

Ф.И.О. \_\_\_\_\_

Группа \_\_\_\_\_

1	2	3	4	5	$\Sigma$

## Экзамен по дифференциальным и разностным уравнениям, вариант эпсилон

У вас 120 минут

1. (15 баллов) Построить линейное однородное разностное уравнение по возможности

наименьшего порядка, частными решениями которого являются  $y_t^1 = 3t$  и  $y_t^2 = 2^t \sin \frac{\pi t}{3}$ .

2. (20 баллов) Решите систему дифференциальных уравнений, найдя предварительно

первые интегралы 
$$\begin{cases} \mathbb{X} = xy - x^2, \\ \mathbb{Y} = -y^2, \\ \mathbb{Z} = z^2 + 2yz, \end{cases} \text{ в области } x, y, z > 0.$$

3. (20 баллов) Решите задачу Коши  $(x - 2z) \frac{\partial u}{\partial x} + (2z - y) \frac{\partial u}{\partial y} + (y - x) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ , если  $u = x$  при  $y = 0, z > 0$ .

4. (20 баллов) Докажите, что всякое нетривиальное решение уравнения Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{2})y = 0$$

имеет бесконечно много нулей на промежутке  $x > 0$

5. (10 баллов) Материальная точка движется по траектории под воздействием

гравитационного поля, согласно динамическому закону  $\ddot{\vec{x}} = -\text{grad} V(\vec{x})$ , где  $V(\vec{x}) \in C^1$ ,

- ее потенциальная энергия. Минимум  $V(\vec{x})$  достигается в  $\vec{x} = 0$ , и  $V(\vec{x}) > 0$  вне нуля.

Найдите положение равновесия и докажите, что оно устойчиво.

6. (15 баллов) Решите задачу Коши для системы разностных уравнений

$$\begin{cases} x_{t+1} = 5x_t + y_t + 2^t \\ y_{t+1} = -17x_t - 3y_t + 3(2)^t \end{cases} \text{ и начальные данные } x_0 = 0, y_0 = 3.$$