

Подготовка: Дифференциальные уравнения

Полная версия с разборами тем и ссылками

Содержание

1	Однородные линейные разностные уравнения	2
2	Уравнения второго порядка	2
2.1	Постоянные коэффициенты	2
2.2	Понижение порядка	2

1 Однородные линейные разностные уравнения

Пример. Решите однородное линейное разностное уравнение:

$$y_{t+3} - 3y_{t+2} + 6y_{t+1} - 4y_t = 0 \quad (1)$$

Определение. Линейное однородное разностное уравнение порядка k с постоянными коэффициентами:

$$a_t + c_1 a_{t-1} + c_2 a_{t-2} + \dots + c_k a_{t-k} = 0, \quad c_k \neq 0 \quad (2)$$

Пара «уравнение + k начальных условий» задаёт единственное решение.

Идея решения – метод характеристических корней. Полагаем $a_t = r^t \Rightarrow$

$$r^t(1 + c_1 r^{-1} + c_2 r^{-2} + \dots + c_k r^{-k}) = 0 \iff r^k + c_1 r^{k-1} + \dots + c_k = 0 \quad (3)$$

т.е. характеристический многочлен $\chi(r) = r^k + c_1 r^{k-1} + \dots + c_k$. Его корни целиком описывают форму общего решения.

Таблица 1: Выбор формы решения по типу корней характеристического многочлена

Условия на корни	Вклад в решение
Простой действительный корень $r \in \mathbb{R}$	αr^t
Действительный корень r кратности $m \geq 2$	$(\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_{m-1} t^{m-1}) r^t$
Комплексно-сопряжённая пара $r, \bar{r} = \rho e^{\pm i\theta}$ кратности m	$\sum_{\ell=0}^{m-1} t^\ell \rho^\ell (A_\ell \cos(\theta t) + B_\ell \sin(\theta t))$

Итоговое общее решение — сумма вкладов по всем корням/парам; сумма кратностей равна порядку k .

Подгонка под начальные условия. Подставляем $t = 0, 1, \dots, k-1$ в общий вид, решаем линейную систему на α -коэффициенты.

Алгоритм.

1. **Нормализация.** Приведите уравнение к виду $a_t + \sum_{j=1}^k c_j a_{t-j} = 0$, $c_k \neq 0$.
2. **Характеристический многочлен.** $\chi(r) = r^k + c_1 r^{k-1} + \dots + c_k$.
3. **Корни и кратности.** Найдите корни r и их кратности m ($\sum m = k$).
4. **Общий вид решения (см. табл. 1).** Для каждого корня/пары возьмите соответствующий вклад из таблицы и сложите их.
5. **Подгонка под начальные условия.** Подставьте k заданных значений подряд и решите линейную систему для постоянных.

2 Уравнения второго порядка

2.1 Постоянные коэффициенты

$$ay'' + by' + cy = 0; \quad ar^2 + br + c = 0 \quad (4)$$

2.2 Понижение порядка

Идеи замен: $z = y'$, либо $y'' = z dz/dy$.