

Дифференциальные Уравнения

Краткий справочник по методам решения

1 Основные определения

1.1 Типы уравнений

- Обыкновенные ДУ:** $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$
- Порядок:** наивысшая производная
- Степень:** степень старшей производной
- Линейные:** $a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_0(x)y = f(x)$

1.2 Начальные условия

$$\begin{aligned}y(x_0) &= y_0 & (1) \\y'(x_0) &= y_1 & (2) \\\vdots & & (3) \\y^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1} & (4)\end{aligned}$$

2 Уравнения первого порядка

2.1 Разделяющиеся переменные

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f(x)g(y) & (5) \\\int \frac{dy}{g(y)} &= \int f(x)dx + C & (6)\end{aligned}$$

2.2 Однородные уравнения

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f\left(\frac{y}{x}\right) & (7) \\ \text{Замена: } z &= \frac{y}{x}, \quad y = zx & (8)\end{aligned}$$

2.3 Линейные уравнения

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (9)$$

$$\text{Решение: } y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right] \quad (10)$$

2.4 Уравнение Бернулли

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1) \quad (11)$$

$$\text{Замена: } z = y^{1-n} \quad (12)$$

3 Уравнения второго порядка

3.1 Понижение порядка

- $F(x, y', y'') = 0$: замена $z = y'$
- $F(y, y', y'') = 0$: замена $z = y'$, $y'' = z \frac{dz}{dy}$

3.2 Линейные с постоянными коэффициентами

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (13)$$

$$\text{Характеристическое: } ar^2 + br + c = 0 \quad (14)$$

3.2.1 Случай корней

- Разные вещественные:** $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
- Кратные:** $y = (C_1 + C_2 x) e^{r x}$
- Комплексные:** $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

4 Системы уравнений

4.1 Система линейных ДУ

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \quad (15)$$

$$\frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \quad (16)$$

4.2 Метод решения

1. Найти собственные значения матрицы
2. Найти собственные векторы
3. Записать общее решение

5 Численные методы

5.1 Метод Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \quad (17)$$

$$x_{n+1} = x_n + h \quad (18)$$

5.2 Метод Рунге-Кутта 4-го порядка

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n) \quad (19)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \quad (20)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \quad (21)$$

$$k_4 = h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3) \quad (22)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (23)$$

6 Специальные функции

6.1 Функции Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (24)$$

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} \quad (25)$$

6.2 Функции Лежандра

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad (26)$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (27)$$

7 Практические примеры

7.1 Пример 1: Разделяющиеся переменные

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad (28)$$

$$ydy = xdx \quad (29)$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C \quad (30)$$

$$y^2 = x^2 + C_1 \quad (31)$$

7.2 Пример 2: Линейное уравнение

$$y' + 2y = e^{-x} \quad (32)$$

$$\text{Интегрирующий множитель: } \mu = e^{2x} \quad (33)$$

$$y = e^{-2x} \left[\int e^{2x} \cdot e^{-x} dx + C \right] \quad (34)$$

$$y = e^{-2x} [e^x + C] = e^{-x} + Ce^{-2x} \quad (35)$$

8 Полезные формулы

8.1 Производные

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax} \quad (36)$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \quad (37)$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad (38)$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \quad (39)$$

8.2 Интегралы

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

(40)

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

(41)

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

(42)

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

(43)