Подготовка: Дифференциальные уравнения

Полная версия с разборами тем и ссылками

Содержание

1 Разностные уравнения

1.1 Однородные линейные разностные уравнения

Пример. Решите однородное линейное разностное уравнение:

$$y_{t+3} - 3y_{t+2} + 6y_{t+1} - 4y_t = 0 \tag{1}$$

Определение. Линейное однородное разностное уравнение порядка k с постоянными коэффициентами:

$$a_t + c_1 a_{t-1} + c_2 a_{t-2} + \cdots + c_k a_{t-k} = 0, \quad c_k \neq 0 \tag{2}$$

Пара «уравнение + k начальных условий» задаёт единственное решение.

Идея решения: метод характеристических корней. Полагаем $a_t = r^t \Rightarrow$

$$r^t(1 + c_1 r^{-1} + c_2 r^{-2} + \cdots + c_k r^{-k}) = 0 \iff r^k + c_1 r^{k-1} + \cdots + c_k = 0 \tag{3}$$

т.е. характеристический многочлен $\chi(r) = r^k + c_1 r^{k-1} + \cdots + c_k$. Его корни целиком описывают форму общего решения.

Обозначения: $p_j(t), q_j(t)$ — полиномы по t степени $\leq j$.

Таблица 1: Выбор формы решения по типу корней характеристического многочлена

Условия на корни	**Вклад в решение**
Действительный корень r кратности $m \geq 1$	$p_{m-1}(t)\, r^t$
Комплексно-сопряжённая пара $\rho e^{\pm i\theta}$ кратности $s \geq 1$	$\rho^t\big(p_{s-1}(t)\cos(\theta t) + q_{s-1}(t)\sin(\theta t)\big)$

Итоговое общее решение — сумма форм всех корней:

$$a_t = \sum_j p_{m_j-1}(t)\, r_j^t \; + \sum_k \rho_k^t\big(p_{s_k-1}(t)\cos(\theta_k t) + q_{s_k-1}(t)\sin(\theta_k t)\big),$$

где r_j — действительные корни кратности m_j, $\rho_k e^{\pm i\theta_k}$ — комплексно-сопряжённые корни кратности s_k. Сумма кратностей всех корней равна порядку k.

Начальные условия. Подставляем $t = 0, 1, \ldots, k-1$ в общий вид, решаем линейную систему на α-коэффициенты.

Алгоритм.

1. **Нормализация.** Привести уравнение к виду $a_t + \sum_{j=1}^k c_j a_{t-j} = 0$, $c_k \neq 0$.
2. **Характеристический многочлен.** Записать $\chi(r) = r^k + c_1 r^{k-1} + \cdots + c_k$.
3. **Корни и кратности.** Найти корни r и их кратности m ($\sum m = k$).
4. **Общий вид решения (см. таблицу 1).** Для каждого корня/пары взять соответствующий вклад из таблицы и сложить их.
5. **Подгонка под начальные условия.** Подставить k заданных значений подряд и решить линейную систему для постоянных.

1.2 Минимальное ЛОУ: метод аннигиляторов

TL;DR: минимальное ЛОУ (минимальная однородная линейная рекуррент с постоянными коэффициентами), которое имеет данные последовательности в качестве решений, строится так:

1. к каждой заданной последовательности приписать аннигилятор (многочлен от E);
2. взять НОК этих аннигиляторов как многочлен $L(\lambda)$;
3. развернуть $L(E)\, y = 0$ в явную рекурренту. Степень L — минимальный порядок.

Методика (детерминированно)

Пусть даны частные решения $y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$.

Шаг 1. Атом → аннигилятор Для каждой последовательности выпиши минимальный аннигилирующий многочлен:

Таблица 2: Атом → аннигилятор

Атом (последовательность)	**Минимальный аннигилятор** $L(\lambda)$
r^t	$(\lambda - r)$
$t^k r^t$	$(\lambda - r)^{k+1}$
$\rho^t \cos(\omega t)$, $\rho^t \sin(\omega t)$	$Q_{\rho,\omega}(\lambda) = \lambda^2 - 2\rho\cos\omega\,\lambda + \rho^2$
$t^k\,\rho^t\,\cos/\sin(\omega t)$	$Q_{\rho,\omega}(\lambda)^{k+1}$
t^k	$(\lambda - 1)^{k+1}$
$(-1)^t$	$(\lambda + 1)$

Шаг 2. Собрать общий аннигилятор Возьмём НОК (наименьший общий кратный) всех многочленов из шага 1:

$$L(\lambda) = \operatorname{lcm}\big(L_1(\lambda), \dots, L_m(\lambda)\big).$$

При одинаковых базах/частотах выбирается максимальная кратность (а не сумма).

Шаг 3. Развернуть в рекуррент Если $L(\lambda) = \lambda^k + c_1\lambda^{k-1} + \cdots + c_k$, то искомое уравнение:

$$\boxed{y_{t+k} + c_1 y_{t+k-1} + \cdots + c_k y_t = 0}.$$

Минимальность. Любой многочлен $P(E)$, который зануляет все данные последовательности, обязан делиться на $L(E)$. Поэтому $\deg L$ — минимально возможный порядок.

Простой пример

Дано:

$$y_t^{(1)} = 3^t, \qquad y_t^{(2)} = (-2)^t.$$

Шаг 1. Аннигиляторы: $(\lambda - 3)$ и $(\lambda + 2)$.

Шаг 2. НОК:

$$(\lambda - 3)(\lambda + 2) = \lambda^2 - \lambda - 6.$$

Шаг 3. Рекуррентное соотношение (развёртка):

$$\boxed{y_{t+2} - y_{t+1} - 6y_t = 0}.$$

Проверка: последовательности 3^t и $(-2)^t$ действительно являются решениями; порядок 2 минимален.

Пример посложнее

Дано:

$$y_t^{(1)} = 2^t, \qquad y_t^{(2)} = t2^t, \qquad y_t^{(3)} = (-1)^t, \qquad y_t^{(4)} = 3^t \cos\frac{\pi t}{3}.$$

Шаг 1. Аннигиляторы

- Для 2^t: $(\lambda - 2)$.
- Для $t2^t$: $(\lambda - 2)^2$ (кратность на 1 больше из-за множителя t).
- Для $(-1)^t$: $(\lambda + 1)$.
- Для $3^t \cos\frac{\pi t}{3}$:

$$Q_{3,\pi/3}(\lambda) = \lambda^2 - 2 \cdot 3\cos\frac{\pi}{3}\,\lambda + 3^2 = \lambda^2 - 3\lambda + 9.$$

Шаг 2. НОК

Учитываем максимальную кратность по базе 2, значит

$$L(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 9).$$

Шаг 3. Развёртка

Сначала

$$(\lambda - 2)^2(\lambda + 1) = (\lambda^2 - 4\lambda + 4)(\lambda + 1) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4.$$

Умножаем на $\lambda^2 - 3\lambda + 9$:

$$L(\lambda) = (\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4)(\lambda^2 - 3\lambda + 9) = \lambda^5 - 6\lambda^4 + 18\lambda^3 - 23\lambda^2 - 12\lambda + 36.$$

Соответствующая рекуррентная формула (коэффициенты берём по степеням λ) будет

$$\boxed{y_{t+5} - 6y_{t+4} + 18y_{t+3} - 23y_{t+2} - 12y_{t+1} + 36y_t = 0\,.}$$

Комментарий. Это и есть минимальное ЛОУ, annihilator которого равен $L(\lambda)$.

1.3 Неоднородные линейные разностные уравнения

Пример. Решите неоднородное линейное разностное уравнение:

$$y_{t+3} - 3y_{t+2} + 6y_{t+1} - 4y_t = 2^t + t \tag{4}$$

Определение. Линейное неоднородное разностное уравнение порядка k с постоянными коэффициентами:

$$a_t + c_1 a_{t-1} + c_2 a_{t-2} + \cdots + c_k a_{t-k} = f(t), \quad c_k \neq 0 \tag{5}$$

где $f(t)$ — заданная функция (неоднородность).

Структура общего решения: $a_t = a_t^{(h)} + a_t^{(p)}$, где:

- $a_t^{(h)}$ — общее решение однородного уравнения (см. раздел 1.1)
- $a_t^{(p)}$ — частное решение неоднородного уравнения

Метод неопределённых коэффициентов для $a_t^{(p)}$.

Пусть характеристический многочлен однородного уравнения:

$$\chi(r) = r^k + c_1 r^{k-1} + \cdots + c_k \quad \text{и} \quad \chi(r) = \prod_i (r - r_i)^{m_i} \prod_\ell Q_{\rho_\ell,\theta_\ell}(r)^{s_\ell},$$

где

$$Q_{\rho,\theta}(r) = (r - \rho e^{i\theta})(r - \rho e^{-i\theta}) = r^2 - 2\rho\cos\theta\, r + \rho^2.$$

Правило «множитель → вклад» (однородная часть):

- Линейный $(r - r_0)^m \;\Rightarrow\; \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j t^j r_0^t$.
- Квадратный $Q_{\rho,\theta}(r)^s \;\Rightarrow\; \rho^t \Big(\sum_{j=0}^{s-1} t^j \big(a_j \cos(\theta t) + b_j \sin(\theta t)\big)\Big)$.

Итог: $a_t^{(h)}$ — сумма всех таких вкладов по всем множителям χ.

Выбор формы частного решения $a_t^{(p)}$:

Обозначения: $P_n(t)$ — полином степени n; $Q_n(t), R_n(t)$ — полиномы; $\lambda \in \mathbb{C}$; s — кратность резонанса (кратность соответствующего множителя в χ).

Таблица 3: Выбор формы частного решения и проверка резонанса

Неоднородность $f(t)$	**Проверка резонанса**	**Базовая форма $a_t^{(p)}$**
$P_n(t)\,\lambda^t$	$\chi(\lambda) = 0$?	$Q_n(t)\,\lambda^t$
$\rho^t \cos(\theta t),\ \rho^t \sin(\theta t)$	$Q_{\rho,\theta}(r) \mid \chi(r)$?	$\rho^t\big(A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t)\big)$
$P_n(t)\,\rho^t \cos(\theta t)$ (или sin)	$Q_{\rho,\theta}(r) \mid \chi(r)$?	$\rho^t\big(Q_n(t)\cos(\theta t) + R_n(t)\sin(\theta t)\big)$
Чистый полином $P_n(t)$	$\chi(1) = 0$?	$Q_n(t)$

Правило резонанса: если проверка даёт резонанс кратности s, домножьте базовую форму на t^s.

Алгоритм решения неоднородного уравнения.

1. **Однородная часть.** Найти $a_t^{(h)}$ методом характеристических корней (см. раздел 1.1).
2. **Форма частного решения.** По таблице 3 выбрать форму $a_t^{(p)}$ с учётом правила резонанса.
3. **Подстановка.** Подставить $a_t^{(p)}$ в исходное неоднородное уравнение и найти неопределённые коэффициенты.
4. **Общее решение.** $a_t = a_t^{(h)} + a_t^{(p)}$.
5. **Начальные условия.** Подставить k заданных значений и найти константы в $a_t^{(h)}$.

Пример. Решите разностное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами:

$$y_{t+3} - 3y_{t+2} + 6y_{t+1} - 4y_t = 2^t + t$$

Найти общее решение y_t.

Решение.

1) Однородная часть. Характеристический многочлен:

$$\chi(r) = r^3 - 3r^2 + 6r - 4 = (r-1)(r^2 - 2r + 4),$$

корни: $r_1 = 1$, $r_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{3} = 2e^{\pm i\pi/3}$.
Отсюда

$$y_t^{(h)} = C_1 + 2^t\Big(C_2 \cos \tfrac{\pi t}{3} + C_3 \sin \tfrac{\pi t}{3}\Big).$$

2) Частное решение $y_t^{(p)}$. Правая часть $f(t) = 2^t + t$ — сумма двух типов.
Экспонента 2^t: $\chi(2) = 8 - 12 + 12 - 4 = 4 \neq 0 \Rightarrow$ резонанса нет, берём $y_{(1)}^{(p)} = \alpha\, 2^t$.
Полином t: $\chi(1) = 0$ (кратность 1) $\Rightarrow$ резонанс порядка $s = 1$. Базовая форма для $P_1(t)$ — $At + B$, домножаем на t:

$$y_{(2)}^{(p)} = t(At + B) = At^2 + Bt.$$

Итого

$$y_t^{(p)} = \alpha\, 2^t + At^2 + Bt.$$

3) Подстановка и определение коэффициентов. Обозначим линейный оператор:

$$\mathcal{L}[y_t] = y_{t+3} - 3y_{t+2} + 6y_{t+1} - 4y_t.$$

Для экспоненты: $\mathcal{L}[2^t] = \chi(2)\, 2^t = 4 \cdot 2^t \Rightarrow 4\alpha\, 2^t = 2^t$, значит $\alpha = \frac{1}{4}$.
Для полинома $At^2 + Bt$ прямой подсчёт даёт:

$$\mathcal{L}[At^2 + Bt] = 6A\, t + (3A + 3B).$$

Требуем $\mathcal{L}[At^2 + Bt] = t$, откуда

$$6A = 1 \Rightarrow A = \tfrac{1}{6}, \qquad 3A + 3B = 0 \Rightarrow B = -\tfrac{1}{6}.$$

Следовательно,

$$y_t^{(p)} = \frac{1}{4}\, 2^t + \frac{t^2 - t}{6}.$$

4) Общее решение.

$$\boxed{y_t = C_1 + 2^t\Big(C_2 \cos \tfrac{\pi t}{3} + C_3 \sin \tfrac{\pi t}{3}\Big) + \frac{1}{4}\, 2^t + \frac{t^2 - t}{6}}$$

(константы C_1, C_2, C_3 находятся по начальным условиям).

1.4 Системы разностных уравнений

Общий пайплайн (что всегда делаем)

1. Сформулировать цель: найти $\Phi_t = A^t$ и $\mathbf{x}_t = A^t \mathbf{x}_0$.
2. Быстрый спектральный чек: $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, $\operatorname{tr} A$, $\det A$.
3. Выбор ветки (см. ниже): диагонализация / Жордан / комплексная пара / Кэли–Гамильтон.
4. Построить A^t по формуле выбранного метода и умножить на $\mathbf{x}_0$.

Дерево выбора метода (как понять ветку)

- **Разные действительные корни** и есть базис из собственных векторов $\Rightarrow$ **Диагонализация**.
- **Повторный корень**, собственных векторов меньше кратности $\Rightarrow$ **Жордан**: $A = \lambda I + N$, $N^m = 0$.
- **Комплексная пара** (для 2×2: $(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A < 0$) $\Rightarrow$ **реальный блок** $\rho R(\theta)$.
- **Лень раскладывать** (особенно 2×2) $\Rightarrow$ **Кэли–Гамильтон**.

---

1. Диагонализация

Алгоритм применений.

1. Найти пары (λ_i, v_i), собрать $S = [v_1 \cdots v_n]$. Убедиться, что S обратима.
2. $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_i)$, затем $A = S \Lambda S^{-1}$.
3. Возвести: $\boxed{A^t = S\,\Lambda^t\,S^{-1}}$, $\Lambda^t = \operatorname{diag}(\lambda_i^t)$.
4. Ответ: $\mathbf{x}_t = A^t \mathbf{x}_0$.

Мини-пример. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A^t = \begin{pmatrix} 4^t & \dfrac{4^t - 2^t}{2} \\ 0 & 2^t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_t = A^t \mathbf{x}_0.$$

---

2. Жордан (повторный корень, не хватает базиса)

Ключевая идея. Если единственное собственное λ и $N := A - \lambda I$ нильпотентна ($N^m = 0$), то $A = \lambda(I + \lambda^{-1} N)$ и применяется биномиальная формула.

Алгоритм применений.

1. Найти λ (часто: $\lambda = \operatorname{tr} A / n$ при единственном корне), положить $N := A - \lambda I$.
2. Найти минимальное m такое, что $N^m = 0$ (обычно $m = 2$ или 3).
3. $\boxed{A^t = \lambda^t \sum_{k=0}^{m-1} \binom{t}{k} \left(\lambda^{-1} N\right)^k}$.
4. Ответ: $\mathbf{x}_t = A^t \mathbf{x}_0$.

Мини-пример. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = 0$.

$$A^t = 2^t \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{t}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_t = A^t \mathbf{x}_0.$$

---

3. Комплексная пара (реальный блок)

Ключевая идея. Для 2×2 матрицы с комплексными корнями $\lambda = \rho e^{\pm i\theta}$ приводим к блоку поворота с масштабированием.

Алгоритм применений.

1. Найти $\rho = \sqrt{\det A}$, $\cos\theta = \dfrac{\operatorname{tr} A}{2\rho}$.
2. $\boxed{A^t = \rho^t \begin{pmatrix} \cos(t\theta) & -\sin(t\theta) \\ \sin(t\theta) & \cos(t\theta) \end{pmatrix}}$.
3. Ответ: $\mathbf{x}_t = A^t \mathbf{x}_0$.

Мини-пример. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\rho = \sqrt{2}$, $\theta = \pi/4$.

$$A^t = (\sqrt{2})^t \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi t}{4} & -\sin\dfrac{\pi t}{4} \\ \sin\dfrac{\pi t}{4} & \cos\dfrac{\pi t}{4} \end{pmatrix}.$$

---

4. Кэли–Гамильтон (особенно 2×2)

Ключевая идея. Используем тождество $\chi_A(A) = 0$ для построения рекуррентного соотношения.

Алгоритм применений.

1. Найти $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A$.
2. Рекуррентное соотношение: $A^{t+2} = (\operatorname{tr} A)A^{t+1} - (\det A)A^t$.
3. Представить $A^t = \alpha_t A + \beta_t I$ и решить систему для α_t, β_t.
4. Ответ: $\mathbf{x}_t = A^t \mathbf{x}_0$.

Формулы для 2×2:

$$\alpha_t = \frac{\lambda_1^t - \lambda_2^t}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \beta_t = \frac{\lambda_1 \lambda_2^t - \lambda_2 \lambda_1^t}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$: $\alpha_t = t\lambda^{t-1}$, $\beta_t = (1-t)\lambda^t$.

Мини-пример. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$:

$$A^t = 2^t \left(I + \frac{t}{2}(A - 2I) \right) = 2^t \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{t}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Быстрые проверки

- $A^0 = I$, $A^1 = A$.
- Если $A = \lambda I + N$: проверь $N^m = 0$.
- Комплексная пара: $\det A = \rho^2$, $\operatorname{tr} A = 2\rho\cos\theta$.
- Жордан: не забудь биномиальные коэффициенты $\binom{t}{k}$.