

Подготовка: Дифференциальные уравнения

Полная версия с разборами тем и ссылками

Содержание

1	Однородные линейные разностные уравнения	2
2	Неоднородные линейные разностные уравнения	2

1 Однородные линейные разностные уравнения

Пример. Решите однородное линейное разностное уравнение:

$$y_{t+3} - 3y_{t+2} + 6y_{t+1} - 4y_t = 0 \quad (1)$$

Определение. Линейное однородное разностное уравнение порядка k с постоянными коэффициентами:

$$a_t + c_1 a_{t-1} + c_2 a_{t-2} + \dots + c_k a_{t-k} = 0, \quad c_k \neq 0 \quad (2)$$

Пара «уравнение + k начальных условий» задаёт единственное решение.

Идея решения – метод характеристических корней. Полагаем $a_t = r^t \Rightarrow$

$$r^t(1 + c_1 r^{-1} + c_2 r^{-2} + \dots + c_k r^{-k}) = 0 \iff r^k + c_1 r^{k-1} + \dots + c_k = 0 \quad (3)$$

т.е. характеристический многочлен $\chi(r) = r^k + c_1 r^{k-1} + \dots + c_k$. Его корни целиком описывают форму общего решения.

Обозначения: $P_j(t), Q_j(t)$ — полиномы по t степени $\leq j$.

Таблица 1: Выбор формы решения по типу корней характеристического многочлена

Условия на корни	Вклад в решение
Действительный корень r кратности $m \geq 1$	$P_{m-1}(t) r^t$
Комплексно-сопряжённая пара $\rho e^{\pm i\theta}$ кратности $s \geq 1$	$\rho^t (P_{s-1}(t) \cos(\theta t) + Q_{s-1}(t) \sin(\theta t))$

Итоговое общее решение – сумма форм всех корней:

$$a_t = \sum_j P_{m_j-1}(t) r_j^t + \sum_k \rho_k^t (P_{s_k-1}(t) \cos(\theta_k t) + Q_{s_k-1}(t) \sin(\theta_k t)),$$

где r_j — действительные корни кратности M_j , $\rho_k e^{\pm i\theta_k}$ — комплексно-сопряжённые корни кратности N_k . Сумма кратностей всех корней равна порядку k .

Подгонка под начальные условия. Подставляем $t = 0, 1, \dots, k-1$ в общий вид, решаем линейную систему на α -коэффициенты.

Алгоритм.

1. **Нормализация.** Привести уравнение к виду $a_t + \sum_{j=1}^k c_j a_{t-j} = 0, c_k \neq 0$.
2. **Характеристический многочлен.** Записать $\chi(r) = r^k + c_1 r^{k-1} + \dots + c_k$.
3. **Корни и кратности.** Найти корни r и их кратности m ($\sum m = k$).
4. **Общий вид решения (см. табл. 1).** Для каждого корня/пары взять соответствующий вклад из таблицы и сложить их.
5. **Подгонка под начальные условия.** Подставить k заданных значений подряд и решить линейную систему для постоянных.

2 Неоднородные линейные разностные уравнения

Пример. Решите неоднородное линейное разностное уравнение:

$$y_{t+3} - 3y_{t+2} + 6y_{t+1} - 4y_t = 2^t + t \quad (4)$$

Определение. Линейное неоднородное разностное уравнение порядка k с постоянными коэффициентами:

$$a_t + c_1 a_{t-1} + c_2 a_{t-2} + \dots + c_k a_{t-k} = f(t), \quad c_k \neq 0 \quad (5)$$

где $f(t)$ — заданная функция (неоднородность).

Структура общего решения: $a_t = a_t^{(h)} + a_t^{(p)}$, где:

- $a_t^{(h)}$ — общее решение однородного уравнения (см. раздел 1)
- $a_t^{(p)}$ — частное решение неоднородного уравнения

Метод неопределённых коэффициентов для $a_t^{(p)}$.

Пусть характеристический многочлен однородного уравнения:

$$\chi(r) = r^k + c_1 r^{k-1} + \dots + c_k \quad \text{и} \quad \chi(r) = \prod_i (r - r_i)^{m_i} \prod_\ell Q_{\rho_\ell, \theta_\ell}(r)^{s_\ell},$$

где

$$Q_{\rho, \theta}(r) = (r - \rho e^{i\theta})(r - \rho e^{-i\theta}) = r^2 - 2\rho \cos \theta r + \rho^2.$$

Правило «множитель \rightarrow вклад» (однородная часть):

- Линейный $(r - r_0)^m \Rightarrow \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j t^j r_0^t$.
- Квадратный $Q_{\rho, \theta}(r)^s \Rightarrow \rho^t \left(\sum_{j=0}^{s-1} t^j (A_j \cos(\theta t) + B_j \sin(\theta t)) \right)$.

Итог: $a_t^{(h)}$ — сумма всех таких вкладов по всем множителям χ .

Выбор формы частного решения $a_t^{(p)}$:

Обозначения: $P_n(t)$ — полином степени n ; $Q_n(t), R_n(t)$ — полиномы; $\lambda \in \mathbb{C}$; s — кратность резонанса (кратность соответствующего множителя в χ).

Таблица 2: Выбор формы частного решения и проверка резонанса

Неоднородность $f(t)$	Проверка резонанса	Базовая форма $a_t^{(p)}$
$P_n(t) \lambda^t$	$\chi(\lambda) = 0?$	$Q_n(t) \lambda^t$
$\rho^t \cos(\theta t), \rho^t \sin(\theta t)$	$Q_{\rho, \theta}(r) \mid \chi(r)?$	$\rho^t (A \cos(\theta t) + B \sin(\theta t))$
$P_n(t) \rho^t \cos(\theta t)$ (или \sin)	$Q_{\rho, \theta}(r) \mid \chi(r)?$	$\rho^t (Q_n(t) \cos(\theta t) + R_n(t) \sin(\theta t))$
Чистый полином $P_n(t)$	$\chi(1) = 0?$	$Q_n(t)$

Правило резонанса: если проверка даёт резонанс кратности s , домножьте базовую форму на t^s .

Алгоритм решения неоднородного уравнения.

1. **Однородная часть.** Найти $a_t^{(h)}$ методом характеристических корней (см. раздел 1).
2. **Форма частного решения.** По таблице 2 выбрать форму $a_t^{(p)}$ с учётом правила резонанса.
3. **Подстановка.** Подставить $a_t^{(p)}$ в исходное неоднородное уравнение и найти неопределённые коэффициенты.
4. **Общее решение.** $a_t = a_t^{(h)} + a_t^{(p)}$.
5. **Начальные условия.** Подставить k заданных значений и найти константы в $a_t^{(h)}$.