t^{(p)} = \frac{1}{4} 2^t + \frac{t^2 - t}{6}.$$

**4) Общее решение.**

$$y_t = C_1 + 2^t \left( C_2 \cos \frac{\pi t}{3} + C_3 \sin \frac{\pi t}{3} \right) + \frac{1}{4} 2^t + \frac{t^2 - t}{6}$$

(константы  $C_1, C_2, C_3$  находятся по начальным условиям).

## 1.4 Системы разностных уравнений

**Пример**

**Пример.** Решите систему разностных уравнений:  $\begin{cases} x_{t+1} = 4x_t + y_t \\ y_{t+1} = 2y_t \end{cases}$ , с начальными условиями  $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Определение**

Система линейных разностных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами:  $\mathbf{x}_{t+1} = A\mathbf{x}_t$ , где задано  $\mathbf{x}_0$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ . Цель: найти  $\mathbf{x}_t = A^t \mathbf{x}_0$ .

**Идея решения:** возведение матрицы  $A$  в степень  $t$ . Для этого используем спектральное разложение матрицы.

**Обозначения:**  $\lambda_i$  — собственные значения,  $\mathbf{v}_i$  — собственные векторы,  $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$  — характеристический многочлен.

Таблица 4: Выбор метода решения по типу собственных значений

Условия на собственные значения	Рекомендуемый метод
Разные действительные корни, полный базис собственных векторов	Диагонализация
Повторный корень, недостаточно собственных векторов	Жорданова форма
Комплексно-сопряжённая пара	Реальный блок поворота
Матрица $2 \times 2$ (любой случай)	Кэли–Гамильтон

## 1. Диагонализация

**Условие применения:** матрица  $A$  имеет  $n$  линейно независимых собственных векторов (диагонализуема).

**Теорема.** Если  $A$  диагонализуема, то  $A = S\Lambda S^{-1}$ , где  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  — диагональная матрица собственных значений,  $S = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$  — матрица собственных векторов.

### Алгоритм

#### Алгоритм диагонализации.

1. Характеристический многочлен:  $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ .
2. Собственные значения: решить  $\chi_A(\lambda) = 0$ .
3. Собственные векторы: для каждого  $\lambda_i$  решить  $(A - \lambda_i I)\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ .
4. Проверка диагонализуемости:  $\det S \neq 0$ .
5. Диагонализация:  $A = S\Lambda S^{-1}$ .
6. Возведение в степень:  $A^t = S\Lambda^t S^{-1}$ .
7. Решение:  $\mathbf{x}_t = A^t \mathbf{x}_0$ .

### Пример

**Пример.** Та же система. Решение:  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Найдём собственные значения и векторы, построим  $S, \Lambda, S^{-1}$  и получим  $A^t = \begin{pmatrix} 4^t & \frac{4^t - 2^t}{2} \\ 0 & 2^t \end{pmatrix}$ , откуда  $\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} \frac{3 \cdot 4^t - 2^t}{2} \\ 2^t \end{pmatrix}$ .

## 2. Жорданова форма (повторный корень)

**Условие применения:** матрица  $A$  имеет повторное собственное значение, но недостаточно собственных векторов для диагонализации.

**Теорема.** Если  $A$  имеет единственное собственное значение  $\lambda$  кратности  $n$ , то  $A = \lambda I + N$ , где  $N$  — нильпотентная матрица ( $N^m = 0$  для некоторого  $m \leq n$ ).

**Ключевая идея:** используем биномиальную формулу для  $(I + \lambda^{-1}N)^t$ .

### Алгоритм

#### Алгоритм Жордановой формы.

1. Собственное значение  $\lambda$ .
2. Нильпотентная матрица  $N = A - \lambda I$ .
3. Индекс нильпотентности:  $N^m = 0$ .
4. Формула:  $A^t = \lambda^t \sum_{k=0}^{m-1} \binom{t}{k} (\lambda^{-1}N)^k$ .
5. Решение:  $\mathbf{x}_t = A^t \mathbf{x}_0$ .

**Пример**

**Пример.** Система  $\begin{cases} x_{t+1} = 2x_t + y_t \\ y_{t+1} = 2y_t \end{cases}$ . Для  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  имеем  $\lambda = 2$ ,  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $m = 2$ , поэтому  $A^t = 2^t \begin{pmatrix} 1 & t/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  и  $\mathbf{x}_t = 2^t \begin{pmatrix} 1 + t/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**3. Комплексная пара (реальный блок)**

**Условие применения:** матрица  $A \ 2 \times 2$  имеет комплексно-сопряжённые собственные значения  $\lambda = \rho e^{\pm i\theta}$ .

**Теорема.** Для матрицы  $A \ 2 \times 2$  с комплексными корнями  $\lambda = \rho e^{\pm i\theta}$  справедливо:

$$A^t = \rho^t \begin{pmatrix} \cos(t\theta) & -\sin(t\theta) \\ \sin(t\theta) & \cos(t\theta) \end{pmatrix}$$

**Ключевая идея:** комплексные корни соответствуют повороту с масштабированием в вещественном пространстве.

**Алгоритм**

**Алгоритм для комплексной пары.**

1. Проверка:  $(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A < 0$ .
2.  $\rho = \sqrt{\det A}$ ,  $\cos \theta = \frac{\operatorname{tr} A}{2\rho}$ .
3.  $A^t = \rho^t \begin{pmatrix} \cos(t\theta) & -\sin(t\theta) \\ \sin(t\theta) & \cos(t\theta) \end{pmatrix}$ .
4. Решение:  $\mathbf{x}_t = A^t \mathbf{x}_0$ .

**Пример**

**Пример.**  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ :  $(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A = -4 < 0$ ,  $\rho = \sqrt{2}$ ,  $\theta = \pi/4$ . Тогда  $A^t = (\sqrt{2})^t R(t\theta)$  и  $\mathbf{x}_t = (\sqrt{2})^t \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi t}{4} \\ \sin \frac{\pi t}{4} \end{pmatrix}$ .

**4. Кэли–Гамильтон (универсальный метод)**

**Условие применения:** универсальный метод для матриц любого размера, особенно удобен для  $2 \times 2$ .

**Теорема Кэли–Гамильтона.** Матрица  $A$  удовлетворяет своему характеристическому уравнению:  $\chi_A(A) = 0$ .

**Ключевая идея:** используем тождество  $\chi_A(A) = 0$  для построения рекуррентного соотношения на степени матрицы.

**Алгоритм**

**Алгоритм Кэли–Гамильтона ( $2 \times 2$ ).**

1.  $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A$ .
2. Рекуррентное:  $A^{t+2} = (\operatorname{tr} A)A^{t+1} - (\det A)A^t$ .
3. Представление:  $A^t = \alpha_t A + \beta_t I$ .
4. Решить на  $\alpha_t, \beta_t$  и получить  $\mathbf{x}_t$ .



**Пример**

**Пример.** Для  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ :  $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ , откуда  $A^{t+2} = 2A^{t+1} - A^t$ ,  $A^t = tA + (1-t)I$ ,  
и  $\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} 4t + 1 \\ 1 - 4t \end{pmatrix}$ .

**Общий алгоритм решения систем разностных уравнений**

1. Анализ матрицы:  $\text{tr } A$ ,  $\det A$ ,  $\chi_A(\lambda)$ .
2. Выбор метода по типу спектра.
3. Получить  $A^t$  соответствующим методом.
4. Решить  $\mathbf{x}_t = A^t \mathbf{x}_0$ .
5. Проверка:  $A^0 = I$ ,  $A^1 = A$ .

**Полезные проверки:**

- **Начальные условия:**  $A^0 = I$ ,  $A^1 = A$ .
- **Жорданова форма:** если  $A = \lambda I + N$ , проверить  $N^m = 0$ .
- **Комплексная пара:**  $\det A = \rho^2$ ,  $\text{tr } A = 2\rho \cos \theta$ .
- **Биномиальные коэффициенты:** не забыть  $\binom{t}{k}$  в формуле Жордана.