

Демонстрационный вариант Б

1. (10 баллов) Решите разностное уравнение

$$y_{t+3} + 4y_{t+2} + 5y_{t+1} + 2y_t = 12(-2)^t.$$

2. (20 баллов) Решите систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = z + 1, \\ \dot{y} = y^2 e^{3x}, \\ \dot{z} = (1 + z)^2, \end{cases} \quad \text{в области } y > 0, z > -1,$$

используя найденный первый интеграл.

3. (20 баллов) Даны две задачи Коши для уравнения

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0 :$$

в задаче а) дано $z = 2y$ при $x = 1$, а в задаче б) $z = 2y$ при $x = 1 + y$. В обеих задачах решение ищем в окрестности точки $(1, 0)$. Найдите решение этих задач, если это возможно. Проверьте выполнение условий теоремы существования и единственности решения для подобных задач Коши (для уравнений в частных производных).

4. (30 баллов)

- а) (15 баллов) Дано уравнение

$$(x + 2y)y'' - 3y' + y\sqrt{1 - x} = 0.$$

Пусть $y_1(x)$ — решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y_1(0) = 0$, $y_1'(0) = 1$, соответственно $y_2(x)$ — другое решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям $y_2(0) = 3$, $y_2'(0) = 2$. Составляют ли эти решения фундаментальную систему? Обоснуйте свой ответ. Найдите значение вронскиана, построенного по этим решениям в точке $x = -1$.

- б) (15 баллов) Рассмотрите уравнение

$$x^2 y'' + 2x^2 y' + \left(\frac{1}{3}x^2 - 1\right)y = 0$$

на полуоси $x > 0$. Подбрав функцию $u(x)$ для подстановки $y = ux$, приведите уравнение к виду $z'' + q(x)z = 0$, и докажите, что решение $y(x)$ имеет не более одного нуля.

5. (20 баллов) Исследуйте фазовый портрет (определите тип траекторий) нелинейной системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = ay + x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = -ax + y(x^2 + y^2), \end{cases}$$

в окрестности начала координат для всех значений параметра a . *Указание.* Система интегрируется, если перейти к полярным координатам. Каким положением равновесия является начало координат для линеаризованной системы?