

### Вариант $\varphi$

1. Решите нелинейную систему уравнений, предварительно найдя оба первых интеграла (их независимость подлежит проверке)

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x, \\ \dot{z} = y^2 - x^2, \end{cases} \quad \text{Система рассматривается в области } y > x > z > 0.$$

2. Решите задачу Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + 2y \frac{\partial u}{\partial y} + (x^2 y + z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = x^3 \text{ при } z = x.$$

3. Пусть  $P(a, b, c)$  однородный многочлен от трёх переменных. Рассмотрите уравнение второго порядка

$$P(y, y', y'') = 0.$$

Докажите, что введение вспомогательной функции  $z$ , согласно формуле  $y = e^z$ , понижает порядок этого уравнения на единицу.

4. Дана система разностных уравнений второго порядка

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- а) Найдите фундаментальную матрицу этой системы  $\Phi_t$ .  
б) Чтобы найти решение неоднородной системы, воспользуйтесь методом вариации постоянных, полагая

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \Phi_t \begin{pmatrix} c_1^t \\ c_2^t \end{pmatrix}.$$

Выпишите уравнения, которым удовлетворяют последовательности  $c_1^t$  и  $c_2^t$ , не решая их.

5. Решите разностное уравнение

$$y_{t+2} + 2y_{t+1} - 3y_t = 25t \cdot 2^t + 4.$$