Подготовка: Дифференциальные уравнения

Полная версия с разборами тем и ссылками

Содержание

1 Однородные линейные разностные уравнения

Пример. Решите однородное линейное разностное уравнение:

$$y_{t+3} - 3y_{t+2} + 6y_{t+1} - 4y_t = 0 \tag{1}$$

Определение. Линейное однородное разностное уравнение порядка k с постоянными коэффициентами:

$$a_t + c_1 a_{t-1} + c_2 a_{t-2} + \dots + c_k a_{t-k} = 0, \quad c_k \neq 0 \tag{2}$$

Пара «уравнение + k начальных условий» задаёт единственное решение.

Идея решения: метод характеристических корней. Полагаем $a_t = r^t \Rightarrow$

$$r^t(1 + c_1 r^{-1} + c_2 r^{-2} + \dots + c_k r^{-k}) = 0 \iff r^k + c_1 r^{k-1} + \dots + c_k = 0 \tag{3}$$

т.е. характеристический многочлен $\chi(r) = r^k + c_1 r^{k-1} + \dots + c_k$. Его корни целиком описывают форму общего решения.

Обозначения: $p_j(t), q_j(t)$ — полиномы по t степени $\leq j$.

Таблица 1: Выбор формы решения по типу корней характеристического многочлена

Условия на корни	**Вклад в решение**
Действительный корень r кратности $m \geq 1$	$p_{m-1}(t)\, r^t$
Комплексно-сопряжённая пара $\rho e^{\pm i\theta}$ кратности $s \geq 1$	$\rho^t \big(p_{s-1}(t)\cos(\theta t) + q_{s-1}(t)\sin(\theta t)\big)$

Итоговое общее решение — сумма форм всех корней:

$$a_t = \sum_j p_{m_j-1}(t)\, r_j^t \; + \sum_k \rho_k^t \big(p_{s_k-1}(t)\cos(\theta_k t) + q_{s_k-1}(t)\sin(\theta_k t)\big),$$

где r_j — действительные корни кратности m_j, $\rho_k e^{\pm i\theta_k}$ — комплексно-сопряжённые корни кратности s_k. Сумма кратностей всех корней равна порядку k.

Начальные условия. Подставляем $t = 0, 1, \dots, k-1$ в общий вид, решаем линейную систему на α-коэффициенты.

Алгоритм.

1. **Нормализация.** Привести уравнение к виду $a_t + \sum_{j=1}^{k} c_j a_{t-j} = 0$, $c_k \neq 0$.
2. **Характеристический многочлен.** Записать $\chi(r) = r^k + c_1 r^{k-1} + \dots + c_k$.
3. **Корни и кратности.** Найти корни r и их кратности m ($\sum m = k$).
4. **Общий вид решения (см. таблицу 1).** Для каждого корня/пары взять соответствующий вклад из таблицы и сложить их.
5. **Подгонка под начальные условия.** Подставить k заданных значений подряд и решить линейную систему для постоянных.

2 Неоднородные линейные разностные уравнения

Пример. Решите неоднородное линейное разностное уравнение:

$$y_{t+3} - 3y_{t+2} + 6y_{t+1} - 4y_t = 2^t + t \tag{4}$$

Определение. Линейное неоднородное разностное уравнение порядка k с постоянными коэффициентами:

$$a_t + c_1 a_{t-1} + c_2 a_{t-2} + \dots + c_k a_{t-k} = f(t), \quad c_k \neq 0 \tag{5}$$

где $f(t)$ — заданная функция (неоднородность).

Структура общего решения: $a_t = a_t^{(h)} + a_t^{(p)}$, где:

- $a_t^{(h)}$ — общее решение однородного уравнения (см. раздел 1)
- $a_t^{(p)}$ — частное решение неоднородного уравнения

Метод неопределённых коэффициентов для $a_t^{(p)}$.

Пусть характеристический многочлен однородного уравнения:

$$\chi(r) = r^k + c_1 r^{k-1} + \cdots + c_k \quad \text{и} \quad \chi(r) = \prod_i (r - r_i)^{m_i} \prod_\ell Q_{\rho_\ell,\theta_\ell}(r)^{s_\ell},$$

где

$$Q_{\rho,\theta}(r) = (r - \rho e^{i\theta})(r - \rho e^{-i\theta}) = r^2 - 2\rho\cos\theta\, r + \rho^2.$$

Правило «множитель → вклад» (однородная часть):

- Линейный $(r - r_0)^m \;\Rightarrow\; \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j t^j r_0^t$.
- Квадратный $Q_{\rho,\theta}(r)^s \;\Rightarrow\; \rho^t \Big(\sum_{j=0}^{s-1} t^j \big(a_j \cos(\theta t) + b_j \sin(\theta t) \big) \Big)$.

Итог: $a_t^{(h)}$ — сумма всех таких вкладов по всем множителям χ.

Выбор формы частного решения $a_t^{(p)}$:

Обозначения: $P_n(t)$ — полином степени n; $Q_n(t), R_n(t)$ — полиномы; $\lambda \in \mathbb{C}$; s — кратность резонанса (кратность соответствующего множителя в χ).

Таблица 2: Выбор формы частного решения и проверка резонанса

Неоднородность $f(t)$	**Проверка резонанса**	**Базовая форма $a_t^{(p)}$**
$P_n(t)\,\lambda^t$	$\chi(\lambda) = 0?$	$Q_n(t)\,\lambda^t$
$\rho^t\cos(\theta t)$, $\rho^t\sin(\theta t)$	$Q_{\rho,\theta}(r) \mid \chi(r)?$	$\rho^t\big(A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t)\big)$
$P_n(t)\,\rho^t\cos(\theta t)$ (или sin)	$Q_{\rho,\theta}(r) \mid \chi(r)?$	$\rho^t\big(Q_n(t)\cos(\theta t) + R_n(t)\sin(\theta t)\big)$
Чистый полином $P_n(t)$	$\chi(1) = 0?$	$Q_n(t)$

Правило резонанса: если проверка даёт резонанс кратности s, домножьте базовую форму на t^s.

Алгоритм решения неоднородного уравнения.

1. **Однородная часть.** Найти $a_t^{(h)}$ методом характеристических корней (см. раздел 1).
2. **Форма частного решения.** По таблице 2 выбрать форму $a_t^{(p)}$ с учётом правила резонанса.
3. **Подстановка.** Подставить $a_t^{(p)}$ в исходное неоднородное уравнение и найти неопределённые коэффициенты.
4. **Общее решение.** $a_t = a_t^{(h)} + a_t^{(p)}$.
5. **Начальные условия.** Подставить k заданных значений и найти константы в $a_t^{(h)}$.

Пример. Решите разностное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами:

$$y_{t+3} - 3y_{t+2} + 6y_{t+1} - 4y_t = 2^t + t$$

Найти общее решение y_t.

Решение.

1) Однородная часть. Характеристический многочлен:

$$\chi(r) = r^3 - 3r^2 + 6r - 4 = (r-1)(r^2 - 2r + 4),$$

корни: $r_1 = 1$, $r_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{3} = 2e^{\pm i\pi/3}$.
Отсюда

$$y_t^{(h)} = C_1 + 2^t\Big(C_2 \cos\tfrac{\pi t}{3} + C_3 \sin\tfrac{\pi t}{3}\Big).$$

2) Частное решение $y_t^{(p)}$. Правая часть $f(t) = 2^t + t$ — сумма двух типов.
Экспонента 2^t*:* $\chi(2) = 8 - 12 + 12 - 4 = 4 \neq 0 \Rightarrow$ резонанса нет, берём $y_{(1)}^{(p)} = \alpha\, 2^t$.
Полином t*:* $\chi(1) = 0$ (кратность 1) $\Rightarrow$ резонанс порядка $s = 1$. Базовая форма для $P_1(t)$ — $At + B$, домножаем на t:

$$y_{(2)}^{(p)} = t(At + B) = At^2 + Bt.$$

Итого

$$y_t^{(p)} = \alpha\, 2^t + At^2 + Bt.$$

3) Подстановка и определение коэффициентов. Обозначим линейный оператор:

$$\mathcal{L}[y_t] = y_{t+3} - 3y_{t+2} + 6y_{t+1} - 4y_t.$$

Для экспоненты: $\mathcal{L}[2^t] = \chi(2)\, 2^t = 4 \cdot 2^t \Rightarrow 4\alpha\, 2^t = 2^t$, значит $\alpha = \frac{1}{4}$.
Для полинома $At^2 + Bt$ прямой подсчёт даёт:

$$\mathcal{L}[At^2 + Bt] = 6A\, t + (3A + 3B).$$

Требуем $\mathcal{L}[At^2 + Bt] = t$, откуда

$$6A = 1 \Rightarrow A = \tfrac{1}{6}, \qquad 3A + 3B = 0 \Rightarrow B = -\tfrac{1}{6}.$$

Следовательно,

$$y_t^{(p)} = \frac{1}{4}\, 2^t + \frac{t^2 - t}{6}.$$

4) Общее решение.

$$\boxed{y_t = C_1 + 2^t\Big(C_2 \cos\tfrac{\pi t}{3} + C_3 \sin\tfrac{\pi t}{3}\Big) + \frac{1}{4}\, 2^t + \frac{t^2 - t}{6}}$$

(константы C_1, C_2, C_3 находятся по начальным условиям).