

У вас 120 минут

1. (15 баллов) Построить линейное однородное разностное уравнение минимально возможного порядка, частными решениями которого являются

$$y_t^1 = 3^t, \quad y_t^2 = 2^t \sin \frac{\pi t}{3}.$$

2. (20 баллов) Решите систему дифференциальных уравнений, предварительно найдя первые интегралы:

$$\begin{cases} \dot{x} = xy - x^2, \\ \dot{y} = -y^2, \\ \dot{z} = z^2 + 2yz, \end{cases} \quad \text{в области } x > 0, y > 0, z > 0.$$

3. (20 баллов) Решите задачу Коши для уравнения первого порядка

$$(x - 2z) \frac{\partial u}{\partial x} + (2z - y) \frac{\partial u}{\partial y} + (y - x) \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = x \text{ при } y = 0, z > 0.$$

4. (20 баллов) Докажите, что всякое нетривиальное решение уравнения Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)y = 0$$

имеет бесконечно много нулей на промежутке $x > 0$.

5. (10 баллов) Материальная точка движется по траектории под воздействием гравитационного поля согласно динамическому закону

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V(\mathbf{x}), \quad V(\mathbf{x}) \in C^1,$$

где V — потенциальная энергия. Минимум $V(\mathbf{x})$ достигается в $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, причём $V(\mathbf{x}) > 0$ вне нуля. Найдите положение равновесия и докажите, что оно устойчиво.

6. (15 баллов) Решите задачу Коши для системы разностных уравнений

$$\begin{cases} x_{t+1} = 5x_t + y_t + 2^t, \\ y_{t+1} = -17x_t - 3y_t + 3 \cdot 2^t, \end{cases} \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 3.$$