DATE

№1

Кодом получили канонический вид

$$Q_{diag} = C \cdot Q_{mat} \cdot C^T, \text{ где}$$

$$Q_{diag} = \begin{pmatrix} 9 & & \\ & -1 & \\ & & 4 \end{pmatrix} \text{ - канон. вид}$$

$$Q_{mat} = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -27 \\ -6 & 3 & 16 \\ -27 & 16 & 81 \end{pmatrix} \text{ - матрица соотв. сим. билин. ф-и}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 5/3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ - матрица перехода}$$

Тогда $C' Q_{mat} C'^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ при

$$C' = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 5/6 & -1 & 1/2 \\ 2/3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

DATE

Значит $Q_{norm} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$,

матрица перехода $C'^{T} =$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & 5/6 & 2/3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Т.е. $Q(x) = x^t Q_{mat} x = \underbrace{x^t C'}_{\text{в исх. базисе}} Q_{norm} \underbrace{C'^{T} x}_{} =$

$$= \underbrace{y^t}_{\text{в новом базисе}} Q_{norm} \underbrace{y}_{}$$

№3

а) Из линейности интеграла следует, что форма $(f, g) =$

$$= \int_0^2 f(x) g(x) dx - \int_1^3 f(x) g(x) dx \text{ – лин.}$$

по каждому аргументу и симм.

$Q(f) = (f, f) \Rightarrow Q$ – квадр. форма

б) Покажем, что заданной квадр. ф-ы и Q разные сигнатуры. Это покажет,

DATE

что искомого базиса нет.

Далее см. код

$(3, 1, 0) \neq (0, 4, 0)$

№4

$$A = \begin{pmatrix} -4b+17 = (-2b+8)+(-2b+7) \\ -2b+8 = 2 + (-2b+6) \\ -2b+7 & \underset{-2b+6}{\overset{\shortparallel}{-a+3}} & 3 \end{pmatrix}$$

Чтобы A задавала ск. пр., она должна быть симметр. положительноопр.

A - симм. $\Leftrightarrow -a+3 = -2b+6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{a = 2b-3}$

e_1, e_2, e_3 - ст. базис в $\mathbb{R}^3$

DATE

Заметим, что

$\beta(e_1, e_1) = \beta(e_1, e_2) + \beta(e_1, e_3)$

$\beta(e_2, e_1) = \beta(e_2, e_2) + \beta(e_3, e_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta(e_1, e_1 - e_2 - e_3) = 0$

$\beta(e_2, e_1 - e_2 - e_3) = 0$

~~Рассм~~ Рассм базис в $\mathbb{R}^3$

$V_1 = e_2$

$V_2 = e_1 - e_2 \dfrac{\beta(e_1, e_2)}{\underbrace{\beta(e_2, e_2)}_{=2\ (\neq 0)}}$

$V_3 = e_1 - e_2 - e_3$

Тогда $\beta(V_1, V_2) = \beta(e_1, e_2) - \beta(e_2, e_2) \cdot \dfrac{\beta(e_1, e_2)}{\beta(e_2, e_2)} = 0$

$\beta(V_1, V_3) = \beta(V_2, V_3) = 0$

Матрица β в этом базисе диаг.

Значит $Q_\beta > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \beta(V_1, V_1) > 0 \\ \beta(V_2 V_2) > 0 \\ \beta(V_3, V_3) > 0 \end{cases}$

DATE

$$\mathcal{B}(v_2, v_2) = \mathcal{B}(e_1, e_1) - 2\mathcal{B}(e_1, e_2) \cdot \frac{\mathcal{B}(e_1, e_1)}{\underbrace{\mathcal{B}(e_2, e_2)}_{=2}} +$$

$$+ \left(\frac{\mathcal{B}(e_1, e_2)}{\mathcal{B}(e_2, e_2)}\right)^2 \cdot \mathcal{B}(e_2, e_2) =$$

$$= -4b + 17 - (-2b+8)^2 + \frac{1}{2}(-2b+8)^2 > 0$$

$$\mathcal{B}(v_3, v_3) = (-4b+17) + 2 + 3 - 2 \cdot (-2b+8) -$$

$$- 2(-2b+17) + 2(-2b+6) > 0$$

$$\mathcal{B}(v_1, v_2) = 2 > 0$$

Получается, что

$$\begin{cases} -4b + 17 - (-2b+8)^2 + \frac{1}{2}(-2b+8)^2 > 0 \\ (-4b+17) + 2 + 3 - 2(-2b+8) - \\ \quad - 2(-2b+17) + 2(-2b+6) > 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow \; b \in \varnothing$$

DATE

№5

Заметим, что если e_1 и e_2 таковы, ~~что~~ их матрица Грама это $\begin{pmatrix} 17 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$, то если взять

$e_3 = -e_1 - e_2$, то

$$(e_3, e_1) = (e_1, e_3) = -\underbrace{(e_1, e_1)}_{17} - \underbrace{(e_1, e_2)}_{12} = -29$$

$$(e_3, e_2) = (e_2, e_3) = -\underbrace{(e_2, e_1)}_{12} - \underbrace{(e_2, e_2)}_{16} = -28$$

$$(e_3, e_3) = (e_1, e_1) + 2(e_1, e_2) + (e_2, e_2) =$$

$= 57$, т.е. матрица Грама (e_1, e_2, e_3) - будет искомой

Найдём e_1 и e_2. Т.к. любое движение ~~п~~ва сохраняет м. Грама, то можно e_1 и e_2 и зажать движением в $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ и $e_1 \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

DATE

Положим $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \|e_1\|$

$$\underbrace{\sqrt{(e_1, e_1)}}_{\|\cdot\|} = \sqrt{17}$$

Тогда $\|e_2\| = \sqrt{16} = 4$ и

$$(e_1, e_2) = \|e_1\| \, \|e_2\| \cdot \cos\varphi = 12 \Rightarrow$$

$$\varphi = \angle(e_1, e_2)$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{17}}, \ \sin\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$$

Тогда положим $e_2 = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{17} \\ 2\sqrt{2}/\sqrt{17} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 4$

Из построения, $(e_1, e_2) = 12$,

$(e_2, e_2) = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ их матрица Грама $- \begin{pmatrix} 17 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$

Искомые векторы $- e_1, e_2; e_3 =$

$= -e_1 - e_2$