Подготовка: Дифференциальные уравнения

Полная версия с разборами тем и ссылками

Содержание

1 Разностные уравнения

Определение
Разностное уравнение — соотношение между элементами последовательности (или векторной последовательности), задающее правило перехода от шага t к $t+1$ или к нескольким последующим шагам. В этом разделе: ЛОРУ (линейные однородные разностные уравнения) и их расширения.

1.1 Однородные линейные разностные уравнения

Пример. Решите однородное линейное разностное уравнение:

$$y_{t+3} - 3y_{t+2} + 6y_{t+1} - 4y_t = 0 \tag{1}$$

Определение. Линейное однородное разностное уравнение порядка k с постоянными коэффициентами:

$$a_t + c_1 a_{t-1} + c_2 a_{t-2} + \dots + c_k a_{t-k} = 0, \quad c_k \neq 0 \tag{2}$$

Пара «уравнение + k начальных условий» задаёт единственное решение.

Идея решения: метод характеристических корней. Полагаем $a_t = r^t \Rightarrow$

$$r^t(1 + c_1 r^{-1} + c_2 r^{-2} + \dots + c_k r^{-k}) = 0 \iff r^k + c_1 r^{k-1} + \dots + c_k = 0 \tag{3}$$

т.е. характеристический многочлен $\chi(r) = r^k + c_1 r^{k-1} + \dots + c_k$. Его корни целиком описывают форму общего решения.

Обозначения

- $p_j(t), q_j(t)$ — полиномы по t степени $\leq j$

Таблица 1: Выбор формы решения по типу корней характеристического многочлена

Условия на корни	**Вклад в решение**
Действительный корень r кратности $m \geq 1$	$p_{m-1}(t)\, r^t$
Комплексно-сопряжённая пара $\rho e^{\pm i\theta}$ кратности $s \geq 1$	$\rho^t\big(p_{s-1}(t)\cos(\theta t) + q_{s-1}(t)\sin(\theta t)\big)$

Итоговое общее решение — сумма форм всех корней:

$$a_t = \sum_j p_{m_j-1}(t)\, r_j^t + \sum_k \rho_k^t\big(p_{s_k-1}(t)\cos(\theta_k t) + q_{s_k-1}(t)\sin(\theta_k t)\big),$$

где r_j — действительные корни кратности m_j, $\rho_k e^{\pm i\theta_k}$ — комплексно-сопряжённые корни кратности s_k. Сумма кратностей всех корней равна порядку k.

Начальные условия: подставляем $t = 0, 1, \dots, k-1$ в общий вид, решаем линейную систему на α-коэффициенты.

Алгоритм решения однородных разностных уравнений.

Шаг 1: Нормализация: привести уравнение к виду $a_t + \sum_{j=1}^k c_j a_{t-j} = 0$, $c_k \neq 0$.
Шаг 2: Характеристический многочлен: записать $\chi(r) = r^k + c_1 r^{k-1} + \dots + c_k$.
Шаг 3: Корни и кратности: найти корни r и их кратности m ($\sum m = k$).
Шаг 4: Общий вид решения (см. таблицу 1): для каждого корня/пары взять соответствующий вклад из таблицы и сложить их.
Шаг 5: Подгонка под начальные условия: подставить k заданных значений подряд и решить линейную систему для постоянных.

1.2 Минимальная ЛОРУ: метод аннигиляторов

TL;DR
Минимальная ЛОРУ (линейное однородное разностное уравнение с постоянными коэффициентами), для которой данные последовательности являются решениями, строится так:
1. к каждой заданной последовательности приписать аннигилятор (многочлен от E);
2. взять НОК этих аннигиляторов как многочлен $L(\lambda)$;
3. развернуть $L(E)\,y = 0$ в явную рекурренту. Степень L — минимальный порядок.

Методика

Пусть даны частные решения $y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$.

Атом → аннигилятор. Для каждой последовательности выпишите минимальный аннигилирующий многочлен:

Таблица 2: Атом → аннигилятор

Атом (последовательность)	**Минимальный аннигилятор** $L(\lambda)$
r^t	$(\lambda - r)$
$t^k r^t$	$(\lambda - r)^{k+1}$
$\rho^t \cos(\omega t)$, $\rho^t \sin(\omega t)$	$Q_{\rho,\omega}(\lambda) = \lambda^2 - 2\rho\cos\omega\,\lambda + \rho^2$
$t^k\,\rho^t\,\cos/\sin(\omega t)$	$Q_{\rho,\omega}(\lambda)^{k+1}$
t^k	$(\lambda - 1)^{k+1}$
$(-1)^t$	$(\lambda + 1)$

2. Собрать общий аннигилятор. Возьмём НОК (наименьший общий кратный) всех многочленов из шага 1:

$$L(\lambda) = \operatorname{lcm}\big(L_1(\lambda), \dots, L_m(\lambda)\big).$$

При одинаковых базах/частотах выбирается максимальная кратность (а не сумма).

3. Развернуть в рекуррент. Если $L(\lambda) = \lambda^k + c_1\lambda^{k-1} + \dots + c_k$, то искомое уравнение:

$$\boxed{y_{t+k} + c_1 y_{t+k-1} + \dots + c_k y_t = 0}.$$

Минимальность. Любой многочлен $P(E)$, который зануляет все данные последовательности, обязан делиться на $L(E)$. Поэтому $\deg L$ — минимально возможный порядок.

Простой пример. Дано: $y_t^{(1)} = 3^t$, $y_t^{(2)} = (-2)^t$.

Шаг 1: Аннигиляторы: $(\lambda - 3)$ и $(\lambda + 2)$.
Шаг 2: НОК: $(\lambda - 3)(\lambda + 2) = \lambda^2 - \lambda - 6$.
Шаг 3: Развёртка: $\boxed{y_{t+2} - y_{t+1} - 6y_t = 0}$.

Проверка: обе последовательности являются решениями; порядок 2 минимален.

Пример посложнее. Дано: $y_t^{(1)} = 2^t$, $y_t^{(2)} = t2^t$, $y_t^{(3)} = (-1)^t$, $y_t^{(4)} = 3^t \cos\frac{\pi t}{3}$.

1. Аннигиляторы: Для 2^t: $(\lambda - 2)$. Для $t2^t$: $(\lambda - 2)^2$. Для $(-1)^t$: $(\lambda + 1)$. Для $3^t\cos\frac{\pi t}{3}$: $Q_{3,\pi/3}(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 9$.

2. НОК: Учитываем максимальную кратность по базе 2: $L(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 9)$.

3. Развёртка: Сначала $(\lambda - 2)^2(\lambda + 1) = (\lambda^2 - 4\lambda + 4)(\lambda + 1) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$. Затем умножаем на $\lambda^2 - 3\lambda + 9$ и получаем $L(\lambda) = \lambda^5 - 6\lambda^4 + 18\lambda^3 - 23\lambda^2 - 12\lambda + 36$. Отсюда рекуррентное соотношение: $\boxed{y_{t+5} - 6y_{t+4} + 18y_{t+3} - 23y_{t+2} - 12y_{t+1} + 36y_t = 0}$.

Комментарий: это и есть минимальная ЛОРУ, аннигилятор которой равен $L(\lambda)$.

1.3 Неоднородные линейные разностные уравнения

Пример. Решите неоднородное линейное разностное уравнение:

$$y_{t+3} - 3y_{t+2} + 6y_{t+1} - 4y_t = 2^t + t \tag{4}$$

Определение. Линейное неоднородное разностное уравнение порядка k с постоянными коэффициентами:

$$a_t + c_1 a_{t-1} + c_2 a_{t-2} + \cdots + c_k a_{t-k} = f(t), \quad c_k \neq 0 \tag{5}$$

где $f(t)$ — заданная функция (неоднородность).

Структура общего решения: $a_t = a_t^{(h)} + a_t^{(p)}$, где:

- $a_t^{(h)}$ — общее решение однородного уравнения (см. раздел 1.1)
- $a_t^{(p)}$ — частное решение неоднородного уравнения

Метод неопределённых коэффициентов для $a_t^{(p)}$.

Пусть характеристический многочлен однородного уравнения:

$$\chi(r) = r^k + c_1 r^{k-1} + \cdots + c_k \quad \text{и} \quad \chi(r) = \prod_i (r - r_i)^{m_i} \prod_\ell Q_{\rho_\ell,\theta_\ell}(r)^{s_\ell},$$

где

$$Q_{\rho,\theta}(r) = (r - \rho e^{i\theta})(r - \rho e^{-i\theta}) = r^2 - 2\rho\cos\theta\, r + \rho^2.$$

Правило «множитель → вклад» (однородная часть):

- Линейный $(r - r_0)^m \;\Rightarrow\; \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j t^j r_0^t$.
- Квадратный $Q_{\rho,\theta}(r)^s \;\Rightarrow\; \rho^t \Big(\sum_{j=0}^{s-1} t^j \big(a_j \cos(\theta t) + b_j \sin(\theta t) \big) \Big)$.

Итог: $a_t^{(h)}$ — сумма всех таких вкладов по всем множителям χ.

Выбор формы частного решения $a_t^{(p)}$:

Обозначения

- $P_n(t)$ — полином степени n
- $Q_n(t), R_n(t)$ — полиномы
- $\lambda \in \mathbb{C}$ — комплексное число
- s — кратность резонанса (кратность соответствующего множителя в χ)

Таблица 3: Выбор формы частного решения и проверка резонанса

Неоднородность $f(t)$	**Проверка резонанса**	**Базовая форма $a_t^{(p)}$**
$P_n(t)\,\lambda^t$	$\chi(\lambda) = 0$?	$Q_n(t)\,\lambda^t$
$\rho^t\cos(\theta t)$, $\rho^t\sin(\theta t)$	$Q_{\rho,\theta}(r) \mid \chi(r)$?	$\rho^t\big(A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t)\big)$
$P_n(t)\,\rho^t\cos(\theta t)$ (или sin)	$Q_{\rho,\theta}(r) \mid \chi(r)$?	$\rho^t\big(Q_n(t)\cos(\theta t) + R_n(t)\sin(\theta t)\big)$
Чистый полином $P_n(t)$	$\chi(1) = 0$?	$Q_n(t)$

Правило резонанса: если проверка даёт резонанс кратности s, домножьте базовую форму на t^s.

Алгоритм решения неоднородного уравнения.

Шаг 1: Однородная часть: найти $a_t^{(h)}$ методом характеристических корней (см. раздел 1.1).
Шаг 2: Форма частного решения: по таблице 3 выбрать форму $a_t^{(p)}$ с учётом правила резонанса.
Шаг 3: Подстановка: подставить $a_t^{(p)}$ в исходное неоднородное уравнение и найти неопределённые коэффициенты.

Шаг 4: Общее решение: $a_t = a_t^{(h)} + a_t^{(p)}$.
Шаг 5: Начальные условия: подставить k заданных значений и найти константы в $a_t^{(h)}$.

Пример. Решите разностное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами:

$$y_{t+3} - 3y_{t+2} + 6y_{t+1} - 4y_t = 2^t + t$$

Найти общее решение y_t.

Решение.

1) Однородная часть. Характеристический многочлен:

$$\chi(r) = r^3 - 3r^2 + 6r - 4 = (r-1)(r^2 - 2r + 4),$$

корни: $r_1 = 1$, $r_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{3} = 2e^{\pm i\pi/3}$.

Отсюда

$$y_t^{(h)} = C_1 + 2^t\Big(C_2 \cos\tfrac{\pi t}{3} + C_3 \sin\tfrac{\pi t}{3}\Big).$$

2) Частное решение $y_t^{(p)}$. Правая часть $f(t) = 2^t + t$ — сумма двух типов.

Экспонента 2^t*:* $\chi(2) = 8 - 12 + 12 - 4 = 4 \neq 0 \Rightarrow$ резонанса нет, берём $y_{(1)}^{(p)} = \alpha\, 2^t$.

Полином t*:* $\chi(1) = 0$ (кратность 1) $\Rightarrow$ резонанс порядка $s = 1$. Базовая форма для $P_1(t)$ — $At + B$, домножаем на t:

$$y_{(2)}^{(p)} = t(At + B) = At^2 + Bt.$$

Итого

$$y_t^{(p)} = \alpha\, 2^t + At^2 + Bt.$$

3) Подстановка и определение коэффициентов. Обозначим линейный оператор:

$$\mathcal{L}[y_t] = y_{t+3} - 3y_{t+2} + 6y_{t+1} - 4y_t.$$

Для экспоненты: $\mathcal{L}[2^t] = \chi(2)\, 2^t = 4 \cdot 2^t \Rightarrow 4\alpha\, 2^t = 2^t$, значит $\alpha = \frac{1}{4}$.

Для полинома $At^2 + Bt$ прямой подсчёт даёт:

$$\mathcal{L}[At^2 + Bt] = 6A\, t + (3A + 3B).$$

Требуем $\mathcal{L}[At^2 + Bt] = t$, откуда

$$6A = 1 \Rightarrow A = \tfrac{1}{6}, \qquad 3A + 3B = 0 \Rightarrow B = -\tfrac{1}{6}.$$

Следовательно,

$$y_t^{(p)} = \frac{1}{4}\, 2^t + \frac{t^2 - t}{6}.$$

4) Общее решение.

$$\boxed{y_t = C_1 + 2^t\Big(C_2 \cos\tfrac{\pi t}{3} + C_3 \sin\tfrac{\pi t}{3}\Big) + \frac{1}{4}\, 2^t + \frac{t^2 - t}{6}}$$

(константы C_1, C_2, C_3 находятся по начальным условиям).

1.4 Системы разностных уравнений

Пример (вход в тему). Решите систему:

$$\begin{cases} x_{t+1} = 4x_t + y_t, \\ y_{t+1} = 2y_t, \end{cases} \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем в матричном виде: $\mathbf{x}_{t+1} = A\mathbf{x}_t$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_t = \binom{x_t}{y_t}$.

Определение
(Общий вид) Линейная система разностных уравнений первого порядка:

$$\boxed{\mathbf{x}_{t+1} = A\mathbf{x}_t + \mathbf{f}_t}, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^n.$$

Цель: найти $\mathbf{x}_t$. Обозначим фундаментальную матрицу однородной части $\Phi_t := A^t$.

Базовые формулы (запомнить!)

$$\boxed{\mathbf{x}_t = \underbrace{A^t\mathbf{x}_0}_{\text{однородная часть}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} A^{\,t-1-k}\,\mathbf{f}_k}_{\text{неоднородная свёртка}}} \qquad (t \ge 1).$$

Частный случай $\mathbf{f}_t \equiv \mathbf{b}$ (постоянный вектор):

$$\boxed{\mathbf{x}_t = A^t\mathbf{x}_0 + \Big(\sum_{k=0}^{t-1} A^k\Big)\mathbf{b}} = \begin{cases} A^t\mathbf{x}_0 + (I - A^t)(I - A)^{-1}\mathbf{b}, & I - A \text{ обратима}, \\ A^t\mathbf{x}_0 + (\text{резонанс при } \lambda = 1), & \text{иначе (см. ниже)}. \end{cases}$$

Дерево выбора метода для A^t (одинаково для однородных/неоднородных)

- Разные действительные корни $\Rightarrow$ **Диагонализация**.
- Повторный корень, недостаточно собственных векторов $\Rightarrow$ **Жордан**: $A = \lambda I + N$, $N^m = 0$.
- Комплексная пара $\Rightarrow$ **Реальный поворот–масштаб**.
- Матрица 2×2 (любой случай) $\Rightarrow$ часто быстрее **Кэли–Гамильтон**.

0. Неоднородные сразу: вариация постоянных (универсально)

Алгоритм вариации постоянных.

1. Найти $\Phi_t = A^t$ (любой из разделов 1–4 ниже).
2. Положить $\mathbf{x}_t = \Phi_t\,\mathbf{c}_t$. Тогда $\Phi_{t+1}\mathbf{c}_{t+1} = A\Phi_t\mathbf{c}_t + \mathbf{f}_t = \Phi_{t+1}\mathbf{c}_t + \mathbf{f}_t$.
3. Получаем рекурренту на параметры: $\boxed{\mathbf{c}_{t+1} - \mathbf{c}_t = \Phi_{t+1}^{-1}\mathbf{f}_t}$.
4. Отсюда $\mathbf{c}_t = \mathbf{c}_0 + \sum_{k=0}^{t-1} \Phi_{k+1}^{-1}\mathbf{f}_k$, $\mathbf{c}_0 = \mathbf{x}_0$.
5. Итог: $\boxed{\mathbf{x}_t = \Phi_t\mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{t-1} \Phi_t\Phi_{k+1}^{-1}\mathbf{f}_k = A^t\mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{t-1} A^{\,t-1-k}\mathbf{f}_k}$.

Однородный случай $\mathbf{f}_t \equiv 0$ получается автоматом: просто исчезает шаг 3 и суммирование.

Шорткаты по правой части (быстрое $y^{(p)}$ как в скаляре)

- $\mathbf{f}_t \equiv \mathbf{b}$. Если $I - A$ обратима: $\mathbf{x}^{(p)} = \mathbf{x}_*$ постоянно, где $(I - A)\mathbf{x}_* = \mathbf{b}$.
- $\mathbf{f}_t = \lambda^t\mathbf{b}$. Пробуем $\boxed{\mathbf{x}_t^{(p)} = \lambda^t\mathbf{y}}$. Если $\det(\lambda I - A) \ne 0$, то $(\lambda I - A)\mathbf{y} = \mathbf{b}$. Если $\det(\lambda I - A) = 0$ (**резонанс**), умножаем на t: $\mathbf{x}_t^{(p)} = t\,\lambda^t\mathbf{y}$ (для кратности 1); при большей кратности — $t^s\lambda^t$.

1. Диагонализация (разные действительные корни)

Алгоритм. $A = S\Lambda S^{-1},\ \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_i) \Rightarrow \boxed{A^t = S\Lambda^t S^{-1}},\ \Lambda^t = \mathrm{diag}(\lambda_i^t)$.

Мини-пример. $A = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 4^t & \frac{4^t-2^t}{2} \\ 0 & 2^t \end{pmatrix}$. Тогда для $\mathbf{f}_t = \lambda^t \mathbf{b}$ можно либо свёрткой, либо шорткатом: найти $\mathbf{y}$ из $(\lambda I - A)\mathbf{y} = \mathbf{b}$.

---

2. Жордан (повторный корень, недостаёт базиса)

Если $A = \lambda I + N,\ N^m = 0$, то

$$\boxed{A^t = \lambda^t \sum_{k=0}^{m-1} \binom{t}{k} \left(\lambda^{-1} N\right)^k}.$$

Часто $m = 2$: $A^t = \lambda^t\bigl(I + \frac{t}{\lambda} N\bigr)$.

Мини-пример. $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) \Rightarrow A^t = 2^t \left(\begin{smallmatrix} 1 & \frac{t}{2} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Для $\mathbf{f}_t \equiv \mathbf{b}$: $\sum_{k=0}^{t-1} A^k$ удобно считать той же формулой (бином по N).

---

3. Комплексная пара (реальный поворот–масштаб)

Если собственные $\lambda = \rho e^{\pm i\theta}$ (для 2×2: $(\mathrm{tr}\, A)^2 - 4 \det A < 0$), то

$$\boxed{A^t = \rho^t \begin{pmatrix} \cos t\theta & -\sin t\theta \\ \sin t\theta & \cos t\theta \end{pmatrix}} \quad \text{(после приведения к блоку).}$$

Далее применяем общую свёртку или шорткаты по $\mathbf{f}_t$.

---

4. Кэли–Гамильтон (особенно быстро для 2×2)

Если $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - (\mathrm{tr}\, A)\lambda + \det A$, то

$$\boxed{A^{t+2} = (\mathrm{tr}\, A)A^{t+1} - (\det A)A^t}.$$

Ищем $A^t = \alpha_t A + \beta_t I$ и решаем скалярную рекурренту (начальные $\alpha_0{=}0, \beta_0{=}1;\ \alpha_1{=}1, \beta_1{=}0$). Готовые формулы: при $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\alpha_t = \frac{\lambda_1^t - \lambda_2^t}{\lambda_1 - \lambda_2}$, $\beta_t = \frac{\lambda_1 \lambda_2^t - \lambda_2 \lambda_1^t}{\lambda_1 - \lambda_2}$; при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$: $\alpha_t = t\lambda^{t-1}$, $\beta_t = (1-t)\lambda^t$.

---

5. Готовый полноценный пример (неоднородный, все шаги)

Геометрическая правая часть без резонанса.

$$\mathbf{x}_{t+1} = A\mathbf{x}_t + 3^t \mathbf{b}, \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \ \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Метод 1 (быстрый шорткат «экспонента»). Пробуем частное решение вида $\mathbf{x}_t^{(p)} = 3^t \mathbf{y}$. Подставляем:

$$3^{t+1}\mathbf{y} = A(3^t \mathbf{y}) + 3^t \mathbf{b} \ \Leftrightarrow\ (3I - A)\mathbf{y} = \mathbf{b}.$$

Проверка нерезонансности: $\det(3I-A)=\det\left(\begin{smallmatrix}-1&-1\\0&1\end{smallmatrix}\right)\neq 0$. Решаем $(3I-A)\mathbf{y}=\mathbf{b}$:

$$\begin{pmatrix}-1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ y_2=1,\ -y_1-y_2=0\Rightarrow y_1=-1.$$

Значит $\boxed{\mathbf{y}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}$ и

$$\boxed{\mathbf{x}_t^{(p)}=3^t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}.$$

Общий вид решения: $\mathbf{x}_t=A^t\mathbf{C}+3^t\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)$. *Подбор* $\mathbf{C}$ *по начальному условию:* $\mathbf{x}_0=\mathbf{C}+1\cdot\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)\Rightarrow\mathbf{C}=\mathbf{x}_0-\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)$. Итог:

$$\boxed{\mathbf{x}_t=A^t\left(\mathbf{x}_0-\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)+3^t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}.$$

Явный вид через A^t. Здесь

$$A^t=\begin{pmatrix}4^t&\dfrac{4^t-2^t}{2}\\0&2^t\end{pmatrix}.$$

Отсюда (покомпонентно)

$$\boxed{\begin{aligned}&x_t=4^t\Big(x_0+1\Big)+\frac{4^t-2^t}{2}\Big(y_0-1\Big)-3^t,\\&y_t=2^t\Big(y_0-1\Big)+3^t.\end{aligned}}$$

Проверка: подстановка в $\mathbf{x}_{t+1}=A\mathbf{x}_t+3^t\mathbf{b}$ даёт тождества.

2 ПЧП первого порядка. Инварианты характеристик

Определение
Линейное ПЧП первого порядка в $\mathbb{R}^3$ — уравнение вида $a(x,y,z)\,u_x+b(x,y,z)\,u_y+c(x,y,z)\,u_z=0$, где a,b,c — непрерывные функции. Метод характеристик приводит к ОДУ-системе $\dot x=a(x,y,z),\ \dot y=b(x,y,z),\ \dot z=c(x,y,z)$.

2.1 Вводная информация и единый алгоритм

Рассматриваем линейное ПЧП первого порядка в $\mathbb{R}^3$:

$$a(x,y,z)\,u_x+b(x,y,z)\,u_y+c(x,y,z)\,u_z\ =\ 0,$$

где a,b,c — непрерывны. Метод характеристик приводит к ОДУ-системе

$$\dot x=a(x,y,z),\quad \dot y=b(x,y,z),\quad \dot z=c(x,y,z).$$

Определение
Инвариант (первый интеграл) $I(x,y,z)$ — это C^1-функция, постоянная вдоль характеристик, т.е.

$$\frac{d}{ds}I(x(s),y(s),z(s))=\nabla I\cdot(a,b,c)=aI_x+bI_y+cI_z=0.$$

Общее решение ПЧП имеет вид $u=F(I_1,I_2)$, где I_1,I_2 — два независимых инварианта.

2.1.1 Единый алгоритм (5 шагов)

1. **Цель.** Распознать форму и записать *характеристики.*

   Действие. Выписать $\dot{x} = a, \ \dot{y} = b, \ \dot{z} = c$ и безпараметрические равенства $\dfrac{dx}{a} = \dfrac{dy}{b} = \dfrac{dz}{c}$.
2. **Цель.** Найти *первый инвариант* I_1.

   Действие. Решить одну пару, напр. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{a}$, получить семейство кривых уровня $\Phi_1(x, y) = \mathrm{const}$, положить $I_1 = \Phi_1$ (или любой эквивалент).
3. **Цель.** Найти *второй инвариант* I_2.

   Действие. Зафиксировать $I_1 = \mathrm{const}$ (т.е. связь $y = \Psi(x; I_1)$) и решить ОДУ по z из $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{c(x, \Psi(x; I_1), z)}{a(x, \Psi(x; I_1))}$.
   - Если $c \equiv 0$, взять $I_2 = z$.
   - Если $c = \alpha(x, y)\, z + \beta(x, y)$, получаем линейное ОДУ $z' = \tilde{\alpha}(x; I_1)z + \tilde{\beta}(x; I_1)$. *Интегрирующий множитель* $M(x; I_1) = \exp\big(-\int \tilde{\alpha}\, dx\big)$, и

     $$\boxed{I_2 = z\, M(x; I_1) - \int \tilde{\beta}(x; I_1)\, M(x; I_1)\, dx}$$

     — константа вдоль характеристики.
   - Если отделяется z — разделить переменные и получить интегральный инвариант.
4. **Цель.** Сформировать *общее решение.*
   Действие. Записать $u = F(I_1, I_2)$.
5. **Цель.** Проверить *независимость* I_1, I_2.
   Действие. Убедиться, что $dI_1 \wedge dI_2 \neq 0$ (или $\nabla I_1 \times \nabla I_2 \neq 0$) в рабочей области.

2.2 Как быстро находить I_1: детерминированные «детекторы»

Сначала можно убрать общий ненулевой множитель: $(a, b) \sim (\tilde{a}, \tilde{b})$ дают те же инварианты.

- **Радиальный тип:** $(a, b) = (x, y) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} \Rightarrow I_1 = \dfrac{y}{x}$.
- **Вращение:** $(a, b) = (y, -x) \Rightarrow y\, dy = -x\, dx \Rightarrow I_1 = x^2 + y^2$.
- **Диагональный линейный:** $(a, b) = (\alpha x, \beta y) \Rightarrow I_1 = \dfrac{y}{x^{\beta/\alpha}}$.
- **Общий линейный однородный:** $(a, b) = (\alpha x + \beta y, \ \gamma x + \delta y)$. Через левые собственные векторы $M^\top$: взять $\xi = \mathbf{w}_1 \cdot (x, y)$, $\eta = \mathbf{w}_2 \cdot (x, y)$, тогда $I_1 = \eta / \xi^{\lambda_2/\lambda_1}$. Альтернатива: подстановка $v = y/x$ всегда даёт $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{\Phi(v)}{x}$, интегрируется в логарифмах.
- **Однородность одного порядка** d**:** если $a(\lambda x, \lambda y) = \lambda^d a$ и $b(\lambda x, \lambda y) = \lambda^d b$, то $v = y/x$ ведёт к $I_1 = x\, G(v)$.

2.3 Как добирать I_2: стандартные ветки

- $c \equiv 0 \Rightarrow I_2 = z$.
- $c = \mu(x, y)\, z \Rightarrow z' = \tilde{\alpha}(x; I_1)\, z \Rightarrow I_2 = z\, \exp\big(-\int \tilde{\alpha}\, dx\big)$.
- $c = \mu(x, y)\, z + \nu(x, y) \Rightarrow$ линейное ОДУ, формула выше с $\tilde{\beta} \not\equiv 0$.
- $c = \mu(x, y)$ (не зависит от z) $\Rightarrow I_2 = z - \int \frac{\mu(x, \Psi(x; I_1))}{a(x, \Psi(x; I_1))}\, dx$.

3 Нелинейные 2D-системы: равновесия, линеаризация, негиперболика

Определение
Нелинейная 2D-система — автономная система вида $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$, где $f, g \in C^1$. Метод линеаризации применяется для анализа положений равновесия и их типов.

3.1 Где применяется метод линеаризации (признаки «наш случай»)

- Дано: автономная система $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$, $f, g \in C^1$.
- Спрашивают: положения равновесия, их тип и эскиз фазового портрета в окрестности.
- В точке(ах) равновесия Якоби $J = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}$ удовлетворяет $\det J \neq 0$ (гиперболическая точка).
- Если $\det J = 0$ или $D = 0$ — это уже не МЗ (негиперболика/граница случаев).

3.2 Единый 5-шаговый алгоритм (используем во всех примерах)

Шаг 1. Цель: найти все равновесия.

Действие: решить $f(x, y) = 0, g(x, y) = 0$.

Шаг 2. Цель: получить линеаризацию.

Действие: в каждой найденной точке вычислить Якоби J.

Шаг 3. Цель: классифицировать тип точки по числам.

Действие (единственное ветвление строго по знакам):

- Если $\det J < 0 \to$ седло (неустойч.).
- Если $\det J > 0$:
  - посчитать $D = \mathrm{tr}^2 - 4 \det$.
  - если $D > 0$: $\mathrm{tr} < 0 \to$ устойч. узел, $\mathrm{tr} > 0 \to$ неустойч. узел;
  - если $D < 0$: $\mathrm{tr} < 0 \to$ устойч. фокус, $\mathrm{tr} > 0 \to$ неустойч. фокус.

Шаг 4. Цель: зафиксировать направления и устойчивость.

Действие: указать «куда текут» траектории (в/из точки) и, при седле, назвать две устойчивые/неустойчивые сепаратрисы (вдоль собственных направлений J).

Шаг 5. Цель: нарисовать локальный эскиз.

Действие: около каждой точки нанести тип (узел/фокус/седло), стрелки по устойчивости, грубо ориентируясь на нулевые изоклины $f = 0, g = 0$ для знаков $\dot{x}, \dot{y}$.

Замечание. Этот алгоритм является универсальным для анализа нелинейных 2D-систем и позволяет систематически подходить к решению задач на классификацию равновесных точек.