

Тренировочные задачи Gen-1

Содержание

1	М1. Разностные ЛОС с постоянными коэффициентами (неоднородность)	2
2	М2. Синтез разностного уравнения по заданным решениям	2
3	М3. Нелинейные 2D-системы: равновесия, линеаризация, фазовый портрет (гиперболика)	3
4	М4. Линейные ОДУ второго порядка: снятие y' , вронскиан, нули	3
5	М5. ПЧП первого порядка: общее решение $u = F(I_1, I_2)$	4
6	М6. ПЧП первого порядка: задача Коши (нехарактеристичность)	4
7	М7. Нелинейные 2D: равновесия, линеаризация, портрет (шире набора М3)	4
8	М8. Переход в полярные: вращающиеся/радиальные системы, интегрирование	5
9	М9. Первые интегралы в 3D-ОДУ (поиск двух независимых)	5
10	М10. Периодические коэффициенты, монодромия (Флоке)	5
11	М11. Доказательные мини-кейсы: нули Бесселя, энергетическая устойчивость	6
12	М12. Механические системы и устойчивость по Ляпунову через потенциал	6
13	М13. Системы разностных уравнений: вариация постоянных, задача Коши	7

1 М1. Разностные ЛОС с постоянными коэффициентами (неоднородность)

1. Найдите общее решение

$$y_{t+4} - 2y_{t+3} - y_{t+2} + 2y_{t+1} = 3 \cdot 2^t + (t^2 - 1)(-1)^t + 5.$$

Укажите, какие слагаемые правой части требуют сдвига степени (резонанс), и какого именно.

2. Решите с начальными условиями $y_0 = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$:

$$y_{t+5} + y_{t+4} - 6y_{t+3} - 6y_{t+2} + 8y_{t+1} + 8y_t = 2^t \cos \frac{\pi t}{2} + t 3^t.$$

3. Найдите общее решение

$$y_{t+3} - 3y_{t+2} + 3y_{t+1} - y_t = (t^2 + 4) \cdot 1^t + t(-2)^t.$$

(Корень $r = 1$ имеет кратность 3; аккуратно обработайте резонанс с полиномом.)

2 М2. Синтез разностного уравнения по заданным решениям

1. Постройте линейное однородное разностное уравнение минимального порядка, частными решениями которого являются

$$y_t^{(1)} = 2^t, \quad y_t^{(2)} = t 2^t, \quad y_t^{(3)} = (-2)^t \sin \frac{\pi t}{3}.$$

2. Найдите минимальное ЛОС, для которого все функции

$$3^t, \quad t 3^t, \quad 2^t \cos \frac{\pi t}{4}, \quad 2^t \sin \frac{\pi t}{4}$$

являются решениями. Укажите его порядок и характеристический многочлен.

3. Постройте уравнение минимального порядка, имеющее решения

$$(-1)^t, \quad t(-1)^t, \quad t^2(-1)^t, \quad 5^t.$$

Поясните, какая кратность у соответствующих корней характеристического многочлена.

3 М3. Нелинейные 2D-системы: равновесия, линеаризация, фазовый портрет (гиперболика)

1. Исследуйте систему

$$\dot{x} = y - x(1 - x - y), \quad \dot{y} = -x + y(2 - x).$$

Найдите все равновесия, классифицируйте их по $\text{tr } J$ и $\det J$, набросайте локальные фазовые портреты.

2. Для параметризованной системы

$$\dot{x} = ay + x(x^2 + y^2 - 1), \quad \dot{y} = -ax + y(x^2 + y^2 - 1),$$

классифицируйте начало координат в зависимости от $a \in \mathbb{R}$ и опишите типы траекторий в окрестности.

3. Исследуйте

$$\dot{x} = (y - 1)(x + 2) - xy, \quad \dot{y} = (x + 1)(y - 2) - xy.$$

Найдите равновесия, типы и локальные эскизы.

4 М4. Линейные ОДУ второго порядка: снятие y' , вронскиан, нули

1. На $x > 0$ рассмотрите

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \left(\frac{5}{x^2} + 1\right)y = 0.$$

(а) Приведите к $z'' + Q(x)z = 0$. (б) Выведите формулу для $W(x)$ через $W(1)$. (в) Докажите, что всякое нетривиальное решение имеет не более одного нуля на $(0, \infty)$.

2. Рассмотрите

$$y'' + 4y' + (3 + e^{-x})y = 0.$$

(а) Снимите y' . (б) Найдите $W(x)$ через $W(0)$. (в) Покажите, что нетривиальное решение имеет не более одного нуля на \mathbb{R} .

3. Эйлера–Коши:

$$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0, \quad x > 0.$$

(а) Снимите y' общей формулой. (б) Выразите $W(x)$ через $W(x_0)$. (в) Укажите условия на (α, β) , гарантирующие «не более одного нуля» на $(0, \infty)$.

5 М5. ПЧП первого порядка: общее решение $u = F(I_1, I_2)$

1. Найдите общее решение

$$(x + y) u_x + (2y - x) u_y + 0 \cdot u_z = 0.$$

2. Найдите общее решение

$$x u_x + y u_y + (x + y) z u_z = 0.$$

3. Найдите общее решение

$$(2xy) u_x + (y^2 - x^2) u_y + (x - y) u_z = 0.$$

(Подсказка: начните с подстановки $v = y/x$ для пары (x, y) .)

6 М6. ПЧП первого порядка: задача Коши (нехарактеристичность)

1. Решите задачу Коши

$$y z_x - x z_y = 0$$

с начальными данными $z = 2y$ при $x = 1$ в окрестности точки $(1, 0)$.

2. Решите задачу Коши

$$y z_x - x z_y = 0$$

с начальными данными $z = 2y$ при $x = 1 + y$ в окрестности точки $(1, 0)$.

3. Для уравнения

$$(x + y) u_x + (2y - x) u_y = 0$$

решите задачу Коши с данными $u = x^2$ на кривой $y = x^2$ в окрестности $(0, 0)$.

7 М7. Нелинейные 2D: равновесия, линеаризация, портрет (шире набора М3)

1. Исследуйте

$$\dot{x} = x(1 - x) - y(1 + y), \quad \dot{y} = 2x - 3y + xy.$$

Полный набор равновесий, типы, локальные эскизы.

2. С параметром b :

$$\dot{x} = y - x(x^2 + b), \quad \dot{y} = -x - y(y^2 + b).$$

Определите тип начала координат и режимы при $b < 0$, $b = 0$, $b > 0$.

3. Исследуйте

$$\dot{x} = (x - y)(1 - xy), \quad \dot{y} = (x + y)(1 + x^2).$$

Определите все равновесия, их характер, локальные эскизы.

8 М8. Переход в полярные: вращающиеся/радиальные системы, интегрирование

1. Для

$$\dot{x} = ay + x(x^2 + y^2 - 1), \quad \dot{y} = -ax + y(x^2 + y^2 - 1),$$

перейдите в полярные и исследуйте уравнения на $\dot{r}, \dot{\theta}$; опишите типы траекторий при $a \neq 0$.

2. Для

$$\dot{x} = x(1 - r^2) + \omega y, \quad \dot{y} = y(1 - r^2) - \omega x, \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

в полярных найдите стационарные радиусы и опишите динамику по r и θ .

3. Для

$$\dot{x} = (r^2 - 2)x + \Omega y, \quad \dot{y} = (r^2 - 2)y - \Omega x, \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

решите радиальное уравнение и классифицируйте траектории в зависимости от стартового $r(0)$.

9 М9. Первые интегралы в 3D-ОДУ (поиск двух независимых)

1. Система

$$\dot{x} = yz, \quad \dot{y} = zx, \quad \dot{z} = xy.$$

Найдите два независимых первых интеграла и опишите траектории в непустой области $x^2 \neq y^2 \neq z^2$.

2. Система

$$\dot{x} = y^2 - z^2, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = xy.$$

Найдите два независимых первых интеграла и опишите интегральные поверхности.

3. Система

$$\dot{x} = y + z, \quad \dot{y} = z + x, \quad \dot{z} = x + y.$$

Найдите два независимых первых интеграла (подсказка: диагонализуйте линейную часть и используйте комбинации координат).

10 М10. Периодические коэффициенты, монодромия (Флоке)

1. Пусть $q \in C(\mathbb{R})$, $q(x + T) = q(x)$, и y — нетривиальное решение $y'' + q(x)y = 0$ с $y(0) = y(T) = 0$. Докажите существование $C \neq 0$ такое, что $y(x + T) = Cy(x)$; выразите C через $y'(T)$ и $y'(0)$.

2. Для

$$y'' + (2 + \cos x)y = 0$$

рассмотрите фундаментальную матрицу за период 2π и решите задачу о виде множителей Флоке (без их численного значения).

3. Пусть $q \in C(\mathbb{R})$, $q(x + \pi) = q(x)$ и y — решение $y'' + q(x)y = 0$ с $y(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$. Покажите, что $y(x + \pi) = -y(x)$ либо $y(x + \pi) = y(x)$; обсудите, когда возможно каждое из двух.

11 М11. Доказательные мини-кейсы: нули Бесселя, энергетическая устойчивость

1. Докажите, что функция Бесселя $J_0(x)$ имеет бесконечно много нулей на $(0, \infty)$.

2. Рассмотрите уравнение

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0, \quad x > 0,$$

где $\nu \geq 0$. Докажите, что при $\nu \geq 1$ любое нетривиальное решение имеет не более одного нуля на $(0, \infty)$.

3. Для системы

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \varepsilon x^3 = 0, \quad \varepsilon > 0,$$

докажите, что равновесие $(0, 0)$ устойчиво по Ляпунову, используя энергетический метод.

12 М12. Механические системы и устойчивость по Ляпунову через потенциал

1. Пусть частица движется по $\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V(\mathbf{x})$, $V \in C^2$, причём $V(\mathbf{0}) = 0$, $V(\mathbf{x}) > 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, а $\nabla^2 V(\mathbf{0})$ положительно определена. Докажите устойчивость равновесия в $\mathbf{0}$ и обсудите, почему асимптотическая устойчивость вообще невозможна без диссипации.

2. Рассмотрите $V(x, y) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2 - 1)^2 + \varepsilon xy$ при малом $|\varepsilon|$. Найдите все равновесия и классифицируйте их по характеру (минимум/седло) для ε в окрестности нуля.

3. Для системы с малой линейной вязкостью

$$\ddot{\mathbf{x}} + \gamma \dot{\mathbf{x}} = -\nabla V(\mathbf{x}), \quad \gamma > 0,$$

покажите, что при $V(\mathbf{x}) \geq c\|\mathbf{x}\|^2$ вблизи нуля равновесие асимптотически устойчиво. Укажите функцию Ляпунова.

13 М13. Системы разностных уравнений: вариация постоянных, задача Коши

1. Решите задачу Коши

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{t+1} = A \mathbf{x}_t + \mathbf{b} 2^t, & A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Найдите A^t и примените дискретную вариацию постоянных.

2. Пусть

$$\mathbf{x}_{t+1} = A \mathbf{x}_t, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(а) Постройте фундаментальную матрицу $\Phi_t = A^t$. (б) Запишите общее решение. (в) Обсудите рост норм решения и минимальный полином A .

3. Неоднородная система

$$\mathbf{x}_{t+1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_t + \begin{pmatrix} (-1)^t \\ t 2^t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}.$$

(а) Найдите диагонализацию/Жордан для матрицы. (б) Выпишите явные формулы для компонент решения.