Тренировочные задачи по темам М1–М13

(по 3 задачи на тему; уровень: экзамен и выше)

М1. Разностные ЛОС с постоянными коэффициентами (неоднородность)

1. Найдите общее решение

$$y_{t+4} - 2y_{t+3} - y_{t+2} + 2y_{t+1} = 3 \cdot 2^t + (t^2 - 1)(-1)^t + 5.$$

Укажите, какие слагаемые правой части требуют сдвига степени (резонанс), и какого именно.

2. Решите с начальными условиями $y_0 = 1,\ y_1 = 0,\ y_2 = 2,\ y_3 = 3$:

$$y_{t+5} + y_{t+4} - 6y_{t+3} - 6y_{t+2} + 8y_{t+1} + 8y_t = 2^t \cos\frac{\pi t}{2} + t\, 3^t.$$

3. Найдите общее решение

$$y_{t+3} - 3y_{t+2} + 3y_{t+1} - y_t = (t^2 + 4) \cdot 1^t + t\,(-2)^t.$$

(Корень $r = 1$ имеет кратность 3; аккуратно обработайте резонанс с полиномом.)

М2. Синтез разностного уравнения по заданным решениям

1. Постройте линейное однородное разностное уравнение минимального порядка, частными решениями которого являются

$$y_t^{(1)} = 2^t, \qquad y_t^{(2)} = t\, 2^t, \qquad y_t^{(3)} = (-2)^t \sin\frac{\pi t}{3}.$$

2. Найдите минимальное ЛОС, для которого все функции

$$3^t, \quad t\, 3^t, \quad 2^t \cos\frac{\pi t}{4}, \quad 2^t \sin\frac{\pi t}{4}$$

являются решениями. Укажите его порядок и характеристический многочлен.

3. Постройте уравнение минимального порядка, имеющее решения

$$(-1)^t, \quad t(-1)^t, \quad t^2(-1)^t, \quad 5^t.$$

Поясните, какая кратность у соответствующих корней характеристического многочлена.

M3. Нелинейные 2D-системы: равновесия, линеаризация, фазовый портрет (гиперболика)

1. Исследуйте систему

$$\dot{x} = y - x(1 - x - y), \qquad \dot{y} = -x + y(2 - x).$$

   Найдите все равновесия, классифицируйте их по $\operatorname{tr} J$ и $\det J$, набросайте локальные фазовые портреты.

2. Для параметризованной системы

$$\dot{x} = a\,y + x(x^2 + y^2 - 1), \qquad \dot{y} = -a\,x + y(x^2 + y^2 - 1),$$

   классифицируйте начало координат в зависимости от $a \in \mathbb{R}$ и опишите типы траекторий в окрестности.

3. Исследуйте

$$\dot{x} = (y - 1)(x + 2) - xy, \qquad \dot{y} = (x + 1)(y - 2) - xy.$$

   Найдите равновесия, типы и локальные эскизы.

M4. Линейные ОДУ второго порядка: снятие y', вронскиан, нули

1. На $x > 0$ рассмотрите

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \Big(\frac{5}{x^2} + 1\Big)y = 0.$$

   (а) Приведите к $z'' + Q(x)z = 0$. (б) Выведите формулу для $W(x)$ через $W(1)$. (в) Докажите, что всякое нетривиальное решение имеет не более одного нуля на $(0, \infty)$.

2. Рассмотрите

$$y'' + 4y' + \big(3 + e^{-x}\big)y = 0.$$

   (а) Снимите y'. (б) Найдите $W(x)$ через $W(0)$. (в) Покажите, что нетривиальное решение имеет не более одного нуля на $\mathbb{R}$.

3. Эйлера–Коши:

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0, \qquad x > 0.$$

   (а) Снимите y' общей формулой. (б) Выразите $W(x)$ через $W(x_0)$. (в) Укажите условия на (α, β), гарантирующие «не более одного нуля» на $(0, \infty)$.

M5. ПЧП первого порядка: общее решение $u = F(I_1, I_2)$

1. Найдите общее решение
$$(x+y)\, u_x + (2y-x)\, u_y + 0 \cdot u_z = 0.$$
2. Найдите общее решение
$$x\, u_x + y\, u_y + (x+y)\, z\, u_z = 0.$$
3. Найдите общее решение
$$(2xy)\, u_x + (y^2 - x^2)\, u_y + (x-y)\, u_z = 0.$$
(Подсказка: начните с подстановки $v = y/x$ для пары (x, y).)

M6. Первые интегралы в 3D-системах (поиск двух независимых)

1. Система
$$\dot{x} = yz, \qquad \dot{y} = zx, \qquad \dot{z} = xy.$$
Найдите два независимых первых интеграла и опишите траектории в непустой области $x^2 \neq y^2 \neq z^2$.
2. Система
$$\dot{x} = y^2 - z^2, \qquad \dot{y} = xz, \qquad \dot{z} = xy.$$
Найдите два независимых первых интеграла и опишите интегральные поверхности.
3. Система
$$\dot{x} = y + z, \qquad \dot{y} = z + x, \qquad \dot{z} = x + y.$$
Найдите два независимых первых интеграла (подсказка: диагонализуйте линейную часть и используйте комбинации координат).

M7. Нелинейные 2D: равновесия, линеаризация, портрет (шире набора M3)

1. Исследуйте
$$\dot{x} = x(1-x) - y(1+y), \qquad \dot{y} = 2x - 3y + xy.$$
Полный набор равновесий, типы, локальные эскизы.
2. С параметром b:
$$\dot{x} = y - x(x^2 + b), \qquad \dot{y} = -x - y(y^2 + b).$$
Определите тип начала координат и режимы при $b < 0$, $b = 0$, $b > 0$.
3. Исследуйте
$$\dot{x} = (x-y)(1-xy), \qquad \dot{y} = (x+y)(1+x^2).$$
Определите все равновесия, их характер, локальные эскизы.

M8. Переход в полярные: вращающиеся/радиальные системы, интегрирование

1. Для
$$\dot{x} = a\,y + x(x^2 + y^2 - 1), \qquad \dot{y} = -a\,x + y(x^2 + y^2 - 1),$$
перейдите в полярные и исследуйте уравнения на $\dot{r}, \dot{\theta}$; опишите типы траекторий при $a \neq 0$.

2. Для
$$\dot{x} = x(1 - r^2) + \omega y, \qquad \dot{y} = y(1 - r^2) - \omega x, \quad r^2 = x^2 + y^2,$$
в полярных найдите стационарные радиусы и опишите динамику по r и θ.

3. Для
$$\dot{x} = (r^2 - 2)x + \Omega y, \qquad \dot{y} = (r^2 - 2)y - \Omega x, \quad r^2 = x^2 + y^2,$$
решите радиальное уравнение и классифицируйте траектории в зависимости от стартового $r(0)$.

M9. Линейные ОДУ-2: фундаментальная система, вронскиан, корректность

1. Пусть y_1, y_2 — решения
$$y'' + \Big(\frac{2}{x} + e^{-x}\Big)y' + \Big(1 + \frac{1}{x^2}\Big)y = 0, \quad x > 0,$$
где $y_1(1) = 0,\ y_1'(1) = 1,\ y_2(1) = 1,\ y_2'(1) = 0$. Составляют ли они фундаментальную систему на $(0, \infty)$? Найдите $W(x)$.

2. Рассмотрите
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad p, q \in C[0, 1].$$
Пусть $y_1(0) = 0,\ y_1'(0) = 1$ и $y_2(0) = 1,\ y_2'(0) = \alpha$. Для каких α пара (y_1, y_2) фундаментальна на $[0, 1]$? Выразите $W(1)$ через α и p.

3. Для
$$y'' + 4y' + (3 + \sin x)\,y = 0$$
покажите, что любые два решения, линейно независимые в одной точке, остаются независимыми на всей $\mathbb{R}$. Найдите явную формулу для $W(x)$.

M10. Приведение к $z'' + q(x)z = 0$ заменою $y = u\phi(x)$; оценки нулей

1. Для
$$y'' + \frac{2}{x}y' + \Big(\frac{1}{3}x^2 - \frac{7}{x^2}\Big)y = 0, \quad x > 0,$$

подберите $\phi(x)$, приведите к $z'' + Q(x)z = 0$ и докажите, что нетривиальное решение имеет не более одного нуля на $(0, \infty)$.

2. Для
$$y'' + 2\tanh x\, y' + \bigl(1 - \operatorname{sech}^2 x\bigr)y = 0,$$
снимите y', вычислите $Q(x)$ и сделайте вывод о числе нулей.

3. На $x > 0$:
$$x^2 y'' + (\alpha + 1)xy' + \Bigl(\beta - \frac{\gamma}{x^2}\Bigr)y = 0.$$
Приведите к нормальной форме и укажите условия на параметры для «≤ 1 нуля».

M11. Периодические коэффициенты, монодромия (Флоке)

1. Пусть $q \in C(\mathbb{R})$, $q(x+T) = q(x)$, и y — нетривиальное решение $y'' + q(x)y = 0$ с $y(0) = y(T) = 0$. Докажите существование $C \neq 0$ такое, что $y(x+T) = C\,y(x)$; выразите C через $y'(T)$ и $y'(0)$.

2. Для
$$y'' + \bigl(2 + \cos x\bigr)y = 0$$
рассмотрите фундаментальную матрицу за период 2π и решите задачу о виде множителей Флоке (без их численного значения).

3. Пусть $q \in C(\mathbb{R})$, $q(x+\pi) = q(x)$ и y — решение $y'' + q(x)y = 0$ с $y(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$. Покажите, что $y(x+\pi) = -y(x)$ либо $y(x+\pi) = y(x)$; обсудите, когда возможно каждое из двух.

M12. Механические системы и устойчивость по Ляпунову через потенциал

1. Пусть частица движется по $\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V(\mathbf{x})$, $V \in C^2$, причём $V(\mathbf{0}) = 0$, $V(\mathbf{x}) > 0$ при $\mathbf{x} \neq 0$, а $\nabla^2 V(\mathbf{0})$ положительно определена. Докажите устойчивость равновесия в $\mathbf{0}$ и обсудите, почему асимптотическая устойчивость вообще невозможна без диссипации.

2. Рассмотрите $V(x,y) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2 - 1)^2 + \varepsilon xy$ при малом $|\varepsilon|$. Найдите все равновесия и классифицируйте их по характеру (минимум/седло) для ε в окрестности нуля.

3. Для системы с малой линейной вязкостью
$$\ddot{\mathbf{x}} + \gamma\dot{\mathbf{x}} = -\nabla V(\mathbf{x}), \qquad \gamma > 0,$$
покажите, что при $V(\mathbf{x}) \ge c\|\mathbf{x}\|^2$ вблизи нуля равновесие асимптотически устойчиво. Укажите функцию Ляпунова.

M13. Системы разностных уравнений: вариация постоянных, задача Коши

1. Решите задачу Коши

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{t+1} = A\,\mathbf{x}_t + \mathbf{b}\,2^t, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

   Найдите A^t и примените дискретную вариацию постоянных.

2. Пусть

$$\mathbf{x}_{t+1} = A\,\mathbf{x}_t, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (а) Постройте фундаментальную матрицу $\Phi_t = A^t$. (б) Запишите общее решение. (в) Обсудите рост норм решения и минимальный полином A.

3. Неоднородная система

$$\mathbf{x}_{t+1} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}_t + \begin{pmatrix} (-1)^t \\ t\,2^t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}.$$

   (а) Найдите диагонализацию/Жордан для матрицы. (б) Выпишите явные формулы для компонент решения.