

Подготовка: Дифференциальные уравнения

Полная версия с разборами тем и ссылками

Содержание

1	Разностные уравнения	2
1.1	Однородные линейные разностные уравнения	2
1.2	Минимальная ЛОРУ: метод аннигиляторов	3
1.3	Неоднородные линейные разностные уравнения	4
1.4	Системы разностных уравнений	6

1 Разностные уравнения

Определение

Разностное уравнение — соотношение между элементами последовательности (или векторной последовательности), задающее правило перехода от шага t к $t+1$ или к нескольким последующим шагам. В этом разделе: ЛОРУ (линейные однородные разностные уравнения) и их расширения.

1.1 Однородные линейные разностные уравнения

Пример. Решите однородное линейное разностное уравнение:

$$y_{t+3} - 3y_{t+2} + 6y_{t+1} - 4y_t = 0 \quad (1)$$

Определение. Линейное однородное разностное уравнение порядка k с постоянными коэффициентами:

$$a_t + c_1 a_{t-1} + c_2 a_{t-2} + \dots + c_k a_{t-k} = 0, \quad c_k \neq 0 \quad (2)$$

Пара «уравнение + k начальных условий» задаёт единственное решение.

Идея решения: метод характеристических корней. Полагаем $a_t = r^t \Rightarrow$

$$r^t(1 + c_1 r^{-1} + c_2 r^{-2} + \dots + c_k r^{-k}) = 0 \iff r^k + c_1 r^{k-1} + \dots + c_k = 0 \quad (3)$$

т.е. характеристический многочлен $\chi(r) = r^k + c_1 r^{k-1} + \dots + c_k$. Его корни целиком описывают форму общего решения.

Обозначения

- $p_j(t), q_j(t)$ — полиномы по t степени $\leq j$

Таблица 1: Выбор формы решения по типу корней характеристического многочлена

Условия на корни	Вклад в решение
Действительный корень r кратности $m \geq 1$	$p_{m-1}(t) r^t$
Комплексно-сопряжённая пара $\rho e^{\pm i\theta}$ кратности $s \geq 1$	$\rho^t (p_{s-1}(t) \cos(\theta t) + q_{s-1}(t) \sin(\theta t))$

Итоговое общее решение — сумма форм всех корней:

$$a_t = \sum_j p_{m_j-1}(t) r_j^t + \sum_k \rho_k^t (p_{s_k-1}(t) \cos(\theta_k t) + q_{s_k-1}(t) \sin(\theta_k t)),$$

где r_j — действительные корни кратности m_j , $\rho_k e^{\pm i\theta_k}$ — комплексно-сопряжённые корни кратности s_k . Сумма кратностей всех корней равна порядку k .

Начальные условия: подставляем $t = 0, 1, \dots, k-1$ в общий вид, решаем линейную систему на α -коэффициенты.

Алгоритм решения однородных разностных уравнений.

Шаг 1: Нормализация: привести уравнение к виду $a_t + \sum_{j=1}^k c_j a_{t-j} = 0$, $c_k \neq 0$.

Шаг 2: Характеристический многочлен: записать $\chi(r) = r^k + c_1 r^{k-1} + \dots + c_k$.

Шаг 3: Корни и кратности: найти корни r и их кратности m ($\sum m = k$).

Шаг 4: Общий вид решения (см. таблицу 1): для каждого корня/пары взять соответствующий вклад из таблицы и сложить их.

Шаг 5: Подгонка под начальные условия: подставить k заданных значений подряд и решить линейную систему для постоянных.

1.2 Минимальная ЛОРУ: метод аннигиляторов

TL;DR

Минимальная ЛОРУ (линейное однородное разностное уравнение с постоянными коэффициентами), для которой данные последовательности являются решениями, строится так:

1. к каждой заданной последовательности приписать аннигилятор (многочлен от E);
2. взять НОК этих аннигиляторов как многочлен $L(\lambda)$;
3. развернуть $L(E)y = 0$ в явную рекурренту. Степень L — минимальный порядок.

Методика

Пусть даны частные решения $y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$.

Атом \rightarrow **аннигилятор**. Для каждой последовательности выпишите минимальный аннигилирующий многочлен:

Таблица 2: Атом \rightarrow аннигилятор

Атом (последовательность)	Минимальный аннигилятор $L(\lambda)$
r^t	$(\lambda - r)$
$t^k r^t$	$(\lambda - r)^{k+1}$
$\rho^t \cos(\omega t), \rho^t \sin(\omega t)$	$Q_{\rho, \omega}(\lambda) = \lambda^2 - 2\rho \cos \omega \lambda + \rho^2$
$t^k \rho^t \cos / \sin(\omega t)$	$Q_{\rho, \omega}(\lambda)^{k+1}$
t^k	$(\lambda - 1)^{k+1}$
$(-1)^t$	$(\lambda + 1)$

2. Собрать общий аннигилятор. Возьмём НОК (наименьший общий кратный) всех многочленов из шага 1:

$$L(\lambda) = \text{lcm}(L_1(\lambda), \dots, L_m(\lambda)).$$

При одинаковых базах/частотах выбирается максимальная кратность (а не сумма).

3. Развернуть в рекуррент. Если $L(\lambda) = \lambda^k + c_1 \lambda^{k-1} + \dots + c_k$, то искомое уравнение:

$$y_{t+k} + c_1 y_{t+k-1} + \dots + c_k y_t = 0.$$

Минимальность. Любой многочлен $P(E)$, который зануляет все данные последовательности, обязан делиться на $L(E)$. Поэтому $\deg L$ — минимально возможный порядок.

Простой пример. Дано: $y_t^{(1)} = 3^t$, $y_t^{(2)} = (-2)^t$.

Шаг 1: Аннигиляторы: $(\lambda - 3)$ и $(\lambda + 2)$.

Шаг 2: НОК: $(\lambda - 3)(\lambda + 2) = \lambda^2 - \lambda - 6$.

Шаг 3: Развёртка: $y_{t+2} - y_{t+1} - 6y_t = 0$.

Проверка: обе последовательности являются решениями; порядок 2 минимален.

Пример посложнее. Дано: $y_t^{(1)} = 2^t$, $y_t^{(2)} = t2^t$, $y_t^{(3)} = (-1)^t$, $y_t^{(4)} = 3^t \cos \frac{\pi t}{3}$.

1. Аннигиляторы: Для 2^t : $(\lambda - 2)$. Для $t2^t$: $(\lambda - 2)^2$. Для $(-1)^t$: $(\lambda + 1)$. Для $3^t \cos \frac{\pi t}{3}$: $Q_{3, \pi/3}(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 9$.

2. НОК: Учитываем максимальную кратность по базе 2: $L(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 9)$.

3. Развёртка: Сначала $(\lambda - 2)^2(\lambda + 1) = (\lambda^2 - 4\lambda + 4)(\lambda + 1) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$. Затем умножаем на $\lambda^2 - 3\lambda + 9$ и получаем $L(\lambda) = \lambda^5 - 6\lambda^4 + 18\lambda^3 - 23\lambda^2 - 12\lambda + 36$. Отсюда рекуррентное соотношение:

$$y_{t+5} - 6y_{t+4} + 18y_{t+3} - 23y_{t+2} - 12y_{t+1} + 36y_t = 0.$$

Комментарий: это и есть минимальная ЛОРУ, аннигилятор которой равен $L(\lambda)$.

1.3 Неоднородные линейные разностные уравнения

Пример. Решите неоднородное линейное разностное уравнение:

$$y_{t+3} - 3y_{t+2} + 6y_{t+1} - 4y_t = 2^t + t \quad (4)$$

Определение. Линейное неоднородное разностное уравнение порядка k с постоянными коэффициентами:

$$a_t + c_1 a_{t-1} + c_2 a_{t-2} + \dots + c_k a_{t-k} = f(t), \quad c_k \neq 0 \quad (5)$$

где $f(t)$ — заданная функция (неоднородность).

Структура общего решения: $a_t = a_t^{(h)} + a_t^{(p)}$, где:

- $a_t^{(h)}$ — общее решение однородного уравнения (см. раздел 1.1)
- $a_t^{(p)}$ — частное решение неоднородного уравнения

Метод неопределённых коэффициентов для $a_t^{(p)}$.

Пусть характеристический многочлен однородного уравнения:

$$\chi(r) = r^k + c_1 r^{k-1} + \dots + c_k \quad \text{и} \quad \chi(r) = \prod_i (r - r_i)^{m_i} \prod_\ell Q_{\rho_\ell, \theta_\ell}(r)^{s_\ell},$$

где

$$Q_{\rho, \theta}(r) = (r - \rho e^{i\theta})(r - \rho e^{-i\theta}) = r^2 - 2\rho \cos \theta r + \rho^2.$$

Правило «множитель \rightarrow вклад» (однородная часть):

- Линейный $(r - r_0)^m \Rightarrow \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j t^j r_0^t$.
- Квадратный $Q_{\rho, \theta}(r)^s \Rightarrow \rho^t \left(\sum_{j=0}^{s-1} t^j (a_j \cos(\theta t) + b_j \sin(\theta t)) \right)$.

Итог: $a_t^{(h)}$ — сумма всех таких вкладов по всем множителям χ .

Выбор формы частного решения $a_t^{(p)}$:

Обозначения

- $P_n(t)$ — полином степени n
- $Q_n(t), R_n(t)$ — полиномы
- $\lambda \in \mathbb{C}$ — комплексное число
- s — кратность резонанса (кратность соответствующего множителя в χ)

Таблица 3: Выбор формы частного решения и проверка резонанса

Неоднородность $f(t)$	Проверка резонанса	Базовая форма $a_t^{(p)}$
$P_n(t) \lambda^t$	$\chi(\lambda) = 0?$	$Q_n(t) \lambda^t$
$\rho^t \cos(\theta t), \rho^t \sin(\theta t)$	$Q_{\rho, \theta}(r) \mid \chi(r)?$	$\rho^t (A \cos(\theta t) + B \sin(\theta t))$
$P_n(t) \rho^t \cos(\theta t)$ (или \sin)	$Q_{\rho, \theta}(r) \mid \chi(r)?$	$\rho^t (Q_n(t) \cos(\theta t) + R_n(t) \sin(\theta t))$
Чистый полином $P_n(t)$	$\chi(1) = 0?$	$Q_n(t)$

Правило резонанса: если проверка даёт резонанс кратности s , домножьте базовую форму на t^s .

Алгоритм решения неоднородного уравнения.

Шаг 1: Однородная часть: найти $a_t^{(h)}$ методом характеристических корней (см. раздел 1.1).

Шаг 2: Форма частного решения: по таблице 3 выбрать форму $a_t^{(p)}$ с учётом правила резонанса.

Шаг 3: Подстановка: подставить $a_t^{(p)}$ в исходное неоднородное уравнение и найти неопределённые коэффициенты.

Шаг 4: Общее решение: $a_t = a_t^{(h)} + a_t^{(p)}$.

Шаг 5: Начальные условия: подставить k заданных значений и найти константы в $a_t^{(h)}$.

Пример. Решите разностное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами:

$$y_{t+3} - 3y_{t+2} + 6y_{t+1} - 4y_t = 2^t + t$$

Найти общее решение y_t .

Решение.

1) Однородная часть. Характеристический многочлен:

$$\chi(r) = r^3 - 3r^2 + 6r - 4 = (r - 1)(r^2 - 2r + 4),$$

корни: $r_1 = 1$, $r_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{3} = 2e^{\pm i\pi/3}$.

Отсюда

$$y_t^{(h)} = C_1 + 2^t \left(C_2 \cos \frac{\pi t}{3} + C_3 \sin \frac{\pi t}{3} \right).$$

2) Частное решение $y_t^{(p)}$. Правая часть $f(t) = 2^t + t$ — сумма двух типов.

Экспонента 2^t : $\chi(2) = 8 - 12 + 12 - 4 = 4 \neq 0 \Rightarrow$ резонанса нет, берём $y_{(1)}^{(p)} = \alpha 2^t$.

Полином t : $\chi(1) = 0$ (кратность 1) \Rightarrow резонанс порядка $s = 1$. Базовая форма для $P_1(t) = At + B$, домножаем на t :

$$y_{(2)}^{(p)} = t(At + B) = At^2 + Bt.$$

Итого

$$y_t^{(p)} = \alpha 2^t + At^2 + Bt.$$

3) Подстановка и определение коэффициентов. Обозначим линейный оператор:

$$\mathcal{L}[y_t] = y_{t+3} - 3y_{t+2} + 6y_{t+1} - 4y_t.$$

Для экспоненты: $\mathcal{L}[2^t] = \chi(2) 2^t = 4 \cdot 2^t \Rightarrow 4\alpha 2^t = 2^t$, значит $\alpha = \frac{1}{4}$.

Для полинома $At^2 + Bt$ прямой подсчёт даёт:

$$\mathcal{L}[At^2 + Bt] = 6A t + (3A + 3B).$$

Требуем $\mathcal{L}[At^2 + Bt] = t$, откуда

$$6A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{6}, \quad 3A + 3B = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{6}.$$

Следовательно,

$$y_t^{(p)} = \frac{1}{4} 2^t + \frac{t^2 - t}{6}.$$

4) Общее решение.

$$y_t = C_1 + 2^t \left(C_2 \cos \frac{\pi t}{3} + C_3 \sin \frac{\pi t}{3} \right) + \frac{1}{4} 2^t + \frac{t^2 - t}{6}$$

(константы C_1, C_2, C_3 находятся по начальным условиям).

1.4 Системы разностных уравнений

Пример (вход в тему). Решите систему:

$$\begin{cases} x_{t+1} = 4x_t + y_t, \\ y_{t+1} = 2y_t, \end{cases} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем в матричном виде: $\mathbf{x}_{t+1} = A\mathbf{x}_t$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$.

Определение

(Общий вид) Линейная система разностных уравнений первого порядка:

$$\mathbf{x}_{t+1} = A\mathbf{x}_t + \mathbf{f}_t, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^n.$$

Цель: найти \mathbf{x}_t . Обозначим фундаментальную матрицу однородной части $\Phi_t := A^t$.

Базовые формулы (запомнить!)

$$\mathbf{x}_t = \underbrace{A^t \mathbf{x}_0}_{\text{однородная часть}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} A^{t-1-k} \mathbf{f}_k}_{\text{неоднородная свёртка}} \quad (t \geq 1).$$

Частный случай $\mathbf{f}_t \equiv \mathbf{b}$ (постоянный вектор):

$$\mathbf{x}_t = A^t \mathbf{x}_0 + \left(\sum_{k=0}^{t-1} A^k \right) \mathbf{b} = \begin{cases} A^t \mathbf{x}_0 + (I - A^t)(I - A)^{-1} \mathbf{b}, & I - A \text{ обратима,} \\ A^t \mathbf{x}_0 + (\text{резонанс при } \lambda = 1), & \text{иначе (см. ниже).} \end{cases}$$

Дерево выбора метода для A^t (одинаково для однородных/неоднородных)

- Разные действительные корни \Rightarrow **Диагонализация**.
- Повторный корень, недостаточно собственных векторов \Rightarrow **Жордан**: $A = \lambda I + N$, $N^m = 0$.
- Комплексная пара \Rightarrow **Реальный поворот–масштаб**.
- Матрица 2×2 (любой случай) \Rightarrow часто быстрее **Кэли–Гамильтон**.

0. Неоднородные сразу: вариация постоянных (универсально)

Алгоритм вариации постоянных.

1. Найти $\Phi_t = A^t$ (любой из разделов 1–4 ниже).
2. Положить $\mathbf{x}_t = \Phi_t \mathbf{c}_t$. Тогда $\Phi_{t+1} \mathbf{c}_{t+1} = A\Phi_t \mathbf{c}_t + \mathbf{f}_t = \Phi_{t+1} \mathbf{c}_t + \mathbf{f}_t$.
3. Получаем рекурренту на параметры: $\mathbf{c}_{t+1} - \mathbf{c}_t = \Phi_{t+1}^{-1} \mathbf{f}_t$.
4. Отсюда $\mathbf{c}_t = \mathbf{c}_0 + \sum_{k=0}^{t-1} \Phi_{k+1}^{-1} \mathbf{f}_k$, $\mathbf{c}_0 = \mathbf{x}_0$.

$$5. \text{ Итог: } \mathbf{x}_t = \Phi_t \mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{t-1} \Phi_t \Phi_{k+1}^{-1} \mathbf{f}_k = A^t \mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{t-1} A^{t-1-k} \mathbf{f}_k.$$

Однородный случай $\mathbf{f}_t \equiv 0$ получается автоматом: просто исчезает шаг 3 и суммирование.

Шорткаты по правой части (быстрое $y^{(p)}$ как в скаляре)

- $\mathbf{f}_t \equiv \mathbf{b}$. Если $I - A$ обратима: $\mathbf{x}^{(p)} = \mathbf{x}_*$ постоянно, где $(I - A)\mathbf{x}_* = \mathbf{b}$.
- $\mathbf{f}_t = \lambda^t \mathbf{b}$. Пробуем $\mathbf{x}_t^{(p)} = \lambda^t \mathbf{y}$. Если $\det(\lambda I - A) \neq 0$, то $(\lambda I - A)\mathbf{y} = \mathbf{b}$. Если $\det(\lambda I - A) = 0$ (резонанс), умножаем на t : $\mathbf{x}_t^{(p)} = t \lambda^t \mathbf{y}$ (для кратности 1); при большей кратности — $t^s \lambda^t$.

1. Диагонализация (разные действительные корни)

Алгоритм. $A = S\Lambda S^{-1}$, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i) \Rightarrow \boxed{A^t = S\Lambda^t S^{-1}}$, $\Lambda^t = \text{diag}(\lambda_i^t)$.

Мини-пример. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 4^t & \frac{4^t - 2^t}{2} \\ 0 & 2^t \end{pmatrix}$. Тогда для $\mathbf{f}_t = \lambda^t \mathbf{b}$ можно либо свёрткой, либо шорткатом: найти \mathbf{y} из $(\lambda I - A)\mathbf{y} = \mathbf{b}$.

2. Жордан (повторный корень, недостаёт базиса)

Если $A = \lambda I + N$, $N^m = 0$, то

$$\boxed{A^t = \lambda^t \sum_{k=0}^{m-1} \binom{t}{k} (\lambda^{-1} N)^k}.$$

Часто $m = 2$: $A^t = \lambda^t (I + \frac{t}{\lambda} N)$.

Мини-пример. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = 2^t \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Для $\mathbf{f}_t \equiv \mathbf{b}$: $\sum_{k=0}^{t-1} A^k$ удобно считать той же формулой (бином по N).

3. Комплексная пара (реальный поворот-масштаб)

Если собственные $\lambda = \rho e^{\pm i\theta}$ (для 2×2 : $(\text{tr } A)^2 - 4 \det A < 0$), то

$$\boxed{A^t = \rho^t \begin{pmatrix} \cos t\theta & -\sin t\theta \\ \sin t\theta & \cos t\theta \end{pmatrix}} \quad (\text{после приведения к блоку}).$$

Далее применяем общую свёртку или шорткаты по \mathbf{f}_t .

4. Кэли–Гамильтон (особенно быстро для 2×2)

Если $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A$, то

$$\boxed{A^{t+2} = (\text{tr } A)A^{t+1} - (\det A)A^t}.$$

Ищем $A^t = \alpha_t A + \beta_t I$ и решаем скалярную рекурренту (начальные $\alpha_0=0, \beta_0=1$; $\alpha_1=1, \beta_1=0$). Готовые формулы: при $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\alpha_t = \frac{\lambda_1^t - \lambda_2^t}{\lambda_1 - \lambda_2}$, $\beta_t = \frac{\lambda_1 \lambda_2^t - \lambda_2 \lambda_1^t}{\lambda_1 - \lambda_2}$; при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$: $\alpha_t = t\lambda^{t-1}$, $\beta_t = (1-t)\lambda^t$.

5. Готовый полноценный пример (неоднородный, все шаги)

Геометрическая правая часть без резонанса.

$$\mathbf{x}_{t+1} = A\mathbf{x}_t + 3^t \mathbf{b}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Метод 1 (быстрый шорткат «экспонента»). Пробуем частное решение вида $\mathbf{x}_t^{(p)} = 3^t \mathbf{y}$. Подставляем:

$$3^{t+1} \mathbf{y} = A(3^t \mathbf{y}) + 3^t \mathbf{b} \Leftrightarrow (3I - A)\mathbf{y} = \mathbf{b}.$$

Проверка нерезонансности: $\det(3I - A) = \det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$. Решаем $(3I - A)\mathbf{y} = \mathbf{b}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow y_2 = 1, -y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = -1.$$

Значит $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и

$$\mathbf{x}_t^{(p)} = 3^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общий вид решения: $\mathbf{x}_t = A^t \mathbf{C} + 3^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Подбор \mathbf{C} по начальному условию: $\mathbf{x}_0 = \mathbf{C} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{x}_0 - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Итог:

$$\mathbf{x}_t = A^t \left(\mathbf{x}_0 - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + 3^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Явный вид через A^t . Здесь

$$A^t = \begin{pmatrix} 4^t & \frac{4^t - 2^t}{2} \\ 0 & 2^t \end{pmatrix}.$$

Отсюда (покомпонентно)

$$\begin{aligned} x_t &= 4^t(x_0 + 1) + \frac{4^t - 2^t}{2}(y_0 - 1) - 3^t, \\ y_t &= 2^t(y_0 - 1) + 3^t. \end{aligned}$$

Проверка: подстановка в $\mathbf{x}_{t+1} = A\mathbf{x}_t + 3^t \mathbf{b}$ даёт тождества.