# Подготовка: Дифференциальные уравнения

Полная версия с разборами тем и ссылками

## Содержание

# 1 Разностные уравнения

**Определение**
**Разностное уравнение** — соотношение между элементами последовательности (или векторной последовательности), задающее правило перехода от шага $t$ к $t+1$ или к нескольким последующим шагам. В этом разделе: ЛОРУ (линейные однородные разностные уравнения) и их расширения.

## 1.1 Однородные линейные разностные уравнения

**Пример.** Решите однородное линейное разностное уравнение:

$$y_{t+3} - 3y_{t+2} + 6y_{t+1} - 4y_t = 0 \tag{1}$$

**Определение.** Линейное однородное разностное уравнение порядка $k$ с постоянными коэффициентами:

$$a_t + c_1 a_{t-1} + c_2 a_{t-2} + \cdots + c_k a_{t-k} = 0, \quad c_k \neq 0 \tag{2}$$

Пара «уравнение + $k$ начальных условий» задаёт единственное решение.

**Идея решения:** метод характеристических корней. Полагаем $a_t = r^t \Rightarrow$

$$r^t(1 + c_1 r^{-1} + c_2 r^{-2} + \cdots + c_k r^{-k}) = 0 \iff r^k + c_1 r^{k-1} + \cdots + c_k = 0 \tag{3}$$

т.е. характеристический многочлен $\chi(r) = r^k + c_1 r^{k-1} + \cdots + c_k$. Его корни целиком описывают форму общего решения.

### Обозначения

- $p_j(t), q_j(t)$ — полиномы по $t$ степени $\leq j$

Таблица 1: Выбор формы решения по типу корней характеристического многочлена

| **Условия на корни** | **Вклад в решение** |
|---|---|
| Действительный корень $r$ кратности $m \geq 1$ | $p_{m-1}(t)\, r^t$ |
| Комплексно-сопряжённая пара $\rho e^{\pm i\theta}$ кратности $s \geq 1$ | $\rho^t\big(p_{s-1}(t)\cos(\theta t) + q_{s-1}(t)\sin(\theta t)\big)$ |

*Итоговое общее решение — сумма форм всех корней:*

$$a_t = \sum_j p_{m_j-1}(t)\, r_j^t + \sum_k \rho_k^t\big(p_{s_k-1}(t)\cos(\theta_k t) + q_{s_k-1}(t)\sin(\theta_k t)\big),$$

где $r_j$ — действительные корни кратности $m_j$, $\rho_k e^{\pm i\theta_k}$ — комплексно-сопряжённые корни кратности $s_k$. Сумма кратностей всех корней равна порядку $k$.

**Начальные условия:** подставляем $t = 0, 1, \ldots, k-1$ в общий вид, решаем линейную систему на $\alpha$-коэффициенты.

**Алгоритм решения однородных разностных уравнений.**

**Шаг 1:** Нормализация: привести уравнение к виду $a_t + \sum_{j=1}^k c_j a_{t-j} = 0$, $c_k \neq 0$.
**Шаг 2:** Характеристический многочлен: записать $\chi(r) = r^k + c_1 r^{k-1} + \cdots + c_k$.
**Шаг 3:** Корни и кратности: найти корни $r$ и их кратности $m$ ( $\sum m = k$ ).
**Шаг 4:** Общий вид решения (см. таблицу 1): для каждого корня/пары взять соответствующий вклад из таблицы и сложить их.
**Шаг 5:** Подгонка под начальные условия: подставить $k$ заданных значений подряд и решить линейную систему для постоянных.

## 1.2 Минимальная ЛОРУ: метод аннигиляторов

**TL;DR**
Минимальная ЛОРУ (линейное однородное разностное уравнение с постоянными коэффициентами), для которой данные последовательности являются решениями, строится так:
1. к каждой заданной последовательности приписать аннигилятор (многочлен от $E$);
2. взять НОК этих аннигиляторов как многочлен $L(\lambda)$;
3. развернуть $L(E)\,y = 0$ в явную рекурренту. Степень $L$ — минимальный порядок.

### Методика

Пусть даны частные решения $y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$.

**Атом → аннигилятор.** Для каждой последовательности выпишите минимальный аннигилирующий многочлен:

Таблица 2: Атом → аннигилятор

| **Атом (последовательность)** | **Минимальный аннигилятор** $L(\lambda)$ |
|---|---|
| $r^t$ | $(\lambda - r)$ |
| $t^k r^t$ | $(\lambda - r)^{k+1}$ |
| $\rho^t \cos(\omega t)$, $\rho^t \sin(\omega t)$ | $Q_{\rho,\omega}(\lambda) = \lambda^2 - 2\rho\cos\omega\,\lambda + \rho^2$ |
| $t^k\,\rho^t\,\cos/\sin(\omega t)$ | $Q_{\rho,\omega}(\lambda)^{k+1}$ |
| $t^k$ | $(\lambda - 1)^{k+1}$ |
| $(-1)^t$ | $(\lambda + 1)$ |

**2. Собрать общий аннигилятор.** Возьмём НОК (наименьший общий кратный) всех многочленов из шага 1:

$$L(\lambda) = \operatorname{lcm}\big(L_1(\lambda), \dots, L_m(\lambda)\big).$$

При одинаковых базах/частотах выбирается максимальная кратность (а не сумма).

**3. Развернуть в рекуррент.** Если $L(\lambda) = \lambda^k + c_1\lambda^{k-1} + \cdots + c_k$, то искомое уравнение:

$$\boxed{y_{t+k} + c_1 y_{t+k-1} + \cdots + c_k y_t = 0}.$$

**Минимальность.** Любой многочлен $P(E)$, который зануляет все данные последовательности, обязан делиться на $L(E)$. Поэтому $\deg L$ — минимально возможный порядок.

**Простой пример.** Дано: $y_t^{(1)} = 3^t$, $y_t^{(2)} = (-2)^t$.

**Шаг 1:** Аннигиляторы: $(\lambda - 3)$ и $(\lambda + 2)$.
**Шаг 2:** НОК: $(\lambda - 3)(\lambda + 2) = \lambda^2 - \lambda - 6$.
**Шаг 3:** Развёртка: $\boxed{y_{t+2} - y_{t+1} - 6y_t = 0}$.

Проверка: обе последовательности являются решениями; порядок 2 минимален.

**Пример посложнее.** Дано: $y_t^{(1)} = 2^t$, $y_t^{(2)} = t2^t$, $y_t^{(3)} = (-1)^t$, $y_t^{(4)} = 3^t \cos\frac{\pi t}{3}$.

**1. Аннигиляторы:** Для $2^t$: $(\lambda - 2)$. Для $t2^t$: $(\lambda - 2)^2$. Для $(-1)^t$: $(\lambda + 1)$. Для $3^t\cos\frac{\pi t}{3}$: $Q_{3,\pi/3}(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 9$.

**2. НОК:** Учитываем максимальную кратность по базе 2: $L(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 9)$.

**3. Развёртка:** Сначала $(\lambda - 2)^2(\lambda + 1) = (\lambda^2 - 4\lambda + 4)(\lambda + 1) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$. Затем умножаем на $\lambda^2 - 3\lambda + 9$ и получаем $L(\lambda) = \lambda^5 - 6\lambda^4 + 18\lambda^3 - 23\lambda^2 - 12\lambda + 36$. Отсюда рекуррентное соотношение: $\boxed{y_{t+5} - 6y_{t+4} + 18y_{t+3} - 23y_{t+2} - 12y_{t+1} + 36y_t = 0}$.

*Комментарий:* это и есть минимальная ЛОРУ, аннигилятор которой равен $L(\lambda)$.

### 1.3 Неоднородные линейные разностные уравнения

**Пример.** Решите неоднородное линейное разностное уравнение:

$$y_{t+3} - 3y_{t+2} + 6y_{t+1} - 4y_t = 2^t + t \tag{4}$$

**Определение.** Линейное неоднородное разностное уравнение порядка $k$ с постоянными коэффициентами:

$$a_t + c_1 a_{t-1} + c_2 a_{t-2} + \cdots + c_k a_{t-k} = f(t), \quad c_k \neq 0 \tag{5}$$

где $f(t)$ — заданная функция (неоднородность).

**Структура общего решения:** $a_t = a_t^{(h)} + a_t^{(p)}$, где:

- $a_t^{(h)}$ — общее решение однородного уравнения (см. раздел 1.1)
- $a_t^{(p)}$ — частное решение неоднородного уравнения

**Метод неопределённых коэффициентов для $a_t^{(p)}$.**

Пусть характеристический многочлен однородного уравнения:

$$\chi(r) = r^k + c_1 r^{k-1} + \cdots + c_k \quad \text{и} \quad \chi(r) = \prod_i (r - r_i)^{m_i} \prod_\ell Q_{\rho_\ell,\theta_\ell}(r)^{s_\ell},$$

где

$$Q_{\rho,\theta}(r) = (r - \rho e^{i\theta})(r - \rho e^{-i\theta}) = r^2 - 2\rho\cos\theta\, r + \rho^2.$$

**Правило «множитель → вклад» (однородная часть):**

- Линейный $(r - r_0)^m \ \Rightarrow\ \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j t^j r_0^t$.
- Квадратный $Q_{\rho,\theta}(r)^s \ \Rightarrow\ \rho^t \Big( \sum_{j=0}^{s-1} t^j \big( a_j \cos(\theta t) + b_j \sin(\theta t) \big) \Big)$.

**Итог:** $a_t^{(h)}$ — сумма всех таких вкладов по всем множителям $\chi$.

**Выбор формы частного решения $a_t^{(p)}$:**

## Обозначения

- $P_n(t)$ — полином степени $n$
- $Q_n(t), R_n(t)$ — полиномы
- $\lambda \in \mathbb{C}$ — комплексное число
- $s$ — кратность резонанса (кратность соответствующего множителя в $\chi$)

Таблица 3: Выбор формы частного решения и проверка резонанса

| **Неоднородность $f(t)$** | **Проверка резонанса** | **Базовая форма $a_t^{(p)}$** |
|---|---|---|
| $P_n(t)\,\lambda^t$ | $\chi(\lambda) = 0$? | $Q_n(t)\,\lambda^t$ |
| $\rho^t\cos(\theta t)$, $\rho^t\sin(\theta t)$ | $Q_{\rho,\theta}(r) \mid \chi(r)$? | $\rho^t\big(A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t)\big)$ |
| $P_n(t)\,\rho^t\cos(\theta t)$ (или sin) | $Q_{\rho,\theta}(r) \mid \chi(r)$? | $\rho^t\big(Q_n(t)\cos(\theta t) + R_n(t)\sin(\theta t)\big)$ |
| Чистый полином $P_n(t)$ | $\chi(1) = 0$? | $Q_n(t)$ |

**Правило резонанса:** если проверка даёт резонанс кратности $s$, домножьте базовую форму на $t^s$.

**Алгоритм решения неоднородного уравнения.**

**Шаг 1:** Однородная часть: найти $a_t^{(h)}$ методом характеристических корней (см. раздел 1.1).

**Шаг 2:** Форма частного решения: по таблице 3 выбрать форму $a_t^{(p)}$ с учётом правила резонанса.

**Шаг 3:** Подстановка: подставить $a_t^{(p)}$ в исходное неоднородное уравнение и найти неопределённые коэффициенты.

**Шаг 4:** Общее решение: $a_t = a_t^{(h)} + a_t^{(p)}$.
**Шаг 5:** Начальные условия: подставить $k$ заданных значений и найти константы в $a_t^{(h)}$.

**Пример.** Решите разностное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами:

$$y_{t+3} - 3y_{t+2} + 6y_{t+1} - 4y_t = 2^t + t$$

Найти общее решение $y_t$.

**Решение.**

**1) Однородная часть.** Характеристический многочлен:

$$\chi(r) = r^3 - 3r^2 + 6r - 4 = (r-1)(r^2 - 2r + 4),$$

корни: $r_1 = 1$, $r_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{3} = 2e^{\pm i\pi/3}$.

Отсюда

$$y_t^{(h)} = C_1 + 2^t\Big(C_2 \cos \tfrac{\pi t}{3} + C_3 \sin \tfrac{\pi t}{3}\Big).$$

**2) Частное решение $y_t^{(p)}$.** Правая часть $f(t) = 2^t + t$ — сумма двух типов.

*Экспонента* $2^t$*:* $\chi(2) = 8 - 12 + 12 - 4 = 4 \neq 0 \Rightarrow$ резонанса нет, берём $y_{(1)}^{(p)} = \alpha\, 2^t$.

*Полином* $t$*:* $\chi(1) = 0$ (кратность 1) $\Rightarrow$ резонанс порядка $s = 1$. Базовая форма для $P_1(t)$ — $At + B$, домножаем на $t$:

$$y_{(2)}^{(p)} = t(At + B) = At^2 + Bt.$$

Итого

$$y_t^{(p)} = \alpha\, 2^t + At^2 + Bt.$$

**3) Подстановка и определение коэффициентов.** Обозначим линейный оператор:

$$\mathcal{L}[y_t] = y_{t+3} - 3y_{t+2} + 6y_{t+1} - 4y_t.$$

Для экспоненты: $\mathcal{L}[2^t] = \chi(2)\, 2^t = 4 \cdot 2^t \Rightarrow 4\alpha\, 2^t = 2^t$, значит $\alpha = \frac{1}{4}$.

Для полинома $At^2 + Bt$ прямой подсчёт даёт:

$$\mathcal{L}[At^2 + Bt] = 6A\, t + (3A + 3B).$$

Требуем $\mathcal{L}[At^2 + Bt] = t$, откуда

$$6A = 1 \Rightarrow A = \tfrac{1}{6}, \qquad 3A + 3B = 0 \Rightarrow B = -\tfrac{1}{6}.$$

Следовательно,

$$y_t^{(p)} = \frac{1}{4}\, 2^t + \frac{t^2 - t}{6}.$$

**4) Общее решение.**

$$\boxed{y_t = C_1 + 2^t\Big(C_2 \cos \tfrac{\pi t}{3} + C_3 \sin \tfrac{\pi t}{3}\Big) + \frac{1}{4}\, 2^t + \frac{t^2 - t}{6}}$$

(константы $C_1, C_2, C_3$ находятся по начальным условиям).

### 1.4 Системы разностных уравнений

**Пример (вход в тему).** Решите систему:

$$\begin{cases} x_{t+1} = 4x_t + y_t, \\ y_{t+1} = 2y_t, \end{cases} \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем в матричном виде: $\mathbf{x}_{t+1} = A\mathbf{x}_t$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_t = \binom{x_t}{y_t}$.

**Определение**
(Общий вид) Линейная система разностных уравнений первого порядка:

$$\boxed{\mathbf{x}_{t+1} = A\mathbf{x}_t + \mathbf{f}_t}, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^n.$$

*Цель:* найти $\mathbf{x}_t$. Обозначим фундаментальную матрицу однородной части $\Phi_t := A^t$.

**Базовые формулы (запомнить!)**

$$\boxed{\mathbf{x}_t = \underbrace{A^t\mathbf{x}_0}_{\text{однородная часть}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} A^{\,t-1-k}\,\mathbf{f}_k}_{\text{неоднородная свёртка}}} \qquad (t \geq 1).$$

Частный случай $\mathbf{f}_t \equiv \mathbf{b}$ (постоянный вектор):

$$\boxed{\mathbf{x}_t = A^t\mathbf{x}_0 + \Big(\sum_{k=0}^{t-1} A^k\Big)\mathbf{b}} = \begin{cases} A^t\mathbf{x}_0 + (I - A^t)(I - A)^{-1}\mathbf{b}, & I - A \text{ обратима}, \\ A^t\mathbf{x}_0 + (\text{резонанс при } \lambda = 1), & \text{иначе (см. ниже)}. \end{cases}$$

### Дерево выбора метода для $A^t$ (одинаково для однородных/неоднородных)

- Разные действительные корни $\Rightarrow$ **Диагонализация**.
- Повторный корень, недостаточно собственных векторов $\Rightarrow$ **Жордан**: $A = \lambda I + N$, $N^m = 0$.
- Комплексная пара $\Rightarrow$ **Реальный поворот–масштаб**.
- Матрица $2 \times 2$ (любой случай) $\Rightarrow$ часто быстрее **Кэли–Гамильтон**.

### 0. Неоднородные сразу: вариация постоянных (универсально)

**Алгоритм вариации постоянных.**

1. Найти $\Phi_t = A^t$ (любой из разделов 1–4 ниже).
2. Положить $\mathbf{x}_t = \Phi_t\,\mathbf{c}_t$. Тогда $\Phi_{t+1}\mathbf{c}_{t+1} = A\Phi_t\mathbf{c}_t + \mathbf{f}_t = \Phi_{t+1}\mathbf{c}_t + \mathbf{f}_t$.
3. Получаем рекурренту на параметры: $\boxed{\mathbf{c}_{t+1} - \mathbf{c}_t = \Phi_{t+1}^{-1}\mathbf{f}_t}$.
4. Отсюда $\mathbf{c}_t = \mathbf{c}_0 + \sum_{k=0}^{t-1} \Phi_{k+1}^{-1}\mathbf{f}_k$, $\mathbf{c}_0 = \mathbf{x}_0$.
5. Итог: $\boxed{\mathbf{x}_t = \Phi_t\mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{t-1} \Phi_t\Phi_{k+1}^{-1}\mathbf{f}_k = A^t\mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{t-1} A^{\,t-1-k}\mathbf{f}_k}$.

*Однородный случай* $\mathbf{f}_t \equiv 0$ получается автоматом: просто исчезает шаг 3 и суммирование.

### Шорткаты по правой части (быстрое $y^{(p)}$ как в скаляре)

- $\mathbf{f}_t \equiv \mathbf{b}$. Если $I - A$ обратима: $\mathbf{x}^{(p)} = \mathbf{x}_*$ постоянно, где $(I - A)\mathbf{x}_* = \mathbf{b}$.
- $\mathbf{f}_t = \lambda^t\mathbf{b}$. Пробуем $\boxed{\mathbf{x}_t^{(p)} = \lambda^t\mathbf{y}}$. Если $\det(\lambda I - A) \neq 0$, то $(\lambda I - A)\mathbf{y} = \mathbf{b}$. Если $\det(\lambda I - A) = 0$ (**резонанс**), умножаем на $t$: $\mathbf{x}_t^{(p)} = t\,\lambda^t\mathbf{y}$ (для кратности 1); при большей кратности — $t^s\lambda^t$.

### 1. Диагонализация (разные действительные корни)

**Алгоритм.** $A = S\Lambda S^{-1},\ \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_i) \Rightarrow \boxed{A^t = S\Lambda^t S^{-1}},\ \Lambda^t = \mathrm{diag}(\lambda_i^t)$.

**Мини-пример.** $A = \left(\begin{smallmatrix}4&1\\0&2\end{smallmatrix}\right) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix}4^t & \frac{4^t-2^t}{2}\\ 0 & 2^t\end{pmatrix}$. Тогда для $\mathbf{f}_t = \lambda^t\mathbf{b}$ можно либо свёрткой, либо шорткатом: найти $\mathbf{y}$ из $(\lambda I - A)\mathbf{y} = \mathbf{b}$.

---

### 2. Жордан (повторный корень, недостаёт базиса)

Если $A = \lambda I + N,\ N^m = 0$, то

$$\boxed{A^t = \lambda^t \sum_{k=0}^{m-1} \binom{t}{k} \left(\lambda^{-1}N\right)^k}.$$

Часто $m = 2$: $A^t = \lambda^t\bigl(I + \frac{t}{\lambda}N\bigr)$.

**Мини-пример.** $A = \left(\begin{smallmatrix}2&1\\0&2\end{smallmatrix}\right) \Rightarrow A^t = 2^t\begin{pmatrix}1 & \frac{t}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Для $\mathbf{f}_t \equiv \mathbf{b}$: $\sum_{k=0}^{t-1} A^k$ удобно считать той же формулой (бином по $N$).

---

### 3. Комплексная пара (реальный поворот–масштаб)

Если собственные $\lambda = \rho e^{\pm i\theta}$ (для $2\times 2$: $(\mathrm{tr}\,A)^2 - 4\det A < 0$), то

$$\boxed{A^t = \rho^t \begin{pmatrix}\cos t\theta & -\sin t\theta\\ \sin t\theta & \cos t\theta\end{pmatrix}} \quad \text{(после приведения к блоку).}$$

Далее применяем общую свёртку или шорткаты по $\mathbf{f}_t$.

---

### 4. Кэли–Гамильтон (особенно быстро для $2\times 2$)

Если $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - (\mathrm{tr}\,A)\lambda + \det A$, то

$$\boxed{A^{t+2} = (\mathrm{tr}\,A)A^{t+1} - (\det A)A^t}.$$

Ищем $A^t = \alpha_t A + \beta_t I$ и решаем скалярную рекурренту (начальные $\alpha_0{=}0, \beta_0{=}1;\ \alpha_1{=}1, \beta_1{=}0$). Готовые формулы: при $\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \alpha_t = \frac{\lambda_1^t - \lambda_2^t}{\lambda_1 - \lambda_2},\ \beta_t = \frac{\lambda_1\lambda_2^t - \lambda_2\lambda_1^t}{\lambda_1 - \lambda_2}$; при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$: $\alpha_t = t\lambda^{t-1},\ \beta_t = (1-t)\lambda^t$.

---

### 5. Готовый полноценный пример (неоднородный, все шаги)

**Геометрическая правая часть без резонанса.**

$$\mathbf{x}_{t+1} = A\mathbf{x}_t + 3^t\mathbf{b}, \qquad A = \begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix},\quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}.$$

**Метод 1 (быстрый шорткат «экспонента»).** Пробуем частное решение вида $\mathbf{x}_t^{(p)} = 3^t\mathbf{y}$. Подставляем:

$$3^{t+1}\mathbf{y} = A(3^t\mathbf{y}) + 3^t\mathbf{b} \iff (3I - A)\mathbf{y} = \mathbf{b}.$$

Проверка нерезонансности: $\det(3I-A)=\det\left(\begin{smallmatrix}-1&-1\\0&1\end{smallmatrix}\right)\neq 0$. Решаем $(3I-A)\mathbf{y}=\mathbf{b}$:

$$\begin{pmatrix}-1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ y_2=1,\ -y_1-y_2=0\Rightarrow y_1=-1.$$

Значит $\boxed{\mathbf{y}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}$ и

$$\boxed{\mathbf{x}_t^{(p)}=3^t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}.$$

*Общий вид решения:* $\mathbf{x}_t=A^t\mathbf{C}+3^t\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)$. *Подбор* $\mathbf{C}$ *по начальному условию:* $\mathbf{x}_0=\mathbf{C}+1\cdot\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)\Rightarrow\mathbf{C}=\mathbf{x}_0-\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)$. Итог:

$$\boxed{\mathbf{x}_t=A^t\left(\mathbf{x}_0-\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)+3^t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}.$$

**Явный вид через $A^t$.** Здесь

$$A^t=\begin{pmatrix}4^t&\dfrac{4^t-2^t}{2}\\0&2^t\end{pmatrix}.$$

Отсюда (покомпонентно)

$$\boxed{\begin{aligned}&x_t=4^t\Big(x_0+1\Big)+\frac{4^t-2^t}{2}\Big(y_0-1\Big)-3^t,\\&y_t=2^t\Big(y_0-1\Big)+3^t.\end{aligned}}$$

*Проверка:* подстановка в $\mathbf{x}_{t+1}=A\mathbf{x}_t+3^t\mathbf{b}$ даёт тождества.

# 2 ПЧП первого порядка. Инварианты характеристик

**Определение**
**Линейное ПЧП первого порядка** в $\mathbb{R}^3$ — уравнение вида $a(x,y,z)\,u_x+b(x,y,z)\,u_y+c(x,y,z)\,u_z=0$, где $a,b,c$ — непрерывные функции. Метод характеристик приводит к ОДУ-системе $\dot x=a(x,y,z),\ \dot y=b(x,y,z),\ \dot z=c(x,y,z)$.

## 2.1 Вводная информация и единый алгоритм

Рассматриваем линейное ПЧП первого порядка в $\mathbb{R}^3$:

$$a(x,y,z)\,u_x+b(x,y,z)\,u_y+c(x,y,z)\,u_z\ =\ 0,$$

где $a,b,c$ — непрерывны. Метод характеристик приводит к ОДУ-системе

$$\dot x=a(x,y,z),\quad \dot y=b(x,y,z),\quad \dot z=c(x,y,z).$$

**Определение**
**Инвариант (первый интеграл)** $I(x,y,z)$ — это $C^1$-функция, постоянная вдоль характеристик, т.е.

$$\frac{d}{ds}I(x(s),y(s),z(s))=\nabla I\cdot(a,b,c)=aI_x+bI_y+cI_z=0.$$

Общее решение ПЧП имеет вид $u=F(I_1,I_2)$, где $I_1,I_2$ — два независимых инварианта.

### 2.1.1 Единый алгоритм (5 шагов)

1. **Цель.** Распознать форму и записать *характеристики.*
   **Действие.** Выписать $\dot{x} = a,\ \dot{y} = b,\ \dot{z} = c$ и безпараметрические равенства $\dfrac{dx}{a} = \dfrac{dy}{b} = \dfrac{dz}{c}$.
2. **Цель.** Найти *первый инвариант* $I_1$.
   **Действие.** Решить одну пару, напр. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{a}$, получить семейство кривых уровня $\Phi_1(x, y) = \text{const}$, положить $I_1 = \Phi_1$ (или любой эквивалент).
3. **Цель.** Найти *второй инвариант* $I_2$.
   **Действие.** Зафиксировать $I_1 = \text{const}$ (т.е. связь $y = \Psi(x; I_1)$) и решить ОДУ по $z$ из $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{c(x, \Psi(x; I_1), z)}{a(x, \Psi(x; I_1))}$.
   - Если $c \equiv 0$, взять $I_2 = z$.
   - Если $c = \alpha(x, y)\, z + \beta(x, y)$, получаем линейное ОДУ $z' = \tilde{\alpha}(x; I_1)z + \tilde{\beta}(x; I_1)$. *Интегрирующий множитель* $M(x; I_1) = \exp\bigl(-\int \tilde{\alpha}\, dx\bigr)$, и

     $$\boxed{I_2 = z\, M(x; I_1) - \int \tilde{\beta}(x; I_1)\, M(x; I_1)\, dx}$$

     — константа вдоль характеристики.
   - Если отделяется $z$ — разделить переменные и получить интегральный инвариант.
4. **Цель.** Сформировать *общее решение.*
   **Действие.** Записать $u = F(I_1, I_2)$.
5. **Цель.** Проверить *независимость* $I_1, I_2$.
   **Действие.** Убедиться, что $dI_1 \wedge dI_2 \neq 0$ (или $\nabla I_1 \times \nabla I_2 \neq 0$) в рабочей области.

## 2.2 Как быстро находить $I_1$: детерминированные «детекторы»

Сначала можно убрать общий ненулевой множитель: $(a, b) \sim (\tilde{a}, \tilde{b})$ дают те же инварианты.

- **Радиальный тип:** $(a, b) = (x, y) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} \Rightarrow I_1 = \dfrac{y}{x}$.
- **Вращение:** $(a, b) = (y, -x) \Rightarrow y\, dy = -x\, dx \Rightarrow I_1 = x^2 + y^2$.
- **Диагональный линейный:** $(a, b) = (\alpha x, \beta y) \Rightarrow I_1 = \dfrac{y}{x^{\beta/\alpha}}$.
- **Общий линейный однородный:** $(a, b) = (\alpha x + \beta y,\ \gamma x + \delta y)$. Через левые собственные векторы $M^\top$: взять $\xi = \mathbf{w}_1 \cdot (x, y)$, $\eta = \mathbf{w}_2 \cdot (x, y)$, тогда $I_1 = \eta / \xi^{\lambda_2/\lambda_1}$. Альтернатива: подстановка $v = y/x$ всегда даёт $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{\Phi(v)}{x}$, интегрируется в логарифмах.
- **Однородность одного порядка $d$:** если $a(\lambda x, \lambda y) = \lambda^d a$ и $b(\lambda x, \lambda y) = \lambda^d b$, то $v = y/x$ ведёт к $I_1 = x\, G(v)$.

## 2.3 Как добирать $I_2$: стандартные ветки

- $c \equiv 0 \Rightarrow I_2 = z$.
- $c = \mu(x, y)\, z \Rightarrow z' = \tilde{\alpha}(x; I_1)\, z \Rightarrow I_2 = z\, \exp\bigl(-\int \tilde{\alpha}\, dx\bigr)$.
- $c = \mu(x, y)\, z + \nu(x, y) \Rightarrow$ линейное ОДУ, формула выше с $\tilde{\beta} \not\equiv 0$.
- $c = \mu(x, y)$ (не зависит от $z$) $\Rightarrow I_2 = z - \int \frac{\mu(x, \Psi(x; I_1))}{a(x, \Psi(x; I_1))}\, dx$.

# 3 Линейные ОДУ второго порядка. Снятие $y'$, вронскиан, быстрые выводы о нулях

**Определение**
**Однородное линейное уравнение второго порядка** — уравнение вида $y'' + p(x)\, y'(x) + q(x)\, y(x) = 0$, где $p, q \in C(I)$. Основные инструменты: снятие $y'$ заменой $y = \phi z$ и формула Абеля для вронскиана.

## 3.1 Вводная информация и единый алгоритм

Рассматриваем однородное линейное уравнение второго порядка

$$y'' + p(x)\,y'(x) + q(x)\,y(x) = 0, \qquad p, q \in C(I).$$

Два основных инструмента:

- **Снятие** $y'$ заменой $y = \phi z$, где

$$\phi(x) = \exp\Big(-\frac{1}{2}\int p(x)\,dx\Big), \quad z \text{ удовлетворяет } z'' + Q(x)z = 0,$$

$$\boxed{Q(x) = q(x) - \frac{p'(x)}{2} - \frac{p(x)^2}{4}}.$$

- **Формула Абеля (вронскиан)**: если $y_1, y_2$ — решения,

$$\boxed{W(x) := \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = W(x_0)\exp\Big(-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt\Big)}.$$

  Отсюда: $W \not\equiv 0 \iff y_1, y_2$ фундаментальны.

### 3.1.1 Единый алгоритм (5 шагов)

1. **Цель.** Привести к стандартному виду и зафиксировать $p, q$.
   **Действие.** При необходимости разделить исходное уравнение на коэффициент при $y''$; выписать $p, q$.
2. **Цель.** Снять $y'$ и получить нормальную форму.
   **Действие.** Положить $\phi = \exp\big(-\frac{1}{2}\int p\,dx\big)$, $y = \phi z$. Тогда $z'' + Qz = 0$ с $Q = q - \frac{p'}{2} - \frac{p^2}{4}$.
3. **Цель.** Посчитать/сравнить вронскиан (линейная независимость).
   **Действие.** По Абелю $W(x) = W(x_0)\exp\big(-\int_{x_0}^{x} p\big)$. Если даны $y_1(x_0), y_1'(x_0), y_2(x_0), y_2'(x_0)$, то $W(x_0)$ считаем мгновенно.
4. **Цель.** Сделать краткий качественный вывод.
   **Действие.**
   - *«$\le 1$ нуля на интервале»*: если на интервале $J$ выполнено $Q \le 0$, то у нетривиального решения $z$ не может быть двух нулей в $J$ (интегральный аргумент, см. ниже) $\Rightarrow$ у $y = \phi z$ также $\le 1$ нуля.
   - *«Положительный максимум невозможен»*: если $q(x) < 0$ на $I$, то локальный максимум решения $y$ на $I$ не может быть $> 0$ (экстремум-тест).
5. **Цель.** Записать компактный итог.
   **Действие.** Указать $Q(x)$, формулу $W(x)$ (или значение), и сформулировать требуемое свойство/классификацию.

## 3.2 Два готовых мини-инструмента (доказательные скетчи)

### 3.2.1 «Не более одного нуля», если $Q \le 0$

Пусть $z'' + Qz = 0$ на $J$ и $Q \le 0$. Допустим у нетривиального $z$ два нуля $a < b$. Тогда

$$\int_a^b zz''\,dx + \int_a^b Qz^2\,dx = 0 \;\Rightarrow\; -\int_a^b (z')^2\,dx + \int_a^b Qz^2\,dx = 0,$$

где интегрирование по частям и $z(a) = z(b) = 0$. Правая часть $\le -\int_a^b (z')^2\,dx < 0$ — противоречие. Значит, максимум один ноль.

#### 3.2.2 «Положительный максимум невозможен», если $q < 0$

Пусть $y'' + py' + qy = 0$, $q < 0$. В локальном максимуме $x_0$: $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) \le 0$. Подстановка даёт $y''(x_0) = -q(x_0)y(x_0)$. Если $y(x_0) > 0$, то $y''(x_0) > 0$ — противоречие. Значит любой максимум $\le 0$.

### 3.3 Примеры (одинаковая схема 5 шагов)

#### 3.3.1 Пример 1 (Эйлер—Коши; $x > 0$)

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{3}{x^2}y = 0.$$

**Шаг 1. Цель.** $p, q$. **Действие.** $p = \frac{2}{x}$, $q = -\frac{3}{x^2}$.

**Шаг 2. Цель.** $Q$. **Действие.** $\phi = x^{-1}$, $Q = q - \frac{p'}{2} - \frac{p^2}{4} = -\frac{3}{x^2} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x^2} = -\frac{3}{x^2}$.

**Шаг 3. Цель.** $W(x)$. **Действие.** $W(x) = W(1)\exp\!\big(-\int_1^x \frac{2}{t}dt\big) = W(1)/x^2$.

**Шаг 4. Цель.** Вывод о нулях. **Действие.** $Q \le 0$ на $x > 0 \Rightarrow$ у нетривиального решения $\le 1$ нуля на $(0, \infty)$.

**Шаг 5. Цель.** Итог. **Действие.** Нормальная форма $z'' - \frac{3}{x^2}z = 0$, $W(x) = W(1)/x^2$, «$\le 1$ нуля».

#### 3.3.2 Пример 2 (постоянные коэффициенты)

$$y'' + 4y' + 3y = 0.$$

**Шаг 1.** $p = 4,\ q = 3$.

**Шаг 2. Цель.** $Q$. **Действие.** $\phi = e^{-2x}$, $Q = 3 - 0 - 4 = -1$, т.е. $z'' - z = 0$.

**Шаг 3. Цель.** $W(x)$. **Действие.** $W(x) = W(0)\,e^{-4x}$.

**Шаг 4. Цель.** Нули. **Действие.** $Q = -1 < 0 \Rightarrow$ у нетривиального решения $\le 1$ нуля.

**Шаг 5. Цель.** Итог. **Действие.** $z = \alpha e^x + \beta e^{-x}$, $y = e^{-2x}z$, $W(x) = W(0)e^{-4x}$, «не осциллирует».

#### 3.3.3 Пример 3 (переменный коэффициент $p$, подобранный $q$)

$$y'' + x\,y' + \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)y = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

**Шаг 1.** $p = x,\ q = \frac{x^2}{4} - 1$.

**Шаг 2. Цель.** $Q$. **Действие.** $\phi = e^{-x^2/4}$,

$$Q = q - \frac{p'}{2} - \frac{p^2}{4} = \left(\frac{x^2}{4} - 1\right) - \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4} = -\frac{3}{2}.$$

Получаем $z'' - \frac{3}{2}z = 0$.

**Шаг 3. Цель.** $W(x)$. **Действие.** $W(x) = W(0)\,e^{-\int_0^x t\,dt} = W(0)\,e^{-x^2/2}$.

**Шаг 4. Цель.** Нули. **Действие.** $Q = -\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow \le 1$ нуля.

**Шаг 5. Цель.** Итог. **Действие.** Нормальная форма постоянного знака, вронскиан гауссов, решение не осциллирует.

### 3.3.4 Пример 4 (вронскиан в конкретной точке)

$$(x+2)\,y'' - 3\,y' + \sqrt{1-x}\,y = 0, \qquad x \in (-2,1).$$

Пусть $y_1, y_2$ — решения с начальными данными

$$y_1(0)=0,\ y_1'(0)=1; \qquad y_2(0)=3,\ y_2'(0)=2.$$

**Шаг 1. Цель.** $p, q$. **Действие.** Делим на $x+2$: $p(x) = -\dfrac{3}{x+2}$, $q(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}}{x+2}$.

**Шаг 2. Цель.** $Q$. **Действие.** Не обязательно считать: достаточно для $W$.

**Шаг 3. Цель.** $W(x)$. **Действие.** $W(0) = \det\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix} = -3 \neq 0$ (фундаментальная пара). По Абелю

$$W(-1) = W(0)\exp\Bigl(-\int_0^{-1} p(t)\,dt\Bigr) = -3\exp\Bigl(-\int_0^{-1} \frac{-3}{t+2}\,dt\Bigr) = -3\cdot\Bigl(\frac{1}{2}\Bigr)^3 = -\frac{3}{8}.$$

**Шаг 4. Цель.** Вывод. **Действие.** Пара фундаментальна, $W(-1) = -3/8$.

**Шаг 5. Цель.** Итог. **Действие.** Независимость подтверждена в любой точке интервала.

## 3.4 Памятка и типичные ловушки

### 3.4.1 Памятка: что делать на экзамене (минимум выбора)

1. Записать $p, q$ (после деления на коэффициент при $y''$).
2. Снять $y'$: $\phi = \exp(-\frac{1}{2}\int p)$, найти $Q = q - \frac{p'}{2} - \frac{p^2}{4}$.
3. Нужен вронскиан? Сразу Абель: $W(x) = W(x_0)\exp(-\int p)$; если даны $y_i(x_0), y_i'(x_0)$ — подставить.
4. Нужен качественный вывод? Если $Q \le 0$ на данном промежутке — пишем «$\le 1$ нуля» (аргумент A). Если дано $q < 0$ — пишем «положительный максимум невозможен» (аргумент B).
5. Итог: короткая формулировка ($Q$, $W$, свойство).

### 3.4.2 Типичные ловушки

- Забыли разделить на коэффициент при $y''$ — $p, q$ посчитаны неверно.
- Ошибка знака в $Q$: внимательно к $-\frac{p'}{2}$ и $-\frac{p^2}{4}$.
- Вронскиан: не пытайтесь дифференцировать $W$ напрямую — используйте Абеля.
- Для утверждений о нулях не нужно решать уравнение: достаточно знака $Q$ (после снятия $y'$).

# 4 Нелинейные 2D-системы: равновесия, линеаризация, негиперболика

**Определение**
**Нелинейная 2D-система** — автономная система вида $\dot{x} = f(x,y)$, $\dot{y} = g(x,y)$, где $f, g \in C^1$.
Метод линеаризации применяется для анализа положений равновесия и их типов.

## 4.1 Где применяется метод линеаризации (признаки «наш случай»)

- Дано: автономная система $\dot{x} = f(x,y)$, $\dot{y} = g(x,y)$, $f, g \in C^1$.
- Спрашивают: положения равновесия, их тип и эскиз фазового портрета в окрестности.
- В точке(ах) равновесия Якоби $J = \begin{pmatrix} f_x & f_y\\ g_x & g_y\end{pmatrix}$ удовлетворяет $\det J \neq 0$ (гиперболическая точка).
- Если $\det J = 0$ или $D = 0$ — это уже не МЗ (негиперболика/граница случаев).

### 4.2 Единый 5-шаговый алгоритм (используем во всех примерах)

**Шаг 1. Цель: найти все равновесия.**

Действие: решить $f(x,y) = 0, g(x,y) = 0$.

**Шаг 2. Цель: получить линеаризацию.**

Действие: в каждой найденной точке вычислить Якоби $J$.

**Шаг 3. Цель: классифицировать тип точки по числам.**

Действие (единственное ветвление строго по знакам):

- Если $\det J < 0 \to$ седло (неустойч.).
- Если $\det J > 0$:
  - посчитать $D = \mathrm{tr}^2 - 4\det$.
  - если $D > 0$: $\mathrm{tr} < 0 \to$ устойч. узел, $\mathrm{tr} > 0 \to$ неустойч. узел;
  - если $D < 0$: $\mathrm{tr} < 0 \to$ устойч. фокус, $\mathrm{tr} > 0 \to$ неустойч. фокус.

**Шаг 4. Цель: зафиксировать направления и устойчивость.**

Действие: указать «куда текут» траектории (в/из точки) и, при седле, назвать две устойчивые/неустойчивые сепаратрисы (вдоль собственных направлений $J$).

**Шаг 5. Цель: нарисовать локальный эскиз.**

Действие: около каждой точки нанести тип (узел/фокус/седло), стрелки по устойчивости, грубо ориентируясь на нулевые изоклины $f = 0, g = 0$ для знаков $\dot{x}, \dot{y}$.

**Замечание.** Этот алгоритм является универсальным для анализа нелинейных 2D-систем и позволяет систематически подходить к решению задач на классификацию равновесных точек.