Подготовка: Дифференциальные уравнения

Полная версия с разборами тем и ссылками

Содержание

1 Однородные линейные разностные уравнения

Пример. Решите однородное линейное разностное уравнение:

$$y_{t+3} - 3y_{t+2} + 6y_{t+1} - 4y_t = 0 \tag{1}$$

Определение. Линейное однородное разностное уравнение порядка k с постоянными коэффициентами:

$$a_t + c_1 a_{t-1} + c_2 a_{t-2} + \cdots + c_k a_{t-k} = 0, \quad c_k \neq 0 \tag{2}$$

Пара «уравнение + k начальных условий» задаёт единственное решение.

Идея решения – метод характеристических корней. Полагаем $a_t = r^t \Rightarrow$

$$r^t(1 + c_1 r^{-1} + c_2 r^{-2} + \cdots + c_k r^{-k}) = 0 \iff r^k + c_1 r^{k-1} + \cdots + c_k = 0 \tag{3}$$

т.е. характеристический многочлен $\chi(r) = r^k + c_1 r^{k-1} + \cdots + c_k$. Его корни целиком описывают форму общего решения.

Таблица 1: Выбор формы решения по типу корней характеристического многочлена

Условия на корни	**Вклад в решение**
Простой действительный корень $r \in \mathbb{R}$	$\alpha\, r^{\,t}$
Действительный корень r кратности $m \geq 2$	$(\alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_{m-1} t^{m-1})\, r^{\,t}$
Комплексно-сопряжённая пара $r, \overline{r} = \rho e^{\pm i\theta}$ кратности m	$\displaystyle\sum_{\ell=0}^{m-1} t^\ell\, \rho^{\,t} \big(\alpha\cos(\theta t) + \beta\sin(\theta t)\big)$

Итоговое общее решение – сумма форм всех корней:

$$a_t = \sum_j \left(\sum_{m=0}^{M_j-1} \alpha_{j,m}\, t^m\, r_j^t \right) + \sum_k \left(\sum_{m=0}^{N_k-1} \rho_k^t\, t^m \left(\alpha\cos(\theta_k t) + \beta\sin(\theta_k t)\right) \right)$$

где r_j — действительные корни кратности M_j, $\rho_k e^{\pm i\theta_k}$ — комплексно-сопряжённые корни кратности N_k. Сумма кратностей всех корней равна порядку k.

Подгонка под начальные условия. Подставляем $t = 0, 1, \ldots, k-1$ в общий вид, решаем линейную систему на α-коэффициенты.

Алгоритм.

1. **Нормализация.** Привести уравнение к виду $a_t + \sum_{j=1}^{k} c_j a_{t-j} = 0$, $c_k \neq 0$.
2. **Характеристический многочлен.** Записать $\chi(r) = r^k + c_1 r^{k-1} + \cdots + c_k$.
3. **Корни и кратности.** Найти корни r и их кратности m ($\sum m = k$).
4. **Общий вид решения (см. табл. 1).** Для каждого корня/пары взять соответствующий вклад из таблицы и сложить их.
5. **Подгонка под начальные условия.** Подставить k заданных значений подряд и решить линейную систему для постоянных.

2 Уравнения второго порядка

2.1 Постоянные коэффициенты

$$ay'' + by' + cy = 0; \quad ar^2 + br + c = 0 \tag{4}$$

2.2 Понижение порядка

Идеи замен: $z = y'$, либо $y'' = z\, dz/dy$.