Подготовка: Дифференциальные уравнения

Полная версия с разборами тем и ссылками

11 сентября 2025 г.

Содержание

1 Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами (ЛОС)

1. Тип экзаменационной задачи (полное условие)

Найдите общее решение:

$$y_{t+3} - y_{t+2} + 4y_{t+1} - 4y_t \ = \ 26 \cdot 3^t + 10t + 9,$$

где $t \in \mathbb{Z}$, $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$).

2. Универсальный алгоритм (визуальные формулы и детерминированные шаги)

Исходные данные и обозначения (ввод). Дано ЛОС порядка $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n y_{t+n} + a_{n-1} y_{t+n-1} + \cdots + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = f(t),$$

где $a_n \neq 0,\ a_k \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), $t \in \mathbb{Z}$. Вводим: $\chi(r) := r^n + b_{n-1}r^{n-1} + \cdots + b_1 r + b_0$ — характеристический многочлен (после нормировки $a_n = 1$); $k_\chi(\lambda) \in \mathbb{N}$ — кратность корня λ в χ; $P_d(t) \in \mathbb{R}[t]$ — произвольный полином степени $\leq d$; $Q_{\lambda,\theta}(r) := r^2 - 2\lambda\cos\theta\, r + \lambda^2$.

Шаг 0. Привести уравнение к канонической форме.
Разделить на a_n (если $a_n \neq 1$) и написать

$$y_{t+n} + b_{n-1} y_{t+n-1} + \cdots + b_1 y_{t+1} + b_0 y_t = f(t).$$

Шаг 1. Построить $\chi(r)$ и зафиксировать кратности корней.
Выписать $\chi(r) = r^n + b_{n-1}r^{n-1} + \cdots + b_1 r + b_0$, найти все λ_j и $k_\chi(\lambda_j)$.

Шаг 2. Записать общее решение однородной части $y_t^{(h)}$.
Для каждого корня λ кратности $s = k_\chi(\lambda)$ включить базис

$$t^0\lambda^t,\ t^1\lambda^t, \ldots, t^{s-1}\lambda^t;$$

для пары $\lambda = \rho e^{i\theta}$, $\bar{\lambda} = \rho e^{-i\theta}$ — реальный базис $\rho^t\cos(\theta t),\ \rho^t\sin(\theta t)$.

Таблица соответствий (множитель $\Rightarrow$ вклад в $y^{(h)}$):

Множитель	Вклад в y(h)
$(r-\lambda)^s$	$P_{s-1}(t)\lambda^t$
$(r^2 - 2\rho\cos\theta\, r + \rho^2)^s$	$P_{s-1}(t)\rho^t\cos(\theta t),\ P_{s-1}(t)\rho^t\sin(\theta t)$

Шаг 3. Выбрать пробную форму $y_t^{(p)}$ по атомам $f(t)$ и признакам резонанса через χ.
Разложить $f(t)$ на атомы и применить правила из таблицы:

Атом	Резонанс?	Вклад в y(p)
λ^t	$k_\chi(\lambda) = 0?$	$A\,\lambda^t$
$P_d(t)$	$k_\chi(1) = 0?$	$c_0 + c_1 t + \cdots + c_d t^d$
$\lambda^t P_d(t)$	$k_\chi(\lambda) = 0?$	$\lambda^t(c_0 + c_1 t + \cdots + c_d t^d)$
$\lambda^t\cos(\theta t)$ $\lambda^t\sin(\theta t)$	$Q_{\lambda,\theta} \mid \chi?$	$\lambda^t(A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t))$
При резонансе:	**любая форма**	**умножить на** t^s

Шаг 4. Определить коэффициенты пробной формы.
Подставить $y^{(p)}$ в уравнение, сгруппировать по независимым типам (λ^t, t^k, $\lambda^t\cos/\sin$) и решить линейную систему на коэффициенты.

Шаг 5. Собрать общий ответ и учесть начальные условия (при наличии).
Записать $y_t = y_t^{(h)} + y_t^{(p)}$. При наличии $y_0, \dots, y_{n-1}$ подставить соответствующие t и решить систему для констант при $y^{(h)}$.

3. Сопроводительные материалы (таблицы и обозначения)

Атом → пробная форма (до резонанса):

$$\lambda^t \mapsto A\,\lambda^t, \qquad P_d(t) \mapsto c_0 + c_1 t + \dots + c_d t^d, \qquad \lambda^t P_d(t) \mapsto \lambda^t(c_0 + c_1 t + \dots + c_d t^d),$$

$$\lambda^t \cos(\theta t),\ \lambda^t \sin(\theta t) \mapsto \lambda^t\big(A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t)\big).$$

Правило резонанса (через χ): $s = k_\chi(1)$ для $P_d(t)$; $s = k_\chi(\lambda)$ для $\lambda^t P_d(t)$; если $Q_{\lambda,\theta} \mid \chi$, умножить триг-форму на t^s.

4. Применение алгоритма к объявленной задаче

$$y_{t+3} - y_{t+2} + 4y_{t+1} - 4y_t \;=\; 26\cdot 3^t + 10t + 9.$$

Шаг 0. Канонический вид зафиксирован.
Уравнение уже записано как $y_{t+3} + (-1)y_{t+2} + 4y_{t+1} + (-4)y_t = f(t)$, нормировка не требуется.

Шаг 1. Построить $\chi(r)$ и кратности корней.
$\chi(r) = r^3 - r^2 + 4r - 4 = (r-1)(r^2+4)$; корни 1, $\pm 2i$, все кратности равны 1: $k_\chi(1) = 1$, $k_\chi(\pm 2i) = 1$.

Шаг 2. Записать $y_t^{(h)}$ по найденному спектру.

$$y_t^{(h)} = C_1 \cdot 1^t + 2^t\Big(C_2 \cos\tfrac{\pi t}{2} + C_3 \sin\tfrac{\pi t}{2}\Big).$$

Шаг 3. Выбрать $y_t^{(p)}$ по атомам RHS и признакам резонанса на χ.
$f(t) = 26\cdot 3^t + P_1(t)$, где $P_1(t) = 10t + 9$.

- Для 3^t: $k_\chi(3) = 0$ (3 не корень) $\Rightarrow A\cdot 3^t$
- Для $P_1(t)$: $k_\chi(1) = 1$ (1 — корень кратности 1) $\Rightarrow t(\tilde{a}t + \tilde{b}) = \tilde{a}t^2 + \tilde{b}t$

Итого

$$y_t^{(p)} = A\cdot 3^t + a\,t^2 + b\,t.$$

Шаг 4. Найти коэффициенты пробной формы, учитывая разложение по типам.
Подстановка даёт

$$L[y^{(p)}] = 26A\cdot 3^t + 10a\,t + (9a + 5b) \overset{!}{=} 26\cdot 3^t + 10t + 9 \Rightarrow A = 1,\ a = 1,\ b = 0.$$

Следовательно, $y_t^{(p)} = 3^t + t^2$.

Шаг 5. Собрать общий ответ и отметить, как добавляются начальные условия.

$$\boxed{y_t = C_1 + 2^t\Big(C_2\cos\tfrac{\pi t}{2} + C_3 \sin\tfrac{\pi t}{2}\Big) + 3^t + t^2}.$$

При наличии y_0, y_1, y_2 — подставить $t = 0, 1, 2$ и решить систему для C_1, C_2, C_3.

2 Синтез разностного уравнения по заданным решениям

1. Тип экзаменационной задачи (полное условие)

Задача. Построить *линейное однородное разностное уравнение с постоянными коэффициентами* минимально возможного порядка, частными решениями которого являются

$$y_t^{(1)} = 3^t, \qquad y_t^{(2)} = 2^t \sin\frac{\pi t}{3}.$$

(Решение здесь не приводится; это контекст для главы.)

2. Универсальный алгоритм (визуальные формулы и детерминированные шаги)

Исходные данные и обозначения (ввод). Дано множество частных решений $\{y_t^{(k)}\}_{k=1}^K$ ЛОС. Требуется построить характеристический полином $p(\lambda)$ минимального порядка N такой, что все $y_t^{(k)}$ являются решениями уравнения $p(L)[y_t] = 0$, где L — оператор сдвига $Ly_t = y_{t+1}$.

Вводим: $\alpha \in \mathbb{R}$ — основание экспоненты; $\omega \in \mathbb{R}$ — частота тригонометрических функций; $s \in \mathbb{N}_0$ — степень полинома t^s; $p(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$ — характеристический полином.

Шаг 0. Распознать «атом» каждого данного решения.
Для каждого $y_t^{(k)}$ определить одну из форм: α^t; $t^s\alpha^t$; $\alpha^t\cos(\omega t)$ или $\alpha^t\sin(\omega t)$; $t^s\alpha^t\cos(\omega t)$ или $t^s\alpha^t\sin(\omega t)$.

Шаг 1. Получить характеристический множитель(и) для каждого атома.
По таблице соответствий заменить атом на множитель $p(\lambda)$ с учётом кратности $(s+1)$.

Шаг 2. Собрать общий характеристический полином минимального порядка.
Перемножить *разные* множители (комплексные корни берутся парой $\Rightarrow$ реальный квадратичный множитель). Повторы дают максимальную кратность.

Шаг 3. Записать разностное уравнение.
Привести $p(\lambda)$ к виду $\lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ и выписать

$$y_{t+N} + a_{N-1}y_{t+N-1} + \cdots + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = 0.$$

Шаг 4. Проверить минимальность и корректность.
Убедиться, что N равен сумме степеней множителей; проверить зануление $p(\lambda)$ на атомах (для тригонометрических — на $\lambda = \alpha e^{\pm i\omega}$).

3. Сопроводительные материалы (таблицы и обозначения)

Таблица соответствий (атом $\Rightarrow$ множитель $\Rightarrow$ кратность):

Атом	Множитель	Кратность
α^t	$(\lambda-\alpha)$	1
$t^s\alpha^t$	$(\lambda-\alpha)^{s+1}$	$s+1$
$\alpha^t\cos(\omega t), \alpha^t\sin(\omega t)$	$\lambda^2 - 2\alpha\cos\omega\,\lambda + \alpha^2$	1
$t^s\alpha^t\cos(\omega t), t^s\alpha^t\sin(\omega t)$	$(\lambda^2 - 2\alpha\cos\omega\,\lambda + \alpha^2)^{s+1}$	$s+1$

Быстрые значения $\cos\omega$**:**

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Правила сборки: (i) Пара $\{\cos, \sin\}$ с одинаковыми α, ω даёт один и тот же квадратичный множитель (не удваивать). (ii) При нескольких степенях t^s берётся максимальная кратность.

4. Применение алгоритма к объявленной задаче

Дано: $y_t^{(1)} = 3^t$, $y_t^{(2)} = 2^t \sin\frac{\pi t}{3}$.

Шаг 0. Распознать «атом» каждого данного решения.
Атомы: 3^t $(\alpha = 3)$; $2^t \sin(\pi t/3)$ $(\alpha = 2,\ \omega = \pi/3)$.

Шаг 1. Получить характеристический множитель(и) для каждого атома.
Множители: $(\lambda - 3)$ и $\lambda^2 - 2 \cdot 2\cos(\pi/3)\lambda + 2^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 4$.

Шаг 2. Собрать общий характеристический полином минимального порядка.
Сборка: $p(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 2\lambda + 4)$.

Шаг 3. Записать разностное уравнение.
Развёртка: $p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 10\lambda - 12$. Соответствующее ЛОС:

$$\boxed{y_{t+3} - 5y_{t+2} + 10y_{t+1} - 12y_t = 0}.$$

Шаг 4. Проверить минимальность и корректность.
Минимальность: порядок $N = 3$; проверка $p(3) = 0$ и $\lambda = 2e^{\pm i\pi/3}$ зануляют квадратичный множитель.

3 Нелинейные 2D-системы: равновесия, линеаризация, классификация

1. Тип экзаменационной задачи (полное условие)

Условие. Найдите положения равновесия автономной системы уравнений, определите их характер, и нарисуйте фазовые портреты в окрестности положений равновесия

$$\begin{cases} \dot{x} = 2 - 2\sqrt{1 + x + y}, \\ \dot{y} = \exp\left(\frac{5}{4}x + 2y + y^2\right) - 1. \end{cases}$$

2. Универсальный алгоритм (визуальные формулы и детерминированные шаги)

Исходные данные и обозначения (ввод). Дана автономная система $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$, где $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Требуется найти положения равновесия (x_0, y_0) такие, что $f(x_0, y_0) = 0$, $g(x_0, y_0) = 0$, и классифицировать их характер.

Вводим: $J(x, y)$ — матрица Якоби; $\operatorname{tr} J = f_x + g_y$ — след; $\det J = f_x g_y - f_y g_x$ — определитель; $D = \operatorname{tr}^2 - 4\det$ — дискриминант; $\lambda_{1,2}$ — собственные значения J.

Шаг 0. Найти положения равновесия.
Решить систему $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ и найти все точки (x_0, y_0) такие, что $f(x_0, y_0) = 0$, $g(x_0, y_0) = 0$.

Шаг 1. Составить матрицу Якоби.
Вычислить частные производные и составить

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Вычислить инварианты в каждой точке равновесия.
Для каждой точки (x_0, y_0) вычислить:

$$\operatorname{tr} J(x_0, y_0), \quad \det J(x_0, y_0), \quad D = \operatorname{tr}^2 - 4\det.$$

Шаг 3. Классифицировать тип точки по детектору.
Применить правила из таблицы классификации по знакам det, D, tr.

Шаг 4. Определить устойчивость и направления.
По знаку tr и типу точки зафиксировать вход/выход; для седла отметить две сепаратрисы вдоль собственных направлений J.

Шаг 5. Нарисовать фазовый портрет.
Нанести типы точек и стрелки; при необходимости использовать изоклины $f = 0$, $g = 0$ для знаков $\dot{x}$, $\dot{y}$.

3. Сопроводительные материалы (таблицы и обозначения)

Таблица классификации равновесий:

Условие	Тип точки	Устойчивость
$\det < 0$	седло	неустойчивая
$\det > 0,\ D > 0,\ \mathrm{tr} < 0$	узел	устойчивый
$\det > 0,\ D > 0,\ \mathrm{tr} > 0$	узел	неустойчивый
$\det > 0,\ D < 0,\ \mathrm{tr} < 0$	фокус	устойчивый
$\det > 0,\ D < 0,\ \mathrm{tr} > 0$	фокус	неустойчивый
$\det > 0,\ D = 0$ или $\det = 0$	негиперболика	см. главу M10

Быстрые производные (частые атомы):

$$f(x,y) = A - B\sqrt{\Phi(x,y)}: \quad f_x = -\frac{B}{2}\Phi^{-1/2}\Phi_x, \quad f_y = -\frac{B}{2}\Phi^{-1/2}\Phi_y;$$
$$g(x,y) = e^{\Psi(x,y)} - 1: \quad g_x = e^{\Psi}\Psi_x, \quad g_y = e^{\Psi}\Psi_y.$$

Правила упрощения: Если в равновесии $g = 0$, то $e^{\Psi} = 1$ и $g_x = \Psi_x$, $g_y = \Psi_y$; если $1 + x + y = 1$, то $\sqrt{1 + x + y} = 1$ и $f_x = f_y = -1$.

4. Применение алгоритма к объявленной задаче

Дано: $\dot{x} = 2 - 2\sqrt{1 + x + y}$, $\dot{y} = \exp\Big(\frac{5}{4}x + 2y + y^2\Big) - 1$.

Шаг 0. Найти положения равновесия.
$f = 0 \ \Rightarrow \ \sqrt{1 + x + y} = 1 \ \Rightarrow \ x + y = 0.$ $\quad g = 0 \ \Rightarrow \ \frac{5}{4}x + 2y + y^2 = 0$. Подставляя $y = -x$:

$$x^2 - \frac{3}{4}x = 0 \ \Rightarrow \ x \in \{0, \tfrac{3}{4}\}.$$

Точки равновесия: $(0, 0)$ и $(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$.

Шаг 1. Составить матрицу Якоби.
При $x + y = 0$ и $\Psi = 0$ имеем

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \frac{5}{4} & 2 + 2y \end{pmatrix}.$$

Значит $J(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \frac{5}{4} & 2 \end{pmatrix}$, $J(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Шаг 2. Вычислить инварианты в каждой точке равновесия.

$$(0,0): \ \mathrm{tr} = 1, \ \det = -\tfrac{3}{4} < 0;$$
$$(\tfrac{3}{4}, -\tfrac{3}{4}): \ \mathrm{tr} = -\tfrac{1}{2}, \ \det = \tfrac{3}{4} > 0, \ D = \tfrac{1}{4} - 3 = -\tfrac{11}{4} < 0.$$

Шаг 3. Классифицировать тип точки по детектору.

$$(0,0):\ \det<0\ \Rightarrow\ \text{седло (неустойчивая)};$$
$$(\tfrac34,-\tfrac34):\ \det>0,\ D<0,\ \operatorname{tr}<0\ \Rightarrow\ \text{фокус устойчивый}.$$

Шаг 4. Определить устойчивость и направления.
В $(0,0)$ — две сепаратрисы по собственным направлениям J; в $(\frac34,-\frac34)$ — спиральное вхождение.

Шаг 5. Нарисовать фазовый портрет.
Эскиз: седло в $(0,0)$ с «крестом» сепаратрис; устойчивый фокус в $(\frac34,-\frac34)$ со стрелками внутрь. Изоклина $x+y=0$ помогает ориентировать знаки $\dot{x}$.

$$\boxed{\text{Две точки равновесия: седло } (0,0) \text{ и устойчивый фокус } (\tfrac34,-\tfrac34)}$$

4 Линейные ОДУ 2-го порядка: нормальная форма, вронскиан, короткие доказательства

1. Тип экзаменационной задачи (полное условие)

Стейтмент. Пусть функции $p(x), q(x)$ непрерывны на $\mathbb{R}$ и $q(x)<0$ для всех x. Пусть $y(x)$ — нетривиальное решение

$$y''+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0.$$

Покажите, что если решение принимает максимальное значение в некоторой точке, то это значение не может быть больше 0.

2. Универсальный алгоритм (визуальные формулы и детерминированные шаги)

Исходные данные и обозначения (ввод). Дано линейное ОДУ 2-го порядка $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, где $p,q\in C(\mathbb{R})$. Требуется доказать качественные свойства решений (экстремумы, нули, устойчивость).

Вводим: $\phi(x)$ — интегрирующий множитель; $Q(x)$ — эффективный потенциал; $W(x)$ — вронскиан; $z(x)$ — решение в нормальной форме; x_0 — точка экстремума или нуля.

Шаг 0. Нормализация: увидеть p, q.
Привести уравнение к виду $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ и зафиксировать знаки $p(x)$, $q(x)$.

Шаг 1. Нормальная форма: убрать y' при необходимости.
Взять

$$\phi(x)=\exp\Big(-\tfrac12\int p(x)\,dx\Big),\quad y=\phi z,$$

тогда

$$z''+Q(x)z=0,\qquad Q(x)=q-\frac{p'}{2}-\frac{p^2}{4}.$$

Шаг 2. Вронскиан: независимость/масштаб.
Формула Абеля:

$$W(x)=W(x_0)\,\exp\Big(-\int_{x_0}^{x}p(t)\,dt\Big).$$

Шаг 3. Локальные/качественные выводы: «максимум/минимум/нули».

- *Триггер «экстремум».* В точке максимума x_0: $y'(x_0) = 0,\ y''(x_0) \le 0$. Подставить в уравнение.
- *Триггер «≤ 1 нуля».* Перейти к $z'' + Qz = 0$; при $Q \le 0$:

$$\int_a^b zz''\,dx + \int_a^b Qz^2\,dx = 0 \Rightarrow -\int_a^b (z')^2\,dx + \int_a^b Qz^2\,dx = 0,$$

  что невозможно при двух нулях.

Шаг 4. Итог: короткая формулировка.
Выписать использованные ϕ, Q и/или W и сформулировать вывод.

3. Сопроводительные материалы (таблицы и обозначения)

Детектор ветки Шага 3:

Признак в условии	Действие
Есть «максимум/минимум», дан знак q	Экстремум-тест: $y' = 0$, знак y'', подстановка в ОДУ
Требуется «не более одного нуля»	Шаг 1 $\Rightarrow z'' + Qz = 0$, при $Q \le 0$ интегральный аргумент
Нужно проверить фундаментальность пары	Абель: $W(x) = W(x_0)e^{-\int p}$

Памятка формул М4:

$$\phi(x) = \exp\Bigl(-\tfrac{1}{2}\int p\Bigr), \qquad Q = q - \tfrac{1}{2}p' - \tfrac{1}{4}p^2, \qquad W(x) = W(x_0)\exp\Bigl(-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt\Bigr).$$

Правила экстремума: В точке локального максимума x_0: $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) \le 0$; в точке локального минимума: $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) \ge 0$.

4. Применение алгоритма к объявленной задаче

Дано: $y''+p(x)y'+q(x)y = 0$, где $q(x) < 0$ для всех x, и $y(x)$ — нетривиальное решение с максимумом в точке x_0.

Шаг 0. Нормализация: увидеть p, q.
Уравнение уже в виде $y'' + p\,y' + q\,y = 0$ с $q(x) < 0$ для всех x.

Шаг 1. Нормальная форма: убрать y' при необходимости.
Переход к z не требуется для данного доказательства.

Шаг 2. Вронскиан: независимость/масштаб.
Вронскиан не нужен для данного доказательства.

Шаг 3. Локальные/качественные выводы: «максимум/минимум/нули».
В точке локального максимума x_0: $y'(x_0) = 0,\ y''(x_0) \le 0$. Подставляя в уравнение:

$$y''(x_0) = -p(x_0)\,y'(x_0) - q(x_0)\,y(x_0) = -q(x_0)\,y(x_0).$$

При $q(x_0) < 0$ из $y(x_0) > 0$ следовало бы $y''(x_0) > 0$, что противоречит максимуму. Значит $y(x_0) \le 0$.

Шаг 4. Итог: короткая формулировка.

$$\boxed{\text{Положительный локальный максимум невозможен при } q(x) < 0}$$

5 ПЧП 1-го порядка (задача Коши по кривой)

1. Тип экзаменационной задачи (полное условие)

Даны две задачи Коши для уравнения

$$y\,z_x - x\,z_y = 0:$$

а) $z = 2y$ при $x = 1$; б) $z = 2y$ при $x = 1 + y$. Искать решение в окрестности $(1, 0)$. Проверить условия теоремы существования–единственности.

2. Универсальный алгоритм (визуальные формулы и детерминированные шаги)

Исходные данные и обозначения (ввод). Дано квазилинейное ПЧП 1-го порядка $a(x,y)z_x + b(x,y)z_y = 0$, где $a, b \in C^1(\Omega \subset \mathbb{R}^2)$, и начальные данные на кривой $\gamma : s \mapsto (x(s), y(s))$: $z(\gamma(s)) = \varphi(s)$.

Вводим: $I_1(x,y)$ — первый интеграл (инвариант); $\Delta(s)$ — определитель нехарактеристичности; $\gamma'(s)$ — касательный вектор к кривой; F — произвольная функция.

Шаг 0. Найти характеристики.
Решить систему $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{a}$ и найти первый интеграл $I_1(x,y) = C_1$.

Шаг 1. Записать общее решение.
Общее решение имеет вид $z(x,y) = F(I_1(x,y))$, где F — произвольная функция.

Шаг 2. Сшить с начальными данными.
Подставить кривую γ в общее решение: $F(I_1(\gamma(s))) = \varphi(s)$. Если $\Delta \neq 0$, то $s = \sigma(I)$ локально и

$$z(x,y) = \varphi(\sigma(I_1(x,y))).$$

Шаг 3. Проверить нехарактеристичность.
Вычислить $\Delta(s) = a(\gamma)y'(s) - b(\gamma)x'(s)$. Проверить условие $(a,b) \nparallel \gamma'(s) \;\Leftrightarrow\; \Delta \neq 0$.

Шаг 4. Сформулировать итог.
$\Delta \neq 0 \Rightarrow$ единственность; $\Delta = 0 \Rightarrow$ ветвление или неединственность.

3. Сопроводительные материалы (таблицы и обозначения)

Быстрые инварианты:

Коэффициенты (a, b)	**Уравнение** $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$	**Инвариант** $I_1(x,y)$
$(y,\ -x)$	$-\frac{x}{y}$	$x^2 + y^2$
$(x,\ y)$	$\frac{y}{x}$	$\frac{y}{x}$
$(\alpha x,\ \beta y)$	$\frac{\beta y}{\alpha x}$	$\dfrac{y}{x^{\beta/\alpha}}$
$(\alpha x + \beta y,\ \gamma x + \delta y)$	$\frac{\gamma x + \delta y}{\alpha x + \beta y}$	линейная замена $\Rightarrow \frac{\eta}{\xi^{\lambda_2/\lambda_1}}$

Условие нехарактеристичности: $\Delta(s) = a(\gamma)y'(s) - b(\gamma)x'(s) \neq 0$.

Правила диагностики: В виде $g(x,y) = 0$: $ag_x + bg_y \neq 0$ на γ.

4. Применение алгоритма к объявленной задаче

Дано: $y\,z_x - x\,z_y = 0$ с двумя задачами Коши в окрестности $(1, 0)$.

Шаг 0. Найти характеристики.
$a = y,\ b = -x \Rightarrow dy/dx = -x/y \Rightarrow I_1 = x^2 + y^2$.

Шаг 1. Записать общее решение.
Общее решение: $z = F(x^2 + y^2)$.

Шаг 2. Сшить с начальными данными.
(а) $x = 1,\ z = 2y$:
$I_1|_{x=1} = 1 + y^2, \quad \Delta = y \cdot 1 - (-1) \cdot 0 = y$.
В $(1, 0)$: $\Delta = 0$ (характеристическая).
Инверсия многозначна: $y = \pm\sqrt{I - 1} \Rightarrow$

$$\boxed{z = 2\,\mathrm{sgn}(y)\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$$

(неединственность у $y = 0$).

(б) $x = 1 + y,\ z = 2y$:
$I_1|_{x=1+y} = 1 + 2y + 2y^2, \quad \Delta = 2y + 1$.
В $(1, 0)$: $\Delta = 1 \neq 0$ (нехарактеристическая).
$I = 1 + 2s + 2s^2 \Rightarrow s = \frac{-1+\sqrt{2I-1}}{2}$ (ветвь у $s \approx 0$).

$$\boxed{z(x, y) = -1 + \sqrt{2(x^2 + y^2) - 1}}$$

(единственно в окрестности $(1, 0)$).

6 Глава М6. Системы разностных: диагонализуемые матрицы, Phi t равно A в степени t, вариация постоянных

1) Тип экзаменационной задачи

Условие.

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(а) Найти фундаментальную матрицу Φ_t. (б) Полагая $\binom{x_t}{y_t} = \Phi_t \binom{c_1^t}{c_2^t}$, выписать уравнения для c_1^t, c_2^t (не решать).

2) Универсальный алгоритм (формулы)

Ввод. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x_t \in \mathbb{R}^n$, $b_t \in \mathbb{R}^n$. $\Phi_t := A^t$. Спектр: $A = V\Lambda V^{-1}$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Шаг 1. Спектр. Найти λ_j и базис $\{v_j\}$: $(A - \lambda_j I)v_j = 0$. $\sum_j \dim\ker(A - \lambda_j I) = n \Rightarrow$ диагонализуемо.

Шаг 2. A в степени t.

$$A^t = V\Lambda^t V^{-1}, \quad \Lambda^t = \mathrm{diag}(\lambda_1^t, \dots, \lambda_n^t).$$

Если $\lambda = \rho e^{\pm i\theta}$: на $\mathbb{R}^2$ блок $S = \begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}$, $a + ib = \lambda$,

$$S^t = \rho^t \begin{pmatrix} \cos(\theta t) & -\sin(\theta t) \\ \sin(\theta t) & \cos(\theta t) \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Phi t и однородная система.

$$x_{t+1} = Ax_t \ \Rightarrow\ x_t = \Phi_t x_0, \quad \Phi_t = A^t.$$

Шаг 4. Вариация постоянных. Полагаем $x_t = \Phi_t c^t$. Тогда

$$\Phi_{t+1} c^{t+1} = \Phi_{t+1} c^t + b_t \;\Rightarrow\; \boxed{c^{t+1} - c^t = \Phi_{t+1}^{-1} b_t}.$$

Эквивалентно: $x_t = A^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} A^{t-1-k} b_k$.

Шаг 5. Частные случаи. Если $b_t \equiv b$ и $I - A$ обратима: $x_t = A^t(x_0 - (I-A)^{-1}b) + (I-A)^{-1}b$. Если $\lambda < 0$: $\lambda^t = (-1)^t |\lambda|^t$. Пара $\rho e^{\pm i\theta}$: блок $\rho^t R(\theta t)$.

3) Сопроводительные материалы

Спектр A	Формула для A^t
$\lambda_j \in \mathbb{R}$ простые	$V \operatorname{diag}(\lambda_1^t, \ldots, \lambda_n^t) V^{-1}$
$\rho e^{\pm i\theta}$	$W\big(\rho^t \begin{smallmatrix}\cos\theta t & -\sin\theta t \\ \sin\theta t & \cos\theta t\end{smallmatrix}\big) W^{-1}$
смешанный	блочно по строкам выше

$$\Phi_t^{-1} = V \operatorname{diag}(\lambda_1^{-t}, \ldots, \lambda_n^{-t})\, V^{-1}.$$

4) Применение алгоритма к условию

Шаг 1. $\widehat{A} = \begin{smallmatrix}-1 & 3 \\ 3 & -1\end{smallmatrix} \Rightarrow \sigma(\widehat{A}) = \{2, -4\}$, $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (1,-1)$. $\sigma(A) = \{1, -2\}$ (диагонализуемо).

Шаг 2.

$$V = \begin{pmatrix}1 & 1 \\ 1 & -1\end{pmatrix}, \quad \Lambda = \operatorname{diag}(1, -2), \quad V^{-1} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 \\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

$$\Phi_t = A^t = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 + (-2)^t & 1 - (-2)^t \\ 1 - (-2)^t & 1 + (-2)^t\end{pmatrix}.$$

Шаг 3. $x_t = \Phi_t x_0$.

Шаг 4.

$$c^{t+1} - c^t = \Phi_{t+1}^{-1} b, \quad \Phi_{t+1}^{-1} = V \operatorname{diag}\big(1, (-2)^{-(t+1)}\big) V^{-1}.$$

$$\Phi_{t+1}^{-1} b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 + (-2)^{-(t+1)} & 1 - (-2)^{-(t+1)} \\ 1 - (-2)^{-(t+1)} & 1 + (-2)^{-(t+1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-\tfrac{1}{2})^{t+1} \\ -(-\tfrac{1}{2})^{t+1}\end{pmatrix}.$$

$$\boxed{c_1^{t+1} - c_1^t = (-\tfrac{1}{2})^{t+1}, \qquad c_2^{t+1} - c_2^t = -(-\tfrac{1}{2})^{t+1}}.$$

Шаг 5. $(I - A)$ необратима (есть $\lambda = 1$) $\Rightarrow$ стационарная формула неприменима; используем вариацию постоянных как выше.

7 Нелинейные 2D-системы: линеаризация, классификация по tr, det, D

1. Тип экзаменационной задачи (полное условие)

Стейтмент. Найдите положения равновесия автономной системы, определите их характер и набросайте фазовые портреты в окрестности равновесий:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2 - 2\sqrt{1 + x + y}, \\ \dot{y} = \exp\big(\tfrac{5}{4}x + 2y + y^2\big) - 1. \end{cases}$$

2. Универсальный алгоритм (визуальные формулы и детерминированные шаги)

Исходные данные и обозначения (ввод). Дана автономная система $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$, где $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Требуется найти положения равновесия (x_*, y_*) такие, что $f(x_*, y_*) = 0$, $g(x_*, y_*) = 0$, и классифицировать их характер по линеаризации.

Вводим: J — матрица Якоби; $\operatorname{tr} J = f_x + g_y$ — след; $\det J = f_x g_y - f_y g_x$ — определитель; $D = \operatorname{tr}^2 - 4 \det$ — дискриминант; $\lambda_{1,2}$ — собственные значения J.

Шаг 0. Найти положения равновесия.
Решить систему $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ и найти все точки (x_*, y_*) такие, что $f(x_*, y_*) = 0$, $g(x_*, y_*) = 0$.

Шаг 1. Вычислить матрицу Якоби.
Вычислить частные производные и составить

$$J = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \Big|_{(x_*, y_*)}.$$

Шаг 2. Вычислить инварианты в каждой точке равновесия.
Посчитать

$$\operatorname{tr} J = f_x + g_y, \qquad \det J = f_x g_y - f_y g_x, \qquad D = \operatorname{tr}^2 - 4 \det,$$

и применить таблицу классификации.

Шаг 3. Определить стабильность и направления.

- $\det < 0$: седло (неустойчиво).
- $\det > 0$, $D > 0$: узел; знак tr даёт устойчивость.
- $\det > 0$, $D < 0$: фокус; знак tr даёт устойчивость.

Шаг 4. Нарисовать локальный эскиз.
Нанести тип точки и стрелки вход/выход; для седла — сепаратрисы по собственным векторам J.

Примечание. Если $\det J \neq 0$ (гиперболическая точка), линеаризация локально адекватна типу (Хартман–Гробман).

3. Сопроводительные материалы (таблицы и обозначения)

Классификация по $\det$, tr, D**:**

Условие	Тип точки	Устойчивость
$\det < 0$	седло	неустойчивая
$\det > 0,\ D > 0,\ \operatorname{tr} < 0$	узел	устойчивый
$\det > 0,\ D > 0,\ \operatorname{tr} > 0$	узел	неустойчивый
$\det > 0,\ D < 0,\ \operatorname{tr} < 0$	фокус	устойчивый
$\det > 0,\ D < 0,\ \operatorname{tr} > 0$	фокус	неустойчивый

Детектор гиперболичности: $\det J \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ линеаризация достаточна для локального типа.

Правила границ: Границы $\det = 0$ или $D = 0$ — вне рамок M7 (негиперболика).

4. Применение алгоритма к объявленной задаче

Дано: $\dot{x} = 2 - 2\sqrt{1 + x + y}$, $\dot{y} = \exp\left(\frac{5}{4}x + 2y + y^2\right) - 1$.

Шаг 0. Найти положения равновесия.
$f = 0 \Rightarrow x + y = 0$. $g = 0 \Rightarrow \frac{5}{4}x + 2y + y^2 = 0$. Совместно: точки $(0, 0)$ и $(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$.

Шаг 1. Вычислить матрицу Якоби.

$$f_x = f_y = -\frac{1}{\sqrt{1+x+y}}, \quad g_x = \tfrac{5}{4}e^{\Phi}, \quad g_y = (2+2y)e^{\Phi}, \ \ \Phi = \tfrac{5}{4}x + 2y + y^2.$$

В равновесиях $\sqrt{1+x+y} = 1, \ e^{\Phi} = 1$.

Шаг 2. Вычислить инварианты в каждой точке равновесия.
Для $(0, 0)$: $J = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \frac{5}{4} & 2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{tr} = 1$, $\det = -\frac{3}{4} < 0$.
Для $(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$: $J = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\mathrm{tr} = -\frac{1}{2}$, $\det = \frac{3}{4} > 0$, $D = \frac{1}{4} - 3 = -\frac{11}{4} < 0$.

Шаг 3. Определить стабильность и направления.
Для $(0, 0)$: $\det < 0 \Rightarrow$ **седло (неустойчивая)**.
Для $(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$: $\det > 0, \ D < 0, \ \mathrm{tr} < 0 \Rightarrow$ **устойчивый фокус**.

Шаг 4. Нарисовать локальный эскиз.
Седло в $(0, 0)$: одна устойчивая и одна неустойчивая сепаратриса. Фокус в $(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$: затухающие спирали.

$$\boxed{\text{Две точки равновесия: седло } (0,0) \text{ и устойчивый фокус } (\tfrac{3}{4}, -\tfrac{3}{4})}$$